

YOUNG • FREEDMAN

SEARS • ZEMANSKY

FÍSICA UNIVERSITARIA

VOLUMEN 1

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in
1 cm = 0.3937 in
1 in. = 2.540 cm
1 ft = 30.48 cm
1 yd = 91.44 cm
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milla náutica = 6080 ft
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área
1 cm^2 = 0.155 in^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft = 144 in^2 = 0.0929 m^2

Volumen
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0.03531 ft^3 = 61.02 in^3
1 ft^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros

Tiempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 d = 86,400 s
1 año = 365.24 d = 3.156×10^7 s

Ángulo
1 rad = 57.30° = 180°/π
1° = 0.01745 rad = π/180 rad
1 revolución = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Rapidez
1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 ft/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 furlong/14 días = 1.662×10^{-4} m/s

Aceleración
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3.281 ft/s^2
1 cm/s^2 = 0.01 m/s^2 = 0.03281 ft/s^2
1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2 = 30.48 cm/s^2
1 mi/h · s = 1.467 ft/s^2

Masa
1 kg = 10^3 g = 0.0685 slug
1 g = 6.85×10^{-5} slug
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.661×10^{-27} kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando g = 9.80 m/s^2

Fuerza
1 N = 10^5 dinas = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N = 4.448×10^5 dinas

Presión
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.450×10^{-4}lb/in^2 = 0.209 lb/ft^2
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/in^2 = 6895 Pa
1 lb/ft^2 = 47.88 Pa
1 atm = 1.013×10^5 Pa = 1.013 bar
= 14.7 lb/in^2 = 2117 lb/ft^2
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

Energía
1 J = 10^7ergs = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J (con base en caloría de 15°)
1 ft · lb = 1.356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 ft · lb
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.600×10^6 J

Equivalencia masa-energía
1 kg $\leftrightarrow$ 8.988×10^{16} J
1 u $\leftrightarrow$ 931.5 MeV
1 eV $\leftrightarrow$ 1.074×10^{-9} u

Potencia
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz	c	2.99792458×10^8 m/s
Magnitud de carga del electrón	e	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6.6742(10) \times 10^{-11}$ N · m²/kg²
Constante de Planck	h	$6.6260693(11) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1.3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Constante de los gases	R	8.314472(15) J/mol · K
Masa del electrón	m_e	$9.1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.67262171(29) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.67492728(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817 \ldots \times 10^{-12}$ C²/N · m²
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787 \ldots \times 10^9$ N · m²/C²

Otras constante útiles

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (15° caloría)
Presión atmosférica estándar	1 atm	1.01325×10^5 Pa
Cero absoluto	0 K	−273.15 °C
Electrón volt	1 eV	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	0.510998918(44) MeV
Volumen del gas ideal (0 °C y 1 atm)		22.413996(39) litros/mol
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	9.80665 m/s²

*_Fuente:_ National Institute of Standards and Technology (**http://physics.nist.gov/cuu**). Los números entre paréntesis indican incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores que no indican incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos†

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)	Periodo de la órbita
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^6	3.84×10^8	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^6	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^6	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^6	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^6	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^7	7.78×10^{11}	11.86 y
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^7	1.43×10^{12}	29.45 y
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^7	2.87×10^{12}	84.02 y
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^7	4.50×10^{12}	164.8 y
Plutón‡	1.31×10^{22}	1.15×10^6	5.91×10^{12}	247.9 y

†_Fuente:_ NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jlp.nasa.gov**) y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, “radio” es el radio en su ecuador y “radio de la órbita” es la distancia media desde el Sol (en el caso de los planetas) o desde la Tierra (en el caso de la Luna).

‡En agosto de 2006 la Unión Astronómica Internacional reclasificó a Plutón y a otros pequeños objetos que giran en órbita alrededor del Sol como “planetas enanos”.

SEARS • ZEMANSKY

FÍSICA UNIVERSITARIA

ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

ACTIVIDADES ACTIVPHYSICS ONLINE™

ActivPhysics ONLINE www.masteringphysics.com

1.1 Análisis del movimiento con diagramas
1.2 Análisis del movimiento con gráficas
1.3 Predicción de un movimiento con base en gráficas
1.4 Predicción de un movimiento con base en ecuaciones
1.5 Estrategias para resolver problemas de cinemática
1.6 Esquiador en competencia de descenso
1.7 Se deja caer limonada desde un globo aerostático
1.8 Los cinturones de seguridad salvan vidas
1.9 Frenado con derrape
1.10 Caída de un saltador con garrocha
1.11 Auto arranca y luego se detiene
1.12 Resolución de problemas con dos vehículos
1.13 Auto alcanza a camión
1.14 Cómo evitar un choque por atrás
2.1.1 Magnitudes de fuerza
2.1.2 Paracaidista
2.1.3 Cambio de tensión
2.1.4 Deslizamiento en una rampa
2.1.5 Carrera de automóviles
2.2 Levantar una caja
2.3 Bajar una caja
2.4 Despegue de cohete
2.5 Camión que tira de una caja
2.6 Empujar una caja hacia arriba contra una pared
2.7 Esquiador que baja una cuesta
2.8 Esquiador y cuerda de remolque
2.9 Salto con garrocha
2.10 Camión que tira de dos cajas
2.11 Máquina de Atwood modificada
3.1 Resolución de problemas de movimiento de proyectiles
3.2 Dos pelotas que caen
3.3 Cambio de la velocidad en x
3.4 Aceleraciones x y y de proyectiles
3.5 Componentes de la velocidad inicial
3.6 Práctica de tiro al blanco I
3.7 Práctica de tiro al blanco II
4.1 Magnitud de aceleración centrípeta
4.2 Resolución de problemas de movimiento circular
4.3 Carrito que viaja en una trayectoria circular
4.4 Pelota que se balancea en una cuerda
4.5 Automóvil que describe círculos en una pista
4.6 Satélites en órbita
5.1 Cálculos de trabajo
5.2 Frenado de un elevador que asciende
5.3 Frenado de un elevador que baja
5.4 Salto inverso con bungee
5.5 Bolos con impulso de resorte
5.6 Rapidez de un esquiador
5.7 Máquina de Atwood modificada
6.1 Momento lineal y cambio de energía
6.2 Choques y elasticidad
6.3 Conservación del momento lineal y choques
6.4 Problemas de choques
6.5 Choque de autos: dos dimensiones
6.6 Rescate de un astronauta
6.7 Problemas de explosión
6.8 Deslizador y carrito
6.9 Péndulo que golpea una caja
6.10 Péndulo persona-proyectil, boliche
7.1 Cálculo de torcas
7.2 Viga inclinada: torcas y equilibrio
7.3 Brazos de palanca
7.4 Dos pintores en una viga
7.5 Conferencia desde una viga
7.6 Inercia rotacional
7.7 Cinemática rotacional
7.8 Rotojuego: Enfoque de dinámica
7.9 Escalera que cae
7.10 Mujeres y elevador de volante: enfoque de dinámica
7.11 Carrera entre un bloque y un disco
7.12 Mujeres y elevador de volante: enfoque de energía
7.13 Rotojuego: enfoque de energía
7.14 La bola le pega al bate
8.1 Características de un gas
8.2 Análisis conceptual de la distribución de Maxwell-Boltzmann
8.3 Análisis cuantitativo de la distribución de Maxwell-Boltzmann
8.4 Variables de estado y ley del gas ideal
8.5 Trabajo efectuado por un gas
8.6 Calor, energía térmica y primera ley de la termodinámica
8.7 Capacidad calorífica
8.8 Proceso isocórico
8.9 Proceso isobárico
8.10 Proceso isotérmico
8.11 Proceso adiabático
8.12 Proceso cíclico: estrategias
8.13 Proceso cíclico: problemas
8.14 Ciclo de Carnot
9.1 Ecuaciones y gráficas de posición
9.2 Descripción del movimiento vibratorio
9.3 Energía de vibración
9.4 Dos formas de medir la masa del joven Tarzán
9.5 Mono tira a Tarzán
9.6 Liberación de un esquiador que vibra I
9.7 Liberación de un esquiador que vibra II
9.8 Sistemas vibratorios de uno y dos resortes
9.9 Vibrojuego
9.10 Frecuencia de péndulo
9.11 Arriesgado paseo con péndulo
9.12 Péndulo físico
10.1 Propiedades de las ondas mecánicas
10.2 Rapidez de las ondas en una cuerda
10.3 Rapidez del sonido en un gas
10.4 Ondas estacionarias en cuerdas
10.5 Afinación de un instrumento de cuerda: ondas estacionarias
10.6 Masa de una cuerda y ondas estacionarias
10.7 Pulsos y frecuencia del pulso
10.8 Efecto Doppler: introducción conceptual
10.9 Efecto Doppler: problemas
10.10 Ondas complejas: análisis de Fourier

REVISIÓN TÉCNICA

MÉXICO

Ricardo Pintle Monroy
Rafael Mata
Carlos Gutiérrez Aranzeta
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica-Zacatenco

José Arturo Tar Ortiz Peralta
Omar Olmos López
Víctor Bustos Meter
José Luis Salazar Laureles
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Toluca

Daniel Zalapa Zalapa
Centro de Enseñanza Técnica Industrial
Guadalajara

Lorena Vega López
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Universidad de Guadalajara

Sergio Flores
Instituto de Ingeniería y Tecnología
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez

ARGENTINA

Ema Aveleyra
Universidad de Buenos Aires
Buenos Aires

Alerino Beltramino
UTN Regional Buenos Aires
Buenos Aires

Miguel Ángel Altamirano
UTN Regional Córdoba
Córdoba

COLOMBIA

Fernando Molina Focazzio
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá

Jaime Isaza Ceballos
Escuela Colombiana de Ingeniería
Bogotá

COSTA RICA

Diego Chaverri Polini
Universidad Latina de Costa Rica
San José

Juan Meneses Rimola
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Cartago

Randall Figueroa Mata
Universidad Hispanoamericana
San José

ESPAÑA

José M. Zamarro Minguell
Universidad de Murcia
Campus del Espinardo
Murcia

Fernando Ribas Pérez
Universidad de Vigo
Escola Universitaria de Enxeñería Técnica Industrial
Vigo

Stefano Chiussi
Universidad de Vigo
Escola Técnica Superior de Enxeñeiros de Telecomunicacións
Vigo

Miguel Ángel Hidalgo
Universidad de Alcalá de Henares
Campus Universitario
Alcalá de Henares

PERÚ

Yuri Milachay Vicente
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Lima

VENEZUELA

Mario Caicedo
Álvaro Restuccia
Jorge Stephany
Universidad Simón Bolívar
Caracas

SEARS • ZEMANSKY

FÍSICA UNIVERSITARIA

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN

VOLUMEN 1

HUGH D. YOUNG
CARNEGIE MELLON UNIVERSITY

ROGER A. FREEDMAN
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA BARBARA

CON LA COLABORACIÓN DE
A. LEWIS FORD
TEXAS A&M UNIVERSITY

TRADUCCIÓN
VICTORIA A. FLORES FLORES
TRADUCTORA PROFESIONAL
ESPECIALISTA EN EL ÁREA DE CIENCIAS

REVISIÓN TÉCNICA
ALBERTO RUBIO PONCE
GABRIELA DEL VALLE DÍAZ MUÑOZ
HÉCTOR LUNA GARCÍA
JOSÉ ANTONIO EDUARDO ROA NERI
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA,
UNIDAD AZCAPOTZALCO, MÉXICO



Addison-Wesley

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

YOUNG, HUGH D. y ROGER A. FREEDMAN

Física universitaria volumen 1. Decimosegunda edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-607-442-288-7
Área: Ciencias

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 760

Authorized adaptation from the English language edition, entitled University Physics with Modern Physics 12th ed., (chapters 1-20) by Hugh D. Young, Roger A. Freedman; contributing author, A. Lewis Ford published by Pearson Education, Inc., publishing as Addison-Wesley, Copyright © 2008.
All rights reserved.
ISBN 9780321501219

Adaptación autorizada de la edición en idioma inglés, titulada University Physics with Modern Physics 12ª ed., (capítulos 1-20) de Hugh D. Young, Roger A. Freedman; con la colaboración de A. Lewis Ford, publicada por Pearson Education, Inc., publicada como Addison-Wesley, Copyright © 2008. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: Enrique Trejo Hernández

Edición en inglés
Vice President and Editorial Director: Adam Black, Ph.D.
Senior Development Editor: Margot Otway
Editorial Manager: Laura Kenney
Associate Editor: Chandrika Madhavan
Media Producer: Matthew Phillips
Director of Marketing: Christy Lawrence
Managing Editor: Corinne Benson
Production Supervisor: Nancy Tabor
Production Service: WestWords, Inc.
Illustrations: Rolin Graphics
Text Design: tani hasegawa
Cover Design: Yvo Riezebos Design
Manufacturing Manager: Pam Augspurger
Director, Image Resource Center: Melinda Patelli
Manager, Rights and Permissions: Zina Arabia
Photo Research: Cypress Integrated Systems
Cover Printer: Phoenix Color Corporation
Printer and Binder: Courier Corporation/Kendallville
Cover Image: The Millau Viaduct, designed by Lord Norman Foster, Millau, France.
Photograph by Jean-Philippe Arles/Reuters/Corbis

DECIMOSEGUNDA EDICIÓN VERSIÓN IMPRESA, 2009
DECIMOSEGUNDA EDICIÓN E-BOOK, 2009

D.R. © 2009 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco No. 500-5° piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
e-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031.

Addison-Wesley es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 13 12 11 10

Addison-Wesley
es una marca de



www.pearsoneducacion.net

ISBN VERSIÓN IMPRESA: 978-607-442-288-7
ISBN E-BOOK:

CONTENIDO BREVE

Mecánica

Ondas/Acústica

Termodinámica

APÉNDICES

SOBRE LOS AUTORES



Hugh D. Young es profesor emérito de física en Carnegie Mellon University, en Pittsburgh, PA. Cursó sus estudios de licenciatura y posgrado en Carnegie Mellon, donde obtuvo su doctorado en teoría de partículas fundamentales bajo la dirección de Richard Cutkosky, hacia el final de la carrera académica de éste. Se unió al claustro de profesores de Carnegie Mellon en 1956 y también ha sido profesor visitante en la Universidad de California en Berkeley durante dos años.

La carrera del profesor Young se ha centrado por completo en la docencia en el nivel de licenciatura. Ha escrito varios libros de texto para ese nivel y en 1973 se convirtió en coautor de los bien conocidos libros de introducción a la física de Francis Sears y Mark Zemansky. A la muerte de éstos, el profesor Young asumió toda la responsabilidad de las nuevas ediciones de esos textos, hasta que se le unió el profesor Freedman para elaborar *Física Universitaria.*

El profesor Young practica con entusiasmo el esquí, el montañismo y la caminata. También ha sido durante varios años organista asociado en la Catedral de San Pablo, en Pittsburgh, ciudad en la que ha ofrecido numerosos recitales. Durante el verano viaja con su esposa Alice, en especial a Europa y a la zona desértica de los cañones del sur de Utah.



Roger A. Freedman es profesor en la Universidad de California, en Santa Bárbara (UCSB). El doctor Freedman estudió su licenciatura en los planteles de San Diego y Los Ángeles de la Universidad de California, y realizó su investigación doctoral en teoría nuclear en la Universidad de Stanford bajo la dirección del profesor J. Dirk Walecka. Llegó a UCSB en 1981, después de haber sido durante tres años profesor e investigador en la Universidad de Washington.

En UCSB el doctor Freedman ha impartido cátedra tanto en el departamento de Física como en la Escuela de Estudios Creativos, un organismo de la universidad que da cabida a los estudiantes con dotes y motivación para el arte. Ha publicado artículos sobre física nuclear, física de partículas elementales y física de láseres. En los años recientes ha colaborado en el desarrollo de herramientas de cómputo para la enseñanza de la física y la astronomía.

Cuando no está en el aula o trabajando afanosamente ante una computadora, al doctor Freedman se le ve volando (tiene licencia de piloto comercial) o manejando con su esposa Caroline su automóvil convertible Nash Metropolitan, modelo 1960.

A. Lewis Ford es profesor de física en Texas A&M University. Cursó la licenciatura en Rice University en 1968, y obtuvo un doctorado en física química de la Universidad de Texas, en Austin, en 1972. Después de pasar un año de posdoctorado en la Universidad de Harvard, se unió en 1973 a Texas A&M University como profesor de física, donde ha permanecido desde entonces. El área de investigación del profesor Ford es la física atómica teórica, con especialidad en colisiones atómicas. En Texas A&M University ha impartido una amplia variedad de cursos de licenciatura y posgrado, pero sobre todo de introducción a la física.

AL ESTUDIANTE

CÓMO TRIUNFAR EN FÍSICA SI SE INTENTA DE VERDAD

Mark Hollabaugh *Normandale Community College*

La física estudia lo grande y lo pequeño, lo viejo y lo nuevo. Del átomo a las galaxias, de los circuitos eléctricos a la aerodinámica, la física es una gran parte del mundo que nos rodea. Es probable que esté siguiendo este curso de introducción a la física, basado en el cálculo, porque lo requiera para materias posteriores que planee tomar para su carrera en ciencias o ingeniería. Su profesor quiere que aprenda física y goce la experiencia. Él o ella tienen mucho interés en ayudarlo a aprender esta fascinante disciplina. Ésta es parte de la razón por la que su maestro eligió este libro para el curso. También es la razón por la que los doctores Young y Freedman me pidieron que escribiera esta sección introductoria. ¡Queremos que triunfe!

El propósito de esta sección de *Física universitaria* es darle algunas ideas que lo ayuden en su aprendizaje. Al análisis breve de los hábitos generales y las estrategias de estudio, seguirán sugerencias específicas de cómo utilizar el libro.

Preparación para este curso

Si en el bachillerato estudió física, es probable que aprenda los conceptos más rápido que quienes no lo hicieron porque estará familiarizado con el lenguaje de la física. De igual modo, si tiene estudios avanzados de matemáticas comprenderá con más rapidez los aspectos matemáticos de la física. Aun si tuviera un nivel adecuado de matemáticas, encontrará útiles libros como el de Arnold D. Pickar, *Preparing for General Physics: Math Skill Drills and Other Useful Help (Calculus Version)*. Es posible que su profesor asigne tareas de este repaso de matemáticas como auxilio para su aprendizaje.

Aprender a aprender

Cada uno de nosotros tiene un estilo diferente de aprendizaje y un medio preferido para hacerlo. Entender cuál es el suyo lo ayudará a centrarse en los aspectos de la física que tal vez le planteen dificultades y a emplear los componentes del curso que lo ayudarán a vencerlas. Es obvio que querrá dedicar más tiempo a aquellos aspectos que le impliquen más problemas. Si usted aprende escuchando, las conferencias serán muy importantes. Si aprende con explicaciones, entonces será de ayuda trabajar con otros estudiantes. Si le resulta difícil resolver problemas, dedique más tiempo a aprender cómo hacerlo. Asimismo, es importante entender y desarrollar buenos hábitos de estudio. Quizá lo más importante que pueda hacer por usted mismo sea programar de manera regular el tiempo adecuado en un ambiente libre de distracciones.

Responda las siguientes preguntas para usted mismo:

- ¿Soy capaz de utilizar los conceptos matemáticos fundamentales del álgebra, geometría y trigonometría? (Si no es así, planee un programa de repaso con ayuda de su profesor.)
- En cursos similares, ¿qué actividad me ha dado más problemas? (Dedique más tiempo a eso.) ¿Qué ha sido lo más fácil para mí? (Haga esto primero; lo ayudará a ganar confianza.)
- ¿Entiendo el material mejor si leo el libro antes o después de la clase? (Quizás aprenda mejor si revisa rápido el material, asiste a clase y luego lee con más profundidad.)
- ¿Dedico el tiempo adecuado a estudiar física? (Una regla práctica para una clase de este tipo es dedicar en promedio 2.5 horas de estudio fuera del aula por cada hora de clase en esta. Esto significa que para un curso con cinco horas de clase programadas a la semana, debe destinar de 10 a 15 horas semanales al estudio de la física.)
- ¿Estudio física a diario? (¡Distribuya esas 10 a15 horas a lo largo de toda la semana!) ¿A qué hora estoy en mi mejor momento para estudiar física? (Elija un horario específico del día y respételo.)
- ¿Trabajo en un lugar tranquilo en el que pueda mantener mi concentración? (Las distracciones romperán su rutina y harán que pase por alto puntos importantes.)

Trabajar con otros

Es raro que los científicos e ingenieros trabajen aislados unos de otros, y más bien trabajan en forma cooperativa. Aprenderá más física y el proceso será más ameno si trabaja con otros estudiantes. Algunos profesores tal vez formalicen el uso del aprendizaje cooperativo o faciliten la formación de grupos de estudio. Es posible que desee formar su propio grupo no formal de estudio con miembros de su clase que vivan en su vecindario o residencia estudiantil. Si tiene acceso al correo electrónico, úselo para estar en contacto con los demás. Su grupo de estudio será un recurso excelente cuando se prepare para los exámenes.

Las clases y los apuntes

Un factor importante de cualquier curso universitario son las clases. Esto es especialmente cierto en física, ya que será frecuente que su profesor haga demostraciones de principios físicos, ejecute simulaciones de computadora o proyecte videos. Todas éstas son actividades de aprendizaje que lo ayudarán a comprender los principios básicos de la física. No falte a clases, y si lo hace por alguna razón especial, pida a un amigo o miembro de su grupo de estudio que le dé los apuntes y le diga lo que pasó.

En clase, tome notas rápidas y entre a los detalles después. Es muy difícil tomar notas palabra por palabra, de modo que sólo escriba las ideas clave. Si su profesor utiliza un diagrama del libro de texto, deje espacio en el cuaderno para éste y agréguelo más tarde. Después de clase, complete sus apuntes con la cobertura de cualquier faltante u omisión y anotando los conceptos que necesite estudiar posteriormente. Haga referencias por página del libro de texto, número de ecuación o de sección.

Asegúrese de hacer preguntas en clase, o vea a su profesor durante sus horas de asesoría. Recuerde que la única pregunta "fuera de lugar" es la que no se hace. En su escuela quizá haya asistentes de profesor o tutores para ayudarlo con las dificultades que encuentre.

Exámenes

Presentar un examen es estresante. Pero si se preparó de manera adecuada y descansó bien, la tensión será menor. La preparación para un examen es un proceso continuo; comienza en el momento en que termina el último examen. Debe analizar sus exámenes y comprender los errores que haya cometido. Si resolvió un problema y cometió errores importantes, pruebe lo siguiente: tome una hoja de papel y divídala en dos partes con una línea de arriba hacia abajo. En una columna escriba la solución apropiada del problema, y en la otra escriba lo que hizo y por qué, si es que lo sabe, y la razón por la que su propuesta de solución fue incorrecta. Si no está seguro de por qué cometió el error o de la forma de evitarlo, hable con su profesor. La física se construye de manera continua sobre ideas fundamentales y es importante corregir de inmediato cualquiera malentendido. Cuidado: si se prepara en el último minuto para un examen, no retendrá en forma adecuada los conceptos para el siguiente.

AL PROFESOR

PREFACIO

Este libro es el producto de más de medio siglo de liderazgo e innovación en la enseñanza de la física. Cuando en 1949 se publicó la primera edición de *Física universitaria*, de Francis W. Sears y Mark W. Zemansky, su énfasis en los principios fundamentales de la física y la forma de aplicarlos fue un aspecto revolucionario entre los libros de la disciplina cuya base era el cálculo. El éxito del libro entre generaciones de (varios millones) de estudiantes y profesores de todo el mundo da testimonio del mérito de este enfoque, y de las muchas innovaciones posteriores.

Al preparar esta nueva decimosegunda edición, hemos mejorado y desarrollado aún más *Física universitaria* asimilando las mejores ideas de la investigación educativa con respecto a la enseñanza basada en la resolución de problemas, la pedagogía visual y conceptual; este libro es el primero que presenta problemas mejorados en forma sistemática, y en utilizar el sistema de tareas y enseñanza en línea más garantizado y usado del mundo.

Lo nuevo en esta edición

- **Solución de problemas** El celebrado **enfoque de cuatro pasos para resolver problemas**, basado en la investigación (identificar, plantear, ejecutar y evaluar) ahora se usa en cada ejemplo resuelto, en la sección de Estrategia para resolver problemas de cada capítulo, y en las soluciones de los manuales para el profesor y para el estudiante. Los ejemplos resueltos ahora incorporan bocetos en blanco y negro para centrar a los estudiantes en esta etapa crítica: aquella que, según las investigaciones, los estudiantes tienden a saltar si se ilustra con figuras muy elaboradas.

- **Instrucciones seguidas por práctica** Una trayectoria de enseñanza y aprendizaje directa y sistemática seguida por la práctica, incluye **Metas de aprendizaje** al principio de cada capítulo, así como **Resúmenes visuales del capítulo** que consolidan cada concepto con palabras, matemáticas y figuras. Las preguntas conceptuales más frecuentes en la sección de **Evalúe su comprensión** al final de cada sección ahora usan **formatos de opción múltiple y de clasificación** que permiten a los estudiantes la comprobación instantánea de sus conocimientos.

- **Poder didáctico de las figuras** El poder que tienen las figuras en la enseñanza fue enriquecido con el empleo de la técnica de **“anotaciones”**, probada por las investigaciones (comentarios estilo pizarrón integrados en la figura, para guiar al estudiante en la interpretación de ésta), y por el **uso apropiado del color y del detalle** (por ejemplo, en la mecánica se usa el color para centrar al estudiante en el objeto de interés al tiempo que se mantiene el resto de la imagen en una escala de grises sin detalles que distraigan).

- **Problemas mejorados al final de cada capítulo** Reconocido por contener los problemas más variados y probados que existen, la decimosegunda edición va más allá: ofrece **la primera biblioteca de problemas de física mejorados de manera sistemática** con base en el desempeño de estudiantes de toda la nación. A partir de este análisis, más de 800 nuevos problemas se integran al conjunto de 3700 de toda la biblioteca.

- **MasteringPhysics™** (www.masteringphysics.com). Lanzado con la undécima edición, la herramienta de MasteringPhysics ahora es el sistema de tareas y enseñanza en línea más avanzado del mundo que se haya adoptado y probado en la educación de la manera más amplia. Para la decimosegunda edición, MasteringPhysics incorpora un conjunto de mejoras tecnológicas y nuevo contenido. Además de una biblioteca de más de 1200 tutoriales y de todos los problemas de fin de capítulo, MasteringPhysics ahora también presenta técnicas específicas para cada Estrategia para resolver problemas, así como para las preguntas de la sección de Evalúe su comprensión de cada capítulo. Las respuestas incluyen los tipos algebraico, numérico y de opción múltiple, así como la clasificación, elaboración de gráficas y trazado de vectores y rayos.

Características clave de *Física universitaria*

Una guía para el estudiante Muchos estudiantes de física tienen dificultades tan sólo porque no saben cómo usar su libro de texto. La sección llamada “Cómo triunfar en física si se intenta de verdad”.

Organización de los capítulos La primera sección de cada capítulo es una *introducción* que da ejemplos específicos del contenido del capítulo y lo conecta con lo visto antes. También hay una *pregunta de inicio del capítulo* y una lista de *metas de aprendizaje* para hacer que el lector piense en el tema del capítulo que tiene por delante. (Para encontrar la respuesta a la pregunta, busque el icono ?) La mayoría de las secciones terminan con una pregunta para que usted *Evalúe su comprensión*, que es de naturaleza conceptual o cuantitativa. Al final de la última sección del capítulo se encuentra un *resumen visual del capítulo* de los principios más importantes que se vieron en éste, así como una lista de *términos clave* que hace referencia al número de página en que se presenta cada término. Las respuestas a la pregunta de inicio del capítulo y a las secciones Evalúe su comprensión se encuentran después de los términos clave.

Preguntas y problemas Al final de cada capítulo hay un conjunto de *preguntas de repaso* que ponen a prueba y amplían la comprensión de los conceptos que haya logrado el estudiante. Después se encuentran los *ejercicios*, que son

problemas de un solo concepto dirigidos a secciones específicas del libro; los *problemas* por lo general requieren uno o dos pasos que no son triviales; y los *problemas de desafío* buscan provocar a los estudiantes más persistentes. Los problemas incluyen aplicaciones a campos tan diversos como la astrofísica, la biología y la aerodinámica. Muchos problemas tienen una parte conceptual en la que los estudiantes deben analizar y explicar sus resultados. Las nuevas preguntas, ejercicios y problemas de esta edición fueron creados y organizados por Wayne Anderson (Sacramento City College), Laird Kramer (Florida International University) y Charlie Hibbard.

Estrategias para resolver problemas y ejemplos resueltos Los recuadros de *Estrategia para resolver problemas*, distribuidos en todo el libro, dan a los estudiantes tácticas específicas para resolver tipos particulares de problemas. Están enfocados en las necesidades de aquellos estudiantes que sienten que "entienden los conceptos pero no pueden resolver los problemas".

Todos los recuadros de la Estrategia para resolver problemas van después del método IPEE (identificar, plantear, ejecutar y evaluar) para solucionar problemas. Este enfoque ayuda a los estudiantes a visualizar cómo empezar con una situación compleja parecida, identificar los conceptos físicos relevantes, decidir cuáles herramientas se necesitan para resolver el problema, obtener la solución y luego evaluar si el resultado tiene sentido.

Cada recuadro de Estrategia para resolver problemas va seguido de uno o más *ejemplos* resueltos que ilustran la estrategia; además, en cada capítulo se encuentran muchos otros ejemplos resueltos. Al igual que los recuadros de Estrategia para resolver problemas, todos los ejemplos cuantitativos utilizan el método IPEE. Varios de ellos son cualitativos y se identifican con el nombre de *Ejemplos conceptuales*; como ejemplo, vea los ejemplos conceptuales 6.5 (Comparación de energías cinéticas, p. 191), 8.1 (Cantidad de movimiento *versus* energía cinética, p. 251) y 20.7 (Proceso adiabático reversible, p. 693).

Párrafos de "Cuidado" Dos décadas de investigaciones en la enseñanza de la física han sacado a la luz cierto número de errores conceptuales comunes entre los estudiantes de física principiantes. Éstos incluyen las ideas de que se requiere fuerza para que haya movimiento, que la corriente eléctrica "se consume" a medida que recorre un circuito, y que el producto de la masa de un objeto por su aceleración constituye una fuerza en sí mismo. Los párrafos de "Cuidado" alertan a los lectores sobre éstos y otros errores, y explican por qué está equivocada cierta manera de pensar en una situación (en la que tal vez ya haya incurrido el estudiante. Véanse por ejemplo las páginas 118, 159 y 559.)

Notación y unidades Es frecuente que los estudiantes tengan dificultades con la distinción de cuáles cantidades son vectores y cuáles no. Para las cantidades vectoriales usamos caracteres en cursivas y negritas con una flecha encima, como $\vec{\boldsymbol{v}}$, $\vec{\boldsymbol{a}}$ y $\vec{\boldsymbol{F}}$; los vectores unitarios tales como $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ van testados con un acento circunflejo. En las ecuaciones con vectores se emplean signos en negritas, $+$, $-$, $\times$ y $=$, para hacer énfasis en la distinción entre las operaciones vectoriales y escalares.

Se utilizan exclusivamente unidades del SI (cuando es apropiado se incluyen las conversiones al sistema inglés). Se emplea el joule como la unidad estándar de todas las formas de energía, incluida la calorífica.

Flexibilidad El libro es adaptable a una amplia variedad de formatos de curso. Hay material suficiente para uno de tres semestres o de cinco trimestres. La mayoría de los profesores encontrarán que es demasiado material para un curso de un semestre, pero es fácil adaptar el libro a planes de estudio de un año si se omiten ciertos capítulos o secciones. Por ejemplo, es posible omitir sin pérdida de continuidad cualquiera o todos los capítulos sobre mecánica de fluidos, sonido, ondas electromagnéticas o relatividad. En cualquier caso, ningún profesor debiera sentirse obligado a cubrir todo el libro.

Material complementario para el profesor

Los **manuales de soluciones para el profesor**, que preparó A. Lewis Ford (Texas A&M University), contienen soluciones completas y detalladas de todos los problemas de final de capítulo. Todas siguen de manera consistente el método de identificar, plantear, ejecutar y evaluar usado en el libro. El *Manual de soluciones para el profesor, para el volumen 1* cubre los capítulos 1 al 20, y el *Manual de soluciones para el profesor, para los volúmenes 2 y 3* comprende los capítulos 21 a 44.

La plataforma cruzada **Administrador de medios** ofrece una biblioteca exhaustiva de más de 220 applets de ActivPhysics OnLine™, así como todas las figuras del libro en formato JPEG. Además, todas las ecuaciones clave, las estrategias para resolver problemas, las tablas y los resúmenes de capítulos se presentan en un formato de Word que permite la edición. También se incluyen preguntas de opción múltiple semanales para usarlas con varios Sistemas de Respuesta en Clase (SRC), con base en las preguntas de la sección Evalúe su comprensión en el libro.

MasteringPhysics™ (www.masteringphysics.com) es el sistema de tareas y enseñanza de la física más avanzado y eficaz y de mayor uso en el mundo. Pone a disposición de los maestros una biblioteca de problemas enriquecedores de final de capítulo, tutoriales socráticos que incorporan varios tipos de respuestas, retroalimentación sobre los errores, y ayuda adaptable (que comprende sugerencias o problemas más sencillos, si se solicitan). MasteringPhysics™ permite que los profesores elaboren con rapidez una amplia variedad de tareas con el grado de dificultad y la duración apropiadas; además, les da herramientas eficientes para que analicen las tendencias de la clase —o el trabajo de cualquier estudiante— con un detalle sin precedente y para que comparen los resultados ya sea con el promedio nacional o con el desempeño de grupos anteriores.

Cinco lecciones fáciles: estrategias para la enseñanza exitosa de la física por Randall D. Knight (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), expone ideas creativas acerca de cómo mejorar cualquier curso de física. Es una herramienta invaluable para los maestros tanto principiantes como veteranos.

Las **transparencias** contienen más de 200 figuras clave de *Física universitaria*, decimosegunda edición, a todo color.

El **Banco de exámenes** incluye más de 2000 preguntas de opción múltiple, incluye todas las preguntas del Banco de exámenes. Más de la mitad de las preguntas tienen valores numéricos que pueden asignarse al azar a cada estudiante.

Material complementario para el estudiante



MasteringPhysics™ (www.masteringphysics.com) es el sistema de enseñanza de la física más avanzado, usado y probado en el mundo. Es resultado de ocho años de estudios detallados acerca de cómo resuelven problemas de física los estudiantes reales y de las áreas donde requieren ayuda. Los estudios revelan que los alumnos que recurren a MasteringPhysics™ mejoran de manera significativa sus calificaciones en los exámenes finales y pruebas conceptuales como la del Inventario Force Concept. MasteringPhysics™ logra esto por medio de dar a los estudiantes retroalimentación instantánea y específica sobre sus respuestas equivocadas, proponer a solicitud de ellos problemas más sencillos cuando no logran avanzar, y asignar una calificación parcial por el método. Este sistema individualizado de tutoría las 24 horas de los siete días de la semana es recomendado por nueve de cada diez alumnos a sus compañeros como el modo más eficaz de aprovechar el tiempo para estudiar.



ActivPhysics OnLine™ (www.masteringphysics.com), incluido ahora en el área de autoaprendizaje de MasteringPhysics, brinda la biblioteca más completa de *applets* y tutoriales basados en éstos. ActivPhysics OnLine fue creado por el pionero de la educación Alan Van Heuvelen de Rutgers. A lo largo de la decimosegunda edición de *University Physics* hay iconos que dirigen al estudiante hacia *applets* específicos en ActivPhysics OnLine para ayuda interactiva adicional.

Cuadernos de Trabajo de ActivPhysics OnLine™, por Alan Van Heuvelen, Rutgers y Paul d'Alessandris, Monroe Community College, presentan una amplia gama de guías para la enseñanza que emplean los applets de gran aceptación que ayudan a los estudiantes a desarrollar su comprensión y confianza. En particular, se centran en el desarrollo de la intuición, la elaboración de pronósticos, la prueba experimental de suposiciones, el dibujo de diagramas eficaces, el entendimiento cualitativo y cuantitativo de las ecuaciones clave, así como en la interpretación de la información gráfica. Estos cuadernos de trabajo se usan en laboratorios, tareas o autoestudio.

Agradecimientos

Pearson Educación agradece a los centros de estudios y profesores usuarios de esta obra por su apoyo y retroalimentación, elementos fundamentales para esta nueva edición de *Física universitaria*.

MÉXICO

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESIME Culhuacán
Luis Díaz Hernández
Miguel Ángel Morales
Pedro Cervantes

UPIICSA
Amado F García Ruiz
Enrique Álvarez González
Fabiola Martínez Zúñiga
Francisco Ramírez Torres

UPIITA
Álvaro Gordillo Sol
César Luna Muñoz
Israel Reyes Ramírez
Jesús Picazo Rojas
Jorge Fonseca Campos

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE MONTERREY
Campus Chihuahua
Francisco Espinoza Magaña
Silvia Prieto

Campus Ciudad de México
Luis Jaime Neri Vitela
Rosa María González Castellan
Víctor Francisco Robledo Rella

Campus Cuernavaca
Crisanto Castillo
Francisco Giles Hurtado
Raúl Irena Estrada

Campus Culiacán
Juan Bernardo Castañeda

Campus Estado de México
Elena Gabriela Cabral Velázquez
Elisabetta Crescio
Francisco J. Delgado Cepeda
Marcela Martha Villegas Garrido
Pedro Anguiano Rojas
Raúl Gómez Castillo
Raúl Martínez Rosado
Sergio E. Martínez Casas

Campus Mazatlán
Carlos Mellado Osuna
Eusebio de Jesús Guevara Villegas

Campus Monterrey
Jorge Lomas Treviño

Campus Puebla
Abel Flores Amado
Idali Calderón Salas

Campus Querétaro
Juan José Carracedo
Lázaro Barajas De La Torre
Lucio López Cavazos

Campus Santa Fe
Francisco Javier Hernández
Martín Pérez Díaz
Norma Elizabeth Olvera

TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES DE ECATEPEC
Antonio Silva Martínez
Crispín Ramírez Martínez
Fidel Castro López
Guillermo Tenorio Estrada
Jesús González Lemus
Leticia Vera Pérez
María Del Rosario González Bañales
Mauricio Javier Zárate Sánchez
Omar Pérez Romero
Raúl Nava Cervantes

UNITEC Campus Ecatepec
Inocencio Medina Olivares
Julián Rangel Rangel
Lorenzo Martínez Carrillo Garzón

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO
Alberto García Quiroz
Edith Mireya Vargas García
Enrique Cruz Martínez
Gerardo González García
Gerardo Oseguera Peña
Verónica Puente Vera
Víctor Julián Tapia García

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa
Michael Picquar

UNIVERSIDAD IBEROAMERICANA
Distrito Federal
Abraham Vilchis Uribe
Adolfo Genaro Finck Pastrana
Alfredo Sandoval Villalbazo
Anabel Arrieta Ostos
Antonio Gén Mora
Arturo Bailón Martínez
Claudia Camacho Zúñiga
Córdova Carmen González Mesa
Domitila González Patiño
Elsa Fabiola Vázquez Valencia
Enrique Sánchez y Aguilera
Enrique Téllez Fabiani
Erich Starke Fabris
Esperanza Rojas Oropeza
Francisco Alejandro López Díaz
Guillermo Aguilar Hurtado
Guillermo Chacón Acosta
Guillermo Fernández Anaya
Gustavo Eduardo Soto de la Vega
Jaime Lázaro Klapp Escribano
Jimena Bravo Guerrero
José Alfredo Heras Gómez
José Fernando Pérez Godínez
José Luis Morales Hernández
Juan Cristóbal Cárdenas Oviedo
Lorena Arias Montaño
María Alicia Mayela Ávila Martínez
María de Jesús Orozco Arellanes
Mariano Bauer Ephrussi
Mario Alberto Rodríguez Meza
Rafael Rodríguez Domínguez
Rodolfo Fabián Estrada Guerrero
Rodrigo Alberto Rincón Gómez
Salvador Carrillo Moreno
Silvia Patricia Ambrocio Cruz

UNIVERSIDAD LA SALLE
Cuernavaca
Miguel Pinet Vázquez

Distrito Federal
Israel Wood Cano

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias
Agustín Hernández
Agustín Pérez Contreras
Aída Gutiérrez
Alberto Sánchez Moreno
Alejandro Padrón
Álvaro Gámez Estrada
Andrea Luisa Aburto
Antonio Pacheco
Armando Pluma
Arturo F. Rodríguez
Beatriz Eugenia Hernández Rodríguez
Carlos Octavio Olvera Bermúdez
Edgar Raymundo López Téllez
Elba Karen Sáenz García
Eliseo Martínez
Elizabeth Aguirre Maldonado
Enrique Villalobos
Espiridión Martínez Díaz
Francisco Javier Rodríguez Gómez
Francisco Miguel Pérez Ramírez
Gabriel Jaramillo Morales
Genaro Muñoz Hernández
Gerardo Ovando Zúñiga
Gerardo Solares
Guadalupe Aguilar
Gustavo Contreras Mayén
Heriberto Aguilar Juárez
Jaime García Ruiz
Javier Gutiérrez S.
Jesús Vicente González Sosa
Jose Carlos Rosete Álvarez
Juan Carlos Cedeño Vázquez
Juan Galindo Muñiz
Juan Manuel Gil Pérez
Juan Rios Hacha
Lanzier Efraín Torres Ortiz
Lourdes Del Carmen Pérez Salazar
Luis Andrés Suárez Hernández
Luis Eugenio Tejeda Calvillo
Luis Flores Juárez
Luis Humberto Soriano Sánchez
Luis Javier Acosta Bernal
Luis Manuel León Rosano
M. Alejandra Carmona
M. Del Rosario Narvarte G.
María Del Carmen Melo
María Josefa Labrandero
Martín Bárcenas Escobar
Nanzier Torres López
Oliverio Octavio Ortiz Olivera
Oscar Rafael San Román Gutiérrez
Patricia Goldstein Menache
Ramón Santillán Ramírez
Rigel Gámez Leal
Salvador Villalobos
Santiago Gómez López
Víctor Manuel Sánchez Esquivel

Facultad de Estudios Superiores Zaragoza
Javier Ramos Salamanca
Zula Sandoval Villanueva

Facultad de Química
Alicia Zarzosa Pérez
Carlos Rins Alonso
César Reyes Chávez
Emilio Orgaz Baque
Fernanda Adriana Camacho Alanís
Hortensia Caballero López
Israel Santamaría Mata
Karla M. Díaz Gutiérrez
M. Eugenia Ceballos Silva
M. Josefina Becerril Téllez-Girón
M. Pilar Ortega Bernal
María Del Rayo Salinas Vázquez
Marta Rodríguez Pérez
Mauro Cruz Morales
Natalia de la Torre
Paola B. González Aguirre
Praxedis Israel Santamaría Mata

UNIVERSIDAD PANAMERICANA, México
Rodolfo Cobos Téllez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CHIHUAHUA
Antonino Pérez
Carlos de la Vega
Eduardo Benítez Read
Héctor Hernández
José Mora Ruacho
Juan Carlos Sáenz Carrasco
Raúl Sandoval Jabalera
Ricardo Romero Centeno

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA
Claudio González Tolentino
Manuel López Rodríguez

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE CIUDAD JUÁREZ
Sergio Flores
Mario Borunda

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE ZACATEPEC
Fernando Pona Celón
Mateo Sixto Cortez Rodríguez
Nelson A Mariaca Cárdenas
Ramiro Rodríguez Salgado

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE QUERÉTARO
Adrián Herrera Olalde
Eleazar García García
Joel Arzate Villanueva
Manuel Francisco Jiménez Morales
Manuel Sánchez Muñiz
Marcela Juárez Ríos
Mario Alberto Montante Garza
Máximo Pliego Díaz
Raúl Vargas Alba

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MAZATLÁN
Jesús Ernesto Gurrola Peña

UNIVERSIDAD DE OCCIDENTE Unidad Culiacán
Luis Antonio Achoy Bustamante

VENEZUELA

UNIVERSIDAD NACIONAL EXPERIMENTAL DE LAS FUERZAS ARMADAS (UNEFA), Maracay
Johnny Molleja
José Gómez
Rubén León

UNIVERSIDAD BICENTENARIA DE ARAGUA (UBA), Maracay
Belkys Ramírez
José Peralta

UNIVERSIDAD CATÓLICA ANDRÉS BELLO (UCAB), Caracas
José Marino.
Oscar Rodríguez
Rafael Degugliemo

Agradecimientos

Queremos agradecer a los cientos de revisores y colegas que han hecho comentarios y sugerencias valiosos durante la vida de este libro. El continuo éxito de *Física universitaria* se debe en gran medida a sus contribuciones.

Edward Adelson (Ohio State University), Ralph Alexander (University of Missouri at Rolla), J. G. Anderson, R. S. Anderson, Wayne Anderson (Sacramento City College), Alex Azima (Lansing Community College), Dilip Balamore (Nassau Community College), Harold Bale (University of North Dakota), Arun Bansil (Northeastern University), John Barach (Vanderbilt University), J. D. Barnett, H. H. Barschall, Albert Bartlett (University of Colorado), Paul Baum (CUNY, Queens College), Frederick Becchetti (University of Michigan), B. Bederson, David Bennum (University of Nevada, Reno), Lev I. Berger (San Diego State University), Robert Boeke (William Rainey Harper College), S. Borowitz, A. C. Braden, James Brooks (Boston University), Nicholas E. Brown (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), Tony Buffa (California Polytechnic State University, San Luis Obispo), A. Capecelatro, Michael Cardamone (Pennsylvania State University), Duane Carmony (Purdue University), Troy Carter (UCLA), P. Catranides, John Cerne (SUNY at Buffalo), Roger Clapp (University of South Florida), William M. Cloud (Eastern Illinois University), Leonard Cohen (Drexel University), W. R. Coker (University of Texas, Austin), Malcolm D. Cole (University of Missouri at Rolla), H. Conrad, David Cook (Lawrence University), Gayl Cook (University of Colorado), Hans Courant (University of Minnesota), Bruce A. Craver (University of Dayton), Larry Curtis (University of Toledo), Jai Dahiya (Southeast Missouri State University), Steve Detweiler (University of Florida), George Dixon (Oklahoma State University), Donald S. Duncan, Boyd Edwards (West Virginia University), Robert Eisenstein (Carnegie Mellon University), Amy Emerson Missourn (Virginia Institute of Technology), William Faissler (Northeastern University), William Fasnacht (U.S. Naval Academy), Paul Feldker (St. Louis Community College), Carlos Figueroa (Cabrillo College), L. H. Fisher, Neil Fletcher (Florida State University), Robert Folk, Peter Fong (Emory University), A. Lewis Ford (Texas A&M University), D. Frantszog, James R. Gaines (Ohio State University), Solomon Gartenhaus (Purdue University), Ron Gautreau (New Jersey Institute of Technology), J. David Gavenda (University of Texas, Austin), Dennis Gay (University of North Florida), James Gerhart (University of Washington), N. S. Gingrich, J. L. Glathart, S. Goodwin, Rich Gottfried (Frederick Community College), Walter S. Gray (University of Michigan), Paul Gresser (University of Maryland), Benjamin Grinstein (UC San Diego), Howard Grotch (Pennsylvania State University), John Gruber (San Jose State University), Graham D. Gutsche (U.S. Naval Academy), Michael J. Harrison (Michigan State University), Harold Hart (Western Illinois University), Howard Hayden (University of Connecticut), Carl Helrich (Goshen College), Laurent Hodges (Iowa State University), C. D. Hodgman, Michael Hones (Villanova University), Keith Honey (West Virginia Institute of Technology), Gregory Hood (Tidewater Community College), John Hubisz (North Carolina State University), M. Iona, John Jaszczak (Michigan Technical University), Alvin Jenkins (North Carolina State University), Robert P. Johnson (UC Santa Cruz), Lorella Jones (University of Illinois), John Karchek (GMI Engineering & Management Institute), Thomas Keil (Worcester Polytechnic Institute), Robert Kraemer (Carnegie Mellon University), Jean P. Krisch (University of Michigan), Robert A. Kromhout, Andrew Kunz (Marquette University), Charles Lane (Berry College), Thomas N. Lawrence (Texas State University), Robert J. Lee, Alfred Leitner (Rensselaer Polytechnic University), Gerald P. Lietz (De Paul University), Gordon Lind (Utah State University), S. Livingston, Elihu Lubkin (University of Wisconsin, Milwaukee), Robert Luke (Boise State University), David Lynch (Iowa State University), Michael Lysak (San Bernardino Valley College), Jeffrey Mallow (Loyola University), Robert Mania (Kentucky State University), Robert Marchina (University of Memphis), David Markowitz (University of Connecticut), R. J. Maurer, Oren Maxwell (Florida International University), Joseph L. McCauley (University of Houston), T. K. McCubbin, Jr. (Pennsylvania State University), Charles McFarland (University of Missouri at Rolla), James Mcguire (Tulane University), Lawrence McIntyre (University of Arizona), Fredric Messing (Carnegie-Mellon University), Thomas Meyer (Texas A&M University), Andre Mirabelli (St. Peter's College, New Jersey), Herbert Muether (S.U.N.Y., Stony Brook), Jack Munsee (California State University, Long Beach), Lorenzo Narducci (Drexel University), Van E. Neie (Purdue University), David A. Nordling (U. S. Naval Academy), Benedict Oh (Pennsylvania State University), L. O. Olsen, Jim Pannell (DeVry Institute of Technology), W. F. Parks (University of Missouri), Robert Paulson (California State University, Chico), Jerry Peacher (University of Missouri at Rolla), Arnold Perlmutter (University of Miami), Lennart Peterson (University of Florida), R. J. Peterson (University of Colorado, Boulder), R. Pinkston, Ronald Poling (University of Minnesota), J. G. Potter, C. W. Price (Millersville University), Francis Prosser (University of Kansas), Shelden H. Radin, Michael Rapport (Anne Arundel Community College), R. Resnick, James A. Richards, Jr., John S. Risley (North Carolina State University), Francesc Roig (University of California, Santa Barbara), T. L. Rokoske, Richard Roth (Eastern Michigan University), Carl Rotter (University of West Virginia), S. Clark Rowland (Andrews University), Rajarshi Roy (Georgia Institute of Technology), Russell A. Roy (Santa Fe Community College), Dhiraj Sardar (University of Texas, San Antonio), Bruce Schumm (UC Santa Cruz), Melvin Schwartz (St. John's University), F. A. Scott, L. W. Seagondollar, Paul Shand (University of Northern Iowa), Stan Shepherd (Pennsylvania State University), Douglas Sherman (San Jose State), Bruce Sherwood (Carnegie Mellon University), Hugh Siefkin (Greenville College), Tomasz Skwarnicki (Syracuse University), C. P. Slichter, Charles W. Smith (University of Maine, Orono), Malcolm Smith (University of Lowell), Ross Spencer (Brigham Young University), Julien Sprott (University of Wisconsin), Victor Stanionis (Iona College), James Stith (American Institute of Physics), Chuck Stone (North Carolina A&T State University), Edward Strother (Florida Institute of Technology), Conley Stutz (Bradley University), Albert Stwertka (U.S. Merchant Marine Academy),

Martin Tiersten (CUNY, City College), David Toot (Alfred University), Somdev Tyagi (Drexel University), F. Verbrugge, Helmut Vogel (Carnegie Mellon University), Robert Webb (Texas A & M), Thomas Weber (Iowa State University), M. Russell Wehr, (Pennsylvania State University), Robert Weidman (Michigan Technical University), Dan Whalen (UC San Diego), Lester V. Whitney, Thomas Wiggins (Pennsylvania State University), David Willey (University of Pittsburgh, Johnstown), George Williams (University of Utah), John Williams (Auburn University), Stanley Williams (Iowa State University), Jack Willis, Suzanne Willis (Northern Illinois University), Robert Wilson (San Bernardino Valley College), L. Wolfenstein, James Wood (Palm Beach Junior College), Lowell Wood (University of Houston), R. E. Worley, D. H. Ziebell (Manatee Community College), George O. Zimmerman (Boston University)

Además, nos gustaría hacer algunos agradecimientos individuales.

Quiero dar gracias de todo corazón a mis colegas de Carnegie Mellon, en especial a los profesores Robert Kraemer, Bruce Sherwood, Ruth Chabay, Helmut Vogel y Brian Quinn, por las muchas conversaciones estimulantes sobre pedagogía de la física y su apoyo y ánimo durante la escritura de las ediciones sucesivas de este libro. También estoy en deuda con las muchas generaciones de estudiantes de Carnegie Mellon que me ayudaron a aprender lo que es la buena enseñanza y la correcta escritura, al mostrarme lo que funciona y lo que no. Siempre es un gusto y un privilegio expresar mi gratitud a mi esposa Alice y nuestros hijos Gretchen y Rebecca por su amor, apoyo y sostén emocional durante la escritura de las distintas dediciones del libro. Que todos los hombres y mujeres sean bendecidos con un amor como el de ellos. — H.D.Y.

Me gustaría agradecer a mis colegas del pasado y el presente en UCSB, incluyendo a Rob Geller, Carl Gwinn, Al Nash, Elisabeth Nicol y Francesc Roig, por su apoyo sincero y sus abundantes y útiles pláticas. Tengo una deuda de gratitud en especial con mis primeros maestros Willa Ramsay, Peter Zimmerman, William Little, Alan Schwettman y Dirk Walecka por mostrarme qué es una enseñanza clara y cautivadora de la física, y con Stuart Johnson por invitarme a ser coautor de *Física Universitaria* a partir de la novena edición. Quiero dar gracias en especial al equipo editorial de Addison Wesley y a sus socios: Adam Black por su visión editorial; Margot Otway por su gran sentido gráfico y cuidado en el desarrollo de esta edición; a Peter Murphy y Carol Reitz por la lectura cuidadosa del manuscrito; a Wayne Anderson, Charlie Hibbard, Laird Kramer y Larry Stookey por su trabajo en los problemas de final de capítulo; y a Laura Kenney, Chandrika Madhavan, Nancy Tabor y Pat McCutcheon por mantener el flujo editorial y de producción. Agradezco a mi padre por su continuo amor y apoyo y por conservar un espacio abierto en su biblioteca para este libro. Sobre todo, expreso mi gratitud y amor a mi esposa Caroline, a quien dedico mi contribución al libro. *Hey, Caroline, al fin terminó la nueva edición. ¡Vámonos a volar!* – R.A.F.

Por favor, díganos lo que piensa…

Son bienvenidos los comunicados de estudiantes y profesores, en especial sobre errores y deficiencias que encuentren en esta edición. Hemos dedicado mucho tiempo y esfuerzo a la escritura del mejor libro que hemos podido escribir, y esperamos que le ayude a enseñar y aprender física. A la vez, usted nos puede ayudar si nos hace saber qué es lo que necesita mejorarse… Por favor, siéntase en libertad para ponerse en contacto con nosotros por vía electrónica o por correo ordinario. Sus comentarios serán muy apreciados.

Octubre de 2006

Hugh D. Young
Departamento de Física
Carnegie Mellon University
Pittsburgh, PA 15213
hdy@andrew.cmu.edu

Roger A. Freedman
Departamento de Física
University of California, Santa Barbara
Santa Barbara, CA 93106-9530
airboy@physics.ucsb.edu
http://www.physics.ucsb.edu/~airboy/

CONTENIDO

MECÁNICA

UNIDADES, CANTIDADES FÍSICAS Y VECTORES





? Ser capaz de predecir la trayectoria de un huracán resulta esencial para reducir al mínimo los posibles daños a las propiedades y a las vidas humanas. Si un huracán se mueve a 20 km/h en una dirección de 53° al norte del este, ¿qué tan lejos al norte se moverá el huracán en una hora?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cuáles son las cantidades fundamentales de la mecánica y cuáles son las unidades que los físicos utilizan para medirlas.
- Cómo manejar cifras significativas en sus cálculos.
- La diferencia entre escalares y vectores, y cómo sumar y restar vectores gráficamente.
- Cuáles son las componentes de un vector y cómo se utilizan para realizar cálculos.
- Cuáles son los vectores unitarios y cómo se utilizan con las componentes para describir vectores.
- Dos formas para multiplicar vectores.

El estudio de la física es importante porque es una de las ciencias más fundamentales. Los científicos de todas las disciplinas utilizan las ideas de la física, como los químicos que estudian la estructura de las moléculas, los paleontólogos que intentan reconstruir la forma de andar de los dinosaurios, y los climatólogos que estudian cómo las actividades humanas afectan la atmósfera y los océanos. Asimismo, la física es la base de toda la ingeniería y la tecnología. Ningún ingeniero podría diseñar un televisor de pantalla plana, una nave espacial interplanetaria ni incluso una mejor trampa para ratones, sin antes haber comprendido las leyes básicas de la física.

El estudio de la física es también una aventura. Usted la encontrará desafiante, a veces frustrante y en ocasiones dolorosa; sin embargo, con frecuencia le brindará abundantes beneficios y satisfacciones. La física estimulará en usted su sentido de lo bello, así como su inteligencia racional. Si alguna vez se ha preguntado por qué el cielo es azul, cómo las ondas de radio viajan por el espacio vacío, o cómo un satélite permanece en órbita, encontrará las respuestas en la física básica. Sobre todo, apreciará la física como un logro sobresaliente del intelecto humano en su afán por entender nuestro mundo y a la humanidad misma.

En este capítulo inicial repasaremos algunos conceptos importantes que necesitaremos en nuestro estudio. Comentaremos la naturaleza de la física teórica y el uso de modelos idealizados para representar sistemas físicos. Presentaremos los sistemas de unidades que se emplean para especificar cantidades físicas y analizaremos la forma de describirlas con precisión. Estudiaremos ejemplos de problemas que no tienen (o para los que no nos interesa obtener) una respuesta exacta donde, no obstante, las aproximaciones son útiles e interesantes. Por último, examinaremos varios aspectos de los vectores y el álgebra vectorial que necesitaremos para describir y analizar cantidades físicas, como velocidad y fuerza, que tienen dirección además de magnitud.

1.1 La naturaleza de la física

La física es una ciencia *experimental*. Los físicos observan los fenómenos naturales e intentan encontrar los patrones y principios que los describen. Tales patrones se denominan teorías físicas o, si están muy bien establecidos y se usan ampliamente, leyes o principios físicos.

CUIDADO **El significado de la palabra "teoría"** Decir que una idea es una teoría no implica que se trate de una divagación o de un concepto no comprobado. Más bien, una teoría es una explicación de fenómenos naturales basada en observaciones y en los principios fundamentales aceptados. Un ejemplo es la bien establecida teoría de la evolución biológica, que es el resultado de extensas investigaciones y observaciones de varias generaciones de biólogos.

El desarrollo de la teoría física exige creatividad en cada etapa. El físico debe aprender a hacer las preguntas adecuadas, a diseñar experimentos para tratar de contestarlas y a deducir conclusiones apropiadas de los resultados. La figura 1.1 muestra dos famosas instalaciones experimentales.

Cuenta la leyenda que Galileo Galilei (1564-1642) dejó caer objetos ligeros y pesados desde la Torre Inclinada de Pisa (figura 1.1a) para averiguar si sus velocidades de caída eran iguales o diferentes. Galileo sabía que sólo la investigación experimental le daría la respuesta. Examinando los resultados de sus experimentos (que en realidad fueron mucho más complejos de lo que cuenta la leyenda), dio el salto inductivo al principio, o teoría, de que la aceleración de un cuerpo que cae es independiente de su peso.

El desarrollo de teorías físicas como la de Galileo siempre es un proceso bidireccional, que comienza y termina con observaciones o experimentos. El camino para lograrlo a menudo es indirecto, con callejones sin salida, suposiciones erróneas, y el abandono de teorías infructuosas en favor de otras más promisorias. La física no es una mera colección de hechos y principios; también es el *proceso* que nos lleva a los principios generales que describen el comportamiento del Universo físico.

Ninguna teoría se considera como la verdad final o definitiva. Siempre hay la posibilidad de que nuevas observaciones obliguen a modificarla o desecharla. En las teorías físicas es inherente que podemos demostrar su falsedad encontrando comportamientos que no sean congruentes con ellas, pero nunca probaremos que una teoría siempre es correcta.

Volviendo con Galileo, supongamos que dejamos caer una pluma y una bala de cañón. Sin duda *no* caen a la misma velocidad. Esto no significa que Galileo estuviera equivocado, sino que su teoría estaba incompleta. Si soltamos tales objetos *en un vacío* para eliminar los efectos del aire, sí caerán a la misma velocidad. La teoría de Galileo tiene un **intervalo de validez**: sólo es válida para objetos cuyo peso es mucho mayor que la fuerza ejercida por el aire (debido a su resistencia y a la flotabilidad del objeto). Los objetos como las plumas y los paracaídas evidentemente se salen del intervalo.

Cualquier teoría física tiene un intervalo de validez fuera del cual no es aplicable. A menudo un nuevo avance en física extiende el intervalo de validez de un principio. Las leyes del movimiento y de gravitación de Newton extendieron ampliamente, medio siglo después, el análisis de la caída de los cuerpos que hizo Galileo.

1.1 Dos laboratorios de investigación. a) Según la leyenda, Galileo estudió el movimiento de cuerpos en caída libre soltándolos desde la Torre Inclinada en Pisa, Italia. Se dice que también estudió el movimiento de los péndulos observando la oscilación del candelabro de la catedral que está junto a la torre. b) El telescopio espacial Hubble es el primer telescopio importante que operó fuera de la atmósfera terrestre. Las mediciones realizadas con el Hubble han ayudado a determinar la edad y la rapidez de expansión del Universo.

a)



b)



1.2 Cómo resolver problemas en física

En algún punto de sus estudios, casi todos los estudiantes de física sienten que, aunque entienden los conceptos, simplemente no pueden resolver los problemas. Sin embargo, en física, entender verdaderamente un concepto o principio es lo mismo que saber aplicarlo a diversos problemas prácticos. Aprender a resolver problemas es absolutamente indispensable; es imposible *saber* física sin *poder* hacer física.

¿Cómo aprendemos a resolver problemas de física? En todos los capítulos de este libro, usted encontrará *Estrategias para resolver problemas* que sugieren técnicas para plantear y resolver problemas de forma eficiente y correcta. Después de cada *Estrategia para resolver problemas* hay uno o más *Ejemplos* resueltos que muestran

esas técnicas en acción. (Las *Estrategias para resolver problemas* también ayudan a evitar algunas técnicas *incorrectas* que quizás usted se sienta tentado a usar.) Además encontrará ejemplos adicionales que no están asociados con una específica *Estrategia para resolver problemas*. Recomendamos al lector estudiar detenidamente esas estrategias y ejemplos, y resolver los ejemplos por su cuenta.

Se utilizan diferentes técnicas para resolver distintos tipos de problemas, y por ello este libro ofrece docenas de *Estrategias para resolver problemas*. No obstante, sea cual fuere el tipo de problema, hay ciertos pasos básicos que se deben seguir siempre. (Esos mismos pasos son igualmente útiles en problemas de matemáticas, ingeniería, química y muchos otros campos.) En este libro, hemos organizado los pasos en cuatro etapas para la resolución de un problema.

Todas las *Estrategias para resolver problemas* y los *Ejemplos* de este libro seguirán estos cuatro pasos. (En algunos casos, se combinarán los primeros dos o tres pasos.) Le recomendamos seguir los mismos pasos al resolver problemas por su cuenta.

Estrategia para resolver problemas 1.1 Cómo resolver problemas de física

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Primero, decida qué ideas de la física son relevantes para el problema. Aunque este paso no implica hacer cálculos, a veces es la parte más difícil. Nunca lo omita; si desde el principio se elige el enfoque equivocado, el problema se dificultará innecesariamente, e incluso podría llevar a una respuesta errónea.

A estas alturas también se debe identificar la **incógnita** del problema; es decir, la cantidad cuyo valor se desea encontrar. Podría ser la rapidez con que un proyectil choca contra el suelo, la intensidad del sonido producido por una sirena, o el tamaño de una imagen formada por una lente. (En ocasiones, la meta será hallar una expresión matemática para la incógnita, no un valor numérico. Otras veces, el problema tendrá más de una incógnita.) Esta variable es la meta del proceso de la resolución de problemas; asegúrese de no perderla de vista durante los cálculos.

PLANTEAR *el problema:* Con base en los conceptos que haya elegido en el paso *Identificar*, seleccione las ecuaciones que usará para resolver el problema y decida cómo las usará. Si resulta apropiado, dibuje la situación descrita en el problema.

EJECUTAR *la solución:* En este paso, se "hacen las cuentas". Antes de enfrascarse en los cálculos, haga una lista de las cantidades conocidas y desconocidas, e indique cuál o cuáles son las incógnitas o las variables. Después, despeje las incógnitas de las ecuaciones.

EVALUAR *la respuesta:* La meta de la resolución de problemas en física no es sólo obtener un número o una fórmula; es entender mejor. Ello implica examinar la respuesta para ver qué nos dice. En particular, pregúntese: "¿Es lógica esta respuesta?" Si la incógnita era el radio de la Tierra y la respuesta es 6.38 cm (¡o un número negativo!), hubo algún error en el proceso de resolución del problema. Revise su procedimiento y modifique la solución según sea necesario.

Modelos idealizados

Comúnmente usamos la palabra "modelo" para referirnos a una réplica miniatura (digamos, de un ferrocarril) o a una persona que exhibe ropa (o que se exhibe sin ella). En física, un **modelo** es una versión simplificada de un sistema físico demasiado complejo como para analizarse con todos sus pormenores.

Por ejemplo, supongamos que nos interesa analizar el movimiento de una pelota de béisbol lanzada al aire (figura 1.2a). ¿Qué tan complicado es el problema? La pelota no es perfectamente esférica (tiene costuras) y gira conforme viaja por el aire. El viento y la resistencia del aire afectan su movimiento, el peso de la pelota varía un poco al cambiar su distancia con respecto al centro de la Tierra, etcétera. Si tratamos de incluir todo esto, la complejidad del análisis nos abrumará. En vez de ello, creamos una versión simplificada del problema. Omitimos el tamaño y la forma de la pelota representándola como un objeto puntual, o una **partícula**. Omitimos la resistencia del aire como si la pelota se moviera en el vacío y suponemos un peso constante. Ahora ya tenemos un problema manejable (figura 1.2b). Analizaremos este modelo con detalle en el capítulo 3.

Para crear un modelo idealizado del sistema, debemos pasar por alto algunos efectos menores y concentrarnos en las características más importantes del sistema. Claro que no debemos omitir demasiadas cuestiones. Si ignoramos totalmente la gravedad,

1.2 Para simplificar el análisis de a) una pelota de béisbol lanzada al aire, usamos b) un modelo idealizado.

a) Una pelota real lanzada al aire
La pelota gira y tiene forma compleja.
La resistencia del aire y el viento ejercen fuerzas sobre la pelota.
Dirección del movimiento
La fuerza gravitacional sobre la pelota depende de la altura.

b) Un modelo idealizado de la pelota de béisbol
La pelota de béisbol se trata como un objeto (partícula) puntual.
No hay resistencia al aire.
La fuerza gravitacional sobre la pelota es constante.

nuestro modelo predeciría que si lanzamos la pelota hacia arriba, ésta se movería en línea recta y desaparecería en el espacio. Necesitamos valernos del criterio y la creatividad para lograr un modelo que simplifique lo suficiente un problema, sin omitir sus características esenciales.

Al usar un modelo para predecir el comportamiento de un sistema, la validez de la predicción está limitada por la validez del modelo. Por ejemplo, la predicción de Galileo con respecto a la caída de los cuerpos (véase sección 1.1) corresponde a un modelo idealizado que no incluye los efectos de la resistencia del aire. El modelo funciona bien para una bala de cañón, aunque no tan bien para una pluma.

En física y en todas las tecnologías, cuando aplicamos principios físicos a sistemas complejos, siempre usamos modelos idealizados y debemos tener presentes los supuestos en que se basan. De hecho, los mismos principios de la física se expresan en términos de modelos idealizados; hablamos de masas puntuales, cuerpos rígidos, aislantes ideales, etcétera. Tales modelos desempeñan un papel fundamental en este libro. Intente ubicarlos al estudiar las teorías físicas y sus aplicaciones a problemas específicos.

1.3 Estándares y unidades

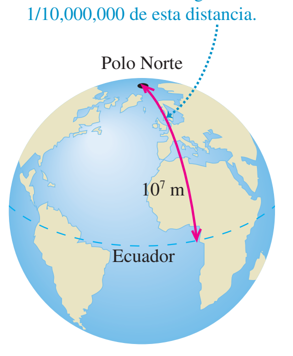
Como vimos en la sección 1.1, la física es una ciencia experimental. Los experimentos requieren mediciones, cuyos resultados suelen describirse con números. Un número empleado para describir cuantitativamente un fenómeno físico es una **cantidad física**. Dos cantidades físicas, por ejemplo, que describen a alguien como tú son su peso y estatura. Algunas cantidades físicas son tan básicas que sólo podemos definirlas describiendo la forma de medirlas; es decir, con una **definición operativa**. Ejemplos de ello son medir una distancia con una regla, o un lapso de tiempo con un cronómetro. En otros casos, definimos una cantidad física describiendo la forma de calcularla a partir de otras cantidades medibles. Así, podríamos definir la rapidez promedio de un objeto en movimiento, como la distancia recorrida (medida con una regla) entre el tiempo de recorrido (medido con un cronómetro).

Al medir una cantidad, siempre la comparamos con un estándar de referencia. Si decimos que un Porsche Carrera GT tiene una longitud de 4.61 m, queremos decir que es 4.61 veces más largo que una vara de metro, que por definición tiene 1 m de largo. Dicho estándar define una **unidad** de la cantidad. El metro es una unidad de distancia; y el segundo, de tiempo. Al describir una cantidad física con un número, siempre debemos especificar la unidad empleada; describir una distancia simplemente como “4.61” no tendría significado.

Las mediciones exactas y confiables requieren unidades inmutables que los observadores puedan volver a utilizar en distintos lugares. El sistema de unidades empleado por los científicos e ingenieros en todo el mundo se denomina comúnmente “sistema métrico” aunque, desde 1960, su nombre oficial es **Sistema Internacional**, o **SI**. En el Apéndice A se presenta una lista de todas las unidades del SI y se definen las fundamentales.

Con el paso de los años, las definiciones de las unidades básicas del sistema métrico han evolucionado. Cuando la Academia Francesa de Ciencias estableció el sistema en 1791, el metro se definió como una diezmillonésima parte de la distancia entre el Polo Norte y el ecuador (figura 1.3). El segundo se definió como el tiempo que tarda un péndulo de 1 m de largo en oscilar de un lado a otro. Estas definiciones eran poco prácticas y difíciles de duplicar con precisión, por lo que se han refinado por acuerdo internacional.

1.3 En 1791 se definió que la distancia entre el Polo Norte y el ecuador era exactamente 10^7 m. Con la definición moderna del metro, esta distancia es aproximadamente 0.02% más que 10^7 m.



Tiempo

De 1889 a 1967, la unidad de tiempo se definió como cierta fracción del día solar medio (el tiempo promedio entre llegadas sucesivas del Sol al cenit). El estándar

actual, adoptado en 1967, es mucho más preciso; se basa en un reloj atómico que usa la diferencia de energía entre los dos estados energéticos más bajos del átomo de cesio. Al bombardearse con microondas de cierta frecuencia exacta, el átomo de cesio sufre una transición entre dichos estados. Un **segundo** (que se abrevia como s) se define como el tiempo que tardan 9,192,631,770 ciclos de esta radiación de microondas.

Longitud

En 1960 se estableció también un estándar atómico para el metro, utilizando la longitud de onda de la luz anaranjada-roja emitida por átomos de kriptón (^{86}Kr) en un tubo de descarga de luz. Usando este estándar de longitud, se comprobó que la rapidez de la luz en el vacío era de 299,792,458 m/s. En noviembre de 1983, el estándar de longitud se modificó otra vez, de manera que la rapidez de la luz en el vacío fuera, por *definición*, exactamente de 299,792,458 m/s. El metro se define de modo que sea congruente con este número y con la definición anterior del segundo. Así, la nueva definición de **metro** (que se abrevia m) es la distancia que recorre la luz en el vacío en 1/299,792,458 segundos. Éste es un estándar de longitud mucho más preciso que el basado en una longitud de onda de la luz.

Masa

El estándar de masa, el **kilogramo** (que se abrevia kg), se define como la masa de un cilindro de aleación platino-iridio específico que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París (figura 1.4). Un estándar atómico de masa sería más fundamental; sin embargo, en la actualidad no podemos medir masas a escala atómica con tanta exactitud como a escala macroscópica. El *gramo* (que no es una unidad fundamental) es de 0.001 kilogramos.

1.4 El objeto de metal encerrado cuidadosamente dentro de estos envases de cristal es el kilogramo estándar internacional.



Prefijos de unidades

Una vez definidas las unidades fundamentales, es fácil introducir unidades más grandes y más pequeñas para las mismas cantidades físicas. En el sistema métrico, estas otras unidades siempre se relacionan con las fundamentales (o, en el caso de la masa, con el gramo) por múltiplos de 10 o $\frac{1}{10}$. Así, un kilómetro (1 km) son 1000 metros, y un centímetro (1 cm) es $\frac{1}{100}$. Es común expresar los múltiplos de 10 o $\frac{1}{10}$ en notación exponencial: $1000 = 10^3$, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, etcétera. Con esta notación, $1\text{ km} = 10^3\text{ m}$ y $1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$.

Los nombres de las unidades adicionales se obtienen agregando un **prefijo** al nombre de la unidad fundamental. Por ejemplo, el prefijo "kilo", abreviado k, siempre indica una unidad 1000 veces mayor; así:

$$1\text{ kilómetro} = 1\text{ km} = 10^3\text{ metros} = 10^3\text{ m}$$
$$1\text{ kilogramo} = 1\text{ kg} = 10^3\text{ gramos} = 10^3\text{ g}$$
$$1\text{ kilowatt} = 1\text{ kW} = 10^3\text{ watts} = 10^3\text{ W}$$

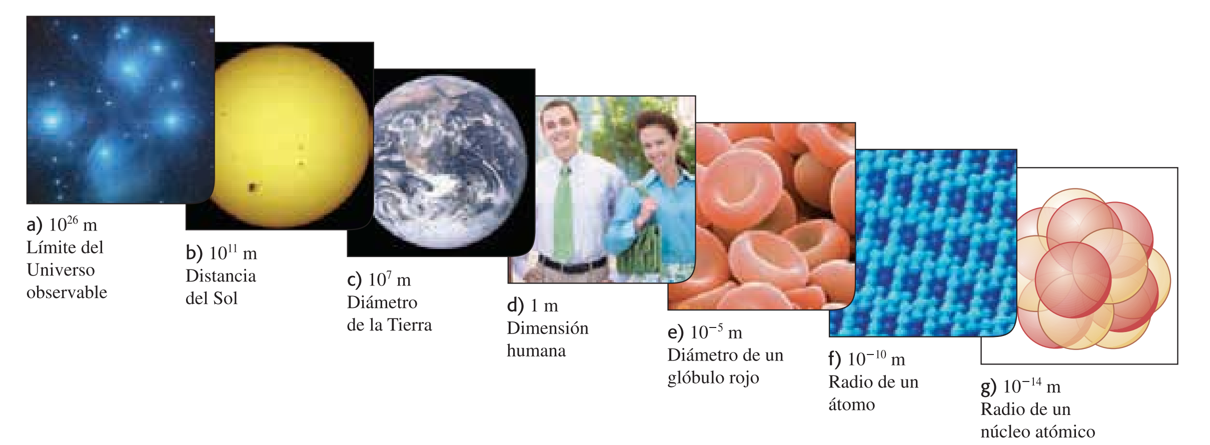
Una tabla en el interior de la tapa posterior de este libro muestra los prefijos estándar del SI, con sus significados y abreviaturas.

Veamos algunos ejemplos del uso de múltiplos de 10 y sus prefijos con las unidades de longitud, masa y tiempo. La figura 1.5 muestra cómo tales prefijos ayudan a describir distancias tanto grandes como pequeñas.

Longitud

1 nanómetro = 1 nm = 10^{-9} m (unas cuantas veces el tamaño del átomo más grande)
1 micrómetro = 1 μm = 10^{-6} m (tamaño de algunas bacterias y células vivas)
1 milímetro = 1 mm = 10^{-3} m (diámetro del punto de un bolígrafo)
1 centímetro = 1 cm = 10^{-2} m (diámetro del dedo meñique)
1 kilómetro = 1 km = 10^{3} m (un paseo de 10 minutos caminando)

1.5 Algunas longitudes representativas en el Universo. a) La distancia a las galaxias más distantes que podemos ver es aproximadamente de 10^{26} m (10^{23} km). b) El Sol está a 1.50×10^{11} m (1.50×10^{8} km) de la Tierra. c) El diámetro de la Tierra es de 1.28×10^{7} m (12,800 km). d) Un ser humano común tiene una estatura aproximada de 1.7 m (170 cm). e) Los glóbulos rojos humanos tienen un diámetro cercano a los 8×10^{-6} m (0.008 mm, es decir, 8 μm). f) Estos átomos de oxígeno, que se muestran dispuestos en la superficie de un cristal, tienen un radio aproximado de 10^{-10} m (10^{-4} μm). g) El radio de un núcleo atómico típico (que se muestra en una concepción artística) es del orden de 10^{-14} m (10^{-5} nm).



Masa

1 microgramo = 1 μg = 10^{-6} g = 10^{-9} kg (masa de una partícula pequeña de polvo)

1 miligramo = 1 mg = 10^{-3} g = 10^{-6} kg (masa de un grano de sal)

1 gramo = 1 g = 10^{-3} kg (masa de un sujetador de papeles)

Tiempo

1 nanosegundo = 1 ns = 10^{-9} s (tiempo en que la luz recorre 0.3 m)

1 microsegundo = 1 μs = 10^{-6} s (tiempo en que un transbordador espacial en órbita recorre 8 mm)

1 milisegundo = 1 ms = 10^{-3} s (tiempo en que el sonido viaja 0.35 m)

El sistema británico

Por último, mencionamos el sistema británico de unidades que se usa sólo en Estados Unidos y unos cuantos países más; aunque en casi todo el mundo se está remplazando por el SI. En la actualidad las unidades británicas se definen oficialmente en términos de las unidades del SI, de la siguiente manera:

Longitud: 1 pulgada = 2.54 cm (exactamente)

Fuerza: 1 libra = 4.448221615260 newtons (exactamente)

El newton, que se abrevia N, es la unidad de fuerza en el SI. La unidad británica de tiempo es el segundo, que se define igual que en el SI. En física, las unidades británicas se emplean sólo en mecánica y termodinámica; no hay un sistema británico de unidades eléctricas

En este libro usaremos unidades del SI en todos los ejemplos y problemas; no obstante, en ocasiones daremos equivalencias en unidades británicas. Al resolver problemas con unidades del SI, el lector puede hacer la conversión a las correspondientes del sistema británico, si le resultan más conocidos (figura 1.6). Sin embargo, debería tratar de *pensar* en unidades del SI la mayoría de las veces.

1.6 Muchos objetos comunes usan unidades tanto del SI como británicas. Un ejemplo es este velocímetro de un automóvil fabricado en Estados Unidos, que indica la rapidez tanto en kilómetros (escala interior) por hora como en millas por hora (escala exterior).



1.4 Consistencia y conversiones de unidades

Usamos ecuaciones para expresar las relaciones entre cantidades físicas representadas por símbolos algebraicos. Cada símbolo algebraico denota siempre tanto un número como una unidad. Por ejemplo, d podría representar una distancia de 10 m, t un tiempo de 5 s y v una rapidez de 2 m/s.

Toda ecuación siempre debe ser **dimensionalmente consistente**. No podemos sumar manzanas y automóviles; sólo podemos sumar o igualar dos términos si tienen las mismas unidades. Por ejemplo, si un cuerpo que viaja con rapidez constante v recorre una distancia d en un tiempo t, estas cantidades están relacionadas por la ecuación

$$d = vt$$

Si d se mide en metros, entonces el producto vt también debe expresarse en metros. Con los números anteriores como ejemplo, escribimos

$$10\ \text{m} = \left(2\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}}\right)(5\ \cancel{\text{s}})$$

Como la unidad 1/s del lado derecho de la ecuación cancela la unidad s, el producto está en metros, como debe ser. En los cálculos, las unidades se tratan igual que los símbolos algebraicos en cuanto a la multiplicación y la división.

CUIDADO **En los cálculos utilice siempre unidades** Cuando un problema requiere de cálculos con números y unidades, *siempre* escriba los números con las unidades correctas durante todo el cálculo, como en el ejemplo. Esto es muy útil, pues ayuda a verificar los cálculos. Si en algún momento una ecuación o expresión tiene unidades inconsistentes, es indicador de que hay un error en alguna parte. En este libro *siempre* llevaremos unidades en todos los cálculos, y recomendamos encarecidamente al lector hacer lo mismo al resolver los problemas.

Estrategia para resolver problemas 1.2 Conversiones de unidades



IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La conversión de unidades es importante, pero también lo es saber cuándo se requiere. En general, lo mejor es usar las unidades fundamentales del SI (longitudes en metros, masas en kilogramos y tiempo en segundos) dentro de un problema. Si la respuesta se debe dar en otras unidades (kilómetros, gramos u horas, por ejemplo), espere hasta el final para efectuar la conversión. En los ejemplos que siguen, nos concentraremos sólo en la conversión de unidades, así que omitiremos el paso *Identificar*.

PLANTEAR *el problema* y **EJECUTAR** *la solución:* Las unidades se multiplican y se dividen igual que los símbolos algebraicos ordinarios. Esto facilita la conversión de una cantidad de un conjunto de unidades a otro. La idea clave es que podemos expresar la misma cantidad física en dos unidades distintas y formar una igualdad.

Por ejemplo, al indicar que 1 min = 60 s, no queremos decir que el número 1 sea igual al número 60, sino que 1 min representa el mismo intervalo de tiempo que 60 s. Por ello, el cociente (1 min)/(60 s) es igual a 1, lo mismo que su recíproco (60 s)/(1 min). Podemos multiplicar una cantidad por cualquiera de estos factores, sin alterar el significado físico de la misma. Por ejemplo, para averiguar cuántos segundos hay en 3 min, escribimos

$$3\ \text{min} = (3\ \cancel{\text{min}})\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right) = 180\ \text{s}$$

EVALUAR *la respuesta:* Si convertimos las unidades correctamente, se eliminarán las unidades no deseadas, como en el ejemplo anterior. Si hubiéramos multiplicado 3 min por (1 min)/(60 s), el resultado habría sido $\frac{1}{20}\ \text{min}^2/\text{s}$, una forma un tanto rara de medir el tiempo. Para asegurarse de convertir bien las unidades, usted debe incluirlas en todas las etapas del cálculo.

Por último, verifique si la respuesta es lógica. ¿El resultado 3 min = 180 s es razonable? La respuesta es sí; el segundo es más pequeño que el minuto, por lo que habrá más segundos que minutos en el mismo intervalo de tiempo.

Ejemplo 1.1 Conversión de unidades de rapidez

El récord mundial oficial de rapidez terrestre es de 1228.0 km/h, establecido por Andy Green el 15 de octubre de 1997 en el automóvil con motor a reacción *Thrust SSC*. Exprese esta rapidez en metros/segundo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Queremos convertir las unidades de rapidez de km/h a m/s.

EJECUTAR: El prefijo k indica 10^3, por lo que la rapidez 1228.0 km/h = 1228.0×10^3 m/h. Sabemos también que hay 3600 s en 1 h, así que debemos combinar la rapidez de 1228.0×10^3 m/h y un factor de 3600. Pero, ¿debemos multiplicar por este factor o dividir entre él? Si tratamos el factor como número sin unidades, tendríamos que adivinar para continuar.

El enfoque correcto es incluir las unidades en el factor, el cual acomodaremos a modo de eliminar la unidad de horas:

$$1228.0\ \text{km/h} = \left(1228.0 \times 10^3\ \frac{\text{m}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \text{s}}\right) = 341.11\ \text{m/s}$$

Si multiplicáramos por (3600 s)/(1 h) en vez de (1 h)/(3600 s), las horas no se cancelarían, y sería fácil detectar el error. De nuevo, la

continúa

única forma de estar seguro de haber convertido correctamente las unidades es llevarlas durante todo el cálculo.

EVALUAR: Aunque el lector seguramente tiene una buena idea de la magnitud de la rapideces expresadas en kilómetros por hora o en millas por hora, las rapideces en metros por segundo probablemente son un poco más misteriosas. Es útil recordar que al caminar la rapidez común es de 1 m/s; que la longitud de cada paso de un adulto representativo es aproximadamente de un metro; y que un buen ritmo para caminar es de un paso por segundo. En comparación, ¡una rapidez de 341.11 m/s es en verdad elevada!

Ejemplo 1.2 Conversión de unidades de volumen

El diamante tallado más grande del mundo es la Primera Estrella de África (montada en el cetro real británico y guardado en la Torre de Londres). Su volumen es de 1.84 pulgadas cúbicas. ¿Cuál será su volumen en centímetros cúbicos? ¿Y en metros cúbicos?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: Aquí debemos convertir las unidades de volumen de pulgadas cúbicas (in^3), a centímetros cúbicos (cm^3) y a metros cúbicos (m^3).

EJECUTAR: Para convertir pulgadas cúbicas a centímetros cúbicos, multiplicamos por $[(2.54 \text{ cm})/(1 \text{ in})]^3$, no sólo (2.54 cm)/(1 in). Tenemos

$$1.84 \text{ in}^3 = (1.84 \text{ in}^3)\left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}}\right)^3$$

$$= (1.84)(2.54)^3 \frac{\cancel{\text{in}^3}\text{ cm}^3}{\cancel{\text{in}^3}} = 30.2 \text{ cm}^3$$

También, $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$, y

$$30.2 \text{ cm}^3 = (30.2 \text{ cm}^3)\left(\frac{10^{-2} \text{ m}}{1 \text{ cm}}\right)^3$$

$$= (30.2)(10^{-2})^3 \frac{\cancel{\text{cm}^3}\text{ m}^3}{\cancel{\text{cm}^3}} = 30.2 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$= 3.02 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

EVALUAR: Mientras que 1 centímetro es 10^{-2} de un metro (es decir, $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$), nuestra respuesta indica que un centímetro cúbico (1 cm^3) *no* es 10^{-2} de un metro cúbico. Más bien, es el volumen de un cubo cuyos lados tienen 1 cm de largo. Así, $1 \text{ cm}^3 = (1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = (10^{-2})^3 \text{ m}^3$, o bien, $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$.

1.5 Incertidumbre y cifras significativas

Las mediciones siempre tienen incertidumbre. Si medimos el espesor de la portada de este libro con una regla común, la medición sólo será confiable al milímetro más cercano, y el resultado será de 1 mm. Sería *erróneo* dar este resultado como 1.00 mm; dadas las limitaciones del instrumento de medición, no se sabría si el espesor real es de 1.00 mm o 0.85. Pero si se usa un micrómetro, que mide distancias de forma confiable al 0.01 mm más cercano, el resultado será 0.75 mm. La distinción entre estas dos mediciones radica en su **incertidumbre**. La medida con micrómetro tiene menor incertidumbre y es más exacta. La incertidumbre también se llama **error**, porque indica la máxima diferencia probable entre el valor medido y el real. La incertidumbre o el error de un valor medido depende de la técnica empleada.

A menudo indicamos la **exactitud** de un valor medido (es decir qué tanto creemos que se acerca al valor real) escribiendo el número, el símbolo ± y un segundo número que indica la incertidumbre de la medición. Si el diámetro de una varilla de acero se da como 56.47 ± 0.02 mm, esto implica que es poco probable que el valor real sea menor que 56.45 mm o mayor que 56.49 mm. En una notación abreviada de uso común, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los números entre paréntesis indican la incertidumbre de los dígitos finales del número principal.

También podemos expresar la exactitud en términos del **error fraccionario** o **error de aproximación** máximo probable (también llamados *incertidumbre fraccionaria* o *porcentaje de incertidumbre*). Un resistor rotulado como "47 ohms ± 10%" probablemente tiene una resistencia real que difiere de 47 ohms en menos del 10% de 47 ohms, esto es, unos 5 ohms. Es probable que la resistencia esté entre 42 y 52 ohms. En el caso del diámetro de la varilla antes citada, el error fraccionario es de (0.02 mm)/(56.47 mm), que es aproximadamente 0.0004; el error de aproximación es de (0.0004)(100%), o bien, de 0.04%. Incluso errores de aproximación muy pequeños llegan a ser muy significativos (figura 1.7).

1.7 Este espectacular percance se debió a un error de aproximación muy pequeño: recorrer unos cuantos metros de más, en un viaje de cientos de miles de metros.



En muchos casos, no se da explícitamente la incertidumbre de un número, sino que se indica con el número de dígitos informativos, o **cifras significativas**, en el valor medido. Indicamos el espesor de la portada del libro como de 0.75 mm, que tiene 3 cifras significativas. Con esto queremos decir que los dos primeros dígitos son correctos, pero el tercero es incierto. El último dígito está en la posición de las centésimas, así que la incertidumbre sería de 0.01 mm. Dos valores con el mismo número de cifras significativas pueden tener *diferente* incertidumbre; una distancia dada como 137 km también tiene tres cifras significativas, pero la incertidumbre es de más o menos 1 km.

Cuando usamos números con incertidumbre para calcular otros números, el resultado también es incierto. Al multiplicar o dividir números, el resultado no puede tener más cifras significativas que el factor con menos cifras significativas. Por ejemplo, $3.1416 \times 2.34 \times 0.58 = 4.3$. Cuando sumamos y restamos números, lo que importa es la ubicación del punto decimal, no el número de cifras significativas. Por ejemplo, $123.62 + 8.9 = 132.5$. Aunque 123.62 tiene una incertidumbre aproximada de 0.01, la de 8.9 sería de 0.1, así que la suma debe tener esta misma incertidumbre (0.1) y escribirse como 132.5, no 132.52. La tabla 1.1 resume las reglas para las cifras significativas.

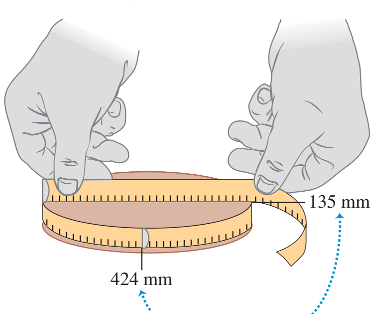
Tabla 1.1 Uso de cifras significativas

Operación matemática	Cifras significativas en el resultado
Multiplicación o división	No más que en el número que tiene menos cifras significativas *Ejemplo:* $(0.745 \times 2.2)/3.885 = 0.42$ *Ejemplo:* $(1.32578 \times 10^7) \times (4.11 \times 10^{-3}) = 5.45 \times 10^4$
Suma o resta	Lo determina el número con mayor incertidumbre (es decir, el menor número de dígitos a la derecha del punto decimal) *Ejemplo:* $27.153 + 138.2 - 11.74 = 153.6$

Nota: en este libro normalmente daremos valores numéricos con tres cifras significativas.

Como una aplicación de estas ideas, suponga que quiere verificar el valor de π, la razón entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. El valor verdadero hasta 10 dígitos es 3.141592654. Para calcularlo, dibuje un círculo grande, y mida el diámetro y la circunferencia al milímetro más cercano: obtendrá los valores de 424 mm y 135 mm (figura 1.8), los cuales dividirá con su calculadora para obtener 3.140740741, lo cual parecería no coincidir con el valor real de π, pero tenga en cuenta que cada una de sus mediciones tiene tres cifras significativas, de manera que su valor medido de π, igual a (424 mm)/(135 mm), sólo puede tener 3 cifras significativas y debería darse simplemente como 3.14. Dentro del límite de 3 cifras significativas, este valor sí coincide con el valor verdadero.

1.8 Determine el valor de π a partir de la circunferencia y el diámetro de un círculo.



En los ejemplos y problemas de este libro, por lo regular daremos valores numéricos con 3 cifras significativas, así que sus respuestas no deberán tener más de 3 cifras significativas. (En el mundo real, muchos números incluso tienen una exactitud menor. Un velocímetro de automóvil, por ejemplo, únicamente suele indicar dos cifras significativas.) Podemos hacer operaciones con una calculadora que muestra diez dígitos, pero dar una respuesta de diez dígitos no sólo sería innecesario, sino aun erróneo, porque falsea la exactitud del resultado. Siempre redondee su respuesta final conservando sólo el número correcto de cifras significativas o, si hay duda, acaso una más. En el ejemplo 1.1 habría sido erróneo dar la respuesta como 341.11111 m/s. Cabe señalar que, al reducir una respuesta así al número apropiado de cifras significativas, debemos *redondear*, no *truncar*. La calculadora indica que 525 m/311 m es 1.688102894; con 3 cifras significativas, esto es 1.69, no 1.68.

Al calcular con números muy grandes o muy pequeños, es mucho más fácil indicar las cifras significativas usando **notación científica**, también llamada **notación de potencias de 10**. La distancia de la Tierra a la Luna es aproximadamente de 384,000,000 m, pero esta forma del número no da idea de cuántas cifras significativas tiene. En vez de ello, movemos el punto decimal ocho lugares a la izquierda (que equivale a dividir entre 10^8) y multiplicamos por 10^8. Es decir,

$$384{,}000{,}000 \text{ m} = 3.84 \times 10^8 \text{ m}$$

En esta forma, es evidente que tenemos tres cifras significativas. El número 4.00×10^{-7} también tiene tres cifras significativas, aunque dos de ellas sean ceros. En notación científica, se acostumbra expresar la cantidad como un número entre 1 y 10 multiplicado por la potencia adecuada de 10.

Cuando aparecen un entero o una fracción en una ecuación general, tratamos ese número como si no tuviera incertidumbre. Por ejemplo, en la ecuación $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$, que es la ecuación (2.13) del capítulo 2, el coeficiente 2 es *exactamente* 2. Pensaríamos que tiene un número infinito de cifras significativas (2.000000…). Lo mismo ocurre con el exponente 2 en v_x^2 y v_{0x}^2.

Por último, cabe señalar que **precisión** no es lo mismo que *exactitud*. Un reloj digital barato que indica que la hora es 10:35:17 A.M. es muy *preciso* (la hora se da con segundos); pero si el reloj está atrasado varios minutos, el valor no será muy *exacto*. Por otro lado, un reloj de caja puede ser muy exacto (dar la hora correcta) pero, si no tiene segundero, no será muy preciso. Una medición de alta calidad, como las que definen estándares (véase la sección 1.3), es tanto precisa *como* exacta.

Ejemplo 1.3 Cifras significativas al multiplicar

La energía en reposo E de un objeto con masa en reposo m está dada por la ecuación de Einstein

$$E = mc^2$$

donde c es la rapidez de la luz en el vacío. Calcule E para un objeto con $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg (la masa del electrón, con tres cifras significativas). La unidad del SI para E es el joule (J); $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR Y PLANTEAR: La incógnita es la energía E. Nos dan la ecuación que debemos utilizar y el valor de la masa m; en la sección 1.3 vimos que el valor exacto de la rapidez de la luz es $c = 299{,}792{,}458 \text{ m/s} = 2.99792458 \times 10^8$ m/s.

EJECUTAR: Si sustituimos los valores de m y c en la ecuación de Einstein, tenemos

$$\begin{aligned} E &= (9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})(2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \\ &= (9.11)(2.99792458)^2(10^{-31})(10^8)^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= (81.87659678)(10^{[-31+(2\times 8)]}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= 8.187659678 \times 10^{-14} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Dado que el valor de m se dio con sólo tres cifras significativas, debemos redondear esto a

$$E = 8.19 \times 10^{-14} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 8.19 \times 10^{-14} \text{ J}$$

Casi todas las calculadoras usan notación científica y escriben los exponentes automáticamente; sin embargo, conviene saber realizar este tipo de cálculos a mano para cuando sea necesario.

EVALUAR: Mientras que la energía en reposo contenida en un electrón parecería ridículamente pequeña, en la escala atómica es enorme. Comparemos nuestra respuesta con 10^{-19} J, la energía que un solo átomo gana o pierde durante una reacción química común: ¡la energía en reposo de un electrón es aproximadamente 1,000,000 veces mayor! (Analizaremos el significado de la energía en reposo en el capítulo 37.)

Evalúe su comprensión de la sección 1.5 La densidad de un material es igual a su masa dividida entre su volumen. ¿Qué densidad (en kg/m^3) tiene una roca de masa 1.80 kg y de volumen 6.0×10^{-4} m^3? i) 3×10^3 kg/m^3; ii) 3.0×10^3 kg/m^3; iii) 3.00×10^3 kg/m^3; iv) 3.000×10^3 kg/m^3; v) cualquiera de éstas; todas las respuestas son matemáticamente equivalentes.



1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud

Hemos destacado la importancia de conocer la exactitud de los números que representan cantidades físicas. No obstante, a menudo incluso una estimación burda de una cantidad puede darnos información útil. A veces sabemos cómo calcular cierta cantidad, pero tenemos que estimar los datos necesarios para el cálculo. O bien, el cálculo sería demasiado complicado para efectuarse con exactitud, así que lo aproximamos. En ambos casos, nuestro resultado es una estimación, pero nos serviría aun si tiene un factor de incertidumbre de dos, diez o más. Con frecuencia, tales cálculos se denomi-

nan **estimaciones de orden de magnitud**. El gran físico italo-estadounidense Enrico Fermi (1901-1954) los llamaba "cálculos del reverso de un sobre".

Los ejercicios 1.18 a 1.29 del final de este capítulo son de estimación u "orden de magnitud". Algunos son risibles, y casi todos requieren estimar los datos de entrada requeridos. No intente consultar muchos datos; estímelos como mejor pueda. Aun cuando difieran por un factor de diez, los resultados podrían ser útiles e interesantes.

Ejemplo 1.4 Estimación de orden de magnitud

Suponga que usted escribe una novela de aventuras, donde el héroe huye a otro país con mil millones de dólares en oro en la maleta. ¿Es posible esto? ¿Cabría tanto oro en una maleta? ¿Sería demasiado pesado irla cargando?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR, PLANTEAR Y EJECUTAR: El oro se vende a unos 400 dólares la onza; aunque el precio llega a variar entre 200 y 600 dólares, pero no importa. Una onza equivale a unos 30 gramos. De hecho, una onza ordinaria (avoirdupois) son 28.35 g; una onza de oro es una onza troy, la cual pesa 9.45% más, pero de nuevo no importa. Diez dólares en oro tienen una masa de aproximadamente 1 g, así que mil millones (10^9) de dólares en oro son cien millones (10^8) de gramos es decir cien mil (10^5) kilogramos, que corresponde a un peso en unidades británicas de aproximadamente 200,000 lb, o 100 toneladas. Ya sea que el número exacto se acerque más a 50 toneladas o a 200 toneladas, el héroe no sería capaz de cargar tanto peso en una maleta al cruzar la frontera.

También podemos estimar el *volumen* del oro. Si su densidad fuera igual a la del agua (1 g/cm^3), el volumen sería 10^8 cm^3, es decir, 100 m^3. Sin embargo, el oro es un metal pesado; pensaríamos que su densidad es 10 veces la densidad del agua. De hecho, el oro es 19.3 veces más denso que el agua; pero al estimar 10 obtenemos un volumen de 10 m^3. ¡Imagine 10 pilas cúbicas de lingotes de oro, cada una con 1 m por lado, y pregúntese si cabrían en una maleta!

EVALUAR: Es evidente que hay que rescribir la novela. Pruebe el cálculo ahora con una maleta llena de diamantes de cinco quilates (1 gramo), cada uno de los cuales vale 100,000 dólares. ¿Ahora sí podría lograrse?

Evalúe su comprensión de la sección 1.6 ¿Podría estimar el número de dientes que hay en todas las bocas de su campus universitario (estudiantes, empleados y profesores)? (*Sugerencia:* ¿cuántos dientes tiene usted en su boca? Cuéntelos.)

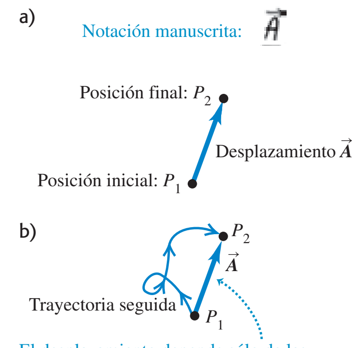
1.7 Vectores y suma de vectores

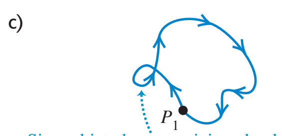
Algunas cantidades físicas, como tiempo, temperatura, masa y densidad se pueden describir completamente con un número y una unidad. No obstante, en física muchas otras cantidades importantes están asociadas con una *dirección* y no pueden describirse con un solo número. Un ejemplo sencillo es el movimiento de un avión: para describirlo plenamente, debemos indicar no sólo qué tan rápidamente se mueve, sino también hacia dónde. Para ir de Chicago a Nueva York, un avión debe volar al este, no al sur. La rapidez del avión combinada con su dirección constituye una cantidad llamada *velocidad*. Otro ejemplo es la *fuerza*, que en física es un empuje o tirón aplicado a un cuerpo. Para describir plenamente una fuerza hay que indicar no sólo su intensidad, sino también en qué dirección tira o empuja.

Cuando una cantidad física se describe con un solo número, decimos que es una **cantidad escalar**. En cambio, una **cantidad vectorial** tiene tanto una **magnitud** (el "qué tanto") como una dirección en el espacio. Los cálculos que combinan cantidades escalares usan las operaciones aritméticas ordinarias. Por ejemplo, 6 kg + 3 kg = 9 kg, o 4×2 s = 8 s. No obstante, combinar vectores requiere un conjunto de operaciones diferente.

Para entender mejor los vectores y su combinación, comencemos con la cantidad vectorial más sencilla, el **desplazamiento**, que es simplemente un cambio en la posición de un punto. (El punto podría representar una partícula o un cuerpo pequeño.) En la figura 1.9a representamos el cambio de posición del punto P_1 al punto P_2 con una línea que va de P_1 a P_2, con una punta de flecha en P_2 para indicar la dirección. El desplazamiento es una cantidad vectorial porque debemos decir no sólo cuánto se mueve la partícula, sino también hacia dónde. Caminar 3 km al norte desde nuestra

1.9 Desplazamiento como una cantidad vectorial. Un desplazamiento es siempre un segmento recto dirigido desde el punto inicial hasta el punto final, aunque la trayectoria sea curva.





casa no nos lleva al mismo sitio que caminar 3 km al sureste; ambos desplazamientos tienen la misma magnitud, pero diferente dirección.

Frecuentemente representamos una cantidad vectorial como el desplazamiento con una sola letra, como $\vec{A}$ en la figura 1.9a. En este libro siempre simbolizaremos los vectores con ***letras negritas y cursivas con una flecha arriba***, como recordatorio de que las cantidades vectoriales tienen propiedades diferentes que las cantidades escalares; la flecha nos recuerda que los vectores tienen dirección. Los símbolos manuscritos de los vectores suelen subrayarse o escribirse con una flecha arriba (figura 1.9a). *Siempre* escriba los símbolos vectoriales con una flecha arriba. Si no distingue entre cantidades vectoriales y escalares en su notación, probablemente tampoco lo hará en su mente, y se confundirá.

Al *dibujar* un vector, siempre trazamos una línea con punta de flecha. La longitud de la línea indica la magnitud del vector, y su dirección es la del vector. El desplazamiento siempre es un segmento recto dirigido del punto inicial al punto final, aunque la trayectoria real seguida por la partícula sea curva. En la figura 1.9b, la partícula sigue el camino curvo de P_1 a P_2, pero el desplazamiento sigue siendo el vector $\vec{A}$. Observe que el desplazamiento no se relaciona directamente con la *distancia* total recorrida. Si la partícula siguiera a P_2 y volviera a P_1, el desplazamiento total sería cero (figura 1.9c).

Si dos vectores tienen la misma dirección, son **paralelos**; si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección, son *iguales*, sea cual fuere su ubicación en el espacio. El vector $\vec{A}'$ de P_3 a P_4 en la figura 1.10 tiene las mismas longitud y dirección que el vector $\vec{A}$ de P_1 a P_2. Ambos desplazamientos son iguales, aunque parten de puntos distintos. Escribimos esto como $\vec{A}' = \vec{A}$ en la figura 1.10, usando un signo igual en negritas para resaltar que la igualdad de dos cantidades vectoriales no es lo mismo que la igualdad de dos cantidades escalares. Dos vectores sólo son iguales si tienen la misma magnitud *y* la misma dirección.

P_2 P_4 P_5
$\vec{A}$ $\vec{A}' = \vec{A}$ $\vec{B} = -\vec{A}$
P_1 P_3 P_6

Los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{A}'$ son iguales porque tienen las mismas longitud y dirección.

El desplazamiento $\vec{B}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero en dirección opuesta; $\vec{B}$ es el negativo de $\vec{A}$.

1.10 El significado de vectores que tienen la misma magnitud, y la misma dirección o la dirección opuesta.

Sin embargo, el vector $\vec{B}$ de la figura 1.10 no es igual a $\vec{A}$ porque su dirección es *opuesta*. Definimos el **negativo de un vector** como un vector con la misma magnitud que el original pero con la dirección *opuesta*. El negativo de $\vec{A}$ se denota con $-\vec{A}$, y usamos un signo menos en negrita para destacar la índole vectorial de las cantidades. Si $\vec{A}$ es 87 m al sur, entonces $-\vec{A}$ es 87 m al norte. Así, la relación entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en la figura 1.10 puede escribirse como $\vec{A} = -\vec{B}$ o $\vec{B} = -\vec{A}$. Si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen direcciones opuestas, sean sus magnitudes iguales o no, decimos que son **antiparalelos**.

Frecuentemente representamos la *magnitud* de una cantidad vectorial (su longitud, en el caso de un vector de desplazamiento) con la misma letra que usamos para el vector pero en *cursiva normal sin* la flecha arriba. Una notación alterna es el símbolo vectorial encerrado entre barras verticales:

$$(\text{Magnitud de } \vec{A}) = A = |\vec{A}| \tag{1.1}$$

Por definición, la magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar (un número) y *siempre es positiva*. Cabe señalar también que un vector nunca puede ser igual a un escalar porque son cantidades de tipo distinto. ¡La expresión "$\vec{A} = 6$ m" es tan absurda como "2 naranjas = 3 manzanas" o "6 lb = 7 km"!

Al dibujar diagramas con vectores, normalmente usamos una escala similar a la escala de los mapas. Por ejemplo, un desplazamiento de 5 km podría representarse con un vector de 1 cm en un diagrama; y un desplazamiento de 10 km, con un vector de 2 cm. En un diagrama de vectores de velocidad, podríamos usar una escala para representar un vector de 1 cm como una velocidad cuya magnitud es de 5 metros por segundo (5 m/s). Entonces, una velocidad de 20 m/s se representaría con un vector de 4 cm, con la dirección adecuada.

Suma de vectores

Suponga que una partícula sufre un desplazamiento $\vec{A}$, seguido por un segundo desplazamiento $\vec{B}$ (figura 1.11a). El resultado final es el mismo que si la partícula hubiera partido del mismo punto y sufrido un solo desplazamiento $\vec{C}$, como se muestra. Llamamos a $\vec{C}$ **suma vectorial**, o **resultante**, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Expresamos esta relación simbólicamente como

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \tag{1.2}$$

El signo más en negritas destaca que sumar dos cantidades vectoriales requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos cantidades escalares como $2 + 3 = 5$. Al sumar vectores, por lo regular colocamos la *cola* del *segundo* vector en la *cabeza*, o punta, del *primer* vector (figura 1.11a).

Si efectuamos los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en orden inverso, primero $\vec{B}$ y luego $\vec{A}$ el resultado será el mismo (figura 1.11b). Entonces,

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \quad \text{y} \quad \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.3}$$

Esto indica que el orden de los términos en una suma de vectores no importa. Dicho de otro modo, la suma de vectores sigue la ley conmutativa.

La figura 1.11c muestra otra representación de la suma vectorial: si dibujamos los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ con sus colas en el mismo punto, el vector $\vec{C}$ es la diagonal de un paralelogramo construido con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como dos lados adyacentes.

CUIDADO **Magnitudes en la suma de vectores** Es un error común suponer que si $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces la magnitud C debería ser igual a la magnitud A más la magnitud B. En general, tal conclusión es *errónea*; para los vectores de la figura 1.11 es evidente que $C < A + B$. La magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y también del ángulo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (véase el problema 1.92). Sólo en el caso especial en que $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean *paralelos*, la magnitud de $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ es igual a la suma de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (figura 1.12a). En cambio, cuando los vectores son *antiparalelos* (figura 1.12b) la magnitud de $\vec{C}$ es la *diferencia* de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Si usted se cuida de distinguir entre cantidades escalares y vectoriales, evitará cometer errores respecto a la magnitud de una suma vectorial.

Si necesitamos sumar más de dos vectores, podemos sumar primero dos cualesquiera, sumar la resultante al tercero, etcétera. La figura 1.13a muestra tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. En la figura 1.13b, se suman primero $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para dar la suma vectorial $\vec{D}$; luego se suman los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la misma forma para obtener la resultante $\vec{R}$:

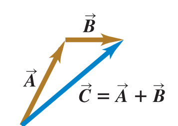
$$\vec{R} = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{D} + \vec{C}$$

Como alternativa, podemos sumar primero $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener el vector $\vec{E}$ (figura 1.13c), y luego sumar $\vec{A}$ y $\vec{E}$ para obtener $\vec{R}$:

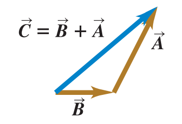
$$\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} + \vec{E}$$

1.11 Tres formas de sumar dos vectores. Como se muestra en b), el orden no importa en la suma de vectores, la cual es conmutativa.

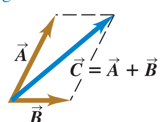
a) Podemos sumar dos vectores colocándolos punta con cola.



b) Al sumarlos a la inversa se obtiene el mismo resultado.

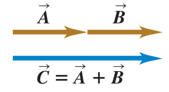


c) Podemos también sumarlos construyendo un paralelogramo.

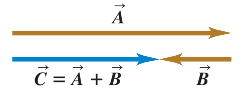


1.12 a) En el caso especial de que dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean paralelos, la magnitud de su suma es igual a la suma de sus magnitudes: $C = A + B$. b) Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos, la magnitud de su suma es igual a la *diferencia* de sus magnitudes: $C = |A - B|$.

a) La suma de dos vectores paralelos

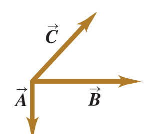


b) La suma de dos vectores antiparalelos

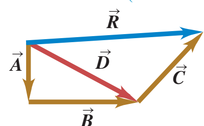


1.13 Varias construcciones para obtener la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

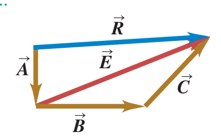
a) Para obtener la suma de estos tres vectores ...



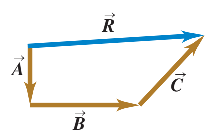
b) podríamos sumar $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para encontrar $\vec{D}$ y luego sumar $\vec{C}$ a $\vec{D}$ para obtener la suma final (resultante) $\vec{R}$, ...



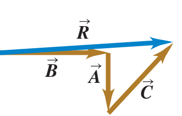
c) o podríamos sumar $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{E}$ y después sumar $\vec{A}$ a $\vec{E}$ para calcular $\vec{R}$, ...



d) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ para obtener $\vec{R}$ directamente ...



e) o podríamos sumar $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ en cualquier otro orden y aun así obtener $\vec{R}$.



1.14 Para construir la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$, podrá colocar ya sea la cola de $-\vec{B}$ en la punta de $\vec{A}$ o bien, colocar los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta.

Restar $\vec{B}$ de $\vec{A}$ ... $\vec{A} - \vec{B}$ = ... es equivalente a sumar $-\vec{B}$ a $\vec{A}$. $\vec{A} + (-\vec{B})$ = $\vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B}$

Con $\vec{A}$ y $-\vec{B}$ de punta a cola, $\vec{A} - \vec{B}$ es el vector desde la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $-\vec{B}$.

Con $\vec{A}$ y $\vec{B}$ punta con punta, $\vec{A} - \vec{B}$ es el vector desde la cola de $\vec{A}$ hasta la cola de $\vec{B}$.

No necesitamos dibujar los vectores $\vec{D}$ ni $\vec{E}$; basta con dibujar los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ dados en sucesión, con la cola de cada uno en la punta del vector anterior. La suma vectorial va de la cola del primero hasta la punta del último (figura 1.13d). El orden no importa; la figura 1.13e muestra un orden distinto, y el lector puede intentar otros. Vemos así que la suma de vectores obedece a la ley asociativa.

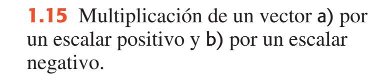
Así como sumamos vectores también podemos *restarlos*. Para aprender cómo, recuerde que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta. Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como la suma vectorial de $\vec{A}$ y $-\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \tag{1.4}$$

La figura 1.14 muestra un ejemplo de resta de vectores.

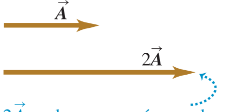
Una cantidad vectorial, como el desplazamiento, se puede multiplicar por una cantidad escalar (un número ordinario). El desplazamiento $2\vec{A}$ es un desplazamiento (cantidad vectorial) en la misma dirección que $\vec{A}$ pero dos veces más largo; esto equivale a sumar $\vec{A}$ a sí mismo (figura 1.15a). En general, cuando un vector $\vec{A}$ se multiplica por un escalar c, el resultado $c\vec{A}$ tiene magnitud $|c|A$ (el valor absoluto de c multiplicado por la magnitud del vector $\vec{A}$). Si c es positivo, $c\vec{A}$ tiene la misma dirección que $\vec{A}$; si c es negativo, $c\vec{A}$ tiene la dirección opuesta a la de $\vec{A}$. Así, $3\vec{A}$ es paralelo a $\vec{A}$, pero $-3\vec{A}$ es antiparalelo a $\vec{A}$ (figura 1.15b).

El escalar que multiplica un vector también puede ser una cantidad física con unidades. Por ejemplo, es posible que el lector conozca la relación $\vec{F} = m\vec{a}$; la fuerza neta $\vec{F}$ (una cantidad vectorial) que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de la masa del cuerpo m (una cantidad escalar positiva) y su aceleración $\vec{a}$ (una cantidad vectorial). La dirección de $\vec{F}$ es la misma que la de $\vec{a}$ porque m es positiva, y la magnitud de $\vec{F}$ es igual a la masa m (que es positiva e igual a su propio valor absoluto) multiplicada por la magnitud de $\vec{a}$. La unidad de la magnitud de la fuerza es la unidad de masa multiplicada por la unidad de la magnitud de la aceleración.



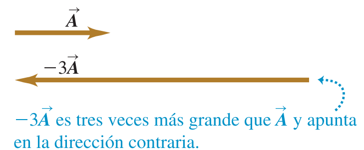
1.15 Multiplicación de un vector a) por un escalar positivo y b) por un escalar negativo.

a) Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector podría cambiar, pero no su dirección.



$2\vec{A}$ es dos veces más grande que $\vec{A}$.

b) Al multiplicar un vector por un escalar negativo, podría cambiar su magnitud e invertir su dirección.



$-3\vec{A}$ es tres veces más grande que $\vec{A}$ y apunta en la dirección contraria.

Ejemplo 1.5 Suma vectorial

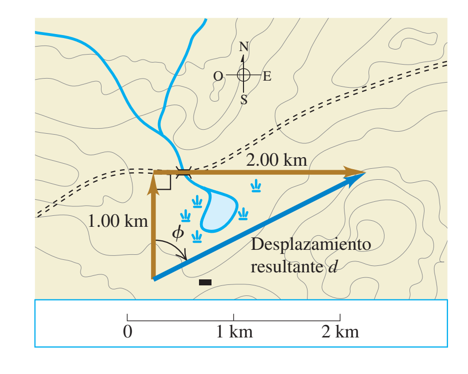
Una esquiadora de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema implica combinar desplazamientos, así que podemos resolverlo con una suma de vectores. Las incógnitas son la distancia total y la dirección de la esquiadora con respecto a su punto de partida. La distancia es sólo la magnitud de su vector de desplazamiento resultante del punto de origen al punto donde se detuvo, y la dirección que buscamos es la dirección del vector de desplazamiento resultante.

PLANTEAR: La figura 1.16 es un diagrama a escala de los desplazamientos de la esquiadora. Describimos la dirección desde el punto de partida con el ángulo ϕ (la letra griega fi). Si medimos con cuidado, veremos

1.16 Diagrama vectorial, a escala, de un recorrido en esquí a campo traviesa.



que la distancia al punto inicial es de unos 2.2 km y ϕ es aproximadamente 63°. No obstante, podemos *calcular* un resultado mucho más exacto sumando los vectores de desplazamiento de 1.00 km y 2.00 km.

EJECUTAR: Los vectores del diagrama forman un triángulo rectángulo; la distancia del punto de partida al punto final es igual a la longitud de la hipotenusa. Obtenemos esta longitud usando el teorema de Pitágoras:

$$\sqrt{(1.00\text{ km})^2 + (2.00\text{ km})^2} = 2.24\text{ km}$$

El ángulo ϕ se obtiene mediante trigonometría simple. Si usted necesita un repaso, en el Apéndice B se resumen las funciones y las identidades trigonométricas, así como otras relaciones matemáticas y geométricas útiles. Por la definición de la función tangente,

$$\tan\phi = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{2.00\text{ km}}{1.00\text{ km}}$$

$$\phi = 63.4°$$

Podemos describir la dirección como 63.4° al este del norte o 90° − 63.4° = 26.6° al norte del este. ¡Como prefiera!

EVALUAR: Conviene practicar verificando los resultados de un problema de suma vectorial con mediciones efectuadas en un dibujo de la situación. Felizmente, las respuestas que obtuvimos calculando (2.24 km y ϕ = 63.4°) son muy cercanas a los resultados burdos que obtuvimos midiendo (unos 2.2 km y aproximadamente 63°). Si fueran muy distintos, tendríamos que regresar y buscar los posibles errores.

Evalúe su comprensión de la sección 1.7 Dos vectores de desplazamiento, $\vec{S}$ y $\vec{T}$, tienen magnitudes S = 3 m y T = 4 m. ¿Cuál de los siguientes resultados podría ser la magnitud de la diferencia vectorial $\vec{S} - \vec{T}$? (Podría haber más de una respuesta correcta.) i) 9 m; ii) 7 m; iii) 5 m; iv) 1 m; v) 0 m; vi) −1 m.



1.8 Componentes de vectores

En la sección 1.7 sumamos vectores usando un diagrama a escala y las propiedades de los triángulos rectángulos. Al medir un diagrama se obtiene sólo una exactitud muy limitada y los cálculos con triángulos rectángulos funcionan únicamente cuando los dos vectores son perpendiculares. Necesitamos entonces un método sencillo pero general para sumar vectores: el método de *componentes.*

Para definir las componentes de un vector $\vec{A}$, partimos de un sistema rectangular de ejes de coordenadas (cartesiano) (figura 1.17) y luego dibujamos el vector con su cola en O, el origen del sistema. Podemos representar cualquier vector en el plano xy como la suma de un vector paralelo al eje x y un vector paralelo al eje y. Rotulamos esos vectores como $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en la figura 1.17a; son los **vectores componentes** del vector $\vec{A}$, y su suma vectorial es igual a $\vec{A}$. Simbólicamente,

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \quad (1.5)$$

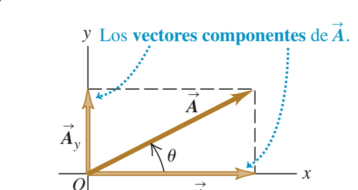
Puesto que cada vector componente tiene la dirección de un eje de coordenadas, sólo necesitamos un número para describirlo. Si el vector componente $\vec{A}_x$ apunta hacia la dirección x positiva, definimos el número A_x como la magnitud de $\vec{A}_x$. Si el vector componente $\vec{A}_x$ apunta en la dirección x negativa, definimos el número A_x como el negativo de dicha magnitud (la magnitud de una cantidad vectorial en sí misma nunca es negativa). Definimos el número A_y del mismo modo. Los dos números A_x y A_y son las **componentes** de $\vec{A}$ (figura 1.17b).

CUIDADO **Las componentes no son vectores** Las componentes A_x y A_y de un vector $\vec{A}$ son tan sólo números: *no* son vectores. Por ello, las simbolizamos con letra cursiva normal *sin* flecha arriba, en vez de la letra cursiva negrita con flecha que está reservadas para los vectores.

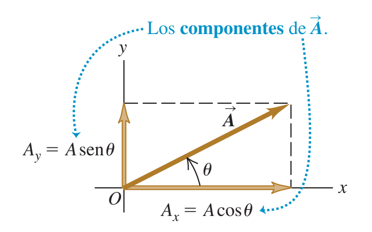
Podemos calcular las componentes del vector $\vec{A}$ si conocemos la magnitud A y su dirección. Describiremos la dirección de un vector con su ángulo relativo a una dirección de referencia, que en la figura 1.17b es el eje x positivo, y el ángulo

1.17 Representación de un vector $\vec{A}$ en términos de a) los vectores componentes $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ y b) las componentes A_x y A_y (en este caso, ambas son positivas).

a)

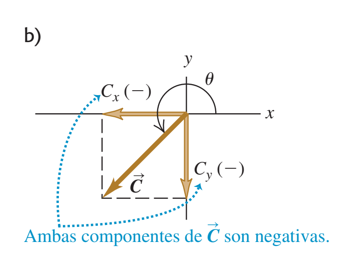


b)



1.18 Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.

a)



b)

y
θ
C_x (−)
x
$\vec{C}$
C_y (−)
Ambas componentes de $\vec{C}$ son negativas.

entre el vector $\vec{A}$ y el eje x positivo es θ (la letra griega theta). Imagine que el vector $\vec{A}$ yace originalmente sobre el eje $+x$ y luego lo gira hasta su dirección correcta, como indica la flecha sobre el ángulo θ en la figura 1.17b. Si la rotación es del eje $+x$ al eje $+y$, como indica la figura 1.17b, entonces θ es *positivo*; si la rotación es del eje $+x$ al eje $-y$, entonces θ es *negativo*. Por lo tanto, el eje $+y$ está a un ángulo de 90°, el eje $-x$ está a 180° y el eje $-y$ está a 270° (o −90°). Si medimos θ de esta manera, entonces por la definición de las funciones trigonométricas,

$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$
$$A_x = A\cos\theta \quad \text{y} \quad A_y = A\operatorname{sen}\theta \tag{1.6}$$

(θ medido del eje $+x$ girando hacia el eje $+y$)

En la figura 1.17b, A_x es positiva porque su dirección está sobre el eje $+x$, y A_y es positiva porque su dirección está en el eje $+y$. Esto es congruente con las ecuaciones (1.6); θ está en el primer cuadrante (entre 0 y 90°) y tanto el coseno como el seno del ángulo son positivos en este cuadrante. En cambio, en la figura 1.18a, la componente B_x es negativa: su dirección es opuesta a la dirección del eje $+x$. Esto también es congruente con las ecuaciones (1.6); el coseno de un ángulo en el segundo cuadrante es negativo. La componente B_y es positiva (sen θ es positivo en el segundo cuadrante). En la figura 1.18b, tanto C_x como C_y son negativas (cos θ y sen θ son negativos en el tercer cuadrante).

CUIDADO **Relación entre la magnitud de un vector y la dirección de sus componentes** Las ecuaciones (1.6) son correctas *sólo* si el ángulo θ se mide desde el eje x positivo, como se describe aquí. Si el ángulo del vector se da desde otra dirección de referencia, o se utiliza otro sentido de rotación, las relaciones son distintas. ¡Tenga cuidado! El ejemplo 1.6 ilustra este punto.

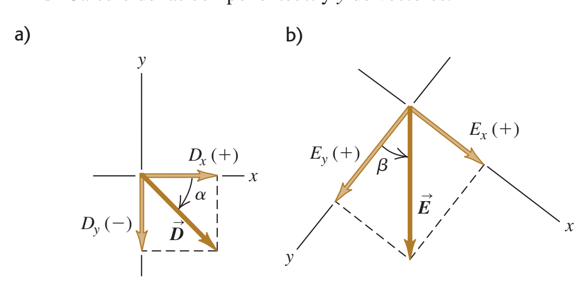
Ejemplo 1.6 Cálculo de componentes

a) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{D}$ en la figura 1.19a? La magnitud del vector es $D = 3.00$ m y el ángulo es $\alpha = 45°$. b) ¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{E}$ en la figura 1.19b? La magnitud del vector es $E = 4.50$ m y el ángulo $\beta = 37.0°$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En cada caso, se nos dan la magnitud y la dirección de un vector, y se nos pide calcular sus componentes.

1.19 Cálculo de las componentes x y y de vectores.



PLANTEAR: Parecería que sólo necesitamos las ecuaciones (1.6). Sin embargo, debemos tener cuidado porque los ángulos de la figura 1.19 *no* están medidos del eje $+x$ al eje $+y$.

EJECUTAR: a) El ángulo entre $\vec{D}$ y el eje x positivo es α (la letra griega alfa); pero este ángulo se mide hacia el eje y *negativo*. Por lo tanto, en las ecuaciones (1.6) debemos usar el ángulo $\theta = -\alpha = -45°$. Obtenemos

$$D_x = D\cos\theta = (3.00\text{ m})(\cos(-45°)) = +2.1\text{ m}$$
$$D_y = D\operatorname{sen}\theta = (3.00\text{ m})(\operatorname{sen}(-45°)) = -2.1\text{ m}$$

El vector tiene una componente x positiva y una componente y negativa, como se muestra en la figura. Si por descuido hubiéramos usado $\theta = +45°$ en las ecuaciones (1.6), habríamos obtenido D_y con el signo equivocado.

b) El eje x no es horizontal en la figura 1.19b, ni el eje y es vertical. No se preocupe; piense que los ejes x y y pueden tener *cualquier* orientación, siempre y cuando los ejes sean perpendiculares entre sí. (En el capítulo 5 usaremos ejes como éstos para estudiar el deslizamiento de un objeto sobre una rampa; un eje quedará sobre la rampa, y el otro será perpendicular a la rampa.)

Aquí el ángulo β (la letra griega beta) es el ángulo entre $\vec{E}$ y el eje $+y$, *no* el eje $+x$, así que *no podemos* usar este ángulo en las ecuaciones (1.6). En cambio, observe que $\vec{E}$ define la hipotenusa de un

triángulo rectángulo; los otros dos lados del triángulo son las magnitudes de E_x y E_y, es decir, las componentes x y y de $\vec{E}$. El seno de β es el cateto opuesto (la magnitud E_x) dividido entre la hipotenusa (la magnitud E); en tanto que el coseno de β es el cateto adyacente (la magnitud de E_y) dividido entre la hipotenusa (otra vez, la magnitud E). Ambas componentes de $\vec{E}$ son positivas, así que

$$E_x = E \operatorname{sen} \beta = (4.50 \text{ m})(\operatorname{sen} 37.0°) = +2.71 \text{ m}$$
$$E_y = E \cos \beta = (4.50 \text{ m})(\cos 37.0°) = +3.59 \text{ m}$$

Si hubiéramos usado las ecuaciones (1.6) directamente escribiendo $E_x = E \cos 37.0°$ y $E_y = E \operatorname{sen} 37.0°$, ¡las respuestas para E_x y para E_y se habrían invertido!

Si usted insiste en usar las ecuaciones (1.6), primero deberá encontrar el ángulo entre $\vec{E}$ y el eje $+x$, medido hacia el eje $+y$; es decir, $\theta = 90.0° - \beta = 90.0° - 37.0° = 53.0°$. Entonces, $E_x = E \cos \theta$ y $E_y = E \operatorname{sen} \theta$. Ahora sustituya los valores de E y θ en las ecuaciones (1.6) para demostrar que los resultados para E_x y E_y son los mismos que ya obtuvimos.

EVALUAR: Observe que las respuestas en el inciso b) tienen 3 cifras significativas, pero las del a) tienen sólo 2. ¿Sabe por qué?

Cálculos de vectores usando componentes

Utilizar componentes hace relativamente fáciles diversos cálculos que implican vectores. Veamos tres ejemplos importantes.

1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes. Podemos describir un vector plenamente dando su magnitud y dirección, o bien, sus componentes x y y. Las ecuaciones (1.6) indican cómo obtener las componentes si conocemos la magnitud y la dirección. También podemos invertir el proceso y obtener la magnitud y la dirección a partir de las componentes. Aplicando el teorema de Pitágoras a la figura 1.17b, vemos que la magnitud de un vector $\vec{A}$ es

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{1.7}$$

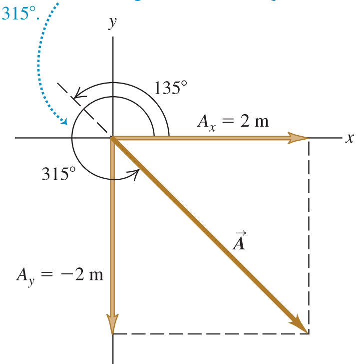
(Siempre tomamos la raíz positiva.) La ecuación (1.7) es válida para cualesquiera ejes x y y, siempre y cuando sean perpendiculares entre sí. La expresión para la dirección vectorial proviene de la definición de la tangente de un ángulo. Si medimos θ desde el eje $+x$, y un ángulo positivo se mide hacia el eje $+y$ (como en la figura 1.17b), entonces

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan \frac{A_y}{A_x} \tag{1.8}$$

Siempre usaremos la notación arctan para la función tangente inversa. También suele usarse la notación $\tan^{-1}$, y una calculadora podría tener una tecla INV o 2ND para usarse con la tecla TAN. Microsoft Excel usa ATAN.

CUIDADO **Cálculo de la dirección de un vector a partir de sus componentes** Hay un pequeño inconveniente en el uso de las ecuaciones (1.8) para obtener θ. Suponga que $A_x = 2$ m y $A_y = -2$ m como en la figura 1.20; entonces $\tan \theta = -1$. Sin embargo, hay dos ángulos con tangente -1, 135 y 315° (o $-45°$). En general, cualesquiera dos ángulos que difieran en 180° tienen la misma tangente. Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individuales. Dado que A_x es positiva y A_y es negativa, el ángulo debe estar en el cuarto cuadrante; así que $\theta = 315°$ (o $-45°$) es el valor correcto. La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan $\arctan(-1) = -45°$. En este caso es lo correcto, pero si tuviéramos $A_x = -2$ m y $A_y = 2$ m, entonces el ángulo correcto es 135°. Asimismo, si A_x y A_y son negativas, la tangente es positiva, por lo que el ángulo estará en el tercer cuadrante. *Siempre* debe hacerse un dibujo, como la figura 1.20, para verificar cuál de las dos posibilidades es la correcta.

1.20 Elaborar un diagrama de vectores indica los signos de sus componentes x y y.



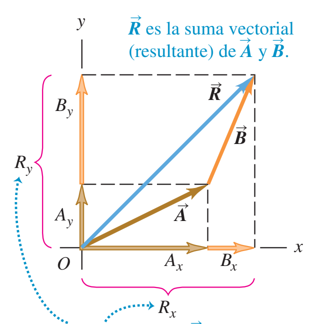
2. Multiplicación de un vector por un escalar. Si multiplicamos un vector $\vec{A}$ por un escalar c, cada componente del producto $\vec{D} = c\vec{A}$ es sólo el producto de c por la componente correspondiente de $\vec{A}$:

$$D_x = cA_x \qquad D_y = cA_y \qquad (\text{componentes de } \vec{D} = c\vec{A}) \tag{1.9}$$

Por ejemplo, la ecuación (1.9) indica que cada componente del vector $2\vec{A}$ es dos veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$, de manera que $2\vec{A}$ está en la misma dirección que $\vec{A}$ pero tiene el doble de magnitud. Cada componente del

vector $-3\vec{A}$ es tres veces mayor que la componente correspondiente del vector $\vec{A}$ pero tiene el signo contrario, así que $-3\vec{A}$ está en la dirección opuesta de $\vec{A}$ y tiene una magnitud tres veces más grande. Por lo tanto, las ecuaciones (1.9) son congruentes con nuestro estudio de la sección 1.7, al multiplicar un vector por un escalar (véase la figura 1.15).

1.21 Obtención de la suma vectorial (resultante) de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ usando componentes.



3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores. La figura 1.21 muestra dos vectores, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su suma vectorial $\vec{R}$, junto con las componentes x y y de los tres vectores. En el diagrama se observa que la componente R_x de la resultante es simplemente la suma $(A_x + B_x)$ de las componentes x de los vectores sumados. Lo mismo sucede con las componentes y. Simbólicamente,

$$R_x = A_x + B_x \qquad R_y = A_y + B_y \qquad \text{(componentes de } \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}) \tag{1.10}$$

La figura 1.21 muestra este resultado para el caso en que las componentes A_x, A_y, B_x y B_y son positivas. Dibuje diagramas adicionales para verificar que las ecuaciones (1.10) son válidas *sin importar* el signo de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Si conocemos las componentes de dos vectores cualesquiera $\vec{A}$ y $\vec{B}$, usando las ecuaciones (1.6) podríamos calcular las componentes de la resultante $\vec{R}$. Entonces, si necesitamos la magnitud y la dirección de $\vec{R}$, las obtendremos de las ecuaciones (1.7) y (1.8), cambiando las A por R.

Es fácil extender este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores. Sea $\vec{R}$ la suma vectorial de $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}, \ldots$, entonces, las componentes de $\vec{R}$ son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + C_x + D_x + E_x + \cdots \\ R_y &= A_y + B_y + C_y + D_y + E_y + \cdots \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sólo hemos hablado de vectores que están en el plano xy; no obstante, el método de componentes funciona también para vectores con cualquier dirección en el espacio. Introducimos un eje z perpendicular al plano xy; entonces, en general, un vector $\vec{A}$ tiene componentes A_x, A_y y A_z en las tres direcciones de coordenadas. La magnitud A está dada por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.12}$$

Siempre tomamos la raíz positiva. También, las ecuaciones (1.11) para las componentes de la suma vectorial $\vec{R}$ tienen un miembro adicional:

$$R_z = A_z + B_z + C_z + D_z + E_z + \cdots$$

Por último, aunque nuestro análisis de la suma de vectores se centró en combinar vectores de *desplazamiento*, el método se aplica igualmente a todas las demás cantidades vectoriales. Al estudiar el concepto de fuerza en el capítulo 4, veremos que las fuerzas son vectores que obedecen las mismas reglas de suma vectorial que usamos con el desplazamiento. Otras cantidades vectoriales aparecerán en capítulos posteriores.

Estrategia para resolver problemas 1.3 Suma de vectores



IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Decida cuál es la incógnita. Podría ser la magnitud de la suma vectorial, la dirección o ambas cuestiones.

PLANTEAR *el problema:* Dibuje los vectores que va a sumar y los ejes de coordenadas que va a emplear. En su bosquejo, coloque la cola del primer vector en el origen de las coordenadas; coloque la cola del segundo vector en la punta del primer vector, y así sucesivamente. Trace la suma vectorial $\vec{R}$ desde la cola del primer vector hasta la punta del último. Examinando su dibujo, haga una estimación burda de la magnitud y la dirección de $\vec{R}$; usará dichas estimaciones después para verificar sus cálculos.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Obtenga las componentes x y y de cada vector y anote los resultados en una tabla. Si un vector se describe con su magnitud A y su ángulo θ, medido del eje $+x$ al eje $+y$, las componentes son

$$A_x = A\cos\theta \qquad A_y = A\,\text{sen}\,\theta$$

Algunas componentes podrían ser positivas y otras negativas, dependiendo de la orientación del vector (es decir, del cuadrante donde se encuentra θ). Puede usar esta tabla de signos para verificar:

Cuadrante	I	II	III	IV
A_x	+	−	−	+
A_y	+	+	−	−

Si los ángulos de los vectores se dan de otra forma, quizá con otra referencia direccional, conviértalos en ángulos medidos desde el eje $+x$ como se describió. Tenga especial cuidado con los signos.

2. Sume algebraicamente las componentes x, incluyendo los signos, para obtener R_x, la componente x de la resultante. Haga lo mismo con las componentes y para obtener R_y.
3. Entonces, la magnitud R y la dirección θ de la resultante estarán dadas por

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \arctan\frac{R_y}{R_x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Verifique la magnitud y la dirección obtenidas en la suma vectorial comparándolas con las estimaciones basadas en su dibujo. Recuerde que la magnitud R *siempre* es positiva y que θ se mide desde el eje x positivo. El valor de θ obtenido con una calculadora puede ser el correcto, o quizá tenga un error de 180°. La decisión se toma examinando el dibujo.

Si sus cálculos son muy diferentes de la estimación realizada a partir del dibujo, verifique si su calculadora está en modo de "radianes" o de "grados". Si está en modo de radianes, introducir ángulos en grados dará respuestas absurdas.

Ejemplo 1.7 Suma de vectores con componentes

Los tres finalistas de un concurso de TV se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno cuenta con una regla graduada de un metro de longitud, una brújula, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

72.4 m, 32.0° al este del norte
57.3 m, 36.0° al sur del oeste
17.8 m al sur

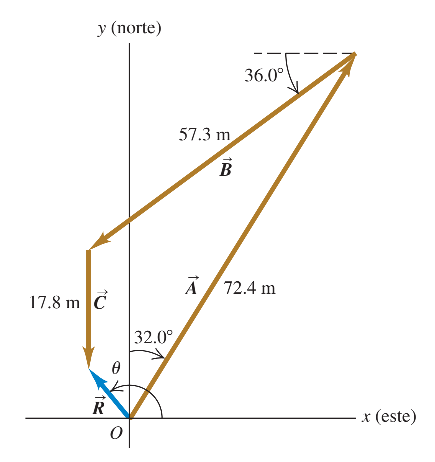
Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, la ganadora primero *calcula* adónde debe ir. ¿Qué calculó?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La finalidad es encontrar la suma (resultante) de los tres desplazamientos, así que se trata de un problema de suma vectorial.

PLANTEAR: La situación se muestra en la figura 1.22. Elegimos el eje $+x$ como este, y el eje $+y$ como norte, que es lo usual en los mapas.

1.22 Tres desplazamientos sucesivos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y el desplazamiento resultante (suma vectorial) $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.



Sea $\vec{A}$ el primer desplazamiento, $\vec{B}$ el segundo y $\vec{C}$ el tercero. Podemos estimar en el diagrama que la resultante $\vec{R}$ está a unos 10 m, 40° al oeste del norte.

EJECUTAR: Los ángulos de los vectores, medidos del eje $+x$ al eje $+y$, son (90.0° − 32.0°) = 58.0°, (180.0° + 36.0°) = 216.0° y 270°. Debemos obtener sus componentes. Dada nuestra elección de ejes, podemos usar las ecuaciones (1.6), que nos dan las siguientes componentes de $\vec{A}$:

$$A_x = A\cos\theta_A = (72.4\text{ m})(\cos 58.0°) = 38.37\text{ m}$$
$$A_y = A\,\text{sen}\,\theta_A = (72.4\text{ m})(\text{sen}\,58.0°) = 61.40\text{ m}$$

Observe que conservamos una cifra significativa extra en las componentes. Esperaremos hasta el final para redondear al número correcto de cifras significativas. La siguiente tabla muestra las componentes de todos los desplazamientos, la suma de las componentes y los demás cálculos. Siempre ordene sistemáticamente sus cálculos.

Distancia	Ángulo	Componente *x*	Componente *y*
$A = 72.4$ m	58.0°	38.37 m	61.40 m
$B = 57.3$ m	216.0°	−46.36 m	−33.68 m
$C = 17.8$ m	270.0°	0.00 m	−17.80 m
		$R_x = -7.99$ m	$R_y = 9.92$ m

$$R = \sqrt{(-7.99\text{ m})^2 + (9.92\text{ m})^2} = 12.7\text{ m}$$

$$\theta = \arctan\frac{9.92\text{ m}}{-7.99\text{ m}} = 129° = 39° \text{ al oeste del norte}$$

Los perdedores intentan medir tres ángulos y tres distancias para un total de 147.5 m, un metro a la vez. La ganadora midió sólo un ángulo y una distancia mucho más corta.

EVALUAR: Los valores que calculamos para R y θ no son muy diferentes de nuestras estimaciones de 10 m y 40° al oeste del norte; ¡muy bien! Observe que $\theta = -51°$, o bien, 51° al sur del este, también satisface la ecuación de θ. Sin embargo, como la ganadora hizo un dibujo de los vectores de desplazamiento (figura 1.22), ella sabe que $\theta = 129°$ es la única solución correcta para el ángulo.

Ejemplo 1.8 Vector en tres dimensiones

Un avión despega y viaja 10.4 km al oeste, 8.7 km al norte y 2.1 km hacia arriba. ¿A qué distancia está de su punto de partida?

SOLUCIÓN

Sea el eje $+x$ al este, el eje $+y$ al norte y el eje $+z$ hacia arriba. Entonces, $A_x = -10.4$ km, $A_y = 8.7$ km y $A_z = 2.1$ km; la ecuación (1.12) da

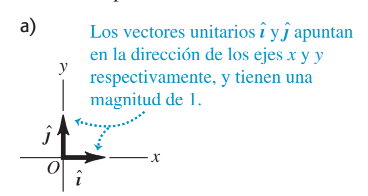
$$A = \sqrt{(-10.4\ \text{km})^2 + (8.7\ \text{km})^2 + (2.1\ \text{km})^2} = 13.7\ \text{km}$$

Evalúe su comprensión de la sección 1.8 Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano xy. *a)* ¿Esto es posible para $\vec{A}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{B}$ pero componentes diferentes? *b)* ¿Esto es posible para $\vec{A}$ que tiene las mismas componentes que $\vec{B}$ pero una magnitud diferente?

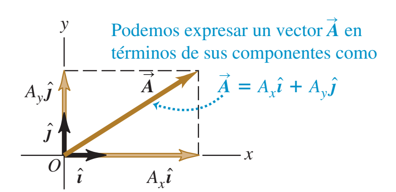
1.9 Vectores unitarios

1.23 a) Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. b) Expresión de un vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes.

a)



b)



Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en direccionar, es decir, describir una dirección en el espacio. Los vectores unitarios ofrecen una notación cómoda para muchas expresiones que incluyen componentes de vectores. Siempre incluiremos un acento circunflejo o "sombrero" (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría o no ser 1.

En un sistema de coordenadas x-y podemos definir un vector unitario $\hat{\imath}$ que apunte en la dirección del eje $+x$ y un vector unitario $\hat{\jmath}$ que apunte en la dirección del eje $+y$ (figura 1.23a). Así, expresamos la relación entre vectores componentes y componentes, descrita al principio de la sección 1.8, como sigue:

$$\vec{A}_x = A_x\hat{\imath}$$
$$\vec{A}_y = A_y\hat{\jmath} \tag{1.13}$$

Asimismo, escribimos un vector $\vec{A}$ en términos de sus vectores componentes como

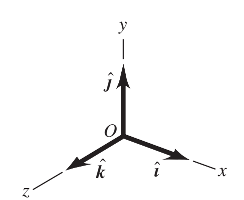
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \tag{1.14}$$

Las ecuaciones (1.13) y (1.14) son vectoriales; cada término, como $A_x\hat{\imath}$, es una cantidad vectorial (figura 1.23b). Los signos igual y más en negritas indican igualdad y suma de vectores.

Cuando representamos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, podemos expresar la resultante $\vec{R}$ usando vectores unitarios como sigue:

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\\
\vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}\\
\vec{R} &= \vec{A} + \vec{B}\\
&= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}) + (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath})\\
&= (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath}\\
&= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

1.24 Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.



La ecuación (1.15) replantea el contenido de las ecuaciones (1.10) en forma de una sola ecuación vectorial, en vez de dos ecuaciones de componentes.

Si todos los vectores no están en el plano xy, necesitaremos una tercera componente. Introducimos un tercer vector unitario $\hat{k}$ que apunta en la dirección del eje $+z$ (figura 1.24). Las ecuaciones (1.14) y (1.15) se vuelven, entonces,

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \tag{1.16}$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$
$$= R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} \qquad (1.17)$$

Ejemplo 1.9 Uso de vectores unitarios

Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\text{ m} \qquad \text{y} \qquad \vec{E} = (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\text{ m}$$

obtenga la magnitud del desplazamiento $2\vec{D} - \vec{E}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Multiplicamos el vector $\vec{D}$ por 2 (un escalar) y luego restamos el vector $\vec{E}$ del resultado.

PLANTEAR: La ecuación (1.9) indica que para multiplicar $\vec{D}$ por 2, simplemente multiplicamos cada una de sus componentes por 2. Después, la ecuación (1.17) nos dice que para restar $\vec{E}$ de $2\vec{D}$, simplemente restamos las componentes de $\vec{E}$ de las componentes de $2\vec{D}$. (Recuerde de la sección 1.7 que restar un vector es lo mismo que sumar el negativo de ese vector.) En cada una de estas operaciones matemáticas, los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ permanecen iguales.

EJECUTAR: Si $\vec{F} = 2\vec{D} - \vec{E}$, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{F} &= 2(6\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k})\text{ m} - (4\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 8\hat{k})\text{ m}\\ &= [(12 - 4)\hat{\imath} + (6 + 5)\hat{\jmath} + (-2 - 8)\hat{k}]\text{ m}\\ &= (8\hat{\imath} + 11\hat{\jmath} - 10\hat{k})\text{ m}\end{aligned}$$

Las unidades de los vectores $\vec{D}$, $\vec{E}$ y $\vec{F}$ son metros, así que las componentes de estos vectores también están en metros. De la ecuación (1.12),

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\\ &= \sqrt{(8\text{ m})^2 + (11\text{ m})^2 + (-10\text{ m})^2} = 17\text{ m}\end{aligned}$$

EVALUAR: Trabajar con vectores unitarios hace que la suma y la resta de vectores no sean más complicadas que la suma y resta de números ordinarios. Aun así, no olvide verificar que no haya cometido errores de aritmética básica.

Evalúe su comprensión de la sección 1.9 Coloque en orden los siguientes vectores, según su magnitud, donde el vector más grande sea el primero. i) $\vec{A} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; ii) $\vec{B} = (-3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; iii) $\vec{C} = (3\hat{\imath} - 5\hat{\jmath} - 2\hat{k})$ m; iv) $\vec{D} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + 2\hat{k})$ m.



1.10 Producto de vectores

Hemos visto cómo la suma de vectores es consecuencia natural de combinar desplazamientos, y sumaremos muchas otras cantidades vectoriales posteriormente. También podemos expresar muchas relaciones físicas de forma concisa usando *producto* de vectores. Los vectores no son números ordinarios, así que no podemos aplicarles directamente la multiplicación ordinaria. Definiremos dos tipos diferentes de productos de vectores. El primero, llamado *producto escalar*, produce un resultado escalar. El segundo, el *producto vectorial*, produce otro vector.

Producto escalar

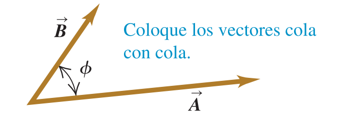
El **producto escalar** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota con $\vec{A}\cdot\vec{B}$. Por esta notación, el producto escalar también se denomina **producto punto**. Aun cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean vectores, la cantidad $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es un escalar.

Para definir el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ dibujamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con su cola en el mismo punto (figura 1.25a). El ángulo ϕ (la letra griega fi) puede tomar valores entre 0 y 180°. La figura 1.25b muestra la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$; esta proyección es la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ y es igual a $B\cos\phi$. (Podemos obtener componentes en cualquier dirección conveniente, no sólo en los ejes x y y.) Definimos $\vec{A}\cdot\vec{B}$ como la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$. Expresado como por la ecuación,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \qquad \text{(definición del producto escalar (punto))} \qquad (1.18)$$

1.25 Cálculo del producto escalar de dos vectores, $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$.

a)



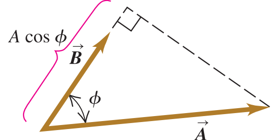
b) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ es igual a $A(B\cos\phi)$.

(Magnitud de $\vec{A}$) por (Componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$).

B, ϕ, A, $B\cos\phi$

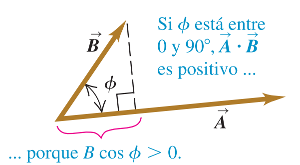
c) $\vec{A}\cdot\vec{B}$ también es igual a $B(A\cos\phi)$.

(Magnitud de $\vec{B}$) por (Componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$).

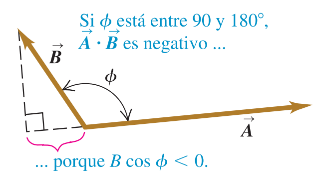


1.26 El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi$ puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

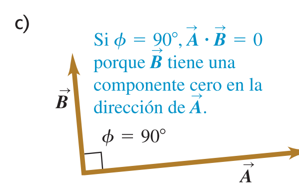
a)



b)



c)



También podemos definir $\vec{A} \cdot \vec{B}$ como la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$, como en la figura 1.25c. Así, $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{B} = B(A \cos \phi) = AB \cos \phi$, igual que en la ecuación (1.18).

El producto escalar es una cantidad escalar, no un vector, y puede ser positivo, negativo o cero. Si ϕ está entre 0 y 90°, $\cos \phi > 0$ y el producto escalar es positivo (figura 1.26a). Cuando ϕ está entre 90 y 180°, $\cos \phi < 0$, la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$ es negativa y $\vec{A} \cdot \vec{B}$ también es negativo (figura 1.26b). Por último, cuando $\phi = 90°$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ (figura 1.26c). *El producto escalar de dos vectores perpendiculares siempre es cero.*

Para dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cualesquiera, $AB \cos \phi = BA \cos \phi$. Esto implica que $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. El producto escalar obedece la ley conmutativa de la multiplicación; el orden de los dos vectores no importa.

Usaremos el producto escalar en el capítulo 6 para describir el trabajo realizado por una fuerza. Si una fuerza constante $\vec{F}$ se aplica a un cuerpo que sufre un desplazamiento $\vec{s}$, el trabajo W (una cantidad escalar) realizado por la fuerza es

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

El trabajo hecho por la fuerza es positivo si el ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$ está entre 0 y 90°, negativo si el ángulo está entre 90 y 180°, y cero si $\vec{F}$ y $\vec{s}$ son perpendiculares. (Éste es otro ejemplo de un término con significado especial en física; en el lenguaje cotidiano, “trabajo” no es algo que pueda ser positivo o negativo.) En este capítulo más adelante usaremos el producto escalar para varios fines, desde calcular potencial eléctrico hasta determinar el efecto de campos magnéticos variables sobre circuitos eléctricos.

Cálculo del producto escalar usando componentes

Podemos calcular el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ directamente si conocemos las componentes x, y y z de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para saber cómo se hace, obtengamos primero los productos escalares de los vectores unitarios. Esto es fácil, pues $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tienen magnitud 1 y son perpendiculares entre sí. Por la ecuación (1.18),

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} &= (1)(1)\cos 0° = 1 \\ \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\imath} \cdot \hat{k} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} &= (1)(1)\cos 90° = 0 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, expandimos el producto y usamos estos productos de vectores unitarios:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{\imath} \cdot B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath} \cdot B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath} \cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{\jmath} \cdot B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \cdot B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath} \cdot B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k} \cdot B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k} \cdot B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \cdot B_z\hat{k} \\ &= A_xB_x\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + A_xB_y\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + A_xB_z\hat{\imath} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_yB_x\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + A_yB_y\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} + A_yB_z\hat{\jmath} \cdot \hat{k} \\ &\quad + A_zB_x\hat{k} \cdot \hat{\imath} + A_zB_y\hat{k} \cdot \hat{\jmath} + A_zB_z\hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Por las ecuaciones (1.19), es evidente que seis de estos nueve términos son cero, y los otros tres que quedan simplemente dan

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad \text{(producto escalar (punto) en términos de sus componentes)} \tag{1.21}$$

Por lo tanto, *el producto escalar de dos vectores es la suma de los productos de sus respectivas componentes.*

El producto escalar permite calcular directamente el ángulo ϕ entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera cuyas componentes conocemos. En este caso, obtenemos el producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. con la ecuación (1.21). Por la ecuación (1.18), dicho producto

escalar también es igual a $AB \cos \phi$. Las magnitudes vectoriales de A y B pueden obtenerse de los vectores componentes utilizando la ecuación (1.12), así que podemos determinar $\cos \phi$ y de ahí el ángulo ϕ (véase el ejemplo 1.11).

Ejemplo 1.10 Cálculo de un producto escalar

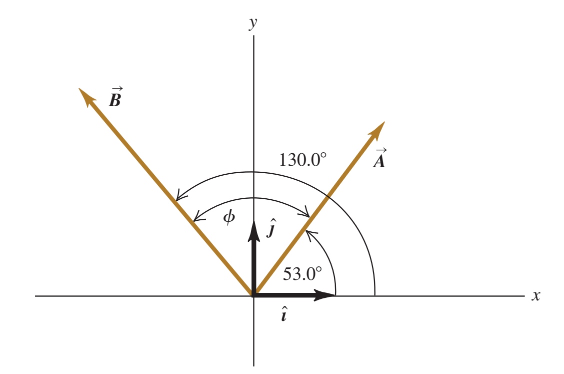
Obtenga el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ de los dos vectores de la figura 1.27. Las magnitudes de los vectores son $A = 4.00$ y $B = 5.00$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos dan las magnitudes y las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y queremos calcular su producto escalar.

PLANTEAR: Hay dos formas de calcular el producto escalar. La primera consiste en usar las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos (ecuación 1.18); y la segunda, en usar las componentes de los dos vectores (ecuación 1.21).

1.27 Dos vectores en dos dimensiones.



EJECUTAR: Utilizando el primer enfoque, el ángulo entre los dos vectores es $\phi = 130.0° - 53.0° = 77.0°$, así que

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\phi = (4.00)(5.00)\cos 77.0° = 4.50$$

Esto es positivo porque el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está entre 0 y 90°.

Para el segundo enfoque, primero necesitamos calcular las componentes de los dos vectores. Como los ángulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dan con respecto al eje $+x$, medidos hacia el eje $+y$, podemos usar las ecuaciones (1.6):

$$A_x = (4.00)\cos 53.0° = 2.407$$
$$A_y = (4.00)\,\text{sen}\,53.0° = 3.195$$
$$A_z = 0$$
$$B_x = (5.00)\cos 130.0° = -3.214$$
$$B_y = (5.00)\,\text{sen}\,130.0° = 3.830$$
$$B_z = 0$$

Las componentes z son cero porque ambos vectores están en el plano xy. Como en el ejemplo 1.7, dejamos una cifra significativa de más en las componentes; redondearemos al número correcto al final. Por la ecuación (1.21), el producto escalar es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2.407)(-3.214) + (3.195)(3.830) + (0)(0) = 4.50$$

EVALUAR: Obtenemos el mismo resultado para el producto escalar con ambos métodos, como debería ser.

Ejemplo 1.11 Cálculo de ángulos con el producto escalar

Determine el ángulo entre los dos vectores

$$\vec{A} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + \hat{k} \qquad \text{y} \qquad \vec{B} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$$

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos dan las componentes x, y y z de dos vectores. Nuestra incógnita es el ángulo ϕ entre ellas.

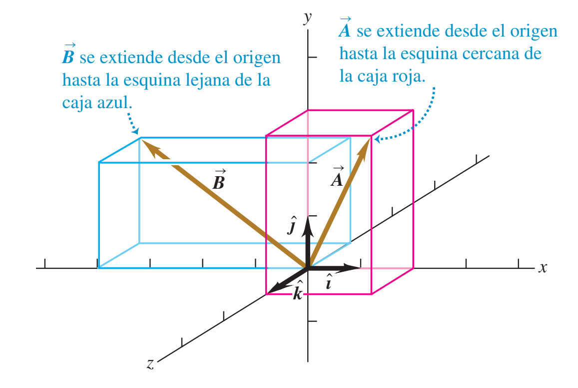
PLANTEAR: La figura 1.28 muestra los dos vectores. El producto escalar de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está relacionado con el ángulo ϕ entre ellos y con las magnitudes A y B por la ecuación (1.18). También está relacionado con las componentes de los dos vectores. Si nos dan las componentes (como en este ejemplo), primero determinamos el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y los valores de A y B, y luego determinamos la incógnita ϕ.

EJECUTAR: Igualamos entre sí nuestras dos expresiones para el producto escalar, ecuación (1.18) y ecuación (1.21). Reordenando, obtenemos

$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB}$$

Esta fórmula puede utilizarse para encontrar el ángulo entre cualesquiera dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. En nuestro ejemplo, las componentes de $\vec{A}$

1.28 Dos vectores en tres dimensiones.



continúa

son $A_x = 2$, $A_y = 3$ y $A_z = 1$, y las componentes de $\vec{B}$ son $B_x = -4$, $B_y = 2$ y $B_z = -1$. Entonces,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$
$$= (2)(-4) + (3)(2) + (1)(-1) = -3$$
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$
$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(-4^2) + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

$$\cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{AB} = \frac{-3}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = -0.175$$
$$\phi = 100°$$

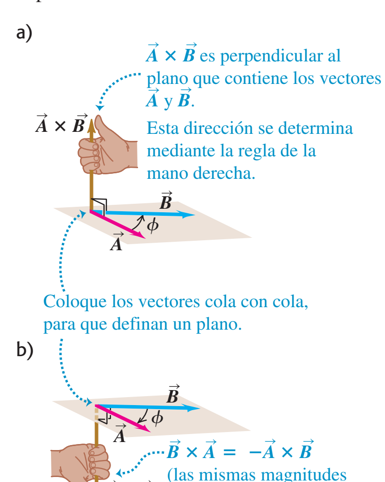
EVALUAR: Para verificar el resultado, observe que el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es negativo, lo cual significa que ϕ está entre 90 y 180° (véase la figura 1.26), que concuerda con nuestra respuesta.

Producto vectorial

El **producto vectorial** de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, también llamado **producto cruz**, se denota con $\vec{A} \times \vec{B}$. Como su nombre lo indica, el producto vectorial es un vector en sí mismo. Usaremos este producto en el capítulo 10 para describir el torque y la cantidad de movimiento angular; en los capítulos 27 y 28 los emplearemos de manera extensiva para describir campos magnéticos y fuerzas.

Para definir el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ otra vez dibujamos los dos vectores con sus colas en el mismo punto (figura 1.29a). Así, los dos vectores están en un plano. Definimos el producto vectorial como una cantidad vectorial perpendicular a este plano (es decir, perpendicular tanto a $\vec{A}$ como a $\vec{B}$) con una magnitud igual a AB sen ϕ. Esto es, si $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, entonces,

$$C = AB \text{ sen } \phi \qquad \text{(magnitud del producto vectorial (cruz) de } \vec{A} \text{ y } \vec{B}) \qquad (1.22)$$



1.29 a) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$. determinado por la regla de la mano derecha. b) $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$; el producto vectorial es anticonmutativo.

Medimos el ángulo ϕ de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$ tomando el más pequeño de los dos ángulos posibles, de manera que ϕ está entre 0 y 180°. Por lo tanto, sen $\phi \geq 0$ y C en la ecuación (1.22) nunca es negativo, como debe ser toda magnitud de vector. Observe también que cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos, $\phi = 0$ o 180°, y $C = 0$. Es decir, *el producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos siempre es cero*. En particular, *el producto vectorial de un vector consigo mismo es cero.*

CUIDADO **Producto vectorial contra producto escalar** Tenga cuidado en no confundir la expresión AB sen ϕ para la magnitud del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ con la expresión similar AB cos ϕ para el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$. Para saber la diferencia entre estas dos expresiones, suponga que variamos el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a la vez que mantenemos constantes sus magnitudes. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos, la magnitud del producto vectorial será cero y el producto escalar será el máximo. Cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, la magnitud del producto vectorial será la máxima y el producto escalar será cero.

Siempre hay *dos* direcciones perpendiculares a un plano dado, una a cada lado del plano. Elegimos la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ como sigue. Imagine que gira el vector $\vec{A}$ sobre la línea perpendicular hasta alinearlo con $\vec{B}$, eligiendo el ángulo más pequeño entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Gire los dedos de su mano derecha sobre la perpendicular, con las puntas señalando en la dirección de la rotación; el pulgar señalará en la dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$. Esta **regla de la mano derecha** se ilustra en la figura 1.29a.

Asimismo, determinamos la dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$ girando $\vec{B}$ hacia $\vec{A}$ como en la figura 1.29b. El resultado es un vector *opuesto* a $\vec{A} \times \vec{B}$. ¡El producto vectorial *no* es conmutativo! De hecho, para cualesquiera dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$,

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \qquad (1.23)$$

Como hicimos con el producto escalar, podemos interpretar geométricamente la magnitud del producto vectorial. En la figura 1.30a, B sen ϕ es la componente del vector $\vec{B}$ que es *perpendicular* a la dirección del vector $\vec{A}$ Por la ecuación (1.22), la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ es igual a la magnitud de $\vec{A}$ multiplicada por la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$. La figura 1.30b muestra que la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ también es

igual a la magnitud de $\vec{B}$ multiplicada por la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$. Observe que la figura 1.30 ilustra el caso en que ϕ está entre 0 y 90°; usted debería dibujar un diagrama similar para ϕ entre 90 y 180°, para comprobar que es válida la misma interpretación geométrica de la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$.

1.30 Calculo de la magnitud AB sen ϕ del producto de dos vectores, $\vec{A} \times \vec{B}$.

a)

(La magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) es igual a $A(B$ sen $\phi)$.
(La magnitud de $\vec{A}$) multiplicada por (La componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$).

b)

(La magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) es igual a $B(A$ sen $\phi)$.
(La magnitud de $\vec{B}$) multiplicada por (La componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$).

Calculo del producto vectorial usando componentes

Si conocemos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, podremos calcular las componentes del producto vectorial usando un procedimiento similar al del producto escalar. Primero deducimos la tabla de multiplicación de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, que son mutuamente perpendiculares. El producto cruz de cualquier vector consigo mismo es cero, así que

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

El cero en negritas nos recuerda que cada producto es un *vector* cero; es decir, uno con todas sus componentes iguales a cero y con dirección indefinida. Usando las ecuaciones (1.22) y (1.23), y la regla de la mano derecha, tenemos

$$\begin{aligned} \hat{\imath} \times \hat{\jmath} &= -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} &= -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} &= -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Puede verificar estas ecuaciones usando la figura 1.31a.

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes, y expandimos la expresión del producto cruz:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\ &= A_x\hat{\imath} \times B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_y\hat{\jmath} \times B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \times B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath} \times B_z\hat{k} \\ &\quad + A_z\hat{k} \times B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k} \times B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \times B_z\hat{k} \end{aligned} \tag{1.25}$$

También podemos reescribir los términos individuales como en la ecuación (1.25) como $A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} = (A_xB_y)\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, etcétera. Evaluamos éstos usando la tabla de multiplicar de los vectores unitarios en las ecuaciones (1.24) y luego agrupamos términos, para obtener

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k} \tag{1.26}$$

Por lo tanto, las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ están dadas por

$$C_x = A_yB_z - A_zB_y \qquad C_y = A_zB_x - A_xB_z \qquad C_z = A_xB_y - A_yB_x \tag{1.27}$$

(componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$)

El producto cruz también puede expresarse en forma de determinante:

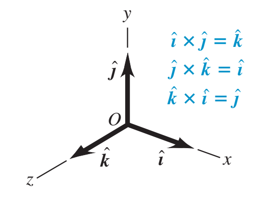
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

Si usted no ha estudiado determinantes, omita el estudio de esta forma.

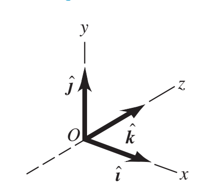
Con el sistema de ejes de la figura 1.31a, si invertimos la dirección del eje z, obtenemos el sistema de la figura 1.31b. Aquí, como podrá comprobar el lector, la definición del producto cruz da $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$ en vez de $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$. De hecho, todos los productos vectoriales de $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tendrían signos opuestos a los de las ecuaciones (1.24). Vemos que hay dos tipos de sistemas de coordenadas, que difieren en los signos de los productos cruz de los vectores unitarios. En un **sistema derecho**, $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, como en la figura 1.31a. Lo usual es utilizar *sólo* sistemas derechos, algo que haremos a lo largo de este libro.

1.31 a) Siempre utilizaremos un sistema de coordenadas derecho, como éste. b) Nunca usaremos un sistema de coordenadas izquierdo (donde $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{k}$, y así sucesivamente).

a) Sistema de coordenadas derecho.



b) Sistema de coordenadas izquierdo; no lo usaremos aquí.



Ejemplo 1.12 Cálculo de un producto vectorial

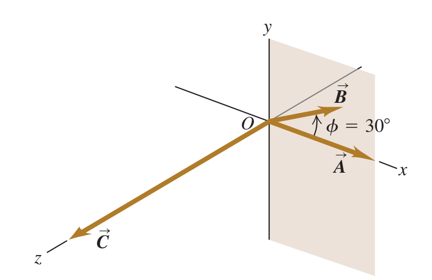
El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6 unidades y está sobre el eje $+x$. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje $+x$ (figura 1.32). Calcule el producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos dan la magnitud y la dirección de cada vector, y queremos encontrar su producto vectorial.

PLANTEAR: Podemos obtener el producto cruz de dos maneras. La primera consiste en usar la ecuación (1.22) para determinar la magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$ y luego utilizar la regla de la mano derecha para encontrar la dirección del producto cruz. La segunda forma es usar las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para obtener las componentes del producto cruz $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ usando las ecuaciones (1.27).

1.32 Vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y su producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ está en el plano xy.



EJECUTAR: Con el primer enfoque, por la ecuación (1.22) la magnitud del producto cruz es

$$AB \operatorname{sen} \phi = (6)(4)(\operatorname{sen} 30°) = 12$$

Por la regla de la mano derecha, $\vec{A} \times \vec{B}$ tiene la dirección del eje $+z$; por lo tanto, $\vec{A} \times \vec{B} = 12\hat{k}$.

Para usar el segundo enfoque, primero escribimos las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

$$A_x = 6 \qquad A_y = 0 \qquad A_z = 0$$
$$B_x = 4\cos 30° = 2\sqrt{3} \qquad B_y = 4 \operatorname{sen} 30° = 2 \qquad B_z = 0$$

Definiendo $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, tenemos, de las ecuaciones (1.27), que

$$C_x = (0)(0) - (0)(2) = 0$$
$$C_y = (0)(2\sqrt{3}) - (6)(0) = 0$$
$$C_z = (6)(2) - (0)(2\sqrt{3}) = 12$$

El producto vectorial $\vec{C}$ tiene sólo una componente sobre el eje $+z$. La magnitud concuerda con el resultado obtenido antes, como debería ser.

EVALUAR: En este ejemplo, el primer enfoque fue más directo porque conocíamos las magnitudes de los vectores y el ángulo entre ellos y, además, ambos vectores estaban en uno de los planos del sistema de coordenadas. Sin embargo, muchas veces habrá que obtener el producto cruz de dos vectores con una orientación menos cómoda, o de los que sólo se dan las componentes. En tales casos, el segundo enfoque es más directo.

Evalúe su comprensión de sección 1.10 El vector $\vec{A}$ tiene magnitud 2 y el vector $\vec{B}$ tiene magnitud 3. Se sabe que el ángulo ϕ entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es 0, 90 o 180°. Para cada una de las siguientes situaciones, determine cuál debe ser el valor de ϕ. (En cada situación puede haber más de una respuesta correcta.) *a)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$; *b)* $\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0}$; *c)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = 6$; *d)* $\vec{A} \cdot \vec{B} = -6$; *e)* (magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) $= 6$.

CAPÍTULO 1 RESUMEN

Cantidades y unidades físicas: Las cantidades físicas fundamentales de la mecánica son masa, longitud y tiempo. Las unidades del SI básicas correspondientes son el kilogramo, el metro y el segundo. Las unidades derivadas para otras cantidades físicas son productos o cocientes de las unidades básicas. Las ecuaciones deben ser dimensionalmente congruentes. Sólo pueden sumarse dos términos cuando tienen las mismas unidades. (Véanse los ejemplos 1.1 y 1.2.)

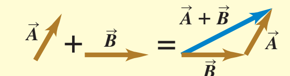
Cifras significativas: La exactitud de una medición puede indicarse con el número de cifras significativas o dando una incertidumbre. El resultado de un cálculo no suele tener más cifras significativas que los datos. Cuando sólo disponemos de estimaciones burdas como datos, podemos estimar el orden de magnitud del resultado. (Véanse los ejemplos 1.3 y 1.4.)

Cifras significativas en magenta

$$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{0.424\text{ m}}{2(0.06750\text{ m})} = 3.14$$

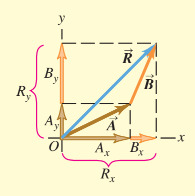
$$123.62 + 8.9 = 132.5$$

Escalares, vectores y suma de vectores: Las cantidades escalares son números y se combinan con la aritmética usual. Las cantidades vectoriales tienen tanto dirección como magnitud, y se combinan según las reglas de la suma vectorial. El negativo de un vector tiene la misma magnitud pero apunta en la dirección opuesta. (Véase el ejemplo 1.5.)



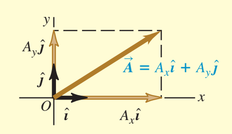
Componentes de vectores y suma de vectores: La suma vectorial puede efectuarse con componentes de vectores. La componente x de la suma vectorial $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es la suma de las componentes x de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, en tanto que las componentes y y z se obtienen de forma análoga. (Véanse los ejemplos 1.6 a 1.8.)

$$R_x = A_x + B_x$$
$$R_y = A_y + B_y \quad (1.10)$$
$$R_z = A_z + B_z$$



Vectores unitarios: Los vectores unitarios describen direcciones en el espacio y tienen magnitud uno, sin unidades. Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, alineados con los ejes x, y y z de un sistema de coordenadas rectangular, tienen especial utilidad. (Véase el ejemplo 1.9.)

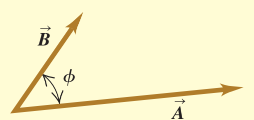
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \quad (1.16)$$



Producto escalar: El producto escalar $C = \vec{A}\cdot\vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es una cantidad escalar. Se puede expresar en términos de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo ϕ que forman, o bien, en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto escalar es conmutativo; $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero. (Véanse los ejemplos 1.10 y 1.11.)

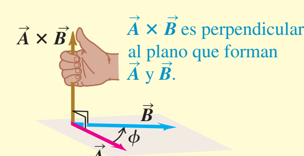
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\phi \quad (1.18)$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (1.21)$$

Producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$.



Producto vectorial: El producto vectorial $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es otro vector $\vec{C}$. $\vec{A} \times \vec{B}$ cuya magnitud depende de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ así como del ángulo ϕ entre los dos vectores. La dirección de $\vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano de los dos vectores multiplicados, según la regla de la mano derecha. Las componentes de $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ se pueden expresar en términos de las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El producto vectorial no es conmutativo; $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$. El producto vectorial de dos vectores paralelos o antiparalelos es cero. (Véase el ejemplo 1.12.)

$$C = AB\,\text{sen}\,\phi \quad (1.22)$$
$$C_x = A_yB_z - A_zB_y$$
$$C_y = A_zB_x - A_xB_z \quad (1.27)$$
$$C_z = A_xB_y - A_yB_x$$



(Magnitud de $\vec{A} \times \vec{B}$) $= AB$ sen ϕ.

Términos clave

intervalo de validez, *2*
incógnita, *3*
modelo, *3*
partícula, *3*
cantidad física, *4*
definición operativa, *4*
unidad, *4*
Sistema Internacional (SI), *4*
segundo, 5
metro, *5*
kilogramo, *5*
prefijo, *5*
dimensionalmente consistente, *7*
incertidumbre (error), *8*
exactitud, *8*
error fraccionario, *8*
error de aproximación, *8*
cifras significativas, *9*
notación científica (de potencias de 10), *9*
precisión, *10*
estimaciones de orden de magnitud, *11*
cantidad escalar, *11*
cantidad vectorial, *11*
magnitud, *11*
desplazamiento, *11*
vectores paralelos, *12*
negativo de un vector, *12*
vectores antiparalelos, *12*
suma vectorial (resultante), *13*
vectores componentes, *15*
componentes, *15*
vector unitario, *20*
producto escalar (punto), *21*
producto vectorial (cruz), *24*
regla de la mano derecha, *24*
sistema derecho, *25*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Haga que el eje $+x$ apunte al este y el eje $+y$ apunte al norte. Entonces, lo que intentamos encontrar es la componente y del vector de velocidad, el cual tiene magnitud $v = 20$ km/h y está a un ángulo $\theta = 53°$ medido desde el eje $+x$ hacia el eje $+y$. De las ecuaciones (1.6) tenemos $v_y = v \text{ sen } \theta = (20 \text{ km/h}) \text{ sen } 53° = 16$ km/h. De manera que el huracán se mueve 16 km al norte en 1 h.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

1.5 Respuesta: ii) Densidad $= (1.80 \text{ kg})/(6.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3) = 3.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Al multiplicar o al dividir, el número con menos cifras significativas controla el número de cifras significativas del resultado.

1.6 La respuesta depende de cuántos estudiantes están inscritos en el campus.

1.7 Respuestas: ii), iii) y iv) El vector $-\vec{T}$ tiene la misma magnitud que el vector $\vec{T}$, por lo que $\vec{S} - \vec{T} = \vec{S} + (-\vec{T})$ es la suma de un vector de magnitud 3 m y uno de magnitud 4 m. Esta suma tiene magnitud de 7 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son paralelos, y magnitud de 1 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son antiparalelos. La magnitud de $\vec{S} - \vec{T}$ es de 5 m si $\vec{S}$ y $-\vec{T}$ son perpendiculares, de manera que los vectores $\vec{S}$, $\vec{T}$ y $\vec{S} - \vec{T}$ forman un triángulo rectángulo 3-4-5. La respuesta i), es imposible porque la magnitud de la suma de dos vectores no puede ser mayor que la suma de las magnitudes; la respuesta v), es imposible porque la suma de dos vectores puede ser cero sólo cuando los dos vectores son antiparalelos y tiene la misma magnitud; y la respuesta vi), es imposible porque la magnitud de un vector no puede ser negativa.

1.8 Respuestas: a) sí, b) no Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ pueden tener la misma magnitud pero componentes diferentes si apuntan en direcciones diferentes. Cuando tienen las mismas componentes, sin embargo, son el mismo vector $(\vec{A} = \vec{B})$ y deben tener la misma magnitud.

1.9 Respuesta: todos tienen la misma magnitud Los cuatro vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ apuntan en direcciones diferentes, pero todos tienen la misma magnitud:

$$A = B = C = D = \sqrt{(\pm 3 \text{ m})^2 + (\pm 5 \text{ m})^2 + (\pm 2 \text{ m})^2}$$
$$= \sqrt{9 \text{ m}^2 + 25 \text{ m}^2 + 4 \text{ m}^2} = \sqrt{38 \text{ m}^2} = 6.2 \text{ m}$$

1.10 Respuestas: a) $\phi = 90°$, b) $\phi = 0°$ o $\phi = 180°$, c) $\phi = 0°$, d) $\phi = 180°$, e) $\phi = 90°$ *a*) El producto escalar es cero sólo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares. *b*) El producto vectorial es cero sólo si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos o antiparalelos. *c*) El producto escalar es igual al producto de las magnitudes $(\vec{A} \cdot \vec{B} = AB)$ sólo cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos. *d*) El producto escalar es igual al negativo del producto de las magnitudes $(\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB)$ sólo cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son antiparalelos. *e*) La magnitud del producto vectorial es igual al producto de las magnitudes $[(\text{magnitud de } \vec{A} \times \vec{B}) = AB]$ sólo cuando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P1.1. ¿Cuántos experimentos correctos necesitamos para refutar una teoría? ¿Y para demostrarla? Explique su respuesta.

P1.2. Una guía indica que, en una montaña, la pendiente de una vereda es de 120 metros por kilómetro. ¿Cómo expresaría esto con un número sin unidades?

P1.3. Suponga que se le pide calcular la tangente de 5.00 metros. ¿Es esto posible? ¿Por qué?

P1.4. Un contratista de carreteras dice que al construir la cubierta de un puente él vació 250 yardas de concreto. ¿A qué cree usted que se refería el contratista?

P1.5. ¿Qué estatura tiene usted en centímetros? ¿Cuál es su peso en newtons?

P1.6. En Estados Unidos el National Institute of Science and Technology (NIST) mantiene varias copias exactas del kilogramo estándar internacional. A pesar de una cuidadosa limpieza, estos estándares nacionales aumentan de masa a razón de 1 μg/año en promedio, en comparación con el kilogramo estándar internacional. (Se comparan cada diez años aproximadamente.) ¿Es importante este cambio aparente? Explique su respuesta.

P1.7. ¿Qué fenómenos físicos (además de un péndulo o un reloj de cesio) servirían para definir un estándar de tiempo?

P1.8. Describa cómo podría medir el espesor de una hoja de papel con una regla común.

P1.9. La cantidad $\pi = 3.14159\ldots$ no tiene dimensiones, ya que es un cociente de dos longitudes. Describa otras dos o tres cantidades geométricas o físicas adimensionales.

P1.10. ¿Cuáles son las unidades de volumen? Suponga que le dicen que un cilindro de radio r y altura h tiene un volumen dado por $\pi r^3 h$. Explique por qué esto no puede ser correcto.

P1.11. Tres arqueros disparan cuatro flechas cada uno hacia un blanco. Las cuatro flechas de Juan quedan: 10 cm arriba, 10 cm abajo, 10 cm a la derecha y 10 cm a la izquierda del centro del blanco. Las cuatro flechas de Mario quedan a menos de 1 cm de un punto que está a 20 cm del centro. Y las cuatro flechas de Felipe quedan a menos de 1 cm del centro del blanco. El juez del concurso dice que uno de los arqueros es preciso pero no exacto, otro es exacto pero no preciso, y el tercero es exacto y preciso. ¿Cuál descripción corresponde a cada arquero? Explique su razonamiento.

P1.12. Una pista de carreras circular tiene un radio de 500 m. ¿Cuál es el desplazamiento de una ciclista que sigue la pista del extremo norte al extremo sur? ¿Y cuando da una vuelta completa? Explique su razonamiento.

P1.13. ¿Puede usted encontrar dos vectores con diferente longitud que sumados den cero? ¿Qué restricciones de longitud son necesarias para que tres vectores tengan una resultante cero? Explique su razonamiento.

P1.14. A veces hablamos de la "dirección del tiempo", del pasado al futuro. ¿Eso significa que el tiempo es un vector? Explique su razonamiento.

P1.15. Los controladores de tráfico aéreo dan instrucciones a los pilotos con respecto hacia dónde deben volar. Tales instrucciones se denominan "vectores". Si éstas son las únicas instrucciones dadas, ¿se está usando correctamente el término "vector"? ¿Por qué?

P1.16. ¿Puede encontrar un vector de magnitud cero cuyas componentes sean distintas de cero? Explique su respuesta. ¿La magnitud de un vector puede ser menor que la magnitud de cualquiera de sus componentes? Explique su respuesta.

P1.17. a) ¿Tiene sentido decir que un vector es *negativo*? ¿Por qué? b) ¿Tiene sentido decir que un vector es el negativo de otro? ¿Por qué? ¿Esta respuesta contradice lo que dijo en el inciso a)?

P1.18. Si $\vec{C}$ es la suma vectorial de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, ¿qué deberá ser cierto si $C = A + B$? ¿Qué deberá ser cierto si $C = 0$?

P1.19. Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores distintos de cero, ¿es posible que *tanto* $\vec{A} \cdot \vec{B}$ y $\vec{A} \times \vec{B}$ sean cero? Explique su respuesta.

P1.20. ¿Qué resulta de $\vec{A} \cdot \vec{A}$, el producto escalar de un vector consigo mismo? ¿Y $\vec{A} \times \vec{A}$, el producto vectorial de un vector consigo mismo?

P1.21. Sea $\vec{A}$ cualquier vector distinto de cero. ¿Por qué $\vec{A}/A$ es un vector unitario y qué dirección tiene? Si θ es el ángulo entre $\vec{A}$ y el eje $+x$, explique por qué $(\vec{A}/A) \cdot \hat{\imath}$ se llama el *coseno director* de dicho eje.

P1.22. Indique cuáles de las siguientes son operaciones matemáticas correctas: a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} - \vec{C})$; b) $(\vec{A} - \vec{B}) \times \vec{C}$; c) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$; d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$; e) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$? En cada caso, justifique sus respuestas.

P1.23. Considere los dos productos vectoriales sucesivos $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ y $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$. Dé un ejemplo que ilustre la regla general de que estos dos productos vectoriales no tienen la misma magnitud o dirección. ¿Puede elegir los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de modo que esos dos productos vectoriales *sí* sean iguales? Si puede, dé un ejemplo.

P1.24. Demuestre que, sin importar lo que sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$. (*Sugerencia:* no busque una demostración matemática compleja. Más bien, revise la definición de la dirección del producto cruz.)

P1.25. a) Si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, necesariamente se concluye que $A = 0$ o que $B = 0$? Explique su respuesta. b) Si $\vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0}$, necesariamente se concluye que $A = 0$ o que $B = 0$? Explique su respuesta.

P1.26. Si $\vec{A} = \mathbf{0}$ para un vector en el plano xy, se concluye que $A_x = -A_y$? ¿Qué podría decir acerca de A_x y de A_y?

Ejercicios

Sección 1.3 Estándares y unidades
Sección 1.4 Consistencia y conversiones de unidades

1.1. A partir de la definición 1 in = 2.54 cm, determine cuántos a) kilómetros hay en 1.00 milla y b) cuántos pies hay en 1.00 km.

1.2. Según la etiqueta de un frasco de aderezo para ensalada, el volumen del contenido es 0.473 litros (L). Use sólo las conversiones 1 L = 1,000 cm^3 y 1 in = 2.54 cm para expresar dicho volumen en pulgadas cúbicas.

1.3. ¿Cuántos nanosegundos tarda la luz en viajar 1.00 ft en el vacío? (Este resultado es una cantidad útil para recordar.)

1.4. La densidad del plomo es 11.3 g/cm^3. ¿Cuál es su equivalencia en kilogramos por metro cúbico?

1.5. El motor más potente que había para el automóvil clásico Chevrolet Corvette Sting Ray modelo 1963 desarrollaba 360 caballos de fuerza y tenía un desplazamiento de 327 pulgadas cúbicas. Exprese este desplazamiento en litros (L) usando sólo las conversiones 1 L = 1,000 cm^3 y 1 in = 2.54 cm.

1.6. Un campo cuadrado que mide 100.0 m por 100.0 m tiene un área de 1.00 hectáreas. Un acre tiene un área de 43,600 ft^2. Si un campo tiene un área de 12.0 acres, ¿cuál es su equivalencia en hectáreas?

1.7. ¿Cuántos años más viejo será usted dentro de 1.00 mil millones de segundos? (Suponga que un año tiene 365 días.)

1.8. Mientras va conduciendo en un país extranjero, observa un letrero que indica el límite de velocidad en una carretera como 180,000 estadios (furlongs) por quincena. ¿Cuánto es esto en millas por hora? (Un estadio es $\frac{1}{8}$ de milla, y una quincena son 14 días. Originalmente el estadio se refería a la longitud de un surco arado.)

1.9. Cierto automóvil híbrido que consume poco combustible tiene un rendimiento de gasolina de 55.0 mpg (millas por galón). a) Si usted va manejando dicho auto en Europa y quiere comparar su rendimiento con el de otros automóviles europeos, exprese tal rendimiento en km/L (L = litro). Utilice los factores de conversión del Apéndice E. b) ¿Si el depósito de gasolina de este automóvil tiene una capacidad de 45 L, cuántas veces deberá llenar el depósito de gasolina para conducir 1,500 km?

1.10. Las conversiones que siguen son comunes en física, además de muy útiles. a) Use 1 mi = 5,280 ft y 1 h = 3,600 s para convertir 60 mph a unidades de ft/s. b) La aceleración de un objeto en caída libre es de 32 ft/s^2. Use 1 ft = 30.48 cm para expresar esta aceleración en unidades de m/s^2. c) La densidad del agua es de 1.0 g/cm^3. Convierta esta densidad a unidades de kg/m^3.

1.11. Neptunio. En el otoño de 2002, un grupo de científicos de Los Alamos National Laboratory determinó que la masa crítica del neptunio 237 es de unos 60 kg. La masa crítica de un material fisionable es la cantidad mínima que debe juntarse para iniciar una reacción en cadena. Este elemento tiene una densidad de 19.5 g/cm^3. ¿Cuál será el radio de una esfera de este material que tiene dicha masa crítica?

Sección 1.5 Incertidumbre y cifras significativas

1.12. Un valor aproximado, útil y fácil de recordar del número de segundos que hay en un año es $\pi \times 10^7$. Determine el error de aproximación en este valor aproximado. (Un año tiene 365.24 días.)

1.13. La figura 1.7 muestra el resultado de un error inaceptable en el punto de parada de un tren. a) Si un tren viaja 890 km de Berlín a París y luego rebasa el fin de la vía 10 m, ¿cuál será el error de aproximación en la distancia total recorrida? b) ¿Sería correcto escribir la distancia total cubierta por el tren como 890,010 m? Explique su respuesta.

1.14. Con una regla graduada de madera, usted determina que un lado de un trozo rectangular de lámina mide 12 mm, y usa un micrómetro para medir el ancho del trozo, obteniendo 5.98 mm. Conteste las siguientes preguntas con las cifras significativas correctas. *a*) ¿Qué área tiene el rectángulo? *b*) ¿Qué razón ancho/largo tiene el rectángulo? *c*) ¿Qué perímetro tiene el rectángulo? *d*) ¿Qué diferencia hay entre la longitud y la anchura?

1.15. Estime el error de aproximación al medir *a*) una distancia aproximada de 75 cm con una cinta métrica; *b*) una masa de unos 12 g con una balanza analítica; *c*) un lapso de aproximadamente 6 min con un cronómetro.

1.16. Un trozo rectangular de aluminio mide 5.10 ± 0.01 cm de longitud y 1.90 ± 0.01 cm de anchura. *a*) Calcule su área y la incertidumbre del área. *b*) Verifique que la incertidumbre fraccionaria del área sea igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. (Éste es un resultado general; véase el problema de desafío 1.98.)

1.17. Al comer una bolsa de galletas con chispas de chocolate, usted observa que cada una es un disco circular con diámetro de 8.50 ± 0.02 cm y espesor de 0.050 ± 0.005 cm. *a*) Calcule el volumen promedio de una galleta y la incertidumbre del volumen. *b*) Obtenga la razón diámetro/espesor y la incertidumbre de dicha razón.

Sección 1.6 Estimaciones y órdenes de magnitud

1.18. ¿Cuántos galones de gasolina se consumen en Estados Unidos en un día? Suponga que hay dos automóviles por cada tres personas, que cada auto recorre en promedio 10,000 millas por año, y que el auto promedio rinde 20 millas por galón.

1.19. Un hombre más bien ordinario de mediana edad está en el hospital para realizarse un chequeo de rutina. La enfermera escribe la cantidad de 200 en el expediente médico pero olvida anotar las unidades. ¿Cuál de las siguientes cantidades sería posible que representaran esos 200? *a*) Su masa en kilogramos; *b*) su estatura en metros; *c*) su estatura en centímetros; *d*) su estatura en milímetros; *e*) su edad en meses.

1.20. ¿Cuántas semillas de maíz se necesitan para llenar una botella de bebida gaseosa de 2 L?

1.21. ¿Cuántas palabras hay en este libro?

1.22. Cuatro astronautas están en una estación espacial esférica. *a*) Si, como suele ocurrir, cada uno de ellos inhala cerca de 500 cm^3 de aire en cada respiración, aproximadamente qué volumen de aire (en metros cúbicos) respiran estos astronautas en un año? *b*) ¿Qué diámetro (en metros) debería tener la estación espacial para contener todo este aire?

1.23. ¿Cuántas veces parpadea un ser humano común durante toda su vida?

1.24. ¿Cuántas veces late el corazón de una persona en su vida? ¿Cuántos galones de sangre bombea? (Estime que el corazón bombea 50 cm^3 de sangre en cada latido.)

1.25. En la ópera *El anillo de los Nibelungos* de Wagner, la diosa Freya es rescatada con una pila de oro con la altura y anchura suficientes para ocultarla. Estime el valor monetario de esta pila. La densidad del oro es de 19.3 g/cm^3, y su valor es aproximadamente de \$10 por gramo (aunque esto varía).

1.26. Usted utiliza agua para diluir cantidades pequeñas de sustancias químicas en el laboratorio, gota a gota. ¿Cuántas gotas de agua hay en una botella de 1.0 L? (*Sugerencia:* comience por calcular el diámetro de una gota de agua.)

1.27. ¿Cuántas pizzas consumen los estudiantes de su escuela cada año escolar?

1.28. ¿Cuántos billetes de un dólar tendría que apilar para llegar hasta la Luna? ¿Eso sería más barato que construir y enviar ahí una nave espacial? (*Sugerencia:* comience doblando un billete de un dólar para saber cuantos de sus espesores hacen 1.0 mm.)

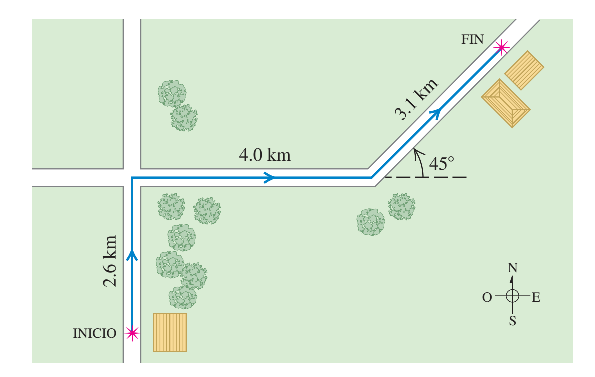
1.29. ¿Cuánto costaría tapizar todo Estados Unidos (incluyendo Alaska y Hawai) con billetes de un dólar? ¿Cuánto tendría que aportar cada estadounidense?

Sección 1.7 Vectores y suma de vectores

1.30. Al oír el cascabel de una serpiente, usted realiza dos desplazamientos rápidos de 1.8 m y 2.4 m. Haga dibujos (a escala aproximada) que muestren cómo tales desplazamientos podrían dar una resultante de magnitud a) 4.2 m; b) 0.6 m; c) 3.0 m.

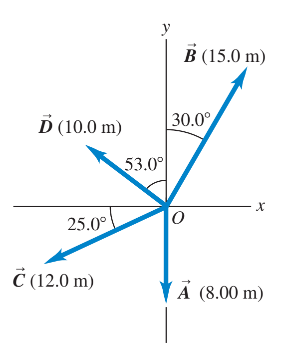
1.31. Un empleado postal conduce su camión por la ruta de la figura 1.33. Determine la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante dibujando un diagrama a escala. (En el ejercicio 1.38 se aborda de otra manera este problema.)

Figura 1.33 Ejercicios 1.31 y 1.38.



1.32. Con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1.34, use un dibujo a escala para obtener la magnitud y la dirección de *a*) la resultante $\vec{A} + \vec{B}$ y *b*) la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$. Con base en sus respuestas, determine la magnitud y la dirección de *c*) $-\vec{A} - \vec{B}$ y *d*) $\vec{B} - \vec{A}$. (El ejercicio 1.39 enfoca el problema de otra manera.)

Figura 1.34 Ejercicios 1.32, 1.35, 1.39, 1.47, 1.53 y 1.57 y problema 1.72.



1.33. Una espeleóloga está explorando una cueva y sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m 45° al este del sur, y después 280 m 30° al este del norte. Tras un cuarto desplazamiento no medido, vuelve al punto inicial. Con un diagrama a escala determine la magnitud y la dirección del cuarto desplazamiento. (El problema 1.73 enfoca de manera distinta este problema.)

Sección 1.8 Componentes de vectores

1.34. Use un dibujo a escala para obtener las componentes x y y de los siguientes vectores. Para cada vector se dan la magnitud y el ángulo que forman, medido desde el eje $+x$ hacia el eje $+y$. *a*) Magnitud 9.30 m, ángulo 60.0°; *b*) magnitud 22.0 km, ángulo 135°; *c*) magnitud 6.35 cm, ángulo 307°.

1.35. Calcule las componentes x y y de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la figura 1.34.

1.36. Sea el ángulo θ el que forma el vector $\vec{A}$ con el eje $+x$, medido en sentido antihorario a partir de ese eje. Obtenga el ángulo θ para un vector que tiene las siguientes componentes: *a*) $A_x = 2.00$ m, $A_y = -1.00$ m; *b*) $A_x = 2.00$ m, $A_y = 1.00$ m; *c*) $A_x = -2.00$ m, $A_y = 1.00$ m; *d*) $A_x = -2.00$ m, $A_y = -1.00$ m.

1.37. Un cohete enciende dos motores simultáneamente. Uno produce un empuje de 725 N directamente hacia delante; mientras que el otro da un empuje de 513 N 32.4° arriba de la dirección hacia adelante. Obtenga la magnitud y la dirección (relativa a la dirección hacia adelante) de la fuerza resultante que estos motores ejercen sobre el cohete.

1.38. Un empleado postal conduce su camión por la ruta de la figura 1.33. Use el método de componentes para determinar la magnitud y la dirección de su desplazamiento resultante. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.39. Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1.34, use el método de componentes para obtener la magnitud y la dirección de *a*) la suma vectorial $\vec{A} + \vec{B}$; *b*) la suma vectorial $\vec{B} + \vec{A}$; *c*) la diferencia vectorial $\vec{A} - \vec{B}$; *d*) la diferencia vectorial $\vec{B} - \vec{A}$.

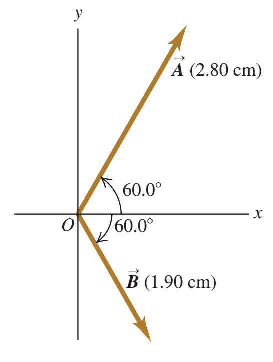
1.40. Calcule la magnitud y la dirección del vector representado por los siguientes pares de componentes: *a*) $A_x = -8.60$ cm, $A_y = 5.20$ cm; *b*) $A_x = -9.70$ m, $A_y = -2.45$ m; *c*) $A_x = 7.75$ km, $A_y = -2.70$ km.

1.41. Un profesor de física desorientado conduce 3.25 km al norte, 4.75 km al oeste y 1.50 km al sur. Calcule la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante, usando el método de componentes. En un diagrama de suma de vectores (a escala aproximada), muestre que el desplazamiento resultante obtenido del diagrama coincide cualitativamente con el obtenido con el método de componentes.

1.42. El vector $\vec{A}$ tiene componentes $A_x = 1.30$ cm, $A_y = 2.25$ cm; el vector $\vec{B}$ tiene componentes $B_x = 4.10$ cm, $B_y = -3.75$ cm. Calcule *a*) las componentes de la resultante $\vec{A} + \vec{B}$; *b*) la magnitud y la dirección de $\vec{A} + \vec{B}$; *c*) las componentes de la diferencia vectorial $\vec{B} - \vec{A}$; *d*) la magnitud y la dirección de $\vec{B} - \vec{A}$.

1.43. El vector $\vec{A}$ mide 2.80 cm y está 60.0° sobre el eje x en el primer cuadrante. El vector $\vec{B}$ mide 1.90 cm y está 60.0° bajo el eje x en el cuarto cuadrante (figura 1.35). Utilice las componentes para obtener la magnitud y la dirección de *a*) $\vec{A} + \vec{B}$; *b*) $\vec{A} - \vec{B}$; *c*) $\vec{B} - \vec{A}$. En cada caso, dibuje la suma o resta de vectores, y demuestre que sus respuestas numéricas concuerdan cualitativamente con el dibujo.

Figura 1.35 Ejercicios 1.43 y 1.59.



1.44. Un río fluye de sur a norte a 5.0 km/h. En este río, una lancha va de este a oeste, perpendicular a la corriente, a 7.0 km/h. Vista por una águila suspendida en reposo sobre la ribera, ¿qué tan rápido y en qué dirección viaja la lancha?

1.45. Use componentes de vectores para determinar la magnitud y la dirección del vector necesario para equilibrar los dos vectores que se muestran en la figura 1.36. Considere que el vector de 625 N está a lo largo del eje $-y$, y que el eje $+x$ es perpendicular a éste y va hacia la derecha.

1.46. En un plano vertical, dos cuerdas ejercen fuerzas de igual magnitud sobre un peso colgante, pero tiran con un ángulo de 86.0° entre sí. ¿Qué tirón ejerce cada cuerda si el tirón resultante es de 372 N directamente hacia arriba?

Figura 1.36 Ejercicio 1.45.

875 N
120°
625 N

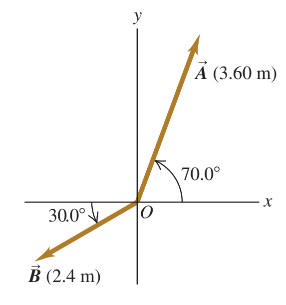
Sección 1.9 Vectores unitarios

1.47. Escriba cada uno de los vectores de la figura 1.34 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

1.48. En cada caso, encuentre las componentes x y y del vector $\vec{A}$: *a*) $\vec{A} = 5.0\hat{\imath} - 6.3\hat{\jmath}$; *b*) $\vec{A} = 11.2\hat{\jmath} - 9.91\hat{\imath}$; *c*) $\vec{A} = -15.0\hat{\imath} + 22.4\hat{\jmath}$; *d*) $\vec{A} = 5.0\vec{B}$, donde $\vec{B} = 4\hat{\imath} - 6\hat{\jmath}$.

1.49. *a*) Escriba cada uno de los vectores de la figura 1.37 en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. *b*) Utilice vectores unitarios para expresar el vector $\vec{C}$, donde $\vec{C} = 3.00\vec{A} - 4.00\vec{B}$. *c*) Determine la magnitud y la dirección de $\vec{C}$.

Figura 1.37 Ejercicio 1.49 y problema 1.86.



1.50. Dados dos vectores $\vec{A} = 4.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 5.00\hat{\imath} - 2.00\hat{\jmath}$, *a*) calcule las magnitudes de cada vector; *b*) escriba una expresión para $\vec{A} - \vec{B}$ usando vectores unitarios; *c*) obtenga la magnitud y la dirección de $\vec{A} - \vec{B}$. *d*) Dibuje un diagrama vectorial que muestre $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{A} - \vec{B}$, y demuestre que su diagrama coincide cualitativamente con su respuesta del inciso *c*).

1.51. *a*) ¿El vector $(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$ es unitario? Justifique su respuesta. *b*) ¿Un vector unitario puede tener una componente con magnitud mayor a la unidad? ¿Puede tener alguna componente negativa? En cada caso, justifique su respuesta. *c*) Si $\vec{A} = a(3.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath})$, donde a es una constante, determine el valor de a que convierte a $\vec{A}$ en un vector unitario.

Sección 1.10 Productos de vectores

1.52. *a*) Use componentes de vectores para demostrar que dos vectores conmutan tanto para la suma como para el producto escalar. *b*) Demuestre que dos vectores *no conmutan* para el producto vectorial; es decir, demuestre que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

1.53. Para los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura 1.34, obtenga los productos escalares *a*) $\vec{A} \cdot \vec{B}$; *b*) $\vec{B} \cdot \vec{C}$; *c*) $\vec{A} \cdot \vec{C}$.

1.54. *a*) Obtenga el producto escalar de los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ dados en el ejercicio 1.50. *b*) Obtenga el ángulo entre estos dos vectores.

1.55. Calcule el ángulo entre estos pares de vectores:

a) $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 2.00\hat{\imath} - 3.00\hat{\jmath}$

b) $\vec{A} = 3.00\hat{\imath} + 5.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 10.00\hat{\imath} + 6.00\hat{\jmath}$

c) $\vec{A} = -4.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = 7.00\hat{\imath} + 14.00\hat{\jmath}$

1.56. Haciendo dibujos sencillos de los productos de vectores adecuados, demuestre que *a*) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ se puede interpretar como el producto de la magnitud de $\vec{A}$ por la componente de $\vec{B}$ paralela a $\vec{A}$, o bien, la magnitud de $\vec{B}$ por la componente de $\vec{A}$ paralela a $\vec{B}$; *b*) $|\vec{A} \times \vec{B}|$ puede interpretarse como el producto de la magnitud de $\vec{A}$ por la componente de $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{A}$, o bien, la magnitud de $\vec{B}$ por la componente de $\vec{A}$ perpendicular a $\vec{B}$.

1.57. Para los vectores $\vec{A}$ y $\hat{D}$ de la figura 1.34, *a*) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \hat{D}$; *b*) calcule la magnitud y la dirección de $\hat{D} \times \vec{A}$.

1.58. Obtenga el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ (expresado en vectores unitarios) de los dos vectores dados en el ejercicio 1.50. ¿Cuál es la magnitud del producto vectorial?

1.59. Para los dos vectores de la figura 1.35, *a*) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$; *b*) obtenga la magnitud y la dirección de $\vec{B} \times \vec{A}$.

Problemas

1.60. Un acre, una unidad de agrimensura que todavía se emplea mucho, tiene una longitud de un estadio $\left(\frac{1}{8}\text{ mi}\right)$ y su anchura es un décimo de su longitud. *a*) ¿Cuántos acres hay en una milla cuadrada? *b*) ¿Cuántos pies cuadrados hay en un acre? Véase el Apéndice E. *c*) Un acre-pie es el volumen de agua que cubriría un acre de terreno plano hasta 1 ft de profundidad. ¿Cuántos galones hay en 1 acre-pie?

1.61. Un planeta similar a la Tierra. En enero de 2006, unos astrónomos informaron el descubrimiento de un planeta comparable en tamaño a la Tierra, el cual orbita otra estrella y tiene una masa de casi 5.5 veces la masa terrestre. Se cree que está compuesto por una mezcla de piedra y hielo, parecido a Neptuno. Si este planeta tiene la misma densidad que Neptuno (1.76 g/cm^3), ¿cuál será su radio expresado en *a*) kilómetros y *b*) como múltiplo del radio terrestre? Consulte el Apéndice F para más datos astronómicos.

1.62. El máser de hidrógeno. Las ondas de radio generadas por un máser de hidrógeno pueden servir como estándar de frecuencia. La frecuencia de estas ondas es 1,420,405,751.786 hertz. (Un hertz es un ciclo por segundo.) Un reloj controlado por un máser de hidrógeno tiene un error de 1 s en 100,000 años. En las siguientes preguntas, use sólo tres cifras significativas. (El gran número de cifras significativas dadas para la frecuencia tan sólo ilustra la notable exactitud con que se midió.) *a*) ¿Cuánto dura un ciclo de la onda de radio? *b*) ¿Cuántos ciclos ocurren en 1 h? *c*) ¿Cuántos ciclos habrán pasado durante la edad de la Tierra, estimada en 4.6×10^9 años? *d*) ¿Qué error tendría un reloj de máser de hidrógeno después de un lapso semejante?

1.63. Estime cuántos átomos hay en su cuerpo. (*Sugerencia:* con base en sus conocimientos de biología y química, ¿cuáles son los tipos de átomos más comunes en su cuerpo? ¿Qué masa tiene cada tipo? El Apéndice D da la masa atómica de diversos elementos, medida en unidades de masa atómica; el valor de una unidad de masa atómica (1 u) se incluye en el Apéndice F.)

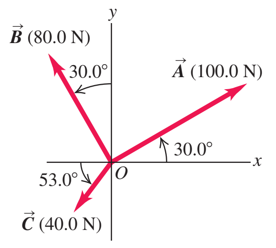
1.64. Los tejidos biológicos normalmente contienen un 98% de agua. Dado que la densidad del agua es de 1.0×10^3 kg/m^3, estime la masa de *a*) el corazón de un ser humano adulto; *b*) una célula de 0.5 μm de diámetro; *c*) una abeja.

1.65. El hierro tiene la propiedad de que un volumen de 1.00 m^3 tiene una masa de 7.86×10^3 kg (densidad $= 7.86 \times 10^3$ kg/m^3). Se desean formar cubos y esferas de hierro. Determine *a*) la longitud del lado de un cubo de hierro que tiene una masa de 200 g, y *b*) el radio de una esfera sólida de hierro que tiene una masa de 200.0 g.

1.66. Las estrellas en el Universo. Los astrónomos a menudo dicen que hay más estrellas en el Universo, que granos de arena en todas las playas de la Tierra. *a*) Puesto que un grano de arena común tiene un diámetro aproximado de 0.2 mm, estime el número de granos de arena en todas las playas de la Tierra y, por lo tanto, el número aproximado de estrellas en el Universo. Sería útil consultar un atlas y hacer mediciones. *b*) Como una galaxia ordinaria contiene aproximadamente 100,000 millones de estrellas y hay más de 100,000 millones de galaxias en el Universo conocido, estime el número de estrellas en el Universo y compare este número con el resultado que obtuvo en el inciso *a*).

1.67. Los físicos, matemáticos y otros con frecuencia utilizan números grandes. Los matemáticos inventaron el curioso nombre googol para el número 10^{100}. Comparemos algunos números grandes de la física con el *googol*. (*Nota:* consulte los valores numéricos en los apéndices y familiarícese con ellos.) *a*) Aproximadamente, ¿cuántos átomos componen la Tierra? Por sencillez, suponga una masa atómica media de 14 g/mol. El número de Avogadro da el número de átomos en un mol. *b*) ¿Como cuántos neutrones hay en una estrella de neutrones? Tales estrellas contienen casi puros neutrones y tienen aproximadamente dos veces la masa del Sol. *c*) La principal teoría del origen del Universo dice que, hace mucho tiempo, todo el Universo observable ocupaba una esfera de radio aproximadamente igual a la distancia actual de la Tierra al Sol y tenía una densidad (masa entre volumen) de 10^{15} g/cm^3. Suponiendo que un tercio de las partículas eran protones, un tercio de las partículas eran neutrones y el tercio restante eran electrones, ¿cuántas partículas había en el Universo?

Figura 1.38 Problema 1.68.



1.68. Tres cuerdas horizontales tiran de una piedra grande enterrada en el suelo, produciendo los vectores de fuerza $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que se muestran en la figura 1.38. Obtenga la magnitud y la dirección de una cuarta fuerza aplicada a la piedra que haga que la suma vectorial de las cuatro fuerzas sea cero.

1.69. Dos trabajadores tiran horizontalmente de una caja pesada, aunque uno de ellos tira dos veces más fuerte que el otro. El tirón más fuerte es hacia 25.0° al oeste del norte, y la resultante de estos dos tirones es de 350.0 N directamente hacia el norte. Use las componentes de vectores para calcular la magnitud de cada tirón y la dirección del tirón más débil.

1.70. Aterrizaje de emergencia. Un avión sale del aeropuerto de Galisto y vuela 170 km en una dirección 68° al este del norte; luego cambia el rumbo y vuela 230 km a 48° al sur del este, para efectuar inmediatamente un aterrizaje de emergencia en un potrero. ¿En qué dirección y qué distancia deberá volar una cuadrilla de rescate enviada por el aeropuerto para llegar directamente al avión averiado?

1.71. Le han pedido a usted programar un brazo robot de una línea de ensamble que se mueve en el plano *xy*. Su primer desplazamiento es $\vec{A}$; el segundo es $\vec{B}$, de magnitud 6.40 cm y dirección 63.0° medida en el sentido del eje $+x$ al eje $-y$. La resultante $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ de los dos desplazamientos también debería tener una magnitud de 6.40 cm, pero una dirección de 22.0° medida en el sentido del eje $+x$ al eje $+y$. *a*) Dibuje el diagrama de la suma de estos vectores, aproximadamente a escala. *b*) Obtenga las componentes de $\vec{A}$. *c*) Obtenga la magnitud y la dirección de $\vec{A}$.

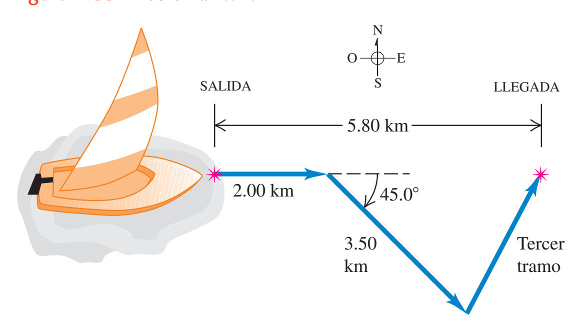
1.72. *a*) Obtenga la magnitud y la dirección del vector $\vec{R}$ que es la suma de los tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura 1.34. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{R}$ a partir de los tres vectores. *b*) Obtenga la magnitud y la dirección del vector $\vec{S} = \vec{C} - \vec{A} - \vec{B}$. En un diagrama, muestre cómo se forma $\vec{S}$ a partir de los tres vectores.

1.73. La espeleóloga del ejercicio 1.33 está explorando una cueva. Sigue un pasadizo 180 m al oeste, luego 210 m en una dirección 45° al este del sur, y después 280 m a 30° al este del norte. Tras un cuarto

desplazamiento no medido, vuelve al punto inicial. Use el método de componentes para determinar la magnitud y la dirección del cuarto desplazamiento. Dibuje el diagrama de la suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

1.74. Una marinera en un velero pequeño se topa con vientos cambiantes. Navega 2.00 km al este, luego 3.50 km al sureste y después otro tramo en una dirección desconocida. Su posición final es 5.80 km directamente al este del punto inicial (figura 1.39). Determine la magnitud y la dirección del tercer tramo. Dibuje el diagrama de suma vectorial y demuestre que concuerda cualitativamente con su solución numérica.

Figura **1.39** Problema 1.74.

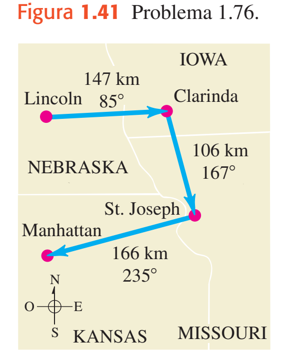


1.75. Equilibrio. Decimos que un objeto está en *equilibrio* cuando todas las fuerzas sobre él se estabilizan (suman cero). La figura 1.40 muestra una viga que pesa 124 N y que está apoyada en equilibrio por un tirón de 100.0 N y una fuerza $\vec{F}$ en el piso. La tercera fuerza sobre la viga es el peso de 124 N que actúa verticalmente hacia abajo. *a*) Utilice componentes de vectores para encontrar la magnitud y la dirección de $\vec{F}$. *b*) Verifique lo razonable de su respuesta en el inciso *a*) haciendo una solución gráfica aproximadamente a escala.

Figura **1.40** Problema 1.75.

1.76. En un vuelo de entrenamiento, una piloto estudiante vuela de Lincoln, Nebraska, a Clarinda, Iowa; luego a St. Joseph, Missouri y después a Manhattan, Kansas (figura 1.41). Las direcciones se muestran relativas al norte: 0° es norte, 90° es este, 180° es sur y 270° es oeste. Use el método de componentes para calcular *a*) la distancia que debe volar para regresar a Lincoln desde Manhattan; y *b*) la dirección (relativa al norte) que debe seguir. Ilustre su solución con un diagrama vectorial.

Figura **1.41** Problema 1.76.



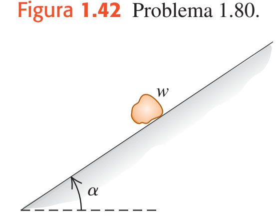
1.77. Una diseñadora está creando un nuevo logotipo para el sitio Web de su empresa. En el programa que está usando, cada pixel de un archivo de imagen tiene coordenadas (x, y), donde el origen (0, 0) está en la esquina superior izquierda de la imagen, el eje $+x$ apunta a la derecha y el eje $+y$ apunta hacia abajo. Las distancias se miden en pixeles. *a*) La diseñadora traza una línea del punto (10, 20) al punto (210, 200). Quiere trazar una segunda línea que parta de (10, 20), tenga 250 pixeles de longitud y forme un ángulo de 30° medido en sentido horario a partir de la primera línea. ¿En qué punto debería terminar la segunda línea? Dé su respuesta con precisión de enteros. *b*) Ahora la diseñadora traza una flecha que conecta el extremo inferior derecho de la primera línea con el extremo inferior derecho de la segunda. Determine la longitud y la dirección de esta flecha. Haga un diagrama que muestre las tres líneas.

1.78. Regreso. Un explorador en las espesas junglas del África ecuatorial sale de su choza. Camina 40 pasos al noreste, 80 pasos a 60° al norte del oeste y 50 pasos al sur. Suponga que todos sus pasos tienen la misma longitud. *a*) Dibuje, aproximadamente a escala, los tres vectores y su resultante. *b*) Sálvelo de perderse irremediablemente en la jungla dándole el desplazamiento, calculado con el método de componentes, que lo llevará de regreso a su choza.

1.79. Un barco zarpa de la isla de Guam y navega 285 km con rumbo de 40.0° al norte del oeste. ¿Qué rumbo deberá tomar ahora y qué distancia deberá navegar para que su desplazamiento resultante sea de 115 km directamente al este de Guam?

1.80. Una roca con peso w descansa en una ladera que se eleva con un ángulo constante α sobre la horizontal, como se muestra en la figura 1.42. Su peso es una fuerza sobre la roca con dirección vertical hacia abajo. *a*) En términos de α y w, ¿qué componente tiene el peso de la roca en la dirección paralela a la superficie de la ladera? *b*) ¿Qué componente tiene el peso en la dirección perpendicular a la superficie de la ladera? *c*) Una unidad de aire acondicionado está montada en un techo que tiene una pendiente de 35.0°. Para que la unidad no se resbale, la componente del peso de la unidad, paralela al techo, no puede exceder 550 N. ¿Cuánto puede pesar la unidad como máximo?

Figura **1.42** Problema 1.80.



1.81. Huesos y músculos. El antebrazo de una paciente en terapia pesa 25.0 N y levanta una pesa de 112.0 N. Estas dos fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo. Las únicas otras fuerzas apreciables que actúan sobre el antebrazo provienen del músculo bíceps (que actúa perpendicular al antebrazo) y la fuerza en el codo. Si el bíceps produce un empuje de 232 N cuando el antebrazo se alza 43° sobre la horizontal, determine la magnitud y la dirección de la fuerza que el codo ejerce sobre el antebrazo. (La suma de la fuerza del codo y la del bíceps debe equilibrar el peso del antebrazo y la pesa que carga, así que su resultante debe ser 132.5 N hacia arriba.)

1.82. Usted tiene hambre y decide visitar su restaurante de comida rápida preferido. Sale de su apartamento, baja 10 pisos en el elevador (cada piso tiene 3.0 m de altura) y camina 15 m al sur hacia la salida del edificio. Luego camina 0.2 km al este, da vuelta al norte y camina 0.1 km hasta la entrada del restaurante. *a*) Determine el desplazamiento entre su departamento y el restaurante. Use notación con vectores unitarios en su respuesta, dejando bien en claro qué sistema de coordenadas eligió. *b*) ¿Qué distancia recorrió por el camino que siguió de su departamento al restaurante y qué magnitud tiene el desplazamiento que calculó en el inciso *a*)?

1.83. Mientras sigue un mapa del tesoro, usted inicia en un viejo roble. Primero camina 825 m directamente al sur, luego da vuelta y camina 1.25 km a 30.0° al oeste del norte y, por último, camina 1.00 km a 40.0° al norte del este, donde usted encuentra el tesoro: ¡una biografía de Isaac Newton! *a*) Para regresar al viejo roble, ¿en qué dirección debería usted seguir y qué distancia tendrá que caminar? Utilice componentes para resolver este problema. *b*) Para saber si su

cálculo en el inciso *a*) es razonable, verifíquelo con una solución gráfica elaborada aproximadamente a escala.

1.84. Imagine que acampa con dos amigos, José y Carlos. Puesto que a los tres les gusta la privacidad, no levantan sus tiendas juntas. La de José está a 21.0 m de la suya, en dirección 23.0° al sur del este. La de Carlos está a 32.0 m de la suya, en dirección 37.0° al norte del este. ¿Qué distancia hay entre las tiendas de Carlos y de José?

1.85. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dibujan desde un punto común. El vector $\vec{A}$ tiene magnitud A y ángulo θ_A medido del eje $+x$ al eje $+y$. Las cantidades de $\vec{B}$ son B y θ_B. Entonces, $\vec{A} = A\cos\theta_A\hat{\imath} + A\,\text{sen}\,\theta_A\hat{\jmath}$, $\vec{B} = B\cos\theta_B\hat{\imath} + B\,\text{sen}\,\theta_B\hat{\jmath}$, y $\phi = |\theta_B - \theta_A|$ es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. *a*) Deduzca la ecuación (1.18) a partir de la ecuación (1.21). *b*) Deduzca la ecuación (1.22) de las ecuaciones (1.27).

1.86. Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de la figura 1.37, *a*) obtenga el producto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$, *b*) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$.

1.87. La figura 1.11c muestra un paralelogramo basado en los dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. *a*) Demuestre que la magnitud del producto cruz de estos dos vectores es igual al área del paralelogramo. (*Sugerencia:* área = base × altura.) *b*) ¿Qué ángulo hay entre el producto cruz y el plano del paralelogramo?

1.88. El vector $\vec{A}$ tiene 3.50 cm de longitud y está dirigido hacia dentro del plano de la página. El vector $\vec{B}$ apunta de la esquina inferior derecha a la esquina superior izquierda de esta página. Defina un sistema derecho de coordenadas adecuado y obtenga las tres componentes del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$, medidas en cm^2. En un diagrama, represente su sistema de coordenadas y los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A}\times\vec{B}$.

1.89. Dados dos vectores $\vec{A} = -2.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath} + 4.00\hat{k}$ y $\vec{B} = 3.00\hat{\imath} + 1.00\hat{\jmath} - 3.00\hat{k}$, *a*) obtenga la magnitud de cada vector. *b*) Escriba una expresión para la diferencia $\vec{A}-\vec{B}$, empleando vectores unitarios. *c*) Calcule la magnitud de la diferencia $\vec{A}-\vec{B}$. ¿Es igual que la magnitud de $\vec{B}-\vec{A}$? Explique su respuesta.

1.90. Ángulo de enlace del metano. En la molécula de metano, CH_4, cada átomo de hidrógeno está en la esquina de un tetraedro regular, con el átomo de carbono en el centro. En coordenadas en las que uno de los enlaces C—H esté en la dirección de $\hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$, un enlace C—H adyacente está en la dirección $\hat{\imath}-\hat{\jmath}-\hat{k}$. Calcule el ángulo entre estos dos enlaces.

1.91. Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se dibujan desde un punto común, $\vec{C} = \vec{A}+\vec{B}$. *a*) Demuestre que si $C^2 = A^2 + B^2$, el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es 90°. *b*) Demuestre que si $C^2 < A^2 + B^2$, el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es mayor que 90°. *c*) Demuestre que si $C^2 > A^2 + B^2$, el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está entre 0 y 90°.

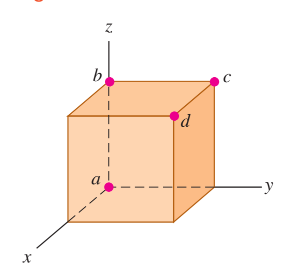
1.92. Si dibujamos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ desde un punto común, el ángulo entre ellos es ϕ. *a*) Con técnicas vectoriales, demuestre que la magnitud de su suma es

$$\sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi}$$

b) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma magnitud, ¿con qué valor de ϕ su suma tendrá la misma magnitud que $\vec{A}$ o $\vec{B}$?

1.93. Un cubo se coloca de modo que una esquina esté en el origen y tres aristas estén en los ejes *x*, *y* y *z* de un sistema de coordenadas (figura 1.43). Use vectores para calcular *a*) el ángulo entre la arista sobre el eje *z* (línea *ab*) y la diagonal que va del origen a la esquina opuesta (línea *ad*); y *b*) el ángulo entre las aristas *ad* y *ac* (la diagonal de una cara).

Figura 1.43 Problema 1.93.



1.94. Obtenga un *vector unitario* perpendicular a los dos vectores dados en el problema 1.89.

1.95. Le dan los vectores $\vec{A} = 5.0\hat{\imath} - 6.5\hat{\jmath}$ y $\vec{B} = -3.5\hat{\imath} + 7.0\hat{\jmath}$. Un tercer vector $\vec{C}$ está en el plano *xy* y es perpendicular a $\vec{A}$, y el producto escalar de $\vec{C}$ con $\vec{B}$ es 15.0. Con esta información, obtenga las componentes del vector $\vec{C}$.

1.96. Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen magnitudes $A = 3.00$ y $B = 3.00$. Su producto cruz es $\vec{A}\times\vec{B} = -5.00\hat{k} + 2.00\hat{\imath}$. ¿Qué ángulo forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

1.97. Más adelante encontraremos cantidades representadas por $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$. *a*) Demuestre que, para cualesquiera $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$. *b*) Calcule $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ para los tres vectores $\vec{A}$ tiene magnitud $A = 5.00$ y ángulo $\theta_A = 26.0°$ medido del eje $+x$ al $+y$, $\vec{B}$ tiene $B = 4.00$ y _B = 63.0° y $\vec{C}$ tiene magnitud 6.00 y sigue el eje $+z$. $\vec{A}$ y $\vec{B}$ están en el plano *xy*.

Problemas de desafío

1.98. La longitud de un rectángulo se da como $L \pm l$ y su anchura como $W \pm w$. *a*) Demuestre que la incertidumbre de su área *A* es $a = Lw + lW$. Suponga que las incertidumbres *l* y *w* son pequeñas, y como el producto *lw* es muy pequeño puede despreciarse. *b*) Demuestre que la incertidumbre fraccionaria del área es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud y la anchura. *c*) Un cuerpo regular tiene dimensiones $L \pm l$, $W \pm w$ y $H \pm h$. Obtenga la incertidumbre fraccionaria del volumen y demuestre que es igual a la suma de las incertidumbres fraccionarias de la longitud, la anchura y la altura.

1.99. Pase completo. En la Universidad Autónoma de Inmensidad (UAI), el equipo de fútbol americano registra sus jugadas con desplazamientos vectoriales, siendo el origen la posición del balón al iniciar la jugada. En cierta jugada de pase, el receptor parte de $+1.0\hat{\imath} - 5.0\hat{\jmath}$, donde las unidades son yardas, $\hat{\imath}$ es a la derecha y $\hat{\jmath}$ es hacia adelante. Los desplazamientos subsecuentes del receptor son $+9.0\hat{\imath}$ (en movimiento antes de salir la jugada), $+11.0\hat{\jmath}$ (sale hacia adelante), $-6.0\hat{\imath} + 4.0\hat{\jmath}$ (a un lado), y $+12.0\hat{\imath} + 18.0\hat{\jmath}$ (al otro lado). Mientras tanto, el mariscal de campo retrocedió $-7.0\hat{\jmath}$. ¿Qué tan lejos y en qué dirección el mariscal debe lanzar el balón? (Al igual que al entrenador, le recomendamos diagramar la situación antes de resolverla numéricamente.)

1.100. Navegación en el Sistema Solar. La nave *Mars Polar Lander* se lanzó al espacio el 3 de enero de 1999. El 3 de diciembre de 1999, el día en que la nave se posó en la superficie de Marte, las posiciones de la Tierra y Marte estaban dadas por estas coordenadas:

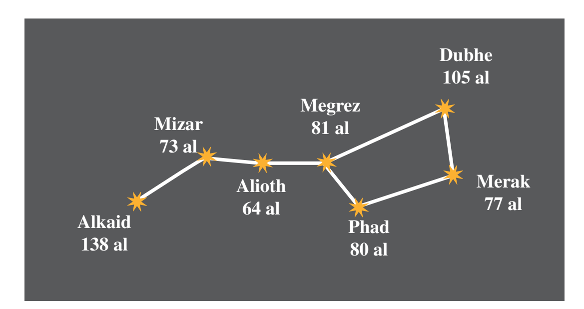
	x	*y*	*z*
Tierra	0.3182 UA	0.9329 UA	0.0000 UA
Marte	1.3087 UA	−0.4423 UA	−0.0414 UA

En estas coordenadas, el Sol está en el origen y el plano de la órbita de la Tierra es el plano *xy*. La Tierra pasa por el eje $+x$ una vez al año en el equinoccio de otoño, el primer día de otoño en el hemisferio norte (cerca del 22 de septiembre). Una UA (*unidad astronómica*) es igual a 1.496×10^8 km, la distancia media de la Tierra al Sol. *a*) Dibuje un diagrama que muestre las posiciones del Sol, la Tierra y Marte el 3 de diciembre de 1999. *b*) Calcule las siguientes distancias en UA el 3 de diciembre de 1999: i) del Sol a la Tierra; ii) del Sol a Marte; iii) de la Tierra a Marte. *c*) Visto desde la Tierra, ¿qué ángulo

había entre la dirección al Sol y la dirección a Marte el 3 de diciembre de 1999? *d*) Indique si Marte se veía desde donde usted estaba el 3 de diciembre de 1999 a media noche. (Cuando es la media noche en su posición, el Sol está en el lado opuesto de la Tierra.)

1.101. Navegación en la Osa Mayor. Las estrellas de la Osa Mayor parecen estar todas a la misma distancia de la Tierra, pero en realidad están muy lejanas entre sí. La figura 1.44 muestra las distancias desde la Tierra a cada estrella en años luz (al), es decir, la distancia que la luz viaja en un año. Un año luz es igual a 9.461×10^{15} m.

Figura 1.44 Problema de desafío 1.101.



a) Alkaid y Merak están separadas 25.6° en el firmamento. Dibuje un diagrama que muestre las posiciones relativas de Alkaid, Merak y el Sol. Calcule la distancia en años luz de Alkaid a Merak. *b*) Para un habitante de un planeta en órbita alrededor de Merak, ¿cuántos grados de separación en el cielo habría entre Alkaid y el Sol?

1.102. El vector $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, llamado *vector de posición*, apunta desde el origen (0, 0, 0) hasta un punto arbitrario en el espacio, cuyas coordenadas son (x, y, z). Use sus conocimientos de vectores para demostrar que todos los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $Ax + By + Cz = 0$, donde A, B y C son constantes, están en un plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector $A\hat{\imath} + B\hat{\jmath} + C\hat{k}$. Dibuje este vector y el plano.

2 MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir el movimiento en línea recta en términos de velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media y aceleración instantánea.
- Cómo interpretar gráficas de posición contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo para el movimiento en línea recta.
- Cómo resolver problemas que impliquen movimiento en línea recta con aceleración constante, incluyendo problemas de caída libre.
- Cómo analizar el movimiento en línea recta cuando la aceleración no es constante.

? Un velocista común acelera durante el primer tercio de la carrera y desacelera gradualmente en el resto de la competencia. ¿Es correcto decir que un corredor está *acelerando* conforme desacelera durante los dos tercios finales de la carrera?



¿Qué distancia debe recorrer un avión comercial antes de alcanzar la rapidez de despeje? Cuando lanzamos una pelota de béisbol verticalmente, ¿qué tanto sube? Cuando se nos resbala un vaso de la mano, ¿cuánto tiempo tenemos para atraparlo antes de que choque contra el piso? Éste es el tipo de preguntas que usted aprenderá a contestar en este capítulo. Iniciamos nuestro estudio de física con la *mecánica*, que es el estudio de las relaciones entre fuerza, materia y movimiento. En este capítulo y el siguiente estudiaremos la *cinemática*, es decir, la parte de la mecánica que describe el movimiento. Después veremos la *dinámica*: la relación entre el movimiento y sus causas.

En este capítulo nos concentramos en el tipo de movimiento más simple: un cuerpo que viaja en línea recta. Para describir este movimiento, introducimos las cantidades físicas *velocidad* y *aceleración*, las cuales en física tienen definiciones sencillas; aunque son más precisas y algo distintas de las empleadas en el lenguaje cotidiano. Un aspecto importante de las definiciones de velocidad y aceleración en física es que tales cantidades son *vectores*. Como vimos en el capítulo 1, esto significa que tienen tanto magnitud como dirección. Aquí nos interesa sólo el movimiento rectilíneo, por lo que no necesitaremos aún toda el álgebra vectorial; no obstante, el uso de vectores será esencial en el capítulo 3, al considerar el movimiento en dos o tres dimensiones.

Desarrollaremos ecuaciones sencillas para describir el movimiento rectilíneo en el importante caso en que la aceleración es constante. Un ejemplo es el movimiento de un objeto en caída libre. También consideraremos situaciones en las que la aceleración varía durante el movimiento. En estos casos habrá que integrar para describir el movimiento. (Si no ha estudiado integración aún, la sección 2.6 es opcional.)

2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

Suponga que una piloto de autos de arrancones conduce su vehículo por una pista recta (figura 2.1). Para estudiar su movimiento, necesitamos un sistema de coordenadas. Elegimos que el eje x vaya a lo largo de la trayectoria recta del auto, con el origen O en la línea de salida. También elegimos un punto en el auto, digamos su extremo delantero, y representamos todo el vehículo con ese punto y lo tratamos como una **partícula**.

Una forma útil de describir el movimiento de la partícula —es decir, el punto que representa el automóvil— es en términos del cambio en su coordenada x durante un intervalo de tiempo. Suponga que 1.0 s después del arranque el frente del vehículo está en el punto P_1, a 19 m del origen, y que 4.0 s después del arranque está en el punto P_2, a 277 m del origen. El *desplazamiento* de la partícula es un vector que apunta de P_1 a P_2 (véase la sección 1.7). La figura 2.1 muestra que este vector apunta a lo largo del eje x. La componente x del desplazamiento es simplemente el cambio en el valor de x, (277 m − 19 m) = 258 m, que hubo en un lapso de (4.0 s − 1.0 s) = 3.0 s. Definimos la **velocidad media** del auto durante este intervalo de tiempo como una cantidad *vectorial*, cuya componente x es el cambio en x dividido entre el intervalo de tiempo: (258 m)/(3.0 s) = 86 m/s.

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo elegido. Durante un lapso de 3.0 s *antes* del arranque, la velocidad media fue cero, porque el auto estaba en reposo en la línea de salida y tuvo un desplazamiento cero.

Generalicemos el concepto de velocidad media. En el tiempo t_1 el auto está en el punto P_1, con la coordenada x_1, y en el tiempo t_2 está en el punto P_2 con la coordenada x_2. El desplazamiento del auto en el intervalo de t_1 a t_2 es el vector de P_1 a P_2. La componente x del desplazamiento, denotada con Δx, es el cambio en la coordenada x:

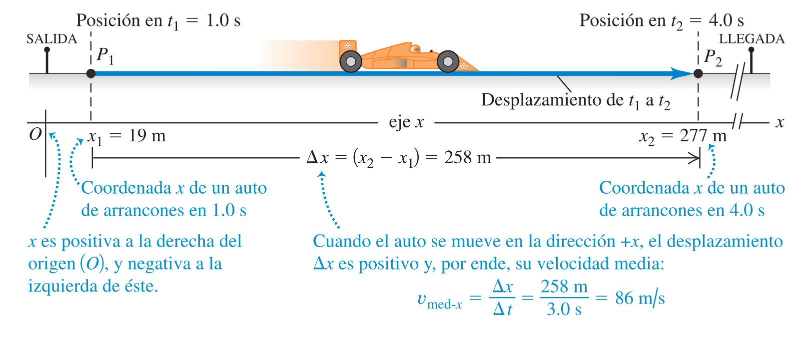
$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.1}$$

El auto de arrancones se mueve sólo a lo largo del eje x, de manera que las componentes y y z del desplazamiento son iguales a cero.

CIUDADO **El significado de Δx** Note que Δx *no* es el producto de Δ y x; es sólo un símbolo que significa "el cambio en la cantidad x". Siempre usaremos la letra griega mayúscula Δ (delta) para representar un *cambio* en cierta cantidad, calculada restando el valor *inicial* del valor *final*, y nunca a la inversa. Asimismo, el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 es Δt, el cambio en la cantidad t: $\Delta t = t_2 - t_1$ (tiempo final menos tiempo inicial).

La componente x de la velocidad promedio, o **velocidad media**, es la componente x del desplazamiento, Δx, dividida entre el intervalo de tiempo Δt en el que ocurre el desplazamiento. Usamos el símbolo $v_{\text{med-}x}$ para representar velocidad media (el

2.1 Posiciones de un auto de arrancones en dos instantes durante su recorrido.



subíndice "med" indica que se trata de un valor promedio y el subíndice x indica que ésta es la componente x):

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(velocidad media, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.2)$$

En el ejemplo del auto de arrancones teníamos $x_1 = 19$ m, $x_2 = 277$ m, $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 4.0$ s, así que la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{277\ \text{m} - 19\ \text{m}}{4.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s}} = \frac{258\ \text{m}}{3.0\ \text{s}} = 86\ \text{m/s}$$

La velocidad media del auto es positiva. Esto significa que, durante el intervalo, la coordenada x aumentó y el auto se movió en la dirección $+x$ (a la derecha en la figura 2.1).

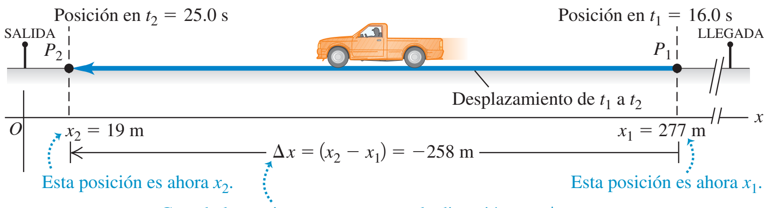
Si una partícula se mueve en la dirección x *negativa* durante un intervalo de tiempo, su velocidad media en ese lapso es negativa. Por ejemplo, suponga que la camioneta de un juez se mueve hacia la izquierda sobre la pista (figura 2.2). La camioneta está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. Entonces, $\Delta x = (19\ \text{m} - 277\ \text{m}) = -258$ m y $\Delta t = (25.0\ \text{s} - 16.0\ \text{s}) = 9.0$ s. La componente x de la velocidad media es $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t = (-258\ \text{m})/(9.0\ \text{s}) = -29$ m/s.

Hay algunas reglas sencillas para la velocidad media. **Siempre que x sea positiva y aumente o sea negativa y se vuelva menos negativa, la partícula se mueve en la dirección $+x$ y $v_{\text{med-}x}$ es positiva** (figura 2.1). **Siempre que x sea positiva y disminuya, o sea negativa y se vuelva más negativa, la partícula se mueve en la dirección $-x$ y $v_{\text{med-}x}$ es negativa** (figura 2.2).

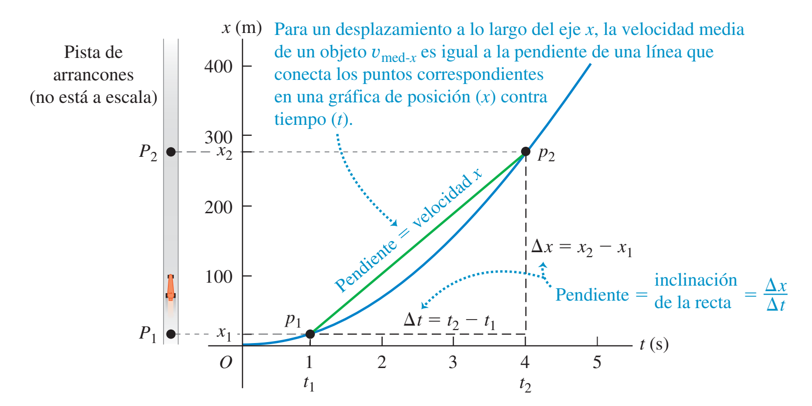
CUIDADO **Elección de la dirección x positiva** No sucumba a la tentación de pensar que una velocidad media positiva implica necesariamente movimiento a la derecha, como en la figura 2.1, y una velocidad media negativa implica movimiento a la izquierda, como en la figura 2.2. Tales conclusiones son correctas *sólo* si la dirección $+x$ es hacia la derecha, como elegimos en las figuras 2.1 y 2.2. Igualmente podríamos haber decidido que la dirección $+x$ fuera hacia la izquierda, con el origen en la llegada. Entonces, el auto habría tenido velocidad media negativa; y la camioneta del juez, positiva. En casi todos los problemas, podremos elegir la dirección del eje de coordenadas. Una vez tomada la decisión, ¡*deberá* tomarse en cuenta al interpretar los signos de $v_{\text{med-}x}$ y otras cantidades que describen el movimiento!

En el movimiento rectilíneo por lo general llamaremos a Δx el desplazamiento y a $v_{\text{med-}x}$ la velocidad media. Sin embargo, no olvide que éstas son realmente las componentes x de cantidades vectoriales que, en este caso especial, *sólo* tienen componentes x. En el capítulo 3, los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración tendrán dos o tres componentes distintas de cero.

La figura 2.3 es una gráfica de la posición del auto de arrancones en función del tiempo, es decir, una **gráfica *x*-*t***. La curva de la figura *no* representa la trayectoria del auto; ésta es una línea recta, como se observa en la figura 2.1. Más bien, la gráfica es una forma de representar visualmente cómo cambia la posición del auto con el



2.2 Posiciones de la camioneta de un juez en dos instantes durante su movimiento. Los puntos P_1 y P_2 ahora se refieren a las posiciones de la camioneta, por lo que son diferentes de las de la figura 2.1.



2.3 La posición de un auto de arrancones en función del tiempo.

tiempo. Los puntos p_1 y p_2 en la gráfica corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la trayectoria del auto. La línea p_1p_2 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con cateto vertical $\Delta x = x_2 - x_1$ y cateto horizontal $\Delta t = t_2 - t_1$. Así, la velocidad media del auto $v_{med\text{-}x} = \Delta x/\Delta t$ es igual a la *pendiente* de la línea p_1p_2, es decir, el cociente del cateto vertical Δx y el cateto horizontal Δt.

La velocidad media depende sólo del desplazamiento total $\Delta x = x_2 - x_1$ que se da durante el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, no en los pormenores de lo que sucede dentro de ese intervalo. En el tiempo t_1 una motocicleta podría haber rebasado al auto de arrancones en el punto P_1 de la figura 2.1, para después reventar el motor y bajar la velocidad, pasando por P_2 en el mismo instante t_2 que el auto. Ambos vehículos tienen el mismo desplazamiento en el mismo lapso, así que tienen la misma velocidad media.

Si expresamos la distancia en metros y el tiempo en segundos, la velocidad media se mide en metros por segundo (m/s). Otras unidades de velocidad comunes son kilómetros por hora (km/h), pies por segundo (ft/s), millas por hora (mi/h) y nudos (1 nudo = 1 milla náutica/h = 6080 ft/h). La tabla 2.1 muestra algunas magnitudes típicas de velocidad.

Tabla 2.1 Magnitudes típicas de velocidad

Reptar de caracol	10^{-3} m/s
Andar rápido	2 m/s
Hombre más rápido	11 m/s
Guepardo en carrera	35 m/s
Automóvil más rápido	341 m/s
Movimiento aleatorio de moléculas de aire	500 m/s
Avión más rápido	1000 m/s
Satélite de comunicación en órbita	3000 m/s
Electrón en un átomo de hidrógeno	2×10^6 m/s
Luz que viaja en el vacío	3×10^8 m/s

Evalúe su comprensión de la sección 2.1 Cada uno de los siguientes viajes en automóvil dura una hora. La dirección x positiva es hacia el este. i) El automóvil *A* viaja 50 km al este. ii) El automóvil *B* viaja 50 km al oeste. iii) El automóvil *C* viaja 60 km al este, luego da vuelta y viaja 10 km al oeste. iv) El automóvil *D* viaja 70 km al este. v) El automóvil *E* viaja 20 km al oeste, luego da vuelta y viaja 20 km al este. *a*) Clasifique los cinco viajes en orden de velocidad media de más positivo a más negativo. *b*) ¿Cuáles viajes, si hay, tienen la misma velocidad media? *c*) ¿Para cuál viaje, si hay, la velocidad media es igual a cero?

2.2 Velocidad instantánea

Hay ocasiones en que la velocidad media es lo único que necesitamos saber acerca del movimiento de una partícula. Por ejemplo, una carrera en pista recta es en realidad una competencia para determinar quién tuvo la mayor velocidad media, $v_{med\text{-}x}$. Se entrega el premio al competidor que haya recorrido el desplazamiento Δx de la línea de salida a la de meta en el intervalo de tiempo más corto, Δt (figura 2.4).

Sin embargo, la velocidad media de una partícula durante un intervalo de tiempo no nos indica con qué rapidez, o en qué dirección, la partícula se estaba moviendo en un instante dado del intervalo. Para describir el movimiento con mayor detalle, necesitamos definir la velocidad en cualquier instante específico o punto específico del camino. Ésta es la **velocidad instantánea**, y debe definirse con cuidado.

CUIDADO **¿Cuánto tiempo dura un instante?** Note que la palabra "instante" tiene un significado un poco distinto en física que en el lenguaje cotidiano. Podemos utilizar la frase "duró sólo un instante" para referirnos a algo que duró un intervalo de tiempo muy corto. Sin embargo, en física un instante no tiene duración; es un solo valor de tiempo.

2.4 El ganador de una carrera de natación de 50 m es el nadador cuya velocidad media tenga la mayor magnitud, es decir, quien cubra el desplazamiento Δx de 50 m en el tiempo transcurrido Δt más corto.



2.5 Incluso al avanzar, la velocidad instantánea de este ciclista puede ser negativa: si está viajando en la dirección x negativa. En cualquier problema, nosotros decidimos cuál dirección es positiva y cuál es negativa.



Para obtener la velocidad instantánea del auto de la figura 2.1 en el punto P_1, movemos el segundo punto P_2 cada vez más cerca del primer punto P_1 y calculamos la velocidad media $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$ para estos desplazamientos y lapsos cada vez más cortos. Tanto Δx y Δt se hacen muy pequeños; pero su cociente no necesariamente lo hace. En el lenguaje del cálculo, el límite de $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se acerca a cero es la **derivada** de x con respecto a t y se escribe dx/dt. *La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo.* Usamos el símbolo v_x, sin "med" en el subíndice, para la **velocidad instantánea** en el eje x:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{(velocidad instantánea, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.3)$$

Siempre suponemos que Δt es positivo, así que v_x tiene el mismo signo algebraico que Δx. Un valor positivo de v_x indica que x aumenta y el movimiento es en la dirección x positiva; un valor negativo de v_x indica que x disminuye y el movimiento es en la dirección x negativa. Un cuerpo puede tener x positivo y v_x negativa, o al revés; x nos dice dónde está el cuerpo, en tanto que v_x nos indica cómo se mueve (figura 2.5).

La velocidad instantánea, igual que la velocidad media, es una cantidad vectorial. La ecuación (2.3) define su componente x. En el movimiento rectilíneo, las demás componentes de la velocidad instantánea son cero y, en este caso, llamaremos a v_x simplemente velocidad instantánea. (En el capítulo 3 veremos el caso general en el que la velocidad instantánea puede tener componentes x, y y z distintas de cero.) Al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos a la velocidad instantánea, no a la media.

Los términos "velocidad" y "rapidez" se usan indistintamente en el lenguaje cotidiano; no obstante, en física tienen diferente significado. **Rapidez** denota distancia recorrida dividida entre tiempo, con un régimen medio o instantáneo. Usaremos el símbolo v (*sin* subíndice) para denotar la rapidez instantánea, que mide qué tan rápido se mueve una partícula; la *velocidad* instantánea mide con qué rapidez *y* en qué dirección se mueve. Por ejemplo, una partícula con velocidad instantánea $v_x = 25$ m/s y otra con $v_x = -25$ m/s se mueven en direcciones opuestas con la misma rapidez instantánea de 25 m/s. La rapidez instantánea es la magnitud de la velocidad instantánea, así que no puede ser negativa.

CUIDADO **Rapidez media y velocidad media** La rapidez media, sin embargo, no es la magnitud de la velocidad media. Cuando Alexander Popov estableció un récord mundial en 1994 nadando 100.0 m en 46.74 s, su rapidez media fue de (100.0 m)/(46.74 s) = 2.139 m/s. No obstante, como nadó dos veces la longitud de una alberca de 50 m, terminó en el punto de donde partió, con un desplazamiento total de cero ¡y una *velocidad* media de cero! Tanto la rapidez media como la rapidez instantánea son escalares, no vectores, porque no contienen información de dirección.

Ejemplo 2.1 Velocidades media e instantánea

Un guepardo acecha 20 m al este del escondite de un observador (figura 2.6a). En el tiempo $t = 0$, el guepardo ataca a un antílope y empieza a correr en línea recta. Durante los primeros 2.0 s del ataque, la coordenada x del guepardo varía con el tiempo según la ecuación $x = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)t^2$. *a*) Obtenga el desplazamiento del guepardo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 2.0$ s. *b*) Calcule la velocidad media en dicho intervalo. *c*) Calcule la velocidad instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando $\Delta t = 0.1$ s, luego $\Delta t = 0.01$ s, luego $\Delta t = 0.001$ s. *d*) Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea en función del tiempo, y con ella calcule v_x en $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema requiere usar las definiciones de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea. El uso de las dos primeras implica álgebra; la última requiere cálculo para derivar.

PLANTEAR: La figura 2.6b muestra el movimiento del guepardo. Para analizar este problema, usamos la ecuación (2.1) del desplazamiento, la ecuación (2.2) de la velocidad media y la ecuación (2.3) de la velocidad instantánea.

EJECUTAR: *a*) En $t_1 = 1.0$ s, la posición x_1 del guepardo es

$$x_1 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = 25 \text{ m}$$

En $t_2 = 2.0$ s, su posición x_2 es

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2 = 40 \text{ m}$$

El desplazamiento en este intervalo es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40 \text{ m} - 25 \text{ m} = 15 \text{ m}$$

b) La velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40 \text{ m} - 25 \text{ m}}{2.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = \frac{15 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = 15 \text{ m/s}$$

c) Con $\Delta t = 0.1$ s, el intervalo es de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 1.1$ s. En t_2, la posición es

$$x_2 = 20 \text{ m} + (5.0 \text{ m/s}^2)(1.1 \text{ s})^2 = 26.05 \text{ m}$$

La velocidad media durante estos intervalos es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{26.05 \text{ m} - 25 \text{ m}}{1.1 \text{ s} - 1.0 \text{ s}} = 10.5 \text{ m/s}$$

Siga este método para calcular las velocidades medias de los intervalos de 0.01 s y 0.001 s. Los resultados son 10.05 m/s y 10.005 m/s. Al disminuir Δt, la velocidad media se acerca a 10.0 m/s, por lo que concluimos que la velocidad instantánea en $t = 1.0$ s es de 10.0 m/s.

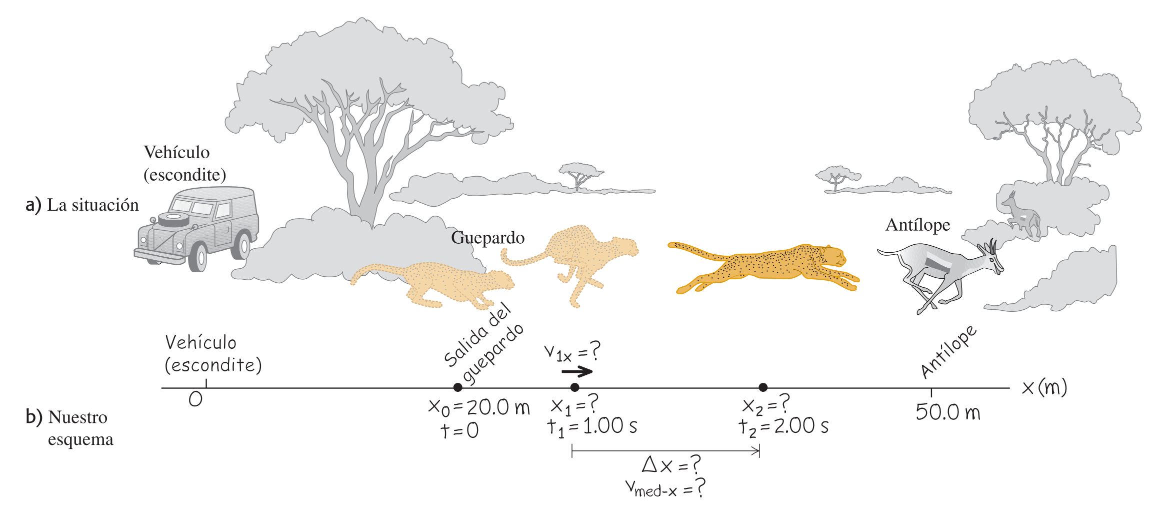
d) Al calcular la velocidad instantánea en función del tiempo, derive la expresión de x con respecto a t. La derivada de una constante es cero, y para cualquier n la derivada de t^n es nt^{n-1}, así que la derivada de t^2 es $2t$. Por lo tanto,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5.0 \text{ m/s}^2)(2t) = (10 \text{ m/s}^2)t$$

En $t = 1.0$ s, $v_x = 10$ m/s, como vimos en el inciso *c*). En $t = 2.0$ s, $v_x = 20$ m/s.

EVALUAR: Nuestros resultados muestran que el guepardo aumentó su rapidez de $t = 0$ (cuando estaba en reposo) a $t = 1.0$ s ($v_x = 10$ m/s) a $t = 2.0$ s ($v_x = 20$ m/s), lo cual es razonable: el guepardo recorrió sólo 5 m durante el intervalo $t = 0$ a $t = 1.0$ s; sin embargo, recorrió 15 m en el intervalo $t = 1.0$ s a $t = 2.0$ s.

2.6 Un guepardo agazapado en un arbusto ataca a un antílope. Los animales no están a la misma escala que el eje.





1.1 Análisis del movimiento usando diagramas

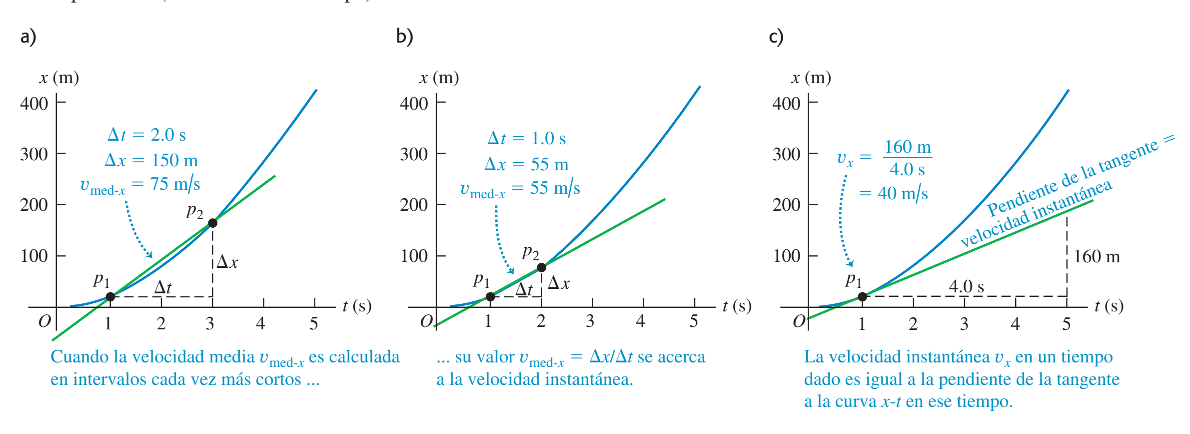
Obtención de la velocidad en una gráfica *x-t*

La velocidad de una partícula también puede obtenerse de la gráfica de la posición de la partícula en función del tiempo. Suponga que queremos conocer la velocidad del auto de la figura 2.1 en P_1. En la figura 2.1, conforme P_2 se acerca a P_1, el punto p_2 en la gráfica *x-t* de las figuras 2.7a y 2.7b se acerca al punto p_1 y la velocidad media se calcula en intervalos Δt cada vez más cortos. En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, ilustrado en la figura 2.7c, la pendiente de la línea p_1p_2 es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto p_1. *Así, en una gráfica de posición en función del tiempo para movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.*

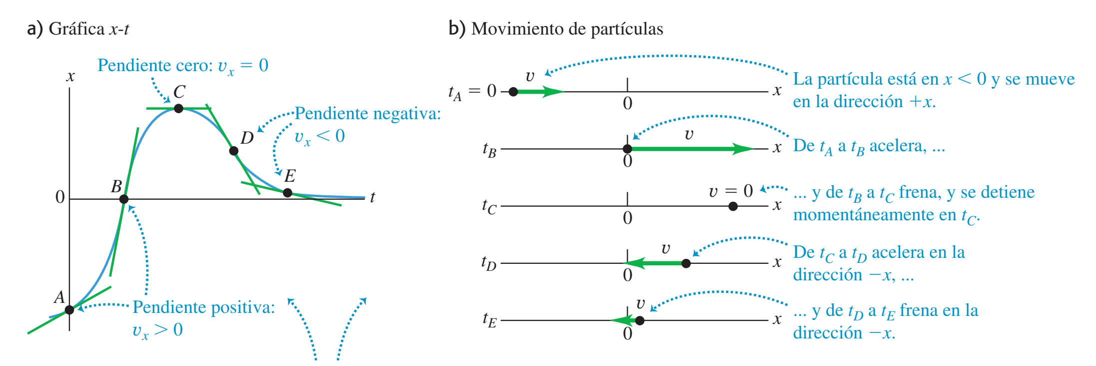
Si la tangente a la curva *x-t* sube hacia la derecha, como en la figura 2.7c, entonces su pendiente es positiva, la velocidad es positiva y el movimiento es en la dirección $+x$. Si la tangente baja hacia la derecha, la pendiente de la gráfica *x-t* y la velocidad son negativas, y el movimiento es en la dirección $-x$. Cuando la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son cero. La figura 2.8 ilustra las tres posibilidades.

La figura 2.8 muestra el movimiento de una partícula en dos formas: como *a*) una gráfica *x-t* y como *b*) un **diagrama de movimiento** que muestra la posición de la partícula en diversos instantes, como cuadros de un filme o video del movimiento de la

2.7 Uso de una gráfica *x-t* al ir de a), b) velocidad media a c) velocidad instantánea v_x. En c) obtenemos la pendiente de la tangente a la curva *x-t* dividiendo cualquier intervalo vertical (con unidades de distancia) a lo largo de la tangente entre el intervalo horizontal correspondiente (con unidades de tiempo).



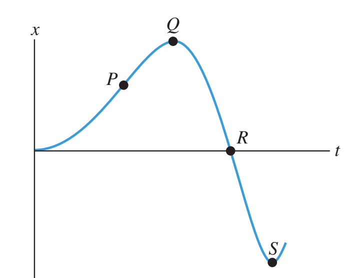
2.8 a) Gráfica *x-t* del movimiento de una partícula dada. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la velocidad en ese punto. b) Diagrama de movimiento que muestra la posición y velocidad de la partícula en los cinco instantes rotulados en el diagrama *x-t*.



partícula, junto con flechas que representan la velocidad de la partícula en cada instante. En este capítulo, usaremos tanto las gráficas *x-t* como los diagramas de movimiento para ayudarle a entender el movimiento. Le recomendamos *dibujar* una gráfica *x-t* y un diagrama de movimiento como parte de la resolución de cualquier problema que implique movimiento.

Evalúe su comprensión de la sección 2.2 La figura 2.9 es una gráfica *x-t* del movimiento de una partícula. *a*) Ordene los valores de la velocidad v_x de la partícula en los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* del más positivo al más negativo. *b*) ¿En qué puntos v_x es positiva? *c*) ¿En cuáles puntos v_x es negativa? *d*) ¿En cuáles es cero? *e*) Ordene los valores de la *rapidez* de la partícula en los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* del más rápido al más lento.





2.9 Una gráfica *x-t* para una partícula.

2.3 Aceleración media e instantánea

Así como la velocidad describe la tasa de cambio de posición con el tiempo, la *aceleración* describe la tasa de cambio de velocidad con el tiempo. Al igual que la velocidad, la aceleración es una cantidad vectorial. En el movimiento rectilíneo, su única componente distinta de cero está sobre el eje en que ocurre el movimiento. Como veremos, en el movimiento rectilíneo la aceleración puede referirse tanto a aumentar la rapidez como a disminuirla.

Aceleración media

Consideremos otra vez el movimiento de una partícula en el eje *x*. Suponga que, en el tiempo t_1, la partícula está en el punto P_1 y tiene una componente *x* de velocidad (instantánea) v_{1x}, y en un instante posterior t_2 está en P_2 y tiene una componente *x* de velocidad v_{2x}. Así, la componente *x* de la velocidad cambia en $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definimos la **aceleración media** de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como una cantidad vectorial cuya componente *x* es $a_{\text{med-}x}$ igual a Δv_x, el cambio en la componente *x* de la velocidad, dividido entre el intervalo de tiempo Δt:

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \text{(aceleración media, movimiento rectilíneo)} \tag{2.4}$$

En el movimiento rectilíneo a lo largo del eje *x*, por lo general llamaremos $v_{\text{med-}x}$ a la aceleración media. (Veremos otras componentes del vector de aceleración media en el capítulo 3.)

Si expresamos la velocidad en metros por segundo y el tiempo en segundos, la aceleración media está en metros por segundo por segundo, o bien (m/s)/s. Esto suele escribirse como m/s^2 y se lee "metros por segundo al cuadrado".

CUIDADO **Aceleración contra velocidad** ¡No confunda aceleración con velocidad! La velocidad describe el cambio de la posición de un objeto con el tiempo; nos indica con qué rapidez y en qué dirección se mueve el objeto. La aceleración describe cómo cambia la velocidad con el tiempo; es decir, nos dice cómo cambian la rapidez y la dirección del movimiento. Podría ser útil recordar la frase "aceleración es a velocidad lo que velocidad es a posición". También ayudaría imaginarse a usted mismo yendo en un automóvil con el cuerpo en movimiento. Si el auto acelera hacia delante y aumenta su rapidez, usted se sentiría empujado hacia atrás hacia su asiento; si acelera hacia atrás y disminuye su rapidez, se sentiría empujado hacia delante. Si la velocidad es constante y no hay aceleración, no sentiría sensación alguna. (Analizaremos la causa de estas sensaciones en el capítulo 4.)

Ejemplo 2.2 Aceleración media

Una astronauta sale de una nave espacial en órbita para probar una unidad personal de maniobras. Mientras se mueve en línea recta, su compañera a bordo mide su velocidad cada 2.0 s a partir del instante $t = 1.0$ s:

t	v_x	t	v_x
1.0 s	0.8 m/s	9.0 s	−0.4 m/s
3.0 s	1.2 m/s	11.0 s	−1.0 m/s
5.0 s	1.6 m/s	13.0 s	−1.6 m/s
7.0 s	1.2 m/s	15.0 s	−0.8 m/s

Calcule la aceleración media y diga si la rapidez de la astronauta aumenta o disminuye para cada uno de estos intervalos: *a*) $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s; *b*) $t_1 = 5.0$ s a $t_2 = 7.0$ s; *c*) $t_1 = 9.0$ s a $t_2 = 11.0$ s; *d*) $t_1 = 13.0$ s a $t_2 = 15.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitaremos la definición de aceleración media $a_{med\text{-}x}$. Para calcular los cambios en la rapidez, usaremos la idea de que la rapidez v es la magnitud de la velocidad instantánea v_x.

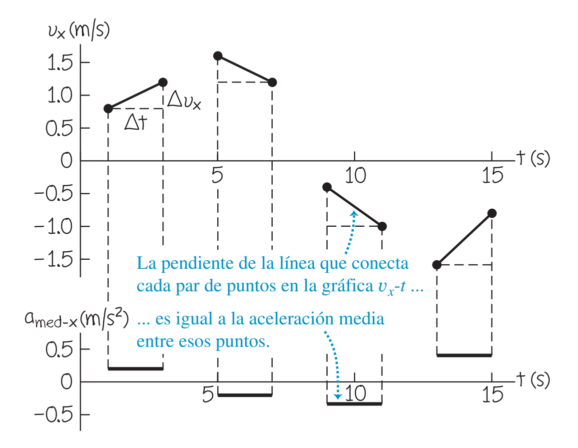
PLANTEAR: La figura 2.10 muestra nuestras gráficas. Usamos la ecuación (2.4) para determinar el valor de $a_{med\text{-}x}$ a partir del cambio de *velocidad* en cada intervalo de tiempo.

EJECUTAR: En la parte superior de la figura 2.10, graficamos la velocidad x en función del tiempo. En esta gráfica v_x-t, la pendiente de la línea que conecta los puntos inicial y final de cada intervalo es la aceleración media $a_{med\text{-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ para ese intervalo. En la parte inferior de la figura 2.10, graficamos los valores de $a_{med\text{-}x}$. Obtenemos:

a) $a_{med\text{-}x} = (1.2\text{ m/s} - 0.8\text{ m/s})/(3.0\text{ s} - 1.0\text{ s}) = 0.2\text{ m/s}^2$. La rapidez (magnitud de la velocidad instantánea) aumenta de 0.8 m/s a 1.2 m/s.

b) $a_{med\text{-}x} = (1.2\text{ m/s} - 1.6\text{ m/s})/(7.0\text{ s} - 5.0\text{ s}) = -0.2\text{ m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 1.2 m/s.

c) $a_{med\text{-}x} = [-1.0\text{ m/s} - (-0.4\text{ m/s})]/(11.0\text{ s} - 9.0\text{ s}) = -0.3\text{ m/s}^2$. La rapidez aumenta de 0.4 m/s a 1.0 m/s.



2.10 Nuestra gráfica de velocidad contra tiempo (arriba) y aceleración media contra tiempo (abajo) para la astronauta.

d) $a_{med\text{-}x} = [-0.8\text{ m/s} - (-1.6\text{ m/s})]/(15.0\text{ s} - 13.0\text{ s}) = 0.4\text{ m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 0.8 m/s.

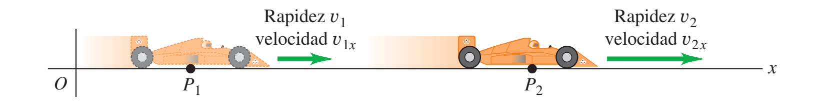
EVALUAR: Nuestro resultado indica que cuando la aceleración tiene la *misma* dirección (el mismo signo algebraico) que la velocidad inicial, como en los intervalos *a*) y *c*), la astronauta se mueve más rápidamente; cuando tiene la dirección *opuesta* (el signo opuesto) como en los intervalos *b*) y *d*), se frena. De manera que la aceleración positiva significa ir más rápido si la velocidad x es positiva [intervalo *a*)], pero frenar si la velocidad x es negativa [intervalo *d*)]. Asimismo, aceleración negativa implica ir más rápido si la velocidad x es negativa [intervalo *c*)], pero frenar si la velocidad x es positiva [intervalo *b*)].

Aceleración instantánea

Ya podemos definir la **aceleración instantánea** con el mismo procedimiento que seguimos para la velocidad instantánea. Como ejemplo, suponga que un piloto de carreras acaba de entrar en una recta como se muestra en la figura 2.11. Para definir la aceleración instantánea en P_1, tomamos el segundo punto P_2 en la figura 2.11 cada vez más cerca de P_1, de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. *La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero*. En el lenguaje del cálculo, *la aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo*. Así,

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{(aceleración instantánea, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.5)$$

2.11 Vehículo de Grand Prix en dos puntos de la recta.



Observe que la ecuación (2.5) es realmente la definición de la componente x del vector de aceleración o la **aceleración instantánea**; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes de este vector son cero. A partir de aquí, al hablar de "aceleración" nos referiremos siempre a la aceleración instantánea, no a la aceleración media.

Ejemplo 2.3 Aceleraciones media e instantánea

Suponga que la velocidad v_x del auto en la figura 2.11 en el tiempo t está dada por

$$v_x = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2$$

a) Calcule el cambio de velocidad del auto en el intervalo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 3.0$ s. *b*) Calcule la aceleración media en este intervalo. *c*) Obtenga la aceleración instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando Δt primero como 0.1 s, después como 0.01 s y luego como 0.001 s. *d*) Deduzca una expresión para la aceleración instantánea en cualquier instante y úsela para obtener la aceleración en $t = 1.0$ s y $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo es similar al ejemplo 2.1 de la sección 2.2. (Recomendamos repasar ahora ese ejemplo.) Ahí, calculamos la velocidad media en intervalos cada vez más cortos considerando el cambio en el desplazamiento, y obtuvimos la velocidad instantánea diferenciando la posición en función del tiempo. En este ejemplo, determinaremos la aceleración *media* considerando cambios de velocidad en un intervalo de tiempo. Asimismo, obtendremos la aceleración *instantánea* diferenciando la velocidad en función del tiempo.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (2.4) de la aceleración media y la ecuación (2.5) de la aceleración instantánea.

EJECUTAR: a) Primero obtenemos la velocidad en cada instante sustituyendo cada valor de t en la ecuación. En el instante $t_1 = 1.0$ s,

$$v_{1x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s})^2 = 60.5\ \text{m/s}$$

En el instante $t_2 = 3.0$ s,

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(3.0\ \text{s})^2 = 64.5\ \text{m/s}$$

El cambio en la velocidad Δv_x es

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64.5\ \text{m/s} - 60.5\ \text{m/s} = 4.0\ \text{m/s}$$

El intervalo de tiempo es $\Delta t = 3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s} = 2.0$ s.

b) La aceleración media durante este intervalo es

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}} = 2.0\ \text{m/s}^2$$

Durante el intervalo de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s, la velocidad y la aceleración media tienen el mismo signo (positivo en este caso) y el auto acelera.

c) Cuando $\Delta t = 0.1$ s, $t_2 = 1.1$ s y obtenemos

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.1\ \text{s})^2 = 60.605\ \text{m/s}$$

$$\Delta v_x = 0.105\ \text{m/s}$$

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0.105\ \text{m/s}}{0.1\ \text{s}} = 1.05\ \text{m/s}^2$$

Repita este modelo con $\Delta t = 0.01$ s y $\Delta t = 0.001$ s; los resultados son $a_{\text{med-}x} = 1.005\ \text{m/s}^2$ y $a_{\text{med-}x} = 1.0005\ \text{m/s}^2$, respectivamente. Al reducirse Δt, la aceleración media se acerca a $1.0\ \text{m/s}^2$, por lo que concluimos que la aceleración instantánea en $t = 1.0$ s es $1.0\ \text{m/s}^2$.

d) La aceleración instantánea es $a_x = dv_x/dt$. La derivada de una constante es cero y la derivada de t^2 es $2t$. Con esto, obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2]$$

$$= (0.50\ \text{m/s}^3)(2t) = (1.0\ \text{m/s}^3)t$$

Cuando $t = 1.0$ s,

$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s}) = 1.0\ \text{m/s}^2$$

Cuando $t = 3.0$ s,

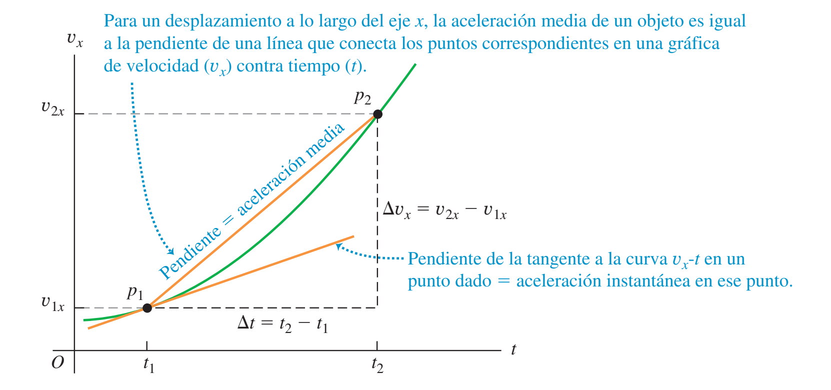
$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(3.0\ \text{s}) = 3.0\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: Observe que ninguno de los valores que obtuvimos en el inciso *d*) es igual a la aceleración media obtenida en *b*). La aceleración instantánea del auto varía con el tiempo. La tasa de cambio de la aceleración con el tiempo se suele denominar el "tirón".

Obtención de la aceleración en una gráfica v_x-t o una gráfica x-t

En la sección 2.2 interpretamos las velocidades media e instantánea en términos de la pendiente de una gráfica de posición contra tiempo. Igualmente, podemos entender mejor las aceleraciones media e instantánea graficando la velocidad instantánea v_x en el eje vertical y el tiempo t en el eje horizontal, es decir, usando una **gráfica v_x-t** (figura 2.12). Los puntos rotulados p_1 y p_2 corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la figura 2.11. La aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ durante este intervalo es la pendiente de la línea p_1p_2. Al acercarse P_2 a P_1 en la figura 2.11, p_2 se acerca a p_1 en la gráfica v_x-t de la figura 2.12, y la pendiente de la línea p_1p_2 se acerca a la pendiente de la tangente a la curva en el punto p_1. Así, *en una gráfica de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto.* En la figura 2.12, las tangentes trazadas en

2.12 Gráfica v_x-t del movimiento de la figura 2.11.



diferentes puntos en la curva tienen pendientes diferentes, de manera que la aceleración instantánea varía con el tiempo.

CUIDADO **Los signos de aceleración y velocidad** En sí mismo, el signo algebraico de la aceleración *no* nos indica si el cuerpo está acelerando o frenando; hay que comparar los signos de la velocidad y la aceleración. Si v_x y a_x tienen el *mismo* signo, el cuerpo está acelerando; si ambas son positivas, el cuerpo se mueve en la dirección positiva con rapidez creciente. Si ambas son negativas, el cuerpo se mueve en la dirección negativa con velocidad cada vez más negativa, y la rapidez aumenta nuevamente. Si v_x y a_x tienen signos *opuestos*, el cuerpo está frenando. Si v_x es positiva y a_x negativa, el cuerpo se mueve en dirección positiva con rapidez decreciente; si v_x es negativa y a_x positiva, el cuerpo se mueve en dirección negativa con una velocidad cada vez menos negativa, y nuevamente está frenando. La figura 2.13 ilustra algunas de tales posibilidades.

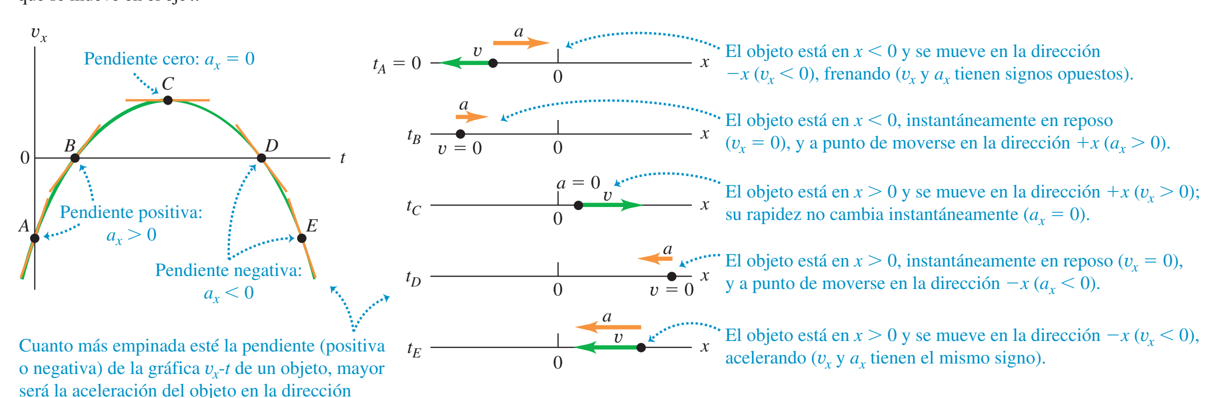


Frecuentemente llamamos "desaceleración" a una reducción de rapidez. Dado que esto puede implicar a_x positiva o negativa, dependiendo del signo de v_x, evitaremos este término.

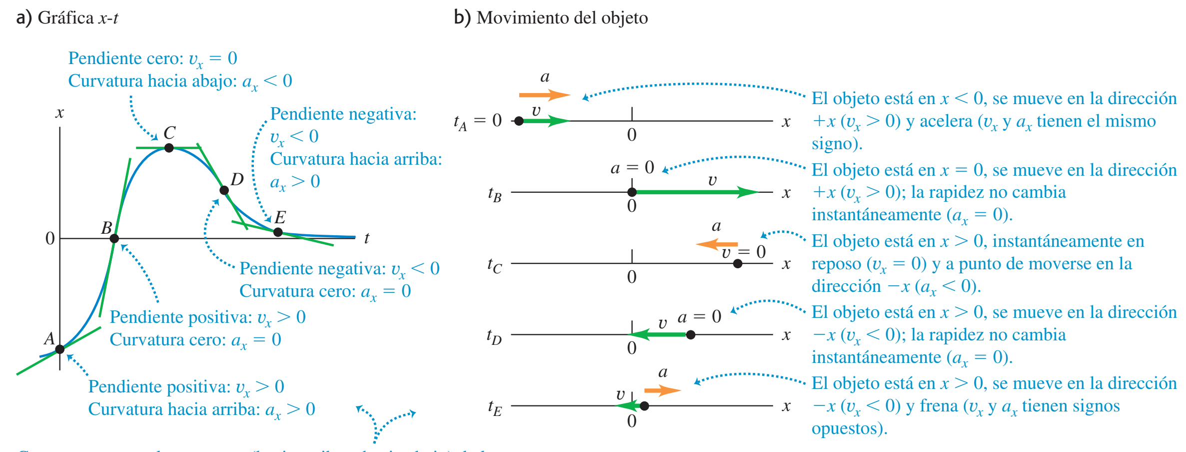
También podemos conocer la aceleración de un cuerpo a partir de una gráfica de su *posición* contra tiempo. Dado que $a_x = dv_x/dt$ y $v_x = dx/dt$, escribimos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.6}$$

2.13 a) Gráfica v_x-t del movimiento de una partícula diferente de la que se muestra en la figura 2.8. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la aceleración en ese punto. b) Diagrama de movimiento que indica la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes rotulados en la gráfica v_x-t. Las posiciones son congruentes con la gráfica v_x-t; por ejemplo, de t_A a t_B la velocidad es negativa, así que en t_B la partícula está en un valor más negativo de x que en t_A.



2.14 a) La misma gráfica x-t de la figura 2.8a. La velocidad es igual a la *pendiente* de la gráfica, y la aceleración está dada por *su concavidad* o *curvatura*. b) Diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en cada uno de los instantes rotulados en la gráfica x-t.



Es decir, a_x es la segunda derivada de x con respecto a t. La segunda derivada de cualquier función se relaciona directamente con la *concavidad* o *curvatura* de la gráfica de la función. En un punto donde la curva x-t sea cóncava hacia arriba (curvada hacia arriba), la aceleración es positiva y v_x aumenta; donde la curva x-t sea cóncava hacia abajo, la aceleración es negativa y v_x disminuye. Donde la gráfica x-t no tenga curvatura, como en un punto de inflexión, la aceleración es cero y la velocidad es constante. Estas tres posibilidades se ilustran en la figura 2.14.

Examinar la curvatura de una gráfica x-t es una manera sencilla de decidir qué *signo* tiene la aceleración. Esta técnica es menos útil para determinar valores numéricos de la aceleración, ya que es difícil medir con exactitud la curvatura de una gráfica.

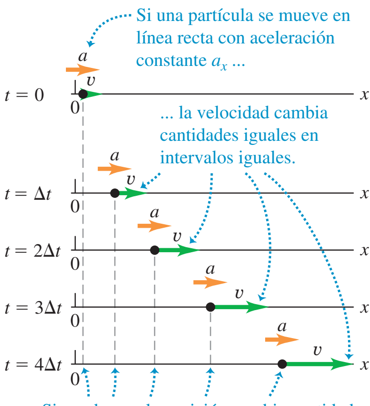
Evalúe su comprensión de la sección 2.3 Observe otra vez la gráfica x-t de la figura 2.9 al final de la sección 2.2. *a*) ¿En cuál de los puntos P, Q, R y S la aceleración a_x es positiva? *b*) ¿En cuáles es negativa? *c*) ¿En cuáles parece ser cero? *d*) En cada punto decida si la rapidez aumenta, disminuye o se mantiene constante.

2.4 Movimiento con aceleración constante

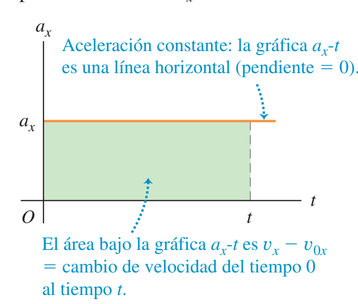
El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración *constante*. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo todo el tiempo. Se trata de una situación muy especial, aun cuando ocurre a menudo en la naturaleza; un cuerpo que cae tiene aceleración constante si los efectos del aire no son importantes. Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera. El movimiento rectilíneo con aceleración casi constante se da también en la tecnología, como cuando un jet de combate es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaviones.

La figura 2.15 es un diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de una partícula que se mueve con aceleración constante. Las figuras 2.16 y 2.17 representan este movimiento con gráficas. Puesto que la aceleración a_x es constante, la **gráfica a_x-t** (aceleración contra tiempo) de la figura 2.16 es una línea horizontal. La gráfica de velocidad contra tiempo, v_x-t, tiene *pendiente* constante porque la aceleración es constante; por lo tanto, es una línea recta (figura 2.17).

2.15 Diagrama de movimiento para una partícula que se mueve en línea recta en la dirección $+x$ con aceleración positiva constante a_x. Se muestran la posición, velocidad y aceleración en cinco instantes equiespaciados.



2.16 Gráfica aceleración-tiempo (a_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x.



Cuando la aceleración a_x es constante, la aceleración media $a_{med\text{-}x}$ para cualquier intervalo es a_x. Esto vuelve sencillo derivar las ecuaciones para la posición x y la velocidad v_x como funciones del tiempo. Para encontrar una expresión para v_x primero sustituimos $a_{med\text{-}x}$ por a_x en la ecuación (2.4):

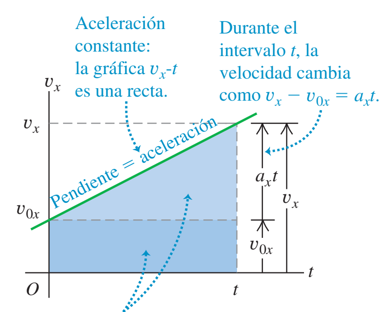
$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Sean ahora $t_1 = 0$ y t_2 cualquier instante posterior t. Simbolizamos con v_{0x} la componente x de la velocidad en el instante inicial $t = 0$; la componente x de la velocidad en el instante posterior t es v_x. Entonces, la ecuación (2.7) se convierte en

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \qquad \text{o}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \tag{2.8}$$

2.17 Gráfica velocidad-tiempo (v_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x. La velocidad inicial v_{0x} también es positiva en este caso.



Podemos interpretar la ecuación como sigue. La aceleración a_x es la tasa constante de cambio de velocidad, es decir, el cambio en la velocidad por unidad de tiempo. El término $a_x t$ es el producto del cambio en la velocidad por unidad de tiempo, a_x, y el intervalo de tiempo t; por lo tanto, es el cambio *total* de la velocidad desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante posterior t. La velocidad v_x en cualquier instante t es entonces la velocidad inicial v_{0x} (en $t = 0$) más el cambio en la velocidad $a_x t$ (véase la figura 2.17).

Otra interpretación de la ecuación (2.8) es que el cambio de velocidad $v_x - v_{0x}$ de la partícula entre $t = 0$ y un tiempo posterior t es igual al *área* bajo la gráfica a_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.16, el área bajo la gráfica a_x-t es el rectángulo verde con lado vertical a_x y lado horizontal t. El área del rectángulo es $a_x t$, que por la ecuación (2.8) es igual al cambio en velocidad $v_x - v_{0x}$. En la sección 2.6 veremos que aun cuando la aceleración no sea constante, el cambio de velocidad durante un intervalo es igual al área bajo la curva a_x-t, aunque en tal caso la ecuación (2.8) no es válida.

Ahora deduciremos una ecuación para la posición x en función del tiempo cuando la aceleración es constante. Para ello, usamos dos expresiones distintas para la velocidad media $a_{med\text{-}x}$ en el intervalo de $t = 0$ a cualquier t posterior. La primera proviene de la definición de $v_{med\text{-}x}$, ecuación (2.2), que se cumple sea constante o no la aceleración. La *posición inicial* es la posición en $t = 0$, denotada con x_0. La posición en el t posterior es simplemente x. Así, para el intervalo $\Delta t = t - 0$ y el desplazamiento $\Delta x = x - x_0$, la ecuación (2.2) da

$$v_{med\text{-}x} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.9}$$



1.1 Análisis del movimiento con diagramas
1.2 Análisis del movimiento con gráficas
1.3 Predicción de un movimiento con base en gráficas
1.4 Predicción de un movimiento con base en ecuaciones
1.5 Estrategias para resolver problemas de cinemática
1.6 Esquiador en competencia de descenso

También podemos obtener otra expresión para $v_{med\text{-}x}$ que sea válida sólo si la aceleración es constante, de modo que la gráfica v_x-t sea una línea recta (como en la figura 2.17) y la velocidad cambie a ritmo constante. En este caso, la velocidad media en cualquier intervalo es sólo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo. Para el intervalo de 0 a t,

$$v_{med\text{-}x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \tag{2.10}$$

(Esto *no* se cumple si la aceleración varía y la gráfica v_x-t es una curva, como en la figura 2.13.) También sabemos que, con aceleración constante, la velocidad v_x en un instante t está dada por la ecuación (2.8). Sustituyendo esa expresión por v_x en la ecuación (2.10),

$$\begin{aligned} v_{med\text{-}x} &= \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t) \\ &= v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Por último, igualamos las ecuaciones (2.9) y (2.11) y simplificamos el resultado:

$$v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \qquad \text{o}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.12)$$

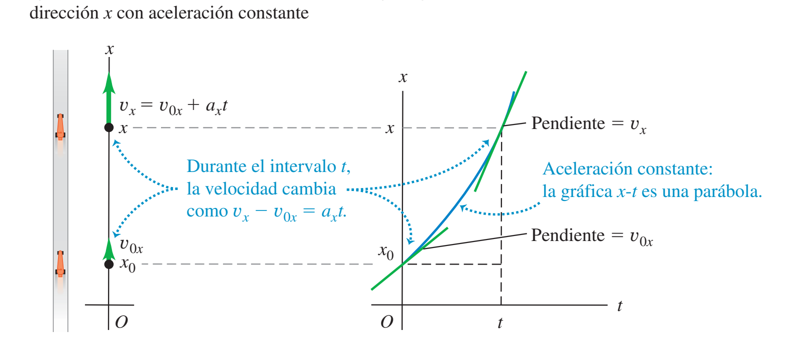
Esta ecuación (2.12) indica que si, en el instante $t = 0$, una partícula está en x_0 y tiene velocidad v_{0x}, su nueva posición x en un t posterior es la suma de tres términos: su posición inicial x_0, más la distancia $v_{0x}t$ que recorrería si su velocidad fuera constante, y una distancia adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ causada por el cambio de velocidad.

Una gráfica de la ecuación (2.12), es decir, una gráfica x-t para movimiento con aceleración constante (figura 2.18a), siempre es una *parábola*. La figura 2.18b muestra tal gráfica. La curva interseca el eje vertical (x) en x_0, la posición en $t = 0$. La pendiente de la tangente en $t = 0$ es v_{0x}, la velocidad inicial, y la pendiente de la tangente en cualquier t es la velocidad v_x en ese instante. La pendiente y la velocidad aumentan continuamente, así que la aceleración a_x es positiva. Usted puede también ver esto porque la gráfica de la figura 2.18b es cóncava hacia arriba (se curva hacia arriba). Si a_x es negativa, la gráfica x-t es una parábola cóncava hacia abajo (tiene curvatura hacia abajo).

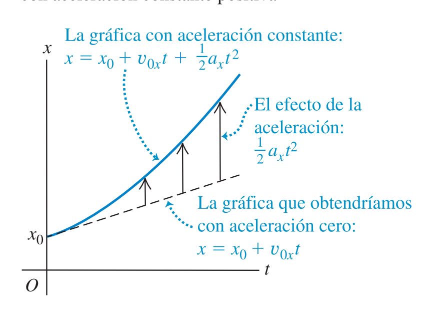
Si hay aceleración cero, la gráfica x-t es una recta; si hay una aceleración constante, el término adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ en la ecuación (2.12) para x en función de t curva la gráfica en una parábola (figura 2.19*a*). Podemos analizar la gráfica v_x-t de la misma forma. Si hay aceleración cero, esta gráfica es una línea horizontal (la velocidad es constante); sumar una aceleración constante da una pendiente para la gráfica v_x-t (figura 2.19b).

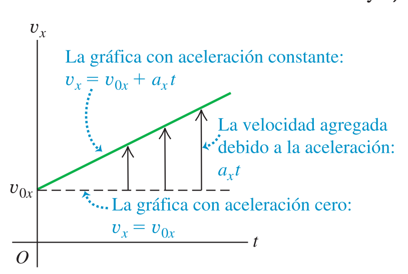
ActivPhysics ONLINE

1.8 Los cinturones de seguridad salvan vidas
1.9 Frenado con derrape
1.10 Auto arranca y luego se detiene
1.11 Resolución de problemas con dos vehículos
1.12 Auto alcanza a camión
1.13 Cómo evitar un choque por atrás



2.18 a) Movimiento rectilíneo con aceleración constante. b) Una gráfica de posición contra tiempo (x-t) para este movimiento (el mismo movimiento que se muestra en las figuras 2.15, 2.16 y 2.17). En este caso, la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} y la aceleración a_x son todas positivas.





2.19 a) Cómo una aceleración constante influye en a) la gráfica x-t y b) la gráfica v_x-t de un cuerpo.



Así como el cambio de velocidad de la partícula es igual al área bajo la gráfica a_x-t, el desplazamiento (es decir, el cambio de posición) es igual al área bajo la gráfica v_x-t. Específicamente, el desplazamiento $x - x_0$ de la partícula entre $t = 0$ y cualquier instante t posterior es igual al área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.17 el área bajo la gráfica se dividió en un rectángulo oscuro con lado vertical v_{0x}, lado horizontal t y un triángulo rectángulo claro con lado vertical $a_x t$ y lado horizontal t. El área del rectángulo es $v_{0x}t$, y la del triángulo, $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2} a_x t^2$, así que el área total bajo la curva v_x-t es

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

lo que concuerda con la ecuación (2.12).

El desplazamiento durante un intervalo siempre puede obtenerse del área bajo la curva v_x-t, incluso si la aceleración *no* es constante, aunque en tal caso la ecuación (2.12) no sería válida. (Demostraremos esto en la sección 2.6.)

Podemos comprobar si las ecuaciones (2.8) y (2.12) son congruentes con el supuesto de aceleración constante derivando la ecuación (2.12). Obtenemos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t$$

que es la ecuación (2.8). Diferenciando otra vez, tenemos simplemente

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

que concuerda con la definición de aceleración instantánea.

Con frecuencia es útil tener una relación entre posición, velocidad y aceleración (constante) que no incluya el tiempo. Para obtenerla, despejamos t en la ecuación (2.8), sustituimos la expresión resultante en la ecuación (2.12) y simplificamos:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \tfrac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferimos el término x_0 al miembro izquierdo y multiplicamos la ecuación por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^2 + v_x^2 - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^2$$

Por último, al simplificar obtenemos

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.13)$$

Podemos obtener una relación más útil igualando dos expresiones para $v_{\text{med-}x}$, ecuaciones (2.9) y (2.10), y multiplicando por t. Al hacerlo, obtenemos

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad \text{(sólo aceleración constante)} \qquad (2.14)$$

Observe que la ecuación (2.14) no contiene la aceleración a_x. Esta ecuación es útil cuando a_x es constante pero se desconoce su valor.

Las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) son las *ecuaciones del movimiento con aceleración constante*. Con ellas, podemos resolver *cualquier* problema que implique movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante.

En el caso específico de movimiento con aceleración constante ilustrado en la figura 2.15 y graficado en las figuras 2.16, 2.17 y 2.18, los valores de x_0, v_{0x} y a_x son positivos. Vuelva a dibujar las figuras para los casos en que una, dos o las tres cantidades sean negativas.

Un caso especial de movimiento con aceleración constante se da cuando la aceleración es *cero*. La velocidad es entonces constante, y las ecuaciones del movimiento se convierten sencillamente en

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$
$$x = x_0 + v_x t$$

Estrategia para resolver problemas 2.1 Movimiento con aceleración constante



IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes*: En casi todos los problemas de movimiento rectilíneo, usted podrá usar las ecuaciones de aceleración constante, aunque a veces se topará con situaciones en que la aceleración *no es* constante. En tales casos, necesitará otra estrategia (véase la sección 2.6).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Primero decida dónde está el origen de las coordenadas y cuál dirección es positiva. A menudo lo más sencillo es colocar la partícula en el origen en $t = 0$; así, $x_0 = 0$. Siempre es útil un diagrama de movimiento que muestre las coordenadas y algunas posiciones posteriores de la partícula.
2. Recuerde que elegir la dirección positiva del eje determina automáticamente las direcciones positivas de la velocidad y la aceleración. Si x es positiva a la derecha del origen, v_x y a_x también serán positivas hacia la derecha.
3. Replantee el problema con palabras y luego traduzca su descripción a símbolos y ecuaciones. ¿*Cuándo* llega la partícula a cierto punto (es decir, cuánto vale t)? ¿*Dónde* está la partícula cuando tiene cierta velocidad (esto es, cuánto vale x cuando v_x tiene ese valor)? El ejemplo 2.4 pregunta "¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?" En símbolos, esto indica "¿Cuánto vale x cuando $v_x = 25$ m/s?"
4. Haga una lista de las cantidades como x, x_0, v_x, v_{0x}, a_x y t. En general, algunas serán conocidas y otras no. Escriba los valores de las conocidas y decida cuáles de las variables son las incógnitas. No pase por alto información implícita. Por ejemplo, "un automóvil está parado ante un semáforo" implica $v_{0x} = 0$.

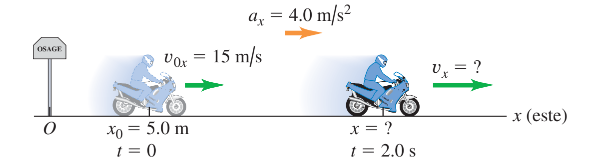
EJECUTAR *la solución:* Elija una de las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) que contenga sólo una de las incógnitas. Despeje la incógnita usando sólo símbolos, sustituya los valores conocidos y calcule el valor de la incógnita. A veces tendrá que resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Examine sus resultados para ver si son lógicos. ¿Están dentro del intervalo general de valores esperado?

Ejemplo 2.4 Cálculos de aceleración constante

Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad (figura 2.20). Su aceleración constante es de 4.0 m/s². En $t = 0$, está a 5.0 m al este del letrero, moviéndose al este a 15 m/s. *a*) Calcule su posición y velocidad en $t = 2.0$ s. *b*) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?

2.20 Un motociclista que viaja con aceleración constante.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El enunciado del problema nos dice que la aceleración es constante, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante.

PLANTEAR: Tomamos el letrero como origen de coordenadas ($x = 0$) y decidimos que el eje $+x$ apunta al este (figura 2.20, que también es un diagrama de movimiento). En $t = 0$, la posición inicial es $x_0 = 5.0$ m y la velocidad inicial es $v_{0x} = 15$ m/s. La aceleración constante es $a_x = 4.0$ m/s². Las variables desconocidas en el inciso *a*) son los valores de la posición x y la velocidad v_x en el instante posterior $t = 2.0$ s; la incógnita en el inciso *b*) es el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s.

continúa

EJECUTAR: *a*) Podemos hallar la posición x en $t = 2.0$ s usando la ecuación (2.12) que da la posición x en función del tiempo t:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$= 5.0 \text{ m} + (15 \text{ m/s})(2.0 \text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s})^2$$

$$= 43 \text{ m}$$

Podemos hallar la velocidad v_x en ese instante con la ecuación (2.8), que da la velocidad v_x en función del tiempo t:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$= 15 \text{ m/s} + (4.0 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ s}) = 23 \text{ m/s}$$

b) Queremos encontrar el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s, pero no sabemos el momento en que el motociclista lleva tal velocidad. Por lo tanto, utilizamos la ecuación (2.13), que incluye x, v_x y a_x pero no incluye t:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejando x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

$$= 5.0 \text{ m} + \frac{(25 \text{ m/s})^2 - (15 \text{ m/s})^2}{2(4.0 \text{ m/s}^2)}$$

$$= 55 \text{ m}$$

Un método alterno aunque más largo para la mima respuesta sería usar la ecuación (2.8) para averiguar primero en qué instante $v_x = 25$ m/s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{así que}$$

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25 \text{ m/s} - 15 \text{ m/s}}{4.0 \text{ m/s}^2} = 2.5 \text{ s}$$

Dado el tiempo t, podemos calcular x usando la ecuación (2.12):

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$= 5.0 \text{ m} + (15 \text{ m/s})(2.5 \text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0 \text{ m/s}^2)(2.5 \text{ s})^2$$

$$= 55 \text{ m}$$

EVALUAR: ¿Son lógicos los resultados? Según lo que calculamos en el inciso *a*), el motociclista acelera de 15 m/s (unas 34 mi/h o 54 km/h) a 23 m/s (unas 51 mi/h o 83 km/h) en 2.0 s, mientras recorre una distancia de 38 m (unos 125 ft). Ésta es una aceleración considerable, pero una motocicleta de alto rendimiento bien puede alcanzarla.

Al comparar nuestros resultados del inciso *b*) con los del inciso *a*), notamos que el motociclista alcanza una velocidad $v_x = 25$ m/s en un instante posterior y después de recorrer una distancia mayor, que cuando el motociclista tenía $v_x = 23$ m/s. Esto suena lógico porque el motociclista tiene una aceleración positiva y, por ende, se incrementa su velocidad.

Ejemplo 2.5 Dos cuerpos con diferente aceleración

Un conductor que viaja a rapidez constante de 15 m/s (unas 34 mi/h) pasa por un cruce escolar, cuyo límite de velocidad es de 10 m/s (unas 22 mi/h). En ese preciso momento, un oficial de policía en su motocicleta, que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3.0 m/s^2 (figura 2.21a). *a*) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el oficial de policía alcance al infractor? *b*) ¿A qué rapidez va el policía en ese instante? *c*) ¿Qué distancia total habrá recorrido cada vehículo hasta ahí?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El oficial de policía y el conductor se mueven con aceleración constante (cero en el caso del conductor), así que podemos usar las fórmulas que ya dedujimos.

PLANTEAR: Tomamos como origen el cruce, así que $x_0 = 0$ para ambos, y tomamos como dirección positiva a la derecha. Sea x_P la posición del policía y x_M la del conductor en cualquier instante. Las velocidades iniciales son $v_{P0x} = 0$ para el policía y $v_{M0x} = 15$ m/s para el conductor; las respectivas aceleraciones constantes son $a_{Px} = 3.0$ m/s^2 y $a_{Mx} = 0$. Nuestra incógnita en el inciso *a*) es el tiempo tras el cual el policía alcanza al conductor, es decir, cuando los dos vehículos están en la misma posición. En el inciso *b*) nos interesa la rapidez v del policía (la magnitud de su velocidad) en el tiempo obtenido en el inciso *a*). En el inciso *c*) nos interesa la posición de cualesquiera de los vehículos en ese tiempo. Por lo tanto, usaremos la ecuación (2.12) (que relaciona posición y tiempo) en los

2.21 a) Movimiento con aceleración constante que alcanza a movimiento con velocidad constante. b) Gráfica de x contra t para cada vehículo.

a)

CRUCE ESCOLAR

Oficial de policía: inicialmente en reposo, aceleración constante.

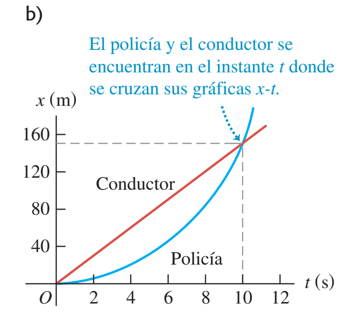
$a_{Px} = 3.0$ m/s^2

Conductor: velocidad constante.

$v_{M0x} = 15$ m/s

O x_P x_M x

b)



incisos *a*) y *c*), y la ecuación (2.8) (que relaciona velocidad y tiempo) en el inciso *b*).

EJECUTAR: *a*) Buscamos el valor del tiempo t cuando el conductor y el policía están en la misma posición. Aplicando la ecuación (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, a cada vehículo, tenemos:

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$

$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Puesto que $x_M = x_P$ en el tiempo t, igualamos las dos expresiones y despejamos t:

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15\text{ m/s})}{3.0\text{ m/s}^2} = 10\text{ s}$$

Hay *dos* instantes en que los vehículos tienen la misma coordenada x. El primero, $t = 0$, es cuando el conductor pasa por el cruce donde está estacionada la motocicleta. El segundo, $t = 10$ s, es cuando el policía alcanza al conductor.

b) Queremos la magnitud de la velocidad del policía v_{Px} en el instante t obtenido en *a*). Su velocidad en cualquier momento está dada por la ecuación (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3.0\text{ m/s}^2)t$$

Usando $t = 10$ s, hallamos $v_{Px} = 30$ m/s. Cuando el policía alcanza al conductor, va al doble de su rapidez.

c) En 10 s, la distancia recorrida por el conductor es

$$x_M = v_{M0x}t = (15\text{ m/s})(10\text{ s}) = 150\text{ m}$$

y la distancia que el policía recorre es

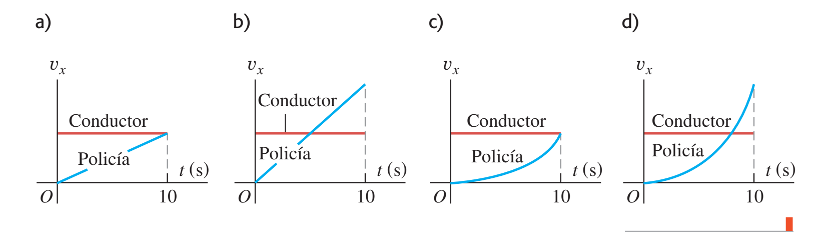
$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3.0\text{ m/s}^2)(10\text{ s})^2 = 150\text{ m}$$

Esto comprueba que cuando el policía alcanza al conductor, ambos han recorrido la misma distancia.

EVALUAR: La figura 2.21b muestra las gráficas de x contra t para ambos vehículos. Aquí vemos también que hay dos instantes en que la posición es la misma (donde se cruzan las gráficas). En ninguno de ellos los dos vehículos tienen la misma velocidad (es decir, las gráficas se cruzan con distinta pendiente). En $t = 0$, el policía está en reposo; en $t = 10$ s, la rapidez del policía es del doble que la del conductor.

Evalúe su comprensión de la sección 2.4 Se muestran cuatro posibles gráficas v_x-t para los dos vehículos del ejemplo 2.5. ¿Cuál es la gráfica correcta?





2.5 Cuerpos en caída libre

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la Antigüedad. En el siglo IV a.C., Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Diecinueve siglos después, Galileo (véase la sección 1.1) afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso.

Los experimentos muestran que si puede omitirse el efecto del aire, Galileo está en lo cierto: todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, sea cual fuere su tamaño o peso. Si además la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, y si ignoramos los pequeños efectos debidos a la rotación de la Tierra, la aceleración es constante. El modelo idealizado que surge de tales supuestos se denomina **caída libre**, aunque también incluye el movimiento ascendente. (En el capítulo 3 extenderemos el estudio de la caída libre para incluir el movimiento de proyectiles, que se mueven tanto horizontal como verticalmente.)

La figura 2.22 es una fotografía de una pelota que cae tomada con una lámpara estroboscópica que produce una serie de destellos intensos a intervalos iguales. En cada destello, la película registra la posición de la pelota. Como los intervalos entre

2.22 Fotografía con múltiples destellos de una pelota en caída libre.



ActivPhysics ONLINE

1.7 Se deja caer limonada desde un globo aerostático

1.10 Caída de un saltador con garrocha

destellos son iguales, la velocidad media de la pelota entre dos destellos es proporcional a la distancia entre las imágenes correspondientes en la fotografía. El aumento en las distancias muestra que la velocidad cambia continuamente: la pelota acelera hacia abajo. Al medir cuidadosamente constatamos que el cambio de velocidad es el mismo en cada intervalo, así que la aceleración de la pelota en caída libre es constante.

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra g. Por lo regular, usaremos el valor aproximado de g cerca de la superficie terrestre:

$$g = 9.8\ \text{m/s}^2 = 980\ \text{cm/s}^2$$
$$= 32\ \text{ft/s}^2 \qquad \text{(valor aproximado cerca de la superficie terrestre)}$$

El valor exacto varía según el lugar, así que normalmente sólo lo daremos con dos cifras significativas. Dado que g es la magnitud de una cantidad vectorial, siempre es *positiva*. En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad se debe a la fuerza de atracción de la Luna, no de la Tierra, y $g = 1.6\ \text{m/s}^2$. Cerca de la superficie del Sol, $g = 270\ \text{m/s}^2$.

En los ejemplos que siguen usamos las ecuaciones para aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4. Sugerimos al lector que repase las estrategias de resolución de problemas de esa sección antes de estudiar estos ejemplos.

Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

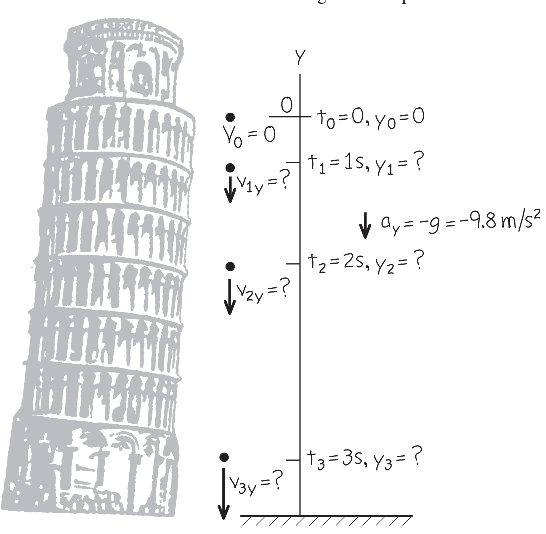
Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y su velocidad después de 1.0, 2.0 y 3.0 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: "Cae libremente" significa "tiene una aceleración constante debida a la gravedad", así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante en la determinación de nuestras incógnitas.

2.23 Una moneda en caída libre desde reposo.

La Torre Inclinada   Nuestra gráfica del problema



PLANTEAR: El lado derecho de la figura 2.23 muestra nuestro diagrama de movimiento para la moneda. El movimiento es vertical, de manera que usamos un eje de coordenadas vertical y llamaremos a la coordenada y en vez de x. Sustituiremos todas las x de las ecuaciones para aceleración constante por y. Tomaremos el origen O como el punto de partida y la dirección hacia arriba como positiva. La coordenada inicial y_0 y la velocidad inicial v_{0y} son ambas cero. La aceleración es hacia abajo, en la dirección y negativa, así que $ay = -g = -9.8\ \text{m/s}^2$. (Recuerde que por definición g *siempre* es positiva.) Por lo tanto, nuestras incógnitas son los valores de y y v_y en los tres instantes especificados. Para obtenerlos usamos las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo x por y.

EJECUTAR: En un instante t después de que se suelta la moneda, su posición y su velocidad son

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9\ \text{m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9.8\ \text{m/s}^2)t$$

Cuando $t = 1.0$ s, $y = (-4.9\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{s})^2 = -4.9$ m y $v_y = (-9.8\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{s}) = -9.8$ m/s; después de 1 s, la moneda está 4.9 m debajo del origen (y es negativa) y tiene una velocidad hacia abajo (v_y es negativa) con magnitud de 9.8 m/s.

La posición y la velocidad a los 2.0 s y 3.0 s se obtienen de la misma forma. ¿Puede usted demostrar que $y = -19.6$ m y $v_y = -19.6$ m/s en $t = 2.0$ s, y que $y = -44.1$ m y $v_y = -29.4$ m/s en $t = 3.0$ s?

EVALUAR: Todos los valores que obtuvimos para v_y son negativos porque decidimos que el eje $+y$ apuntaría hacia arriba; pero bien podríamos haber decidido que apuntara hacia abajo. En tal caso, la aceleración habría sido $a_y = +g$ y habríamos obtenido valores positivos para v_y. No importa qué eje elija; sólo asegúrese de decirlo claramente en su solución y confirme que la aceleración tenga el signo correcto.

Ejemplo 2.7 Movimiento ascendente y descendente en caída libre

Imagine que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota sale de la mano, en un punto a la altura del barandal de la azotea, con rapidez ascendente de 15.0 m/s, quedando luego en caída libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. En este lugar, $g = 9.8\ \text{m/s}^2$. Obtenga *a*) la posición y velocidad de la pelota 1.00 s y 4.00 s después de soltarla; *b*) la velocidad cuando la pelota está 5.00 m sobre el barandal; *c*) la altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza; y *d*) la aceleración de la pelota en su altura máxima.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las palabras "caída libre" en el enunciado del problema implican que la aceleración es constante y debida a la gravedad. Las incógnitas son la posición [en los incisos *a*) y *c*)], la velocidad [en los incisos *a*) y *b*)] y la aceleración [en el inciso *d*)].

PLANTEAR: En la figura 2.24 (que también es un diagrama de movimiento para la pelota), la trayectoria descendente se muestra desplazada un poco a la derecha de su posición real por claridad. Sea el origen el barandal, donde la pelota sale de la mano, y sea la dirección positiva hacia arriba. La posición inicial y_0 es cero, la velocidad inicial v_{0y} es $+15.0\ \text{m/s}$ y la aceleración es $a_Y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$. Usaremos otra vez las ecuaciones (2.12) y (2.8) para calcular la posición y la velocidad, respectivamente, en función del tiempo. En el inciso *b*), nos piden hallar la velocidad en cierta *posición,* no en cierto *tiempo,* así que nos convendrá usar la ecuación (2.13) en esa parte.

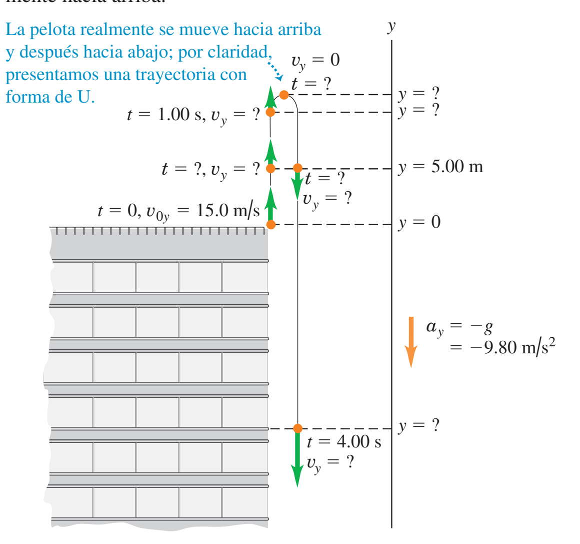
EJECUTAR: *a*) La posición y y la velocidad v_y, en cualquier instante t una vez que se suelta la pelota están dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.8), cambiando las x por y:

$$y = y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

$$= (0) + (15.0\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_yt = v_{0y} + (-g)t$$

$$= 15.0\ \text{m/s} + (-9.80\ \text{m/s}^2)t$$



2.24 Posición y velocidad de una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba.

Cuando $t = 1.00$ s, estas ecuaciones dan

$$y = +10.1\ \text{m} \qquad v_y = +5.2\ \text{m/s}$$

La pelota está 10.1 m sobre el origen (y es positiva) y se mueve hacia arriba (v_y es positiva) con rapidez de 5.2 m/s, menor que la rapidez inicial porque la pelota frena mientras asciende.

Cuando $t = 4.00$ s, las ecuaciones para y y v_y en función del tiempo t dan

$$y = -18.4\ \text{m} \qquad v_y = -24.2\ \text{m/s}$$

La pelota pasó su punto más alto y está 18.4 m *debajo* del origen (y es negativa); tiene velocidad *hacia abajo* (v_y es negativa) de magnitud 24.2 m/s. Conforme sube, la pelota pierde rapidez, luego la gana al descender; se mueve a la rapidez inicial de 15.0 m/s cuando pasa hacia abajo por su punto de lanzamiento (el origen) y continúa ganando rapidez conforme desciende por debajo de este punto.

b) La velocidad v_y en cualquier posición y está dada por la ecuación (2.13) cambiando las x por y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$

$$= (15.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)y$$

Con la pelota a 5.00 m sobre el origen, $y = +5.00$ m, así que

$$v_y^2 = (15.0\ \text{m/s})^2 + 2(-9.80\ \text{m/s}^2)(5.00\ \text{m}) = 127\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v_y = \pm 11.3\ \text{m/s}$$

Obtenemos *dos* valores de v_y, pues la pelota pasa dos veces por el punto $y = +5.00$ m (véase la figura 2.24), una subiendo con v_y positiva y otra bajando con v_y negativa.

c) En el instante en que la pelota llega al punto más alto, está momentáneamente en reposo y $v_y = 0$. La altura máxima y_1 puede obtenerse de dos formas. La primera es usar la ecuación (2.13) y sustituir $v_y = 0$, $y_0 = 0$ y $a_y = -g$:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$

$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15.0\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = +11.5\ \text{m}$$

La segunda consiste en calcular el instante en que $v_y = 0$ usando la ecuación (2.8), $v_y = v_{0y} + a_yt$, y sustituir este valor de t en la ecuación (2.12), para obtener la posición en ese instante. Por la ecuación (2.8), el instante t_1 en que la pelota llega al punto más alto es

$$v_y = 0 = v_{0y} + (-g)t_1$$

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15.0\ \text{m/s}}{9.80\ \text{m/s}^2} = 1.53\ \text{s}$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación (2.12) obtenemos

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2 = (0) + (15\ \text{m/s})(1.53\ \text{s})$$

$$+ \frac{1}{2}(-9.8\ \text{m/s}^2)(1.53\ \text{s})^2 = +11.5\ \text{m}$$

Observe que la primera forma de hallar la altura máxima es más sencilla, ya que no es necesario calcular primero el tiempo.

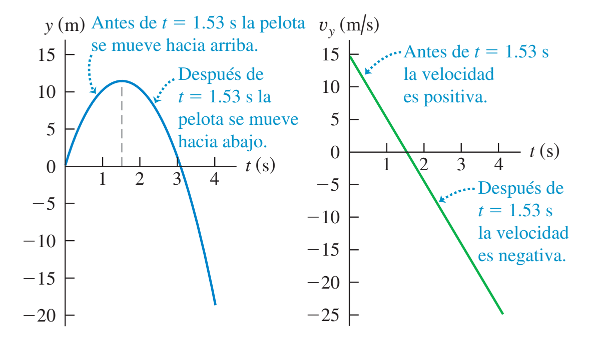
continúa

d) **CUIDADO** **Un error acerca de la caída libre** Es un error común pensar que en el punto más alto del movimiento en caída libre la velocidad es cero *y* la aceleración es cero. Si fuera así, ¡la pelota quedaría suspendida en el punto más alto en el aire para siempre! Recuerde que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad. Si la aceleración fuera cero en el punto más alto, la velocidad de la pelota ya no cambiaría y, al estar instantáneamente en reposo, permanecería en reposo eternamente.

De hecho, en el punto más alto la aceleración sigue siendo $a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$, la misma que cuando está subiendo y cuando está bajando. Por ello, la velocidad de la pelota está cambiando continuamente, de valores positivos a valores negativos, pasando por cero.

EVALUAR: Una forma útil de verificar cualquier problema de movimiento consiste en dibujar las gráficas de posición y de velocidad en función del tiempo. La figura 2.25 muestra estas gráficas para este problema. Como la aceleración es constante y negativa, la gráfica *y-t* es una parábola con curvatura hacia abajo, y la gráfica v_y-*t* es una recta con pendiente negativa.

2.25 a) Posición y b) velocidad en función del tiempo para una pelota lanzada hacia arriba con una rapidez inicial de 15 m/s.



Ejemplo 2.8 ¿Dos soluciones o una?

Determine el instante en que la pelota del ejemplo 2.7 está 5.00 m por debajo del barandal.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de nuevo de un problema de aceleración constante. La incógnita es el tiempo en que la pelota está en cierta posición.

PLANTEAR: Otra vez elegimos el eje *y* como en la figura 2.24, así que y_0, v_{0y} y $a_y = -g$ tienen los mismos valores que en el ejemplo 2.7. De nuevo, la posición *y* en función del tiempo *t* está dada por la ecuación (2.12):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Queremos despejar *t* con $y = -5.00$ m. Puesto que la ecuación incluye t^2, es una ecuación *cuadrática* en *t*.

EJECUTAR: Primero replanteamos la ecuación en la forma cuadrática estándar para una *x* desconocida, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

entonces, $A = g/2$, $B = -v_{0y}$ y $C = y - y_0$. Usando la fórmula cuadrática (véase el Apéndice B), vemos que esta ecuación tiene *dos* soluciones:

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)}$$
$$= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g}$$

Sustituyendo los valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15.0$ m/s, $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ y $y = -5.00$ m, obtenemos

$$t = \frac{(15.0\ \text{m/s}) \pm \sqrt{(15.0\ \text{m/s})^2 - 2(9.80\ \text{m/s}^2)(-5.00\ \text{m} - 0)}}{9.80\ \text{m/s}^2}$$

$t = +3.36$ s o $t = -0.30$ s

Para decidir cuál de éstas es la respuesta correcta, la pregunta clave es: "¿son lógicas estas respuestas?" La segunda, $t = -0.30$ s, simplemente es absurda; ¡se refiere a un instante 0.30 s *antes* de soltar la pelota! Lo correcto es $t = +3.36$ s. La pelota está 5.00 m debajo del barandal 3.36 s *después* de que sale de la mano.

EVALUAR: ¿De dónde salió la "solución" errónea $t = -0.30$ s? Recuerde que la ecuación $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$ se basa en el supuesto de que la aceleración es constante para *todos* los valores de *t*, positivos, negativos o cero. Tal cual, esta ecuación nos diría que la pelota se ha estado moviendo hacia arriba en caída libre desde los albores del tiempo, y pasó por la mano en $y = 0$ en el instante especial que decidimos llamar $t = 0$, y después continuó su caída libre. Sin embargo, todo lo que esta ecuación describa como sucedido antes de $t = 0$ es ficción pura, ya que la pelota entró en caída libre sólo después de salir de la mano en $t = 0$; la "solución" $t = -0.30$ s es parte de tal ficción.

Repita estos cálculos para determinar cuándo la pelota está 5.00 m *sobre* el origen ($y = +5.00$ m). Las dos respuestas son $t = +0.38$ s y $t = +2.68$ s; ambos son valores positivos de *t* y se refieren al movimiento real de la pelota una vez soltada. El primer instante es cuando la pelota pasa por $y = +5.00$ m de subida, y el segundo, cuando pasa por ahí de bajada. (Compare esto con el inciso *b*) del ejemplo 2.7.)

Determine también los instantes en que $y = +15.0$ m. En este caso, ambas soluciones requieren obtener la raíz cuadrada de un número negativo, así que *no hay* soluciones reales. Esto es lógico; en el inciso *c*) del ejemplo 2.7 vimos que la altura máxima de la pelota es $y = +11.5$ m, así que *nunca* llega a $y = +15.0$ m. Aunque una ecuación cuadrática como la (2.12) siempre tiene dos soluciones, a veces una o ambas soluciones no tienen sentido físico.

Evalúe su comprensión de la sección 2.5 Si usted lanza una pelota hacia arriba con cierta rapidez inicial, ésta cae libremente y alcanza una altura máxima h un instante t después de que sale de su mano. *a*) Si usted arroja la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿qué nueva altura máxima alcanzará la pelota? $h\sqrt{2}$; *b*) Si usted lanza la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar su nueva altura máxima? i) $t/2$; ii) $t/\sqrt{2}$; iii) t; iv) $t\sqrt{2}$; v) $2t$.



2.6 *Velocidad y posición por integración

Esta sección opcional es para estudiantes que ya aprendieron algo de cálculo integral. En la sección 2.4 analizamos el caso especial de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Si a_x no es constante, como es común, no podremos aplicar las ecuaciones que deducimos en esa sección (figura 2.26). Pero aun si a_x varía con el tiempo, podemos usar la relación $v_x = dx/dt$ para obtener la velocidad v_x en función del tiempo si la posición x es una función conocida de t, y podemos usar $a_x = dv_x/dt$ para obtener la aceleración a_x en función del tiempo si v_x es una función conocida de t.

En muchas situaciones, sin embargo, no se conocen la posición ni la velocidad en función del tiempo, pero sí la aceleración. ¿Cómo obtenemos la posición y la velocidad a partir de la función de aceleración $a_x(t)$? Este problema surge al volar un avión de Norteamérica a Europa (figura 2.27). La tripulación del avión debe conocer su posición precisa en todo momento. Sin embargo, un avión sobre el océano suele estar fuera del alcance de los radiofaros terrestres y del radar de los controladores de tráfico aéreo. Para determinar su posición, los aviones cuentan con un sistema de navegación inercial (INS) que mide la aceleración del avión. Esto se hace de forma análoga a como sentimos cambios en la velocidad de un automóvil en el que viajamos, aun con los ojos cerrados. (En el capítulo 4 veremos cómo el cuerpo detecta la aceleración.) Dada esta información y la posición inicial del avión (digamos, cierto embarcadero en el Aeropuerto Internacional de Miami) y su velocidad inicial (cero cuando está estacionado en ese embarcadero), el INS calcula y muestra la velocidad y posición actuales del avión en todo momento durante el vuelo. (Los aviones también utilizan el sistema de posición global, o GPS, para la navegación; no obstante, este sistema complementa el INS, en vez de remplazarlo.) Nuestro objetivo en el resto de esta sección es mostrar cómo se efectúan estos cálculos en el caso más sencillo de movimiento rectilíneo, con aceleración variable en el tiempo.

Primero consideraremos un enfoque gráfico. La figura 2.28 es una gráfica de aceleración contra tiempo para un cuerpo cuya aceleración no es constante. Podemos dividir el intervalo entre los tiempos t_1 y t_2 en muchos intervalos más pequeños, llamando Δt a uno representativo. Sea $a_{\text{med-}x}$ la aceleración media durante Δt. Por la ecuación (2.4), el cambio de velocidad Δv_x durante Δt es

$$\Delta v_x = a_{\text{med-}x}\,\Delta t$$

Gráficamente, Δv_x es igual al área de la tira sombreada con altura $a_{\text{med-}x}$ y anchura Δt, es decir, el área bajo la curva entre los lados derecho e izquierdo de Δt. El cambio total de velocidad en cualquier intervalo (digamos, t_1 a t_2) es la suma de los cambios Δv_x en los subintervalos pequeños. De esta manera el cambio de velocidad total se representa gráficamente con el área *total* bajo la curva a_x-t entre las líneas verticales t_1 y t_2. (En la sección 2.4 demostramos que esto se cumplía para el caso especial en que la aceleración es constante.)

En el límite donde los Δt se hacen muy pequeños y muy numerosos, el valor de $a_{\text{med-}x}$ para el intervalo de cualquier t a $t + \Delta t$ se acerca a la aceleración instantánea a_x en el instante t. En este límite, el área bajo la curva a_x-t es la *integral* de a_x (que en general es una función de t) de t_1 a t_2. Si v_{1x} es la velocidad del cuerpo en t_1 y v_{2x} es la velocidad en t_2, entonces,

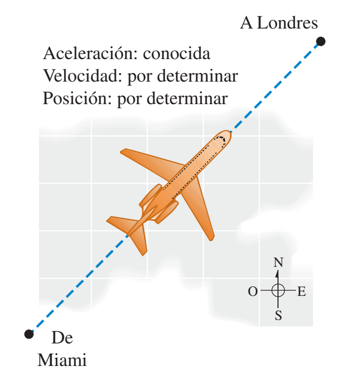
$$v_{2x} - v_{1x} = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt \qquad (2.15)$$

El cambio en v_x es la integral de la aceleración a_x con respecto al tiempo.

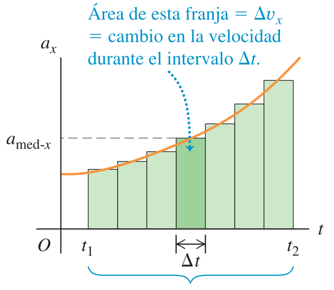
2.26 Cuando pisamos el pedal del acelerador de un automóvil, la aceleración resultante *no* es constante: cuanto mayor sea la rapidez del auto, más lentamente adquirirá rapidez adicional. Un auto ordinario tarda el doble en acelerar de 50 km/h a 100 km/h que en acelerar de 0 a 50 km/h.



2.27 La posición y la velocidad de un avión que cruza el Atlántico se encuentran integrando su aceleración con respecto al tiempo.



2.28 Una gráfica a_x-t para un cuerpo cuya aceleración no es constante.



Podemos seguir exactamente el mismo procedimiento con la curva de velocidad contra tiempo. Si x_1 es la posición de un cuerpo en t_1 y x_2 es su posición en t_2, por la ecuación (2.2) el desplazamiento Δx en un intervalo Δt pequeño es $v_{\text{med-}x}\,\Delta t$, donde $v_{\text{med-}x}$ es la velocidad media durante Δt. El desplazamiento total $x_2 - x_1$ durante $t_2 - t_1$ está dado por

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x\, dt \tag{2.16}$$

El cambio en la posición x (es decir, el desplazamiento) es la integral en el tiempo de la velocidad v_x. Gráficamente, el desplazamiento entre t_1 y t_2 es el área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. [Éste es el resultado que obtuvimos en la sección 2.4 para el caso especial en que v_x está dada por la ecuación (2.8).]

Si $t_1 = 0$ y t_2 es cualquier instante posterior t, y si x_0 y v_{0x} son la posición y la velocidad en $t = 0$, respectivamente, entonces rescribimos las ecuaciones (2.15) y (2.16) como:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\, dt \tag{2.17}$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\, dt \tag{2.18}$$

Aquí, x y v_x son la posición y la velocidad en el instante t. Si conocemos la aceleración a_x en función del tiempo y la velocidad inicial v_{0x}, podremos usar la ecuación (2.17) para obtener la velocidad v_x en cualquier instante; es decir, podemos obtener v_x en función del tiempo. Una vez conocida esta función, y dada la posición inicial x_0, podemos usar la ecuación (2.18) para calcular la posición x en cualquier instante.

Ejemplo 2.9 Movimiento con aceleración cambiante

Sally conduce su Mustang 1965 por una autopista recta. En el instante $t = 0$, cuando Sara avanza a 10 m/s en la dirección $+x$, pasa un letrero que está en $x = 50$ m. Su aceleración es una función del tiempo:

$$a_x = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$

a) Deduzca expresiones para su velocidad y posición en función del tiempo. *b*) ¿En qué momento es máxima su velocidad? *c*) ¿Cuál es esa velocidad máxima? *d*) ¿Dónde está el automóvil cuando alcanza la velocidad máxima?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La aceleración es función del tiempo, así que no podemos usar las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4.

PLANTEAR: Utilizamos las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener la velocidad y la posición en función del tiempo. Una vez que tengamos esas funciones, podremos contestar diversas preguntas acerca del movimiento.

EJECUTAR: *a*) En $t = 0$, la posición de Sally es $x_0 = 50$ m y su velocidad es $v_{0x} = 10$ m/s. Puesto que se nos da la aceleración a_x en función del tiempo, primero usamos la ecuación (2.17) para obtener la velocidad v_x en función del tiempo t. La integral de t^n es $\int t^n\, dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$ con $n \neq -1$, así que

$$v_x = 10\ \text{m/s} + \int_0^t [2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t]\, dt$$
$$= 10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)t^2$$

Luego usamos la ecuación (2.18) para obtener x en función de t:

$$x = 50\ \text{m} + \int_0^t \left[10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)t^2\right] dt$$
$$= 50\ \text{m} + (10\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(2.0\ \text{m/s}^2)t^2 - \frac{1}{6}(0.10\ \text{m/s}^3)t^3$$

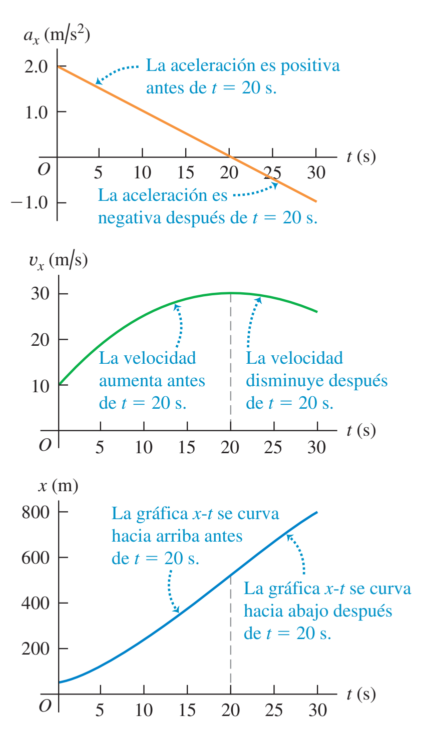
La figura 2.29 muestra las gráficas de a_x, v_x y x en función del tiempo. Observe que, para cualquier t, la pendiente de la gráfica v_x-t es igual al valor de a_x y la pendiente de la gráfica x-t es igual al valor de v_x.

b) El valor máximo de v_x se da cuando v_x deja de aumentar y comienza a disminuir. En este instante, $dv_x/dt = a_x = 0$. Igualando a cero la expresión de la aceleración,

$$0 = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$
$$t = \frac{2.0\ \text{m/s}^2}{0.10\ \text{m/s}^3} = 20\ \text{s}$$

c) Obtenemos la velocidad máxima sustituyendo $t = 20$ s (cuando v es máxima) en la ecuación para v_x del inciso *a*):

$$v_{\text{máx-}x} = 10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)(20\ \text{s}) - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)(20\ \text{s})^2$$
$$= 30\ \text{m/s}$$



2.29 Posición, velocidad y aceleración del automóvil del ejemplo 2.9 como funciones del tiempo. ¿Puede usted demostrar que si continúa este movimiento, el auto parará en $t = 44.5$ s?

d) El valor máximo de v_x se da en $t = 20$ s. Para obtener la posición del auto en ese instante, sustituimos $t = 20$ s en la expresión para x del inciso *a*):

$$x = 50\text{ m} + (10\text{ m/s})(20\text{ s}) + \frac{1}{2}(2.0\text{ m/s}^2)(20\text{ s})^2 - \frac{1}{6}(0.10\text{ m/s}^3)(20\text{ s})^3 = 517\text{ m}$$

EVALUAR: La figura 2.29 nos ayuda a interpretar los resultados. La gráfica superior de esta figura muestra que a_x es positiva entre $t = 0$ y $t = 20$ s, y negativa después. Es cero en $t = 20$ s, cuando v_x es máxima (punto alto en la curva de en medio). El auto acelera hasta $t = 20$ s (porque v_x y a_x tienen el mismo signo) y frena después de $t = 20$ s (porque v_x y a_x tienen signos opuestos).

Como v_x es máxima en $t = 20$ s, la gráfica *x-t* (la de arriba en la figura 2.29) tiene su pendiente positiva máxima en ese instante. Observe que la curva *x-t* es cóncava hacia arriba entre $t = 0$ y $t = 20$ s, cuando a_x es positiva, y es cóncava hacia abajo después de $t = 20$ s, cuando a_x es negativa.

Ejemplo 2.10 Fórmulas de aceleración constante por integración

Use las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener v_x y x en función del tiempo para el caso de aceleración constante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Estos ejemplos servirán para verificar las ecuaciones que dedujimos en esta sección. Si están correctas, deberíamos terminar con las mismas ecuaciones de aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4 sin usar la integración.

PLANTEAR: Seguimos los mismos pasos que en el ejemplo 2.9. La única diferencia es que a_x es una constante.

EJECUTAR: Por la ecuación (2.17), la velocidad está dada por

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt = v_{0x} + a_x\int_0^t dt = v_{0x} + a_x t$$

Pudimos obtener a_x de la integral porque es constante. Si sustituimos esta expresión para v_x en la ecuación (2.18), obtendremos

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt = x_0 + \int_0^t (v_{0x} + a_x t)\,dt$$

Puesto que v_{0x} y a_x son constantes, podemos sacarlas de la integral:

$$x = x_0 + v_{0x}\int_0^t dt + a_x\int_0^t t\,dt = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

EVALUAR: Estos resultados son iguales a las ecuaciones (2.8) y (2.12) para la sección 2.4, ¡como debería ser! No obstante, nuestras expresiones para las ecuaciones (2.17) y (2.18), en los casos en que la aceleración depende del tiempo, también pueden servirnos cuando la aceleración sea constante.

Evalúe su comprensión de la sección 2.6 Si la aceleración a_x se incrementa con el tiempo, la gráfica v_x-*t* ¿será i) una línea recta, ii) una curva cóncava hacia arriba (con curvatura hacia arriba) o iii) una curva cóncava hacia abajo (con curvatura hacia abajo)?

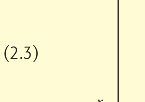
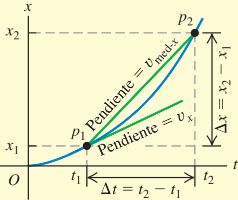


CAPÍTULO 2 RESUMEN

Movimiento rectilíneo, velocidad media e instantánea: Cuando una partícula se mueve en línea recta, describimos su posición con respecto al origen O mediante una coordenada como x. La velocidad media de la partícula, $v_{med\text{-}x}$, durante un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es igual a su desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ dividido entre Δt. La velocidad instantánea v_x en cualquier instante t es igual a la velocidad media en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ en el límite cuando Δt tiende a cero. De forma equivalente, v_x es la derivada de la función de posición con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 2.1.)

$$v_{med\text{-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

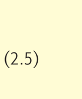
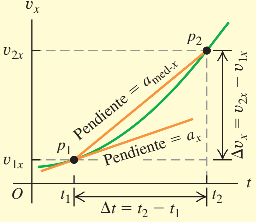
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.3)$$

Aceleración media e instantánea: La aceleración media $a_{med\text{-}x}$ durante un intervalo Δt es igual al cambio de velocidad $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ durante ese lapso dividido entre Δt. La aceleración instantánea a_x es el límite de $a_{med\text{-}x}$ cuando Δt tiende a cero, o la derivada de v_x con respecto a t. (Véanse los ejemplos 2.2 y 2.3.)

$$a_{med\text{-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (2.4)$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \qquad (2.5)$$

Movimiento rectilíneo con aceleración constante: Cuando la aceleración es constante, cuatro ecuaciones relacionan la posición x y la velocidad v_x en cualquier instante t con la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} (ambas medidas en $t = 0$) y la aceleración a_x. (Véanse los ejemplos 2.4 y 2.5.)

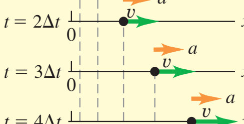
Sólo aceleración constante:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (2.8)$$

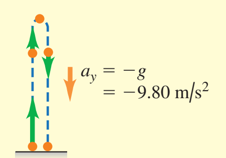
$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad (2.12)$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \qquad (2.13)$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad (2.14)$$



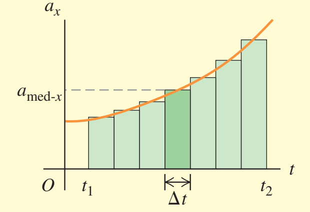
Cuerpos en caída libre: La caída libre es un caso del movimiento con aceleración constante. La magnitud de la aceleración debida a la gravedad es una cantidad positiva g. La aceleración de un cuerpo en caída libre siempre es hacia abajo. (Véanse los ejemplos 2.6 a 2.8.)



Movimiento rectilíneo con aceleración variable: Cuando la aceleración no es constante, sino una función conocida del tiempo, podemos obtener la velocidad y la posición en función del tiempo integrando la función de la aceleración. (Véanse los ejemplos 2.9 y 2.10.)

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt \qquad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt \qquad (2.18)$$



Términos clave

partícula, *37*
velocidad media, *37*
gráfica *x*-*t*, *38*
velocidad instantánea, *39*
derivada, *40*
rapidez, *40*
diagrama de movimiento, *42*
aceleración media, *43*
aceleración instantánea, *44*
gráfica v_x-t, *45*
gráfica a_x-t, *47*
caída libre, *53*
aceleración debida a la gravedad, *54*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Sí. Aceleración se refiere a *cualquier* cambio de velocidad, ya sea que aumente o disminuya.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

2.1 Respuestas a *a*): iv), i) y iii) (empatados), v), ii); respuesta a *b*): i) y iii); respuesta a *c*): v) En *a*), la velocidad media es $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$. Para los cinco viajes, $\Delta t = 1$ h. Para los viajes individuales, tenemos i) $\Delta x = +50$ km, $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h; ii) $\Delta x = -50$ km, $v_{\text{med-}x} = -50$ km/h; iii) $\Delta x = 60\text{ km} - 10\text{ km} = +50$ km, $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h; iv) $\Delta x = +70$ km, $v_{\text{med-}x} = +70$ km/h; v) $\Delta x = \Delta x = -20\text{ km} + 20\text{ km} = 0$, $v_{\text{med-}x} = 0$. En *b*) ambos tienen $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h.

2.2 Respuestas: *a*) *P*, *Q* y *S* (empatados), *R* La velocidad es ***b*)** positiva cuando la pendiente de la gráfica *x*-*t* es positiva (**punto *P***), ***c*)** negativa cuando la pendiente es negativa (**punto *R***) y ***d*)** cero cuando la pendiente es cero (**puntos *Q* y *S***). ***e*) *R*, *P*, *Q* y *S* (empatados)** La rapidez es máxima cuando la pendiente de la gráfica *x*-*t* es más empinada (ya sea positiva o negativa), y cero cuando la pendiente es cero.

2.3 Respuestas: *a*) *S*, donde la gráfica *x*-*t* se curva (es cóncava) hacia arriba. ***b*) *Q***, donde la gráfica *x*-*t* se curva (es cóncava) hacia abajo. ***c*) *P* y *R***, donde la gráfica *x*-*t* es una línea recta. ***d*)** En *P*, $v_x > 0$ y $a_x = 0$ (la rapidez **no cambia**); en *Q*, $v_x > 0$ y $a_x < 0$ (la rapidez **disminuye**); en *R*, $v_x < 0$ y $a_x = 0$ (la rapidez **no cambia**); y en *S*, $v_x < 0$ y $a_x > 0$ (la rapidez **disminuye**).

2.4 Respuesta: *b*) La aceleración del policía es constante, de manera que su gráfica v_x-t es una recta y su motocicleta se mueve más rápido que el automóvil del conductor, cuando ambos vehículos se encuentran en $t = 10$ s.

2.5 Respuestas: *a*) iii) Use la ecuación (2.13) sustituyendo *x* por *y* y $a_y = g$; $v^2_y = v_0{}^2_y - 2g\,(y - y_0)$. La altura inicial es $y_0 = 0$ y la velocidad a la altura máxima $y = h$ es $v_y = 0$, así que $0 = v_0{}^2_y - 2gh$ y $h = v_0{}^2_y/2g$. Si la velocidad inicial aumenta en un factor de 2, la altura máxima aumentará en un factor de $2^2 = 4$ y la pelota alcanzará la altura 4*h*. ***b*) v)** Utilice la ecuación (2.8) remplazando *x* por *y* y $a_y = g$; $v_y = v_{0y} - gt$. La velocidad en la altura máxima es $v_y = 0$, así que $0 = v_{0y} - gt$ y $t = v_{0y}/g$. Si la velocidad inicial se incrementa en un factor de 2, el tiempo para llegar a la altura máxima se incrementa en un factor de 2 y se vuelve 2*t*.

2.6 Respuestas: ii) La aceleración a_x es igual a la pendiente de la gráfica v_x-t. Si a_x aumenta, la pendiente de la gráfica v_x-t también se incrementa y la curva es cóncava hacia arriba.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

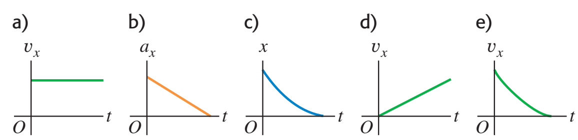
P2.1. ¿El velocímetro de un automóvil mide rapidez o velocidad? Explique su respuesta.

P2.2. La figura 2.30 muestra una serie de fotografías de alta rapidez de un insecto que vuela en línea recta de izquierda a derecha (en la dirección $+x$). ¿Cuál de las gráficas de la figura 2.31 es más probable que describa el movimiento del insecto?

Figura 2.30 Pregunta P2.2.



Figura 2.31 Pregunta P2.2.



P2.3. ¿Un objeto con aceleración constante puede invertir la dirección en la que se mueve? ¿Puede invertirla *dos veces*? En cada caso, explique su razonamiento.

P2.4. ¿En qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

P2.5. ¿Para un objeto es posible *a*) frenar mientras su aceleración incrementa en magnitud; *b*) aumentar su rapidez mientras disminuye su aceleración? En cada caso, explique su razonamiento.

P2.6. ¿En qué condiciones la magnitud de la velocidad media es igual a la rapidez media?

P2.7. Cuando un Dodge Viper está en el negocio “Lavamóvil”, un BMW Z3 está en las calles Olmo y Central. Luego, cuando el Dodge llega a Olmo y Central, el BMW llega a “Lavamóvil”. ¿Qué relación hay entre las velocidades medias de los automóviles entre esos instantes?

P2.8. En el estado de Massachusetts un conductor fue citado en el tribunal por exceso de rapidez. La prueba contra el conductor era que una mujer policía observó al automóvil del conductor junto a un segundo auto, en un momento en que la mujer policía ya había determinado que el segundo auto excedía el límite de rapidez. El conductor alegó que: “el otro auto me estaba rebasando, y yo no iba a exceso de rapidez”. El juez dictaminó contra él porque, según dijo, “si los autos estaban juntos, ambos iban a exceso de rapidez”. Si usted fuera el abogado del conductor, ¿cómo defendería su caso?

P2.9. ¿Puede usted tener desplazamiento 0 y velocidad media distinta de 0? ¿Y velocidad distinta de 0? Ilustre sus respuestas en una gráfica *x-t*.

P2.10. ¿Puede usted tener aceleración 0 y velocidad distinta de 0? Explique, usando una gráfica v_x-t.

P2.11. ¿Puede usted tener velocidad cero y aceleración media distinta de cero? ¿Y velocidad cero y aceleración distinta de cero? Explique, usando una gráfica v_x-t y dé un ejemplo de dicho movimiento.

P2.12. Un automóvil viaja al oeste. ¿Puede tener una velocidad hacia el oeste y simultáneamente una aceleración hacia el este? ¿En qué circunstancias?

P2.13. La camioneta del juez en la figura 2.2 está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. *a*) Dibuje *dos* posibles gráficas *x-t* distintas para el movimiento de la camioneta. *b*) ¿La velocidad media $v_{med\text{-}x}$ en el intervalo de t_1 a t_2 tiene el mismo valor en ambas gráficas? ¿Por qué?

P2.14. Con aceleración constante, la velocidad media de una partícula es la mitad de la suma de sus velocidades inicial y final. ¿Se cumple esto si la aceleración *no* es constante? Explique su respuesta.

P2.15. Usted lanza una pelota verticalmente hasta una altura máxima mucho mayor que su propia estatura. ¿La magnitud de la aceleración es mayor mientras se lanza o después de que se suelta? Explique su respuesta.

P2.16. Demuestre lo que sigue. *a*) En tanto puedan despreciarse los efectos del aire, si se lanza algo verticalmente hacia arriba tendrá la misma rapidez cuando regrese al punto de lanzamiento que cuando se soltó. *b*) El tiempo de vuelo será el doble del tiempo de subida.

P2.17. Un grifo de agua que gotea deja caer constantemente gotas cada 1.0 s. Conforme dichas gotas caen, la distancia entre ellas aumenta, disminuye o permanece igual? Demuestre su respuesta.

P2.18. Si se conocen la posición y velocidad iniciales de un vehículo y se registra la aceleración en cada instante, ¿puede calcularse su posición después de cierto tiempo con estos datos? Si se puede, explique cómo.

P2.19. Desde la azotea de un rascacielos, usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba con rapidez v_0 y una pelota directamente hacia abajo con rapidez v_0. *a*) ¿Qué pelota tiene mayor rapidez cuando llega al suelo? *b*) ¿Cuál llega al suelo primero? *c*) ¿Cuál tiene un mayor desplazamiento cuando llega al suelo? *d*) ¿Cuál recorre la mayor distancia cuando llega al suelo?

P2.20. Se deja caer una pelota desde el reposo en la azotea de un edificio de altura *h*. En el mismo instante, una segunda pelota se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, de modo que tenga rapidez cero cuando llegue al nivel de la azotea. Cuando las dos pelotas se cruzan, ¿cuál tiene mayor rapidez (o ambas tienen la misma rapidez)? Explique su respuesta. ¿Dónde estarán las dos pelotas cuando se crucen: a una altura $h/2$ sobre el suelo, más abajo de esa altura o arriba de esa altura? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

2.1. Un cohete que lleva un satélite acelera verticalmente alejándose de la superficie terrestre. 1.15 s después del despegue, el cohete libra el tope de su plataforma de lanzamiento, a 63 m sobre el suelo; y después de otros 4.75 s, está a 1.00 km sobre el suelo. Calcule la magnitud de la velocidad media del cohete en *a*) la parte de 4.75 s de su vuelo; *b*) los primeros 5.90 s de su vuelo.

2.2. En un experimento, se sacó a una pardela (una ave marina) de su nido, se le llevó a 5150 km de distancia y luego fue liberada. El ave regresó a su nido 13.5 días después de haberse soltado. Si el origen es el nido y extendemos el eje $+x$ al punto de liberación, ¿cuál fue la velocidad media del ave en m/s *a*) en el vuelo de regreso? *b*) ¿Y desde que se sacó del nido hasta que regresó?

2.3. Viaje a casa. Suponga que usted normalmente conduce por la autopista que va de San Diego y Los Ángeles con una rapidez media de 105 km/h (65 m/h) y el viaje le toma 2 h y 20 min. Sin embargo, un viernes por la tarde el tráfico le obliga a conducir la misma distancia con una rapidez media de sólo 70 km/h (43 mi/h). ¿Cuánto tiempo más tardará el viaje?

2.4. De pilar a poste. Partiendo de un pilar, usted corre 200 m al este (la dirección $+x$) con rapidez media de 5.0 m/s, luego 280 m al oeste con rapidez media de 4.0 m/s hasta un poste. Calcule *a*) su rapidez media del pilar al poste y *b*) su velocidad media del pilar al poste.

2.5. Dos corredores parten simultáneamente del mismo punto de una pista circular de 200 m y corren en direcciones *opuestas*. Uno corre con una rapidez constante de 6.20 m/s, y el otro, con rapidez constante de 5.50 m/s. ¿Cuándo se encuentren primero? *a*) ¿cuánto tiempo habrán estado corriendo?, y *b*) ¿qué distancia desde el punto de salida habrá cubierto cada uno?

2.6. Suponga que los dos corredores del ejercicio 2.5 salen al mismo tiempo del mismo lugar, pero ahora corren en la *misma* dirección. *a*) ¿Cuándo el más rápido alcanzará primero al más lento y qué distancia desde el punto de partida habrá cubierto cada uno? *b*) ¿Cuándo el más rápido alcanzará al más lento por *segunda* vez, y qué distancia habrán cubierto en ese instante desde el punto de salida?

2.7. Estudio de los terremotos. Los terremotos producen varios tipos de ondas de choque. Las más conocidas son las ondas P (P por *primaria* o *presión*) y las ondas S (S por *secundaria* o *esfuerzo cortante*). En la corteza terrestre, las ondas P viajan a aproximadamente 6.5 km/s, en tanto que las ondas S se desplazan a aproximadamente 3.5 km/s. Las rapideces reales varían según el tipo de material por el que viajen. El tiempo de propagación, entre la llegada de estas dos clases de onda a una estación de monitoreo sísmico, le indica a los geólogos a qué distancia ocurrió el terremoto. Si el tiempo de propagación es de 33 s, a qué distancia de la estación sísmica sucedió el terremoto?

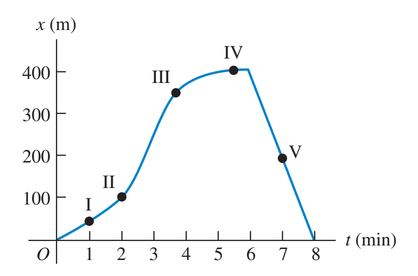
2.8. Un Honda Civic viaja en línea recta en carretera. Su distancia *x* de un letrero de alto está dada en función del tiempo *t* por la ecuación $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$, donde $\alpha = 1.50$ m/s^2 y $\beta = 0.0500$ m/s^3. Calcule la velocidad media del auto para los intervalos *a*) $t = 0$ a $t = 2.00$ s; *b*) $t = 0$ a $t = 4.00$ s; *c*) $t = 2.00$ s a $t = 4.00$ s.

Sección 2.2 Velocidad instantánea

2.9. Un automóvil está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia con respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde $b = 2.40$ m/s^2 y $c = 0.120$ m/s^3. *a*) Calcule la velocidad media del auto entre el intervalo $t = 0$ a $t = 10.0$ s. *b*) Calcule la velocidad instantánea del auto en $t = 0$; $t = 5.0$ s; $t = 10.0$ s. *c*) ¿Cuánto tiempo después de arrancar el auto vuelve a estar parado?

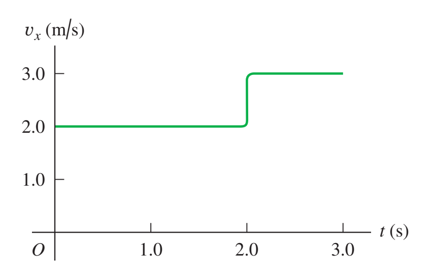
2.10. Una profesora de física sale de su casa y camina por la acera hacia el campus. A los 5 min, comienza a llover y ella regresa a casa. Su distancia con respecto a su casa en función del tiempo se muestra en la figura 2.32. ¿En cuál punto rotulado su velocidad es *a*) cero, *b*) constante y positiva, *c*) constante y negativa, *d*) de magnitud creciente y *e*) de magnitud decreciente?

Figura 2.32 Ejercicio 2.10.



2.11. Una pelota se mueve en línea recta (el eje x). En la figura 2.33 la gráfica muestra la velocidad de esta pelota en función del tiempo. *a*) ¿Cuáles son la rapidez media y la velocidad media de la pelota durante los primeros 3.0 s? *b*) Suponga que la pelota se mueve de tal manera que el segmento de la gráfica después de 2.0 s era -3.0 m/s en vez de $+3.0$ m/s. En este caso, calcule la rapidez media y la velocidad media de la pelota.

Figura 2.33 Ejercicio 2.11.



Sección 2.3 Aceleración media e instantánea

2.12. Un piloto de pruebas de Automotores Galaxia, S.A., está probando un nuevo modelo de automóvil con un velocímetro calibrado para indicar m/s en lugar de mi/h. Se obtuvo la siguiente serie de lecturas durante una prueba efectuada en una carretera recta y larga:

Tiempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Rapidez (m/s)	0	0	2	6	10	16	19	22	22

a) Calcule la aceleración media en cada intervalo de 2 s. ¿La aceleración es constante? ¿Es constante durante alguna parte de la prueba? *b*) Elabore una gráfica v_x-t con los datos, usando escalas de 1 cm = 1 s horizontalmente, y 1 cm = 2 m/s verticalmente. Dibuje una curva suave que pase por los puntos graficados. Mida la pendiente de la curva para obtener la aceleración instantánea en: t = 9 s, 13 s y 15 s.

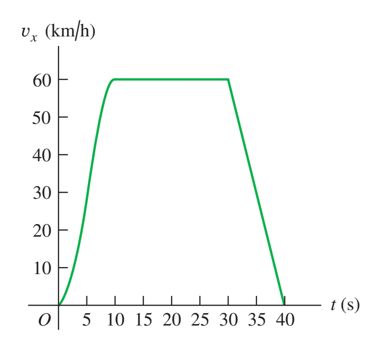
2.13. ¡El automóvil más rápido (y más caro)! La siguiente tabla presenta los datos de prueba del Bugatti Veyron, el auto más rápido fabricado. El vehículo se mueve en línea recta (el eje x).

Tiempo (s)	0	2.1	20.0	53
Rapidez (mi/h)	0	60	200	253

a) Elabore una gráfica v_x-t de la velocidad de este auto (en mi/h) en función del tiempo. ¿Su aceleración es constante? *b*) Calcule la aceleración media del auto (en m/s^2) entre i) 0 y 2.1 s; ii) 2.1 s y 20.0 s; iii) 20.0 s y 53 s. ¿Estos resultados son congruentes con el inciso *a*) de su gráfica? (Antes de decidirse a comprar este vehículo, le sería útil saber que sólo se fabricarán 300, que a su máxima rapidez se le acaba la gasolina en 12 minutos y ¡que cuesta 1,250,000 dólares!)

2.14. La figura 2.34 muestra la velocidad de un automóvil solar en función del tiempo. El conductor acelera desde un letrero de alto, viaja 20 s con rapidez constante de 60 km/h y frena para detenerse 40 s después de partir del letrero. *a*) Calcule la aceleración media para estos intervalos: i) $t = 0$ a $t = 10$ s; ii) $t = 30$ s a $t = 40$ s; iii) $t = 10$ s a $t = 30$ s; iv) $t = 0$ a $t = 40$ s. *b*) ¿Cuál es la aceleración instantánea en $t = 20$ s y en $t = 35$ s?

Figura 2.34 Ejercicio 2.14.



2.15. Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje x con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es $x(t) = 50.0\text{ cm} + (2.00\text{ cm/s})t - (0.0625\text{ cm/s}^2)t^2$. *a*) Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga. *b*) ¿En qué instante t la tortuga tiene velocidad cero? *c*) ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida? *d*) ¿En qué instantes t la tortuga está a una distancia de 10.0 cm de su punto de partida? ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes? *e*) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para el intervalo de $t = 0$ a $t = 40.0$ s.

2.16. Una astronauta salió de la Estación Espacial Internacional para probar un nuevo vehículo espacial. Su compañero mide los siguientes cambios de velocidad, cada uno en un intervalo de 10 s. Indique la magnitud, el signo y la dirección de la aceleración media en cada intervalo. Suponga que la dirección positiva es a la derecha. *a*) Al principio del intervalo, la astronauta se mueve a la derecha sobre el eje x a 15.0 m/s, y al final del intervalo se mueve a la derecha a 5.0 m/s. *b*) Al principio se mueve a la izquierda a 5.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s. *c*) Al principio se mueve a la derecha a 15.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s.

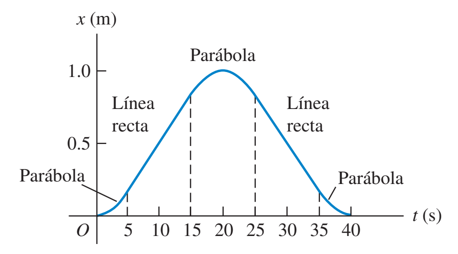
2.17. Aceleración de un automóvil. Con base en su experiencia al viajar en automóvil, estime la magnitud de la aceleración media de un auto, cuando *a*) acelera en una autopista desde el reposo hasta 65 mi/h, y *b*) frena desde una rapidez de autopista hasta un alto total. *c*) Explique por qué en cada caso la aceleración media podría considerarse ya sea positiva o negativa.

2.18. La velocidad de un automóvil en función del tiempo está dada por $v_x(t) = \alpha + \beta t^2$, donde $\alpha = 3.00$ m/s y $\beta = 0.100$ m/s^3. *a*) Calcule

la aceleración media entre $t = 0$ y $t = 5.00$ s. *b*) Calcule la aceleración instantánea en $t = 0$ y en $t = 5.00$ s. *c*) Dibuje las gráficas v_x-t y a_x-t exactas para el movimiento del auto entre $t = 0$ y $t = 5.00$ s.

2.19. La figura 2.35 es una gráfica de la coordenada de una araña que camina sobre el eje x. *a*) Grafique su velocidad y aceleración en función del tiempo. *b*) En un diagrama de movimiento (como el de las figuras 2.13b y 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración de la araña en los cinco tiempos: $t = 2.5$ s, $t = 10$ s, $t = 20$ s, $t = 30$ s y $t = 37.5$ s.

Figura 2.35 Ejercicio 2.19.



2.20. La posición del frente de un automóvil de pruebas controlado por microprocesador está dada por $x(t) = 2.17\text{ m} + (4.80\text{ m/s}^2)t^2 - (0.100\text{ m/s}^6)t^6$. *a*) Obtenga su posición y aceleración en los instantes en que tiene velocidad cero. *b*) Dibuje las gráficas x-t, v_x-t y a_x-t para el movimiento del frente del auto entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s.

Sección 2.4 Movimiento con aceleración constante

2.21. Un antílope con aceleración constante cubre la distancia de 70.0 m entre dos puntos en 7.00 s. Su rapidez al pasar por el segundo punto es 15.0 m/s. *a*) ¿Qué rapidez tenía en el primero? *b*) ¿Qué aceleración tiene?

2.22. La catapulta del portaaviones *USS Abraham Lincoln* acelera un *jet* de combate F/A-18 Hornet, desde el reposo hasta una rapidez de despegue de 173 mi/h en una distancia de 307 ft. Suponga aceleración constante. *a*) Calcule la aceleración del avión en m/s^2. *b*) Calcule el tiempo necesario para acelerar el avión hasta la rapidez de despegue.

2.23. Un lanzamiento rápido. El lanzamiento más rápido medido de una pelota de béisbol sale de la mano del pitcher a una rapidez de 45.0 m/s. Si el pitcher estuvo en contacto con la pelota una distancia de 1.50 m y produjo aceleración constante, *a*) ¿qué aceleración le dio a la pelota, y *b*) ¿cuánto tiempo le tomó lanzarla?

2.24. Servicio de tenis. En el servicio de tenis más rápido medido, la pelota sale de la raqueta a 73.14 m/s. En el servicio una pelota de tenis normalmente está 30.0 ms en contacto con la raqueta y parte del reposo. Suponga aceleración constante. *a*) ¿Cuál era la aceleración de la pelota durante este servicio? *b*) ¿Qué distancia recorrió la pelota durante el servicio?

2.25. Bolsas de aire del automóvil. El cuerpo humano puede sobrevivir a un incidente de trauma por aceleración negativa (parada repentina), si la magnitud de la aceleración es menor que 250 m/s^2. Si usted sufre un accidente automovilístico con rapidez inicial de 105 km/h (65 mi/h) y es detenido por una bolsa de aire que se infla desde el tablero, ¿en qué distancia debe ser detenido por la bolsa de aire para sobrevivir al percance?

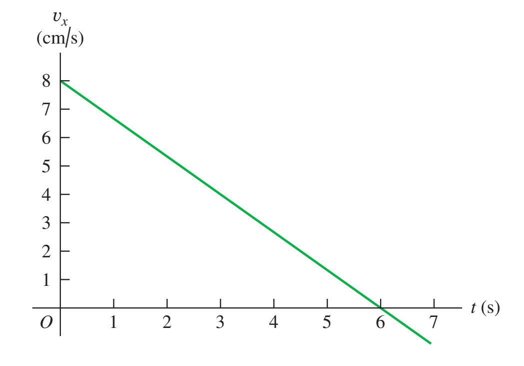
2.26. Ingreso a la autopista. Un automóvil está parado en una rampa de acceso a una autopista esperando un hueco en el tráfico. El conductor acelera por la rampa con aceleración constante para entrar en la autopista. El auto parte del reposo, se mueve en línea recta y tiene una rapidez de 20 m/s (45 mi/h) al llegar al final de la rampa de 120 m de largo. *a*) ¿Qué aceleración tiene el auto? *b*) ¿Cuánto tarda el auto en salir de la rampa? *c*) El tráfico de la autopista se mueve con rapidez constante de 20 m/s. ¿Qué distancia recorre el tráfico mientras el auto se mueve por la rampa?

2.27. Lanzamiento del transbordador espacial. En el lanzamiento el transbordador espacial pesa 4.5 millones de libras. Al lanzarse desde el reposo, tarda 8.00 s en alcanzar los 161 km/h y al final del primer minuto, su rapidez es de 1610 km/h. *a*) ¿Cuál es la aceleración media (en m/s^2) del transbordador i) durante los primeros 8.00 s, y ii) entre 8 s y el final del primer minuto? *b*) Suponiendo que la aceleración es constante durante cada intervalo (aunque no necesariamente la misma en ambos intervalos), ¿qué distancia recorre el transbordador i) durante los primeros 8.00s, y ii) durante el intervalo de 8.00 s a 1.00 min?

2.28. Según datos de pruebas efectuadas recientemente, un automóvil recorre 0.250 millas en 19.9 s, partiendo del reposo. El mismo auto, viajando a 60.0 mph y frenando en pavimento seco, se detiene en 146 ft. Suponga una aceleración constante en cada parte del movimiento, pero no necesariamente la misma aceleración al arrancar que al frenar. *a*) Calcule la aceleración del auto al arrancar y al frenar. *b*) Si su aceleración es constante, ¿con qué rapidez (en mi/h) debería estar viajando el auto después de acelerar durante 0.250 mi? La rapidez real medida es de 70.0 m/h; ¿qué le dice esto acerca del movimiento? *c*) ¿Cuánto tarda este auto en detenerse cuando viaja a 60.0 mi/h?

2.29. Un gato camina en línea recta en lo que llamaremos eje x con la dirección positiva a la derecha. Usted, que es un físico observador, efectúa mediciones del movimiento del gato y elabora una gráfica de la velocidad del felino en función del tiempo (figura 2.36). *a*) Determine la velocidad del gato en $t = 4.0$ s y en $t = 7.0$ s. *b*) ¿Qué aceleración tiene el gato en $t = 3.0$ s? ¿En $t = 6.0$ s? ¿En $t = 7.0$ s? *c*) ¿Qué distancia cubre el gato durante los primeros 4.5 s? ¿Entre $t = 0$ y $t = 7.5$ s? *d*) Dibuje gráficas claras de la aceleración del gato y su posición en función del tiempo, suponiendo que el gato partió del origen.

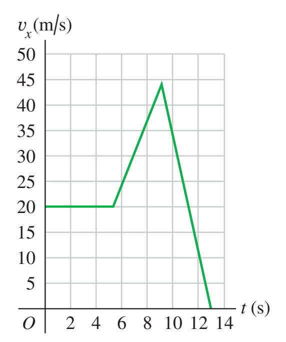
Figura 2.36 Ejercicio 2.29.



2.30. En $t = 0$, un automóvil está detenido ante un semáforo. Al encenderse la luz verde, el auto acelera a razón constante hasta alcanzar una rapidez de 20 m/s 8 s después de arrancar. El auto continúa con rapidez constante durante 60 m. Luego, el conductor ve un semáforo con luz roja en el siguiente cruce y frena a razón constante. El auto se detiene ante el semáforo, a 180 m de donde estaba en $t = 0$. *a*) Dibuje las gráficas x-t, v_x-t y a_x-t exactas para el movimiento del auto. *b*) En un diagrama de movimiento (como los de las figuras 2.13b y 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración del auto 4 s después de que se enciende la luz verde, mientras viaja a rapidez constante y cuando frena.

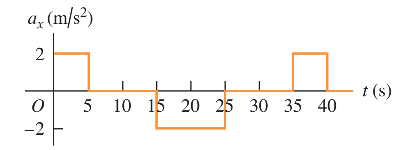
2.31. La gráfica de la figura 2.37 muestra la velocidad de un policía en motocicleta en función del tiempo. *a*) Calcule la aceleración instantánea en $t = 3$ s, en $t = 7$ s y en $t = 11$ s. *b*) ¿Qué distancia cubre el policía en los primeros 5 s? ¿En los primeros 9 s? ¿Y en los primeros 13 s?

Figura 2.37 Ejercicio 2.31.



2.32. La figura 2.38 es una gráfica de la aceleración de una locomotora de juguete que se mueve en el eje x. Dibuje las gráficas de su velocidad y coordenada x en función del tiempo, si $x = 0$ y $v_x = 0$ cuando $t = 0$.

Figura 2.38 Ejercicio 2.32.



2.33. Una nave espacial que lleva trabajadores a la Base Lunar I viaja en línea recta de la Tierra a la Luna, una distancia de 384,000 km. Suponga que parte del reposo y acelera a 20.0 m/s^2 los primeros 15.0 min, viaja con rapidez constante hasta los últimos 15.0 min, cuando acelera a -20.0 m/s^2, parando justo al llegar a la Luna. *a*) ¿Qué rapidez máxima se alcanzó? *b*) ¿Qué fracción de la distancia total se cubrió con rapidez constante? *c*) ¿Cuánto tardó el viaje?

2.34. Un tren subterráneo en reposo parte de una estación y acelera a una tasa de 1.60 m/s^2 durante 14.0 s, viaja con rapidez constante 70.0 s y frena a 3.50 m/s^2 hasta parar en la siguiente estación. Calcule la distancia *total* cubierta.

2.35. Dos automóviles, A y B, se mueven por el eje x. La figura 2.39 grafica las posiciones de A y B contra el tiempo. *a*) En diagramas de movimiento (como las figuras 2.13b y 2.14b), muestre la posición, velocidad y aceleración de cada auto en $t = 0$, $t = 1$ s y $t = 3$ s. *b*) ¿En qué instante(s), si acaso, A y B tienen la misma posición? *c*) Trace una gráfica de velocidad contra tiempo para A y para B. *d*) ¿En qué instante(s), si acaso, A y B tienen la misma velocidad? *e*) ¿En qué instante(s), si acaso, el auto A rebasa al auto B? *f*) ¿En qué instante(s), si acaso, el auto B pasa al A?

Figura 2.39 Ejercicio 2.35.

2.36. En el instante en que un semáforo se pone en luz verde, un automóvil que esperaba en el cruce arranca con aceleración constante de 3.20 m/s^2. En el mismo instante, un camión que viaja con rapidez constante de 20.0 m/s alcanza y pasa al auto. *a*) ¿A qué distancia de su punto de partida el auto alcanza al camión? *b*) ¿Qué rapidez tiene el auto en ese momento? *c*) Dibuje una gráfica x-t del movimiento de los dos vehículos, tomando $x = 0$ en el cruce. *d*) Dibuje una gráfica v_x-t del movimiento de los dos vehículos.

2.37. Llegada a Marte. En enero de 2004, la NASA puso un vehículo de exploración en la superficie marciana. Parte del descenso consistió en las siguientes etapas:

Etapa A: la fricción con la atmósfera redujo la rapidez de 19,300 km/h a 1600 km/h en 4.0 min.
Etapa B: un paracaídas se abrió para frenarlo a 321 km/h en 94 s.
Etapa C: se encienden los retrocohetes para reducir su rapidez a cero en una distancia de 75 m.

Suponga que cada etapa sigue inmediatamente después de la que le precede, y que la aceleración durante cada una era constante. *a*) Encuentre la aceleración del cohete (en m/s^2) durante cada etapa. *b*) ¿Qué distancia total (en km) viajó el cohete en las etapas A, B y C?

Sección 2.5 Cuerpos en caída libre

2.38. Gotas de lluvia. Si pueden descontarse los efectos del aire sobre las gotas de lluvia, podemos tratarlas como objetos en caída libre. *a*) Las nubes de lluvia suelen estar a unos cuantos cientos de metros sobre el suelo. Estime la rapidez (en m/s, km/h y mi/h) con que las gotas llegarían el suelo si fueran objetos en caída libre. *b*) Estime (con base en sus observaciones personales) la velocidad real con que las gotas de lluvia chocan contra el suelo. *c*) Con base en sus respuestas a los incisos *a*) y *b*), ¿es justificable ignorar los efectos del aire sobre las gotas de lluvia? Explique su respuesta.

2.39. *a*) Si una pulga puede saltar 0.440 m hacia arriba, ¿qué rapidez inicial tiene al separarse del suelo? ¿Cuánto tiempo está en el aire?

2.40. Alunizaje. Un alunizador está descendiendo hacia la Base Lunar I (figura 2.40) frenado lentamente por el retro-empuje del motor de descenso. El motor se apaga cuando el alunizador está a 5.0 m sobre la superficie y tiene una velocidad hacia abajo de 0.8 m/s. Con el motor apagado, el vehículo está en caída libre. ¿Qué rapidez tiene justo antes de tocar la superficie? La aceleración debida a la gravedad lunar es de 1.6 m/s^2.

Figura 2.40 Ejercicio 2.40.

2.41. Una prueba sencilla de tiempo de reacción. Se sostiene un metro verticalmente, de manera que su extremo inferior esté entre el pulgar y el índice de la mano del sujeto de la prueba. Al ver que sueltan el metro, el sujeto lo detiene juntando esos dos dedos. Se puede calcular el tiempo de reacción con base en la distancia que el metro cayó antes de que se le detuviera, leyendo la escala en el punto donde el sujeto lo tomó. *a*) Deduzca una relación para el tiempo de reacción en términos de esta distancia d medida. *b*) Si la distancia medida es 17.6 cm, ¿cuál será el tiempo de reacción?

2.42. Se deja caer un ladrillo (rapidez inicial cero) desde la azotea de un edificio. El tabique choca contra el suelo en 2.50 s. Se puede despreciar la resistencia del aire, así que el ladrillo está en caída libre.

a) ¿Qué altura (en m) tiene el edificio? *b*) ¿Qué magnitud tiene la velocidad del ladrillo justo antes de llegar al suelo? *c*) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_Y-t y y-t para el movimiento del ladrillo.

2.43. Falla en el lanzamiento. Un cohete de 7500 kg despega verticalmente desde la plataforma de lanzamiento con una aceleración constante hacia arriba de 2.25 m/s^2 y no sufre resistencia del aire considerable. Cuando alcanza una altura de 525 m, sus motores fallan repentinamente y ahora la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad. *a*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará este cohete desde la plataforma de lanzamiento? *b*) Después de que el motor falla, ¿cuánto tiempo pasará antes de que se estrelle contra la plataforma de lanzamiento, y qué rapidez tendrá justo antes del impacto? *c*) Dibuje las gráficas a_y-t, v_y-t y y-t del movimiento del cohete desde el instante en que despega hasta el instante justo antes de chocar contra la plataforma de lanzamiento.

2.44. El tripulante de un globo aerostático, que sube verticalmente con velocidad constante de magnitud 5.00 m/s, suelta un saco de arena cuando el globo está a 40.0 m sobre el suelo (figura 2.41). Después de que se suelta, el saco está en caída libre. *a*) Calcule la posición y velocidad del saco a 0.250 s y 1.00 s después de soltarse. *b*) ¿Cuántos segundos tardará el saco en chocar con el suelo después de soltarse? *c*) ¿Con qué rapidez chocará? *d*) ¿Qué altura máxima alcanza el saco sobre el suelo? *e*) Dibuje las gráficas a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

Figura 2.41 Ejercicio 2.44.

2.45. Un estudiante lanza un globo lleno con agua, verticalmente hacia abajo desde la azotea de un edificio. El globo sale de su mano con una rapidez de 6.00 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire, así que el globo está en caída libre una vez soltado. *a*) ¿Qué rapidez tiene después de caer durante 2.00 s? *b*) ¿Qué distancia cae en este lapso? *c*) ¿Qué magnitud tiene su velocidad después de caer 10.0 m? *d*) Dibuje las gráficas: a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.46. Se lanza un huevo casi verticalmente hacia arriba desde un punto cerca de la cornisa de un edificio alto; al bajar, apenas libra la cornisa y pasa por un punto 50.0 m bajo su punto de partida 5.00 s después de salir de la mano que lo lanzó. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez inicial tiene el huevo? *b*) ¿Qué altura alcanza sobre el punto de lanzamiento? *c*) ¿Qué magnitud tiene su velocidad en el punto más alto? *d*) ¿Qué magnitud y dirección tiene su aceleración en el punto más alto? *e*) Dibuje las gráficas a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento del huevo.

2.47. El trineo impulsado por cohete *Sonic Wind Núm.* 2, utilizado para investigar los efectos fisiológicos de las altas aceleraciones, corre sobre una vía recta horizontal de 1070 m (3500 ft). Desde el reposo, puede alcanzar una rapidez de 224 m/s (500 mi/h) en 0.900 s. *a*) Calcule la aceleración en m/s^2, suponiendo que es constante. *b*) ¿Cuál es la relación de esta aceleración con la de un cuerpo en caída libre (g)? *c*) ¿Qué distancia se cubre en 0.900 s? *d*) En una revista se aseguró que, al final de cierta prueba, la rapidez del trineo descendió de 283 m/s (632 mi/h) a cero en 1.40 s, y que en ese tiempo la magnitud de la aceleración fue mayor que 40g. ¿Son congruentes tales cifras?

2.48. Un peñasco es expulsado verticalmente hacia arriba por un volcán, con una rapidez inicial de 40.0 m/s. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿En qué instante después de ser expulsado el peñasco sube a 20.0 m/s? *b*) ¿En qué instante baja a 20.0 m/s? *c*) ¿Cuándo es cero el desplazamiento con respecto a su posición inicial? *d*) ¿Cuándo es cero la velocidad del peñasco? *e*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración cuando el peñasco está i) subiendo? ii) ¿bajando? iii) ¿en el punto más alto? *f*) Dibuje las gráficas a_y-t, v_y-t y y-t para el movimiento.

2.49. Una roca de 15 kg se suelta desde el reposo en la Tierra y llega al suelo 1.75 s después. Cuando se suelta desde la misma altura en Encélado, una luna de Saturno, llega al suelo en 18.6. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en Encélado?

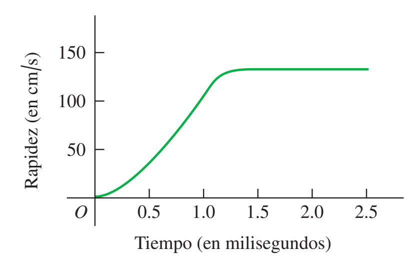
*Sección 2.6 Velocidad y posición por integración

***2.50.** La aceleración de un autobús está dada por $a_x(t) = \alpha t$, donde $\alpha = 1.2$ m/s^3. *a*) Si la velocidad del autobús en el tiempo $t = 1.0$ s es 5.0 m/s, ¿cuál será en $t = 2.0$ s? *b*) Si la posición del autobús en $t = 1.0$ s es 6.0 m, ¿cuál será en $t = 2.0$ s? *c*) Dibuje las gráficas: a_x-t, v_x-t y x-t para el movimiento.

***2.51.** La aceleración de una motocicleta está dada por $a_x(t) = At - Bt^2$, con $A = 1.50$ m/s^3 y $B = 0.120$ m/s^4. La motocicleta está en reposo en el origen en $t = 0$. *a*) Obtenga su posición y velocidad en función de t. *b*) Calcule la velocidad máxima que alcanza.

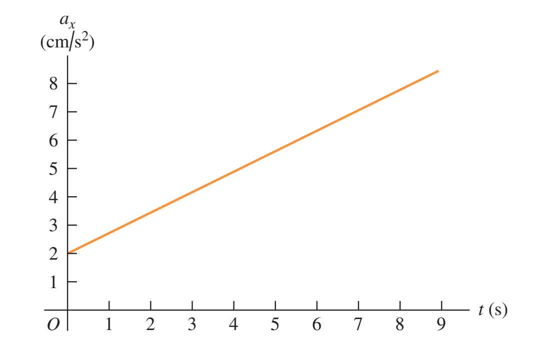
***2.52. Salto volador de la pulga.** Una película tomada a alta velocidad (3500 cuadros por segundo) de una pulga saltarina de 210 μg produjo los datos que se usaron para elaborar la gráfica de la figura 2.42. (Véase "The Flying Leap of the Flea", por M. Rothschild, Y. Schlein, K. Parker, C. Neville y S. Sternberg en el *Scientific American* de noviembre de 1973.) La pulga tenía una longitud aproximada de 2 mm y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Use la gráfica para contestar estas preguntas. *a*) ¿La aceleración de la pulga es cero en algún momento? Si lo es, ¿cuándo? Justifique su respuesta. *b*) Calcule la altura máxima que la pulga alcanzó en los primeros 2.5 ms. *c*) Determine la aceleración de la pulga a los 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms. *d*) Calcule la altura de la pulga a los 0.5 ms, 1.0 ms y 1.5 ms.

Figura 2.42 Ejercicio 2.52.



***2.53.** En la figura 2.43 la gráfica describe la aceleración en función del tiempo para una piedra que rueda hacia abajo partiendo del reposo.

Figura 2.43 Ejercicio 2.53.



a) Calcule el cambio en la velocidad de la piedra entre $t = 2.5$ s y $t = 7.5$ s. *b*) Elabore una gráfica de la velocidad de la piedra en función del tiempo.

Problemas

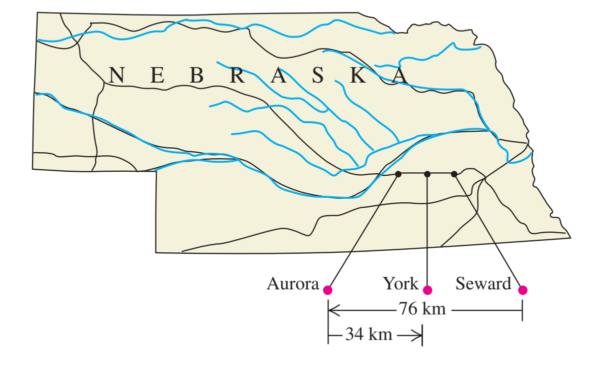
2.54. En un paseo de 20 millas en bicicleta, usted recorre las primeras 10 millas con rapidez media de 8 mi/h. ¿Qué rapidez media en las otras 10 mi requerirá para que la rapidez media total en las 20 millas sea: *a*) ¿4 mi/h? *b*) ¿12 mi/h? *c*) Dada la rapidez media indicada para las primeras 10 millas, ¿le sería posible alcanzar una rapidez media de 16 mi/h para todo el paseo de 20 millas? Explique su respuesta.

2.55. La posición de una partícula entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s está dada por $x(t) = (3.00\ \mathrm{m/s^3})t^3 - (10.0\ \mathrm{m/s^2})t^2 + (9.00\ \mathrm{m/s})t$. *a*) Dibuje las gráficas x-t, v_x-t y a_x-t para la partícula. *b*) ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s está instantáneamente en reposo la partícula? ¿Coincide el resultado numérico con la gráfica v_x-t del inciso *a*)? *c*) En cada instante calculado en el inciso *b*), ¿la aceleración de la partícula es positiva o negativa? Demuestre que en cada caso la misma respuesta se deduce de $a_x(t)$ y de la gráfica v_x-t. *d*) En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s no está cambiando la velocidad instantánea de la partícula? Ubique este punto en las gráficas v_x-t y a_x-t del inciso *a*). *e*) ¿Cuál es la distancia máxima de la partícula con respecto al origen ($x = 0$) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s? *f*) ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s la partícula está *aumentando de rapidez* a mayor ritmo? ¿En qué instante(s) entre $t = 0$ y $t = 2.00$ s la partícula se está *frenando* a mayor ritmo? Ubique esos puntos en las gráficas v_x-t y a_x-t del inciso *a*).

2.56. Carrera de relevos. En una carrera de relevos, cada competidora corre 25.0 m con un huevo sostenido en una cuchara, se da vuelta y regresa al punto de partida. Edith corre los primeros 25.0 m en 20.0 s. Al regresar se siente más confiada y tarda sólo 15.0 s. ¿Qué magnitud tiene su velocidad media en *a*) los primeros 25.0 m? *b*) ¿Y en el regreso? *c*) ¿Cuál es su velocidad media para el viaje redondo? *d*) ¿Y su rapidez media para el viaje redondo?

2.57. Dan entra en la carretera interestatal I-80 en Seward, Nebraska, y viaja al oeste en línea recta con velocidad media de 88 km/h. Después de 76 km, llega a la salida de Aurora (figura 2.44). Al darse cuenta de que llegó demasiado lejos, se da vuelta, y conduce 34 km al este hasta la salida de York con rapidez media de 72 km/h. Para el viaje total de Seward a la salida de York, determine *a*) su rapidez media y *b*) la magnitud de su velocidad media.

Figura **2.44** Problema 2.57.



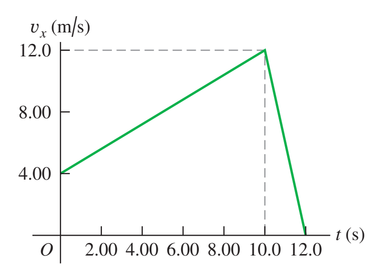
2.58. Tráfico en la autopista. Según un artículo de *Scientific American* (mayo de 1990), las autopistas actuales pueden controlar cerca de 2400 vehículos por carril por hora en flujo vehicular uniforme a 96 km/h (60 mi/h). Si hay más vehículos, el flujo vehicular se hace "turbulento" (intermitente). *a*) Si un vehículo tiene longitud media de 4.6 m (15 ft), ¿qué espacio medio hay entre vehículos con la densidad de tráfico mencionada? *b*) Los sistemas de control automatizados para evitar los choques, que operan rebotando ondas de radar o sonar en los vehículos circundantes, acelerando o frenando el vehículo según sea necesario, podrían reducir mucho el espacio entre vehículos. Si el espacio medio es de 9.2 m (el largo de dos autos), cuántos vehículos por hora podrían circular a 96 km/h en un carril?

2.59. Un velocista de alto rendimiento acelera a su rapidez máxima en 4.0 s y mantiene esa rapidez durante el resto de la carrera de 100 m, llegando a la meta con un tiempo total de 9.1 s. *a*) ¿Qué aceleración media tiene durante los primeros 4.0 s? *b*) ¿Qué aceleración media tiene durante los últimos 5.1 s? *c*) ¿Qué aceleración media tiene durante toda la carrera? *d*) Explique por qué su respuesta al inciso *c*) no es el promedio de las respuestas a los incisos *a*) y *b*).

2.60. Un trineo parte del reposo en la cima de una colina y baja con aceleración constante. En un instante posterior, el trineo está a 14.4 m de la cima; 2.00 s después está a 25.6 m de la cima, 2.00 s después está a 40.0 m de la cima, y 2.00 s después está a 57.6 m de la cima. *a*) ¿Qué magnitud tiene la velocidad media del trineo en cada intervalo de 2.00 s después de pasar los 14.4 m? *b*) ¿Qué aceleración tiene el trineo? *c*) ¿Qué rapidez tiene el trineo al pasar los 14.4 m? *d*) ¿Cuánto tiempo tomó al trineo llegar de la cima a los 14.4 m? *e*) ¿Qué distancia cubrió el trineo durante el primer segundo después de pasar los 14.4 m?

2.61. Una gacela corre en línea recta (el eje x). En la figura 2.45, la gráfica muestra la velocidad de este animal en función del tiempo. Durante los primeros 12.0 s, obtenga *a*) la distancia total recorrida y *b*) el desplazamiento de la gacela. *c*) Dibuje una gráfica a_x-t que muestre la aceleración de esta gacela en función del tiempo durante los primeros 12.0 s.

Figura **2.45** Problema 2.61.

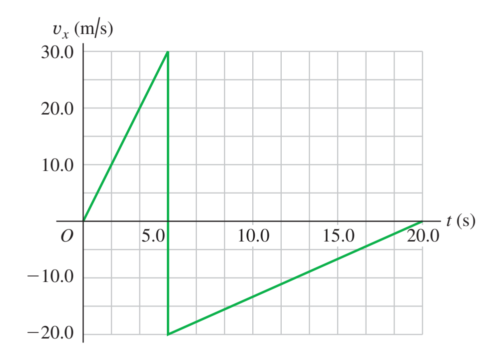


2.62. En el aire o en el vacío, la luz viaja con rapidez constante de 3.0×10^8 m/s. Para contestar algunas de las preguntas podría ser necesario consultar los datos astronómicos del Apéndice F. *a*) Un año luz se define como la distancia que la luz recorre en 1 año. Utilice esta información para determinar cuántos metros hay en 1 año luz. *b*) ¿Cuántos metros recorre la luz en un nanosegundo? *c*) Cuando hay una erupción solar, ¿cuánto tiempo pasa antes de que pueda verse en la Tierra? *d*) Rebotando rayos láser en un reflector colocado en la Luna por los astronautas del Apolo, los astrónomos pueden efectuar mediciones muy exactas de la distancia Tierra-Luna. ¿Cuánto tiempo después de emitido tarda el rayo láser (que es un haz de luz) en regresar a la Tierra? *e*) La sonda *Voyager*, que pasó por Neptuno en agosto de 1989, estaba a cerca de 3000 millones de millas de la Tierra en ese momento, y envió a la Tierra fotografías y otra información mediante ondas de radio, que viajan con la rapidez de la luz. ¿Cuánto tardaron esas ondas en llegar del *Voyager* a la Tierra?

2.63. Utilice la información del Apéndice F para contestar estas preguntas. *a*) ¿Qué rapidez tienen las Islas Galápagos, situadas en el ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje? *b*) ¿Qué rapidez tiene la Tierra debido a su traslación en torno al Sol? *c*) Si la luz siguiera la curvatura de la Tierra (lo cual no sucede), ¿cuántas veces daría la vuelta al ecuador un rayo de luz en un segundo?

2.64. Una pelota rígida que viaja en línea recta (el eje x) choca contra una pared sólida y rebota repentinamente durante un breve instante. En la figura 2.46, la gráfica v_x-t muestra la velocidad de esta pelota en función del tiempo. Durante los primeros 2.00 s de su movimiento, obtenga *a*) la distancia total que se mueve la pelota, y *b*) su desplazamiento. *c*) Dibuje una gráfica a_x-t del movimiento de esta pelota. *d*) ¿En los 5.00 s la gráfica que se muestra es realmente vertical? Explique su respuesta.

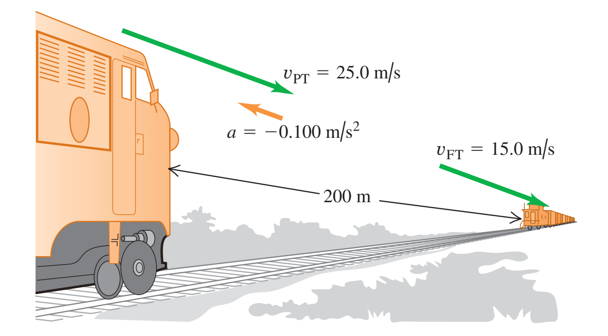
Figura 2.46 Problema 2.64.



2.65. Una pelota parte del reposo y baja rodando una colina con aceleración uniforme, recorriendo 150 m durante los segundos 5.0 s de su movimiento. ¿Qué distancia cubrió durante los primeros 5.0 s?

2.66. Choque. El maquinista de un tren de pasajeros que viaja a 25.0 m/s avista un tren de carga cuyo cabuz está 200 m más adelante en la misma vía (figura 2.47). El tren de carga viaja en la misma dirección a 15.0 m/s. El maquinista del tren de pasajeros aplica de inmediato los frenos, causando una aceleración constante de -0.100 m/s^2, mientras el tren de carga sigue con rapidez constante. Sea $x = 0$ el punto donde está el frente del tren de pasajeros cuando el maquinista aplica los frenos. *a*) ¿Atestiguarán las vacas una colisión? *b*) Si es así, ¿dónde ocurrirá? *c*) Dibuje en una sola gráfica las posiciones del frente del tren de pasajeros y del cabuz del tren de carga.

Figura 2.47 Problema 2.66.



2.67. Las cucarachas grandes pueden correr a 1.50 m/s en tramos cortos. Suponga que está de paseo, enciende la luz en un hotel y ve una cucaracha alejándose en línea recta a 1.50 m/s. Si inicialmente usted estaba 0.90 m detrás del insecto y se acerca hacia éste con una rapidez inicial de 0.80 m/s, ¿qué aceleración constante mínima necesitará para alcanzarlo cuando éste haya recorrido 1.20 m, justo antes de escapar bajo un mueble?

2.68. Dos automóviles están separados 200 m y avanzan frontalmente uno hacia el otro con una rapidez constante de 10 m/s. En el frente de uno de ellos, un saltamontes lleno de energía salta de atrás hacia delante entre los autos (¡sí que tiene patas fuertes!) con una velocidad horizontal constante de 15 m/s en relación con el suelo. El insecto salta en el instante en que cae, de manera que no pierde tiempo descansando en uno u otro autos. ¿Qué distancia total recorre el saltamontes antes de que los automóviles colisionen?

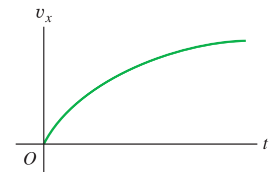
2.69. Un automóvil y un camión parten del reposo en el mismo instante, con el auto cierta distancia detrás del camión. El camión tiene aceleración constante de 2.10 m/s^2; y el auto, 3.40 m/s^2. El auto alcanza al camión cuando éste ha recorrido 40.0 m. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda el auto en alcanzar al camión? *b*) ¿Qué tan atrás del camión estaba inicialmente el auto? *c*) ¿Qué rapidez tienen los vehículos cuando avanzan juntos? *d*) Dibuje en una sola gráfica la posición de cada vehículo en función del tiempo. Sea $x = 0$ la posición inicial del camión.

2.70. Dos pilotos de exhibición conducen frontalmente uno hacia el otro. En $t = 0$ la distancia entre los automóviles es D, el auto 1 está parado y el 2 se mueve a la izquierda con rapidez v_0. El auto 1 comienza a moverse en $t = 0$ con aceleración constante a_x. El auto 2 sigue a velocidad constante. *a*) ¿En qué instante chocarán los autos? *b*) Calcule la rapidez del auto 1 justo antes de chocar contra el auto 2. *c*) Dibuje las gráficas x-t y v_x-t para los 2 autos, y trace las curvas usando los mismos ejes.

2.71. Se suelta una canica desde el borde de un tazón semiesférico cuyo diámetro es de 50.0 cm y rueda de abajo hacia arriba al borde opuesto en 10.0 s. Obtenga *a*) la rapidez media y la velocidad media de la canica.

2.72. Mientras conduce, quizás usted haya notado que la velocidad de su automóvil no continúa incrementándose aun cuando mantenga su pie presionando el pedal del acelerador. Este comportamiento se debe a la resistencia del aire y a la fricción entre las partes móviles del vehículo. La figura 2.48 muestra una gráfica v_x-t cualitativa para un auto ordinario, cuando éste parte del reposo en el origen y viaja en línea recta (el eje x). Dibuje las gráficas a_x-t y x-t cualitativas para este automóvil.

Figura 2.48 Problema 2.72.



2.73. Rebasado. El conductor de un automóvil desea rebasar un camión que viaja a una rapidez constante de 20.0 m/s (aproximadamente 45 mi/h). Inicialmente, el auto también viaja a 20.0 m/s y su parachoques delantero está 24.0 m atrás del parachoques trasero del camión. El auto adquiere una aceleración constante de 0.600 m/s^2 y regresa al carril del camión cuando su parachoques trasero está 26.0 m adelante del frente del camión. El auto tiene una longitud de 4.5 m, y el camión tiene una longitud de 21.0 m. *a*) ¿Cuánto tiempo necesita el auto para rebasar al camión? *b*) ¿Qué distancia recorre el auto en ese tiempo? *c*) ¿Qué rapidez final tiene el auto?

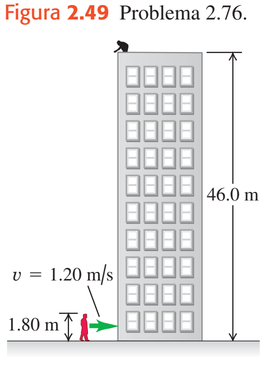
***2.74.** La velocidad medida de un objeto es $v_x(t) = \alpha - \beta t^2$, donde $\alpha = 4.00$ m/s y $\beta = 2.00$ m/s^3. En $t = 0$, el objeto está en $x = 0$. *a*) Calcule la posición y aceleración del objeto en función de t.

b) ¿Qué desplazamiento *positivo* máximo tiene el objeto con respecto al origen?

***2.75.** La aceleración de una partícula está dada por $a_x(t) = -2.00\ \text{m/s}^2 + (3.00\ \text{m/s}^3)t$. *a*) Encuentre la velocidad inicial v_{0x} tal que la partícula tenga la misma coordenada x en $t = 4.00$ s que en $t = 0$. *b*) ¿Cuál será la velocidad en $t = 4.00$ s?

2.76. Caída de huevo. Imagine que está en la azotea del edificio de física, a 46.0 m del suelo (figura 2.49). Su profesor, que tiene una estatura de 1.80 m, camina junto al edificio a una rapidez constante de 1.20 m/s. Si usted quiere dejar caer un huevo sobre la cabeza de su profesor, ¿dónde deberá estar éste cuando usted suelte el huevo? Suponga que el huevo está en caída libre.

Figura 2.49 Problema 2.76.



2.77. En la Tierra un volcán puede expulsar rocas verticalmente hasta una altura máxima H. *a*) ¿A qué altura (en términos de H) llegarían estas rocas si un volcán en Marte las expulsara con la misma velocidad inicial? La aceleración debida a la gravedad en Marte es de 3.71 m/s^2, y se puede despreciar la resistencia del aire en ambos planetas. *b*) Si en la Tierra las rocas están en el aire un tiempo T, ¿por cuánto tiempo (en términos de T) estarán en el aire en Marte?

2.78. Una artista hace malabarismos con pelotas mientras realiza otras actividades. En un acto, arroja una pelota verticalmente hacia arriba y, mientras la pelota está en el aire, corre de ida y vuelta hacia una mesa que está a 5.50 m de distancia a una rapidez constante de 2.50 m/s, regresando justo a tiempo para atrapar la pelota que cae. *a*) ¿Con qué rapidez inicial mínima debe ella lanzar la pelota hacia arriba para realizar dicha hazaña? *b*) ¿A qué altura de su posición inicial está la pelota justo cuando ella llega a la mesa?

2.79. Los visitantes a un parque de diversiones observan a clavadistas lanzarse de una plataforma de 21.3 m (70 ft) de altura sobre una alberca. Según el presentador, los clavadistas entran al agua con una rapidez de 56 mi/h (25 m/s). Puede ignorarse la resistencia del aire. *a*) ¿Es correcta la aseveración del presentador? *b*) ¿Para un clavadista es posible saltar directamente hacia arriba de la plataforma de manera que, librando la plataforma al caer hacia la alberca, él entre al agua a 25.0 m/s? Si acaso, ¿qué rapidez inicial requiere? ¿Se necesita una rapidez inicial físicamente alcanzable?

2.80. Una maceta con flores cae del borde de una ventana y pasa frente a la ventana de abajo. Se puede despreciar la resistencia del aire. La maceta tarda 0.420 s en pasar por esta ventana, cuya altura es de 1.90 m. ¿A qué distancia debajo del punto desde el cual cayó la maceta está el borde superior de la ventana de abajo?

2.81. Algunos rifles pueden disparar una bala con una rapidez de 965 m/s justo cuando salen de la boca del cañón (esta rapidez se llama *velocidad inicial*). Si el cañón tiene 70.0 cm de largo y si la bala acelera uniformemente desde el reposo dentro del cañón, *a*) ¿cuál es la aceleración (en valores de g) de la bala dentro del cañón?, y *b*) ¿por cuánto tiempo (en ms) está dentro del cañón? *c*) Si, cuando el rifle se dispara verticalmente, la bala alcanza una altura máxima H, ¿cuál debería ser la altura máxima (en términos de H) para un rifle nuevo que produzca la mitad de la velocidad inicial de aquél?

2.82. Un cohete de varias etapas. En la primera etapa de un cohete de dos etapas, éste se dispara desde la plataforma de lanzamiento partiendo del reposo, pero con una aceleración constante de 3.50 m/s^2 hacia arriba. A los 25.0 s después del lanzamiento, el cohete inicia la segunda etapa, la cual repentinamente aumenta su rapidez a 132.5 m/s hacia arriba. Sin embargo, este impulso consume todo el combustible, de manera que la única fuerza que actúa sobre el cohete es la gravedad. Se desprecia la resistencia del aire. *a*) Obtenga la altura máxima que alcanza el cohete de dos etapas sobre la plataforma de lanzamiento. *b*) Después de que se inicia la segunda etapa, ¿cuánto tiempo pasará antes de que el cohete caiga a la plataforma de lanzamiento? *c*) ¿Qué tan rápido se moverá el cohete de dos etapas justo cuando llega a la plataforma?

2.83. Cuidado abajo. Sam avienta una bala de 16 lb directamente hacia arriba, imprimiéndole una aceleración constante de 45.0 m/s^2 a lo largo de 64.0 cm, y soltándola a 2.20 m sobre el suelo. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez tiene la bala cuando Sam la suelta? *b*) ¿Qué altura alcanza sobre el suelo? *c*) ¿Cuánto tiempo tiene Sam para quitarse de abajo antes de que la bala regrese a la altura de su cabeza, a 1.83 m sobre el suelo?

2.84. Una profesora de física que está efectuando una demostración al aire libre, de repente cae desde el reposo en lo alto de un acantilado y simultáneamente grita "¡Auxilio!" Después de caer 3.0 s, escucha el eco de su grito proveniente del suelo del valle. La rapidez del sonido es de 340 m/s. *a*) ¿Qué altura tiene el acantilado? *b*) Si se desprecia la resistencia del aire, ¿con qué rapidez se estará moviendo la profesora justo antes de chocar contra el suelo? (Su rapidez real será menor que eso, debido a la resistencia del aire.)

2.85. Malabarismo. Un malabarista actúa en un recinto cuyo techo está 3.0 m arriba del nivel de sus manos. Lanza una pelota hacia arriba de modo que apenas llega al techo. *a*) ¿Qué velocidad inicial tiene la pelota? *b*) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al techo? En el instante en que la primera pelota está en el techo, el malabarista lanza una segunda pelota hacia arriba con dos terceras partes de la velocidad inicial de la primera. *c*) ¿Cuánto tiempo después de lanzada la segunda pelota se cruzan ambas pelotas en el aire? *d*) ¿A qué altura sobre la mano del malabarista se cruzan las dos pelotas?

2.86. Un helicóptero que lleva al doctor Malvado despega con aceleración constante hacia arriba de 5.0 m/s^2. El agente secreto Austin Powers se trepa de un salto al helicóptero justo cuando éste despega. Los dos hombres forcejean durante 10.0 s, después de lo cual Powers apaga el motor y se lanza desde el helicóptero. Suponga que el helicóptero está en caída libre después de que se apaga el motor y que la resistencia del aire es insignificante. *a*) ¿Qué altura máxima sobre el suelo alcanza el helicóptero? *b*) 7.0 s después de saltar del helicóptero, Powers enciende un cohete que trae sujeto a la espalda, el cual le imprime una aceleración constante hacia abajo con magnitud de 2.0 m/s^2. ¿A qué distancia sobre el suelo está Powers cuando el helicóptero se estrella contra el piso?

2.87. Altura de edificio. El Hombre Araña da un paso al vacío desde la azotea de un edificio y cae libremente desde el reposo una distancia h hasta la acera. En el último 1.0 s de su caída, cubre una distancia de $h/4$. Calcule la altura h del edificio.

2.88. Altura de acantilado. Imagine que está escalando una montaña y que repentinamente se encuentra en el borde de un acantilado, envuelto en niebla. Para determinar la altura del acantilado, deja caer un guijarro y 10.0 s después escucha el sonido que hace al golpear el suelo al pie del acantilado. *a*) Sin tomar en cuenta la resistencia del aire, ¿qué altura tiene el acantilado si la rapidez del sonido es de 330 m/s? *b*) Suponga que se desprecia el tiempo que el sonido tarda en llegar a sus oídos. En ese caso, ¿habría sobrestimado o subestimado la altura del acantilado? Explique su razonamiento.

2.89. Lata que cae. Un pintor está parado en un andamio que sube con rapidez constante. Por descuido, empuja una lata de pintura, la cual cae del andamio cuando está a 15.0 m sobre el suelo. Un observador usa su cronómetro para determinar que la lata tarda 3.25 s en llegar al suelo. No tome en cuenta la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez tiene la lata justo antes de llegar al suelo? *b*) Otro pintor está parado en una cornisa, una lata está a 4.00 m arriba de él cuando ésta se cae. Tiene reflejos felinos, y si la lata pasa frente a él, podrá atraparla. ¿Tiene oportunidad de hacerlo?

2.90. Decidido a probar la ley de la gravedad por sí mismo, un estudiante se deja caer desde un rascacielos de 180 m de altura, cronómetro en mano, e inicia una caída libre (velocidad inicial cero). Cinco segundos después, llega Superman y se lanza de la azotea para salvarlo, con una rapidez inicial v_0 que imprimió a su cuerpo, empujándose hacia abajo desde el borde de la azotea con sus piernas de acero. Después, cae con la misma aceleración que cualquier cuerpo en caída libre. *a*) ¿Qué valor deberá tener v_0 para que Superman atrape al estudiante justo antes de llegar al suelo? *b*) Dibuje en una sola gráfica las posiciones de Superman y del estudiante en función del tiempo. La rapidez inicial de Superman tiene el valor calculado en el inciso *a*). *c*) Si la altura del rascacielos es menor que cierto valor mínimo, ni Superman podría salvar al estudiante antes de que llegue al suelo. ¿Cuál es esa altura mínima?

2.91. Durante el lanzamiento, a menudo los cohetes desechan partes innecesarias. Cierto cohete parte del reposo en una plataforma de lanzamiento y acelera hacia arriba a 3.30 m/s^2 constantes. Cuando está a 235 m por arriba de la plataforma de lanzamiento, desecha un bote de combustible vacío simplemente desconectándolo. Una vez desconectado, la única fuerza que actúa sobre el bote es la gravedad (se puede ignorar la resistencia del aire). *a*) ¿Qué tan alto está el cohete cuando el bote llega a la plataforma, suponiendo no cambia la aceleración del cohete? *b*) ¿Cuál es la distancia total que recorre el bote entre que se suelta y choca contra la plataforma de lanzamiento?

2.92. Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde el suelo con rapidez v_0. En el mismo instante, una segunda pelota (en reposo) se deja caer de una altura H directamente encima del punto de lanzamiento de la primera. No hay resistencia del aire. *a*) ¿Cuándo chocarán las pelotas? *b*) Obtenga el valor de H en términos de v_0 y g, de modo que, cuando choquen las pelotas, la primera esté en su punto más alto.

2.93. Dos automóviles, A y B, viajan en línea recta. La distancia de A con respecto al punto de partida está dada, en función del tiempo, por $x_A(t) = \alpha t + \beta t^2$, con $\alpha = 2.60$ m/s y $\beta = 1.20$ m/s^2. La distancia entre B y el punto de partida es $x_B(t) = \gamma t^2 - \delta t^3$, con $\gamma = 2.80$ m/s^2 y $\delta = 0.20$ m/s^2. *a*) ¿Cuál auto se adelanta justo después de salir del punto de partida? *b*) ¿En qué instante(s) los dos autos están en el mismo punto? *c*) ¿En qué instante(s) la distancia entre A y B no está aumentando ni disminuyendo? *d*) ¿En qué instante(s) A y B tienen la misma aceleración?

2.94. Una manzana cae libremente de un árbol, estando originalmente en reposo a una altura H sobre un césped crecido cuyas hojas miden h. Cuando la manzana llega al césped, se frena con razón constante de modo que su rapidez es 0 al llegar al suelo. *a*) Obtenga la rapidez de la manzana justo antes de tocar el césped. *b*) Obtenga la aceleración de la manzana ya dentro del césped. *c*) Dibuje las gráficas: y-t, v_y-t y a_y-t para el movimiento de la manzana.

Problemas de desafío

2.95. Tomar el autobús. Una estudiante corre a más no poder para alcanzar su autobús, que está detenido en la parada, con una rapidez de 5.0 m/s. Cuando ella está aún a 40.0 m del autobús, éste se pone en marcha con aceleración constante de 0.170 m/s^2. *a*) ¿Durante qué tiempo y qué distancia debe correr la estudiante a 5.0 m/s para alcanzar al autobús? *b*) Cuando lo hace, ¿qué rapidez tiene el autobús? *c*) Dibuje una gráfica x-t para la estudiante y para el autobús, donde $x = 0$ sea la posición inicial de la estudiante. *d*) Las ecuaciones que usó en el inciso *a*) para calcular t tienen una segunda solución, que corresponde a un instante posterior en que la estudiante y el autobús están otra vez en el mismo lugar si continúan sus respectivos movimientos. Explique el significado de esta otra solución. ¿Qué rapidez tiene el autobús en ese punto? *e*) Si la rapidez de la estudiante fuera de 3.5 m/s, ¿alcanzaría al autobús? *f*) ¿Qué rapidez *mínima* requiere la estudiante para apenas alcanzar al autobús? ¿Durante qué tiempo y qué distancia deberá ella correr en tal caso?

2.96. En el salto vertical, un atleta se agazapa y salta hacia arriba tratando de alcanzar la mayor altura posible. Ni siquiera los campeones mundiales pasan mucho más de 1.00 s en el aire ("tiempo en suspensión"). Trate al atleta como partícula y sea $y_{máx}$ su altura máxima sobre el suelo. Para explicar por qué parece estar suspendido en el aire, calcule la razón del tiempo que está sobre $y_{máx}/2$ al tiempo que tarda en llegar del suelo a esa altura. Desprecie la resistencia del aire.

2.97. Se lanza una pelota hacia arriba desde el borde de una azotea. Una segunda pelota se deja caer desde la azotea 1.00 s después. Desprecie la resistencia del aire. *a*) Si la altura del edificio es de 20.0 m, ¿qué rapidez inicial necesitará la primera pelota para que las dos lleguen al suelo al mismo tiempo? En una sola gráfica dibuje la posición de cada pelota en función del tiempo, a partir del instante en que se lanzó la primera. Considere la misma situación, pero ahora sea la rapidez inicial v_0 de la primera pelota un dato, y la altura h del edificio la incógnita. *b*) ¿Qué altura deberá tener el edificio para que las dos pelotas lleguen al suelo al mismo tiempo si v_0 es i) de 6.0 m/s y ii) de 9.5 m/s? *c*) Si v_0 es mayor que cierto valor $v_{máx}$, no existe una h tal que ambas pelotas lleguen al piso simultáneamente. Obtenga $v_{máx}$ cuyo valor tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es? *d*) Si v_0 es menor que cierto valor $v_{mín}$, no existe una h tal que ambas pelotas lleguen al piso al mismo tiempo. Obtenga $v_{mín}$ cuyo valor también tiene una interpretación física sencilla. ¿Cuál es?

2.98. Un excursionista despierto ve un peñasco que cae desde un risco lejano y observa que tarda 1.30 s en caer el último tercio de la distancia. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué altura tiene el risco en metros? *b*) Si en el inciso *a*) usted obtiene dos soluciones de una ecuación cuadrática y usa una para su respuesta, ¿qué representa la otra solución?

MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES





?Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.
- Cómo interpretar las componentes de la aceleración de un cuerpo paralela y perpendicular a su trayectoria.
- Cómo describir la trayectoria curva que sigue un proyectil.
- Las ideas clave detrás del movimiento en una trayectoria circular, con rapidez constante o con rapidez variable.
- Cómo relacionar la velocidad de un cuerpo en movimiento visto desde dos marcos de referencia distintos.

Cuando un bate golpea una pelota de béisbol, ¿qué determina dónde cae la pelota? ¿Cómo describimos el movimiento de un carro de montaña rusa en una curva o el vuelo de un halcón alrededor de un campo abierto? Si lanzamos un globo lleno de agua horizontalmente desde una ventana, ¿tardará el mismo tiempo en llegar al suelo que si sólo lo dejamos caer?

No podemos contestar estas preguntas usando las técnicas del capítulo 2, donde consideramos que las partículas se movían sólo en línea recta. En vez de ello, necesitamos extender nuestras descripciones del movimiento a situaciones en dos y en tres dimensiones. Seguiremos empleando las cantidades vectoriales de desplazamiento, velocidad y aceleración; sin embargo, ahora no estarán todas en una misma línea. Veremos que muchos movimientos importantes se dan sólo en dos dimensiones, es decir, en un *plano*, y pueden describirse con dos componentes de posición, velocidad y aceleración.

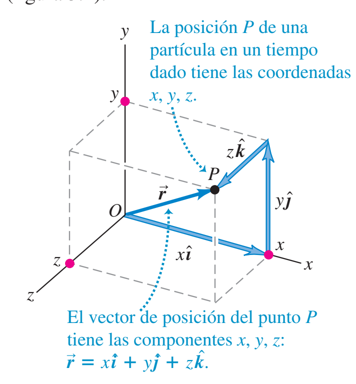
También necesitamos considerar cómo describen el movimiento de una partícula observadores diferentes que se mueven unos con respecto a otros. El concepto de *velocidad relativa* desempeñará un papel importante más adelante en este libro, cuando estudiemos colisiones, exploraremos los fenómenos electromagnéticos, y cuando presentemos la teoría especial de la relatividad de Einstein.

En este capítulo se conjunta el lenguaje de vectores que vimos en el capítulo 1 con el lenguaje de la cinemática del capítulo 2. Como antes, nos interesa describir el movimiento, no analizar sus causas. No obstante, el lenguaje que aprenderemos aquí resultará indispensable más adelante, al estudiar la relación entre fuerza y movimiento.

3.1 Vectores de posición y velocidad

Para describir el *movimiento* de una partícula en el espacio, primero tenemos que describir *su posición*. Considere una partícula que está en el punto P en cierto instante. El **vector de posición** $\vec{r}$ de la partícula en ese instante es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto P (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas x, y y z de P son las componentes x, y y z de $\vec{r}$. Usando los vectores unitarios que presentamos en la sección 1.9, podemos escribir

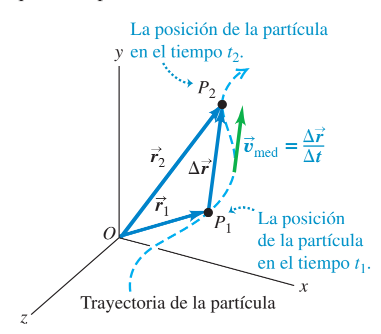
$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad \text{(vector de posición)} \tag{3.1}$$



3.1 El vector de posición $\vec{r}$ del origen al punto P tiene componentes x, y y z. La trayectoria que la partícula sigue en el espacio es en general una curva (figura 3.2).

Durante un intervalo de tiempo Δt, la partícula se mueve de P_1, donde su vector de posición es $\vec{r}_1$, a P_2, donde su vector de posición es $\vec{r}_2$. El cambio de posición (el desplazamiento) durante este intervalo es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos la **velocidad media** $\vec{v}_{med}$ durante este intervalo igual que en el capítulo 2 para movimiento rectilíneo, como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(vector de velocidad media)} \tag{3.2}$$



3.2 La velocidad media $\vec{v}_{med}$ entre los puntos P_1 y P_2 tiene la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

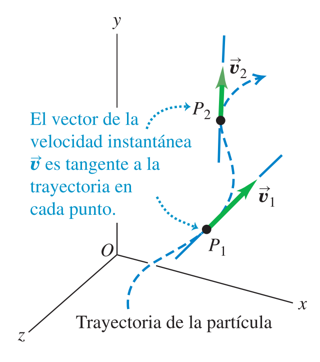
Dividir un vector entre un escalar es realmente un caso especial de *multiplicar* un vector por un escalar, que se describió en la sección 1.7; la velocidad media $\vec{v}_{med}$ es igual al vector de desplazamiento $\Delta\vec{r}$ multiplicado por $1/\Delta t$, el recíproco del intervalo de tiempo. Observe que la componente x de la ecuación (3.2) es $v_{med\text{-}x} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$. Esto es precisamente la ecuación (2.2), la expresión para la velocidad media que dedujimos en la sección 2.1 para el movimiento unidimensional.

Aquí definimos la **velocidad instantánea** igual que en el capítulo 2: como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a 0, y es la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo. La diferencia clave es que tanto la posición $\vec{r}$ como la velocidad instantánea $\vec{v}$ ahora son vectores:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(vector de velocidad instantánea)} \tag{3.3}$$

La *magnitud* del vector $\vec{v}$ en cualquier instante es la *rapidez* v de la partícula en ese instante. La *dirección* de $\vec{v}$ en cualquier instante es la dirección en que la partícula se mueve en ese instante.

Observe que conforme $\Delta t \to 0$, P_1 y P_2 de la figura 3.2 se acercan cada vez más. En el límite, $\Delta\vec{r}$ se vuelve tangente a la trayectoria. La dirección de $\Delta\vec{r}$ en el límite también es la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$. Esto conduce a una conclusión importante: *en cualquier punto de la trayectoria, el vector de velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en ese punto* (figura 3.3).



3.3 Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades instantáneas en los puntos P_1 y P_2, como se muestra en la figura 3.2.

A menudo es más sencillo calcular el vector de velocidad instantánea empleando componentes. Durante cualquier desplazamiento $\Delta\vec{r}$, los cambios Δx, Δy y Δz en las tres coordenadas de la partícula son las *componentes* de $\Delta\vec{r}$. Por lo tanto, las componentes v_x, v_y y v_z de la velocidad instantánea $\vec{v}$ son simplemente las derivadas en el tiempo de x, y y z. Es decir,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \text{(componentes de la velocidad instantánea)} \tag{3.4}$$

La componente x de $\vec{v}$ es $v_x = dx/dt$, que es la ecuación (2.3): la expresión para la velocidad instantánea en movimiento rectilíneo que obtuvimos en la sección 2.2.

Por lo tanto, la ecuación (3.4) es una extensión directa de la idea de velocidad instantánea al movimiento en tres dimensiones.

Podemos obtener este mismo resultado derivando la ecuación (3.1). Los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ tienen magnitud y dirección constantes, así que sus derivadas son cero; entonces,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{3.5}$$

Esto muestra otra vez que las componentes de $\vec{v}$ son dx/dt, dy/dt y dz/dt.

La magnitud del vector de velocidad instantánea $\vec{v}$, esto es, la rapidez, está dada en términos de las componentes v_x, v_y y v_z aplicando el teorema de Pitágoras

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.6}$$

La figura 3.4 muestra la situación cuando la partícula se mueve en el plano xy. Aquí, z y v_z son cero, y la rapidez (la magnitud de $\vec{v}$) es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

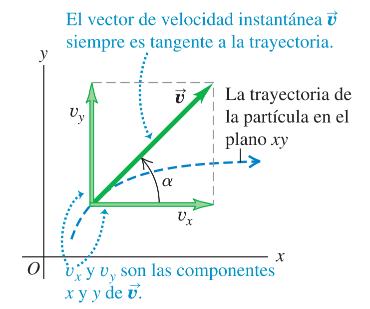
y la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$ está dada por el ángulo α de la figura. Vemos que

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.7}$$

(Siempre usamos letras griegas para los ángulos. Utilizamos α para la dirección del vector de la velocidad instantánea para evitar confusiones con la dirección θ del vector de *posición* de la partícula.)

El vector de velocidad instantánea suele ser más interesante y útil que el de la velocidad media. De ahora en adelante, al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos al vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ (no al vector de velocidad media). Usualmente ni nos molestaremos en llamar vector a $\vec{v}$; el lector debe recordar que la velocidad es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

3.4 Las dos componentes de velocidad para movimiento en el plano xy.



Ejemplo 3.1 Cálculo de velocidad media e instantánea

Se está usando un vehículo robot para explorar la superficie de Marte. El módulo de descenso es el origen de coordenadas; en tanto que la superficie marciana circundante está en el plano xy. El vehículo, que representamos como un punto, tiene coordenadas x y y que varían con el tiempo:

$$x = 2.0\ \text{m} - (0.25\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$y = (1.0\ \text{m/s})t + (0.025\ \text{m/s}^3)t^3$$

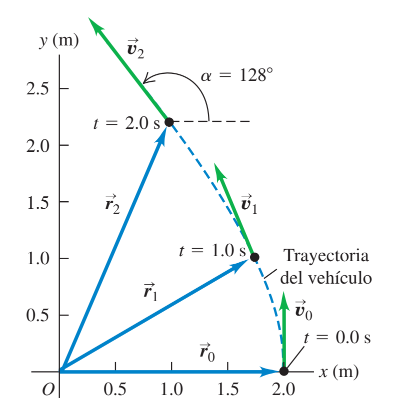
a) Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia con respecto al módulo en $t = 2.0$ s. *b*) Obtenga los vectores de desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s. *c*) Deduzca una expresión general para el vector de velocidad instantánea del vehículo. Exprese la velocidad instantánea en $t = 2.0$ s en forma de componentes y además en términos de magnitud y dirección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica movimiento en una trayectoria bidimensional (es decir, en un plano). Por lo tanto, deberemos usar las expresiones para los *vectores* de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea que obtuvimos en esta sección. (En las expresiones más sencillas de las secciones 2.1 y 2.2 no intervienen vectores, y sólo son válidas para movimiento rectilíneo.)

PLANTEAR: La trayectoria del vehículo se muestra en la figura 3.5. Usaremos la ecuación (3.1) para la posición $\vec{r}$, la expresión $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para el desplazamiento, la ecuación (3.2) para la velocidad media y las ecuaciones (3.5) y (3.6) para la velocidad instantánea y su dirección. Las incógnitas se indican en el enunciado del problema.

3.5 En $t = 0$ el vehículo tiene vector de posición $\vec{r}_0$ y velocidad instantánea $\vec{v}_0$. Asimismo, $\vec{r}_1$ y $\vec{v}_1$, son los vectores en $t = 1.0$ s; $\vec{r}_2$ y $\vec{v}_2$ son los vectores en $t = 2.0$ s.



continúa

EJECUTAR: *a*) En el instante $t = 2.0$ s las coordenadas del vehículo son

$$x = 2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 1.0\text{ m}$$
$$y = (1.0\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + (0.025\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^3 = 2.2\text{ m}$$

La distancia del vehículo al origen en este instante es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.0\text{ m})^2 + (2.2\text{ m})^2} = 2.4\text{ m}$$

b) Para obtener el desplazamiento y la velocidad media, expresamos el vector de posición $\vec{r}$ en función del tiempo *t*. De la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\\ &= [2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath}\\ &\quad + [(1.0\text{ m/s})t + (0.025\text{ m/s}^3)t^3]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el instante $t = 0.0$ s el vector de posición $\vec{r}_0$ es

$$\vec{r}_0 = (2.0\text{ m})\hat{\imath} + (0.0\text{ m})\hat{\jmath}$$

Del inciso *a*) sabemos que, en $t = 2.0$ s, el vector de posición $\vec{r}_2$ es

$$\vec{r}_2 = (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}$$

Por lo tanto, el desplazamiento entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 &= (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath} - (2.0\text{ m})\hat{\imath}\\ &= (-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Durante el intervalo entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s, el vehículo se movió 1.0 m en la dirección $-x$ y 2.2 m en la dirección $+y$. La velocidad media en este intervalo es el desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido (ecuación 3.2):

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \frac{(-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}}{2.0\text{ s} - 0.0\text{ s}}\\ &= (-0.50\text{ m/s})\hat{\imath} + (1.1\text{ m/s})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Las componentes de esta velocidad media son

$$v_{\text{med-}x} = -0.50\text{ m/s} \qquad v_{\text{med-}y} = 1.1\text{ m/s}$$

c) Por la ecuación (3.4), las componentes de la velocidad instantánea son las derivadas de las coordenadas respecto a *t*:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\text{ m/s}^2)(2t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\text{ m/s} + (0.025\text{ m/s}^3)(3t^2)$$

Así, podemos escribir el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ como

$$\begin{aligned}\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= (-0.50\text{ m/s}^2)t\hat{\imath}\\ &\quad + [1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el tiempo $t = 2.0$ s, las componentes de la velocidad instantánea son

$$v_x = (-0.50\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = -1.0\text{ m/s}$$
$$v_y = 1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^2 = 1.3\text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad instantánea (es decir, la rapidez) en $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1.0\text{ m/s})^2 + (1.3\text{ m/s})^2}\\ &= 1.6\text{ m/s}\end{aligned}$$

Su dirección con respecto al eje $+x$ está dada por el ángulo α, donde, por la ecuación (3.7),

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1.3\text{ m/s}}{-1.0\text{ m/s}} = -1.3 \qquad \text{así} \qquad \alpha = 128°$$

Una calculadora mostraría que la tangente inversa de -1.3 es $-52°$. No obstante, como vimos en la sección 1.8, hay que examinar un dibujo del vector para decidir su dirección. La figura 3.5 muestra que la respuesta correcta para α es $-52° + 180° = 128°$.

EVALUAR: Tómese un momento para comparar las componentes de la velocidad *media* que obtuvimos en el inciso *b*) para el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s ($v_{\text{med-}x} = -0.50$ m/s, $v_{\text{med-}y} = 1.1$ m/s) con las componentes de la velocidad *instantánea* en $t = 2.0$ s que obtuvimos en el inciso *c*) ($v_x = -1.0$ m/s, $v_y = 1.3$ m/s). En general, la comparación muestra que, igual que en una sola dimensión, el vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante un intervalo *no* es igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo (véase el ejemplo 2-1).

Usted debería calcular el vector de posición, el vector de velocidad instantánea, la rapidez y dirección del movimiento en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. Los vectores de posición $\vec{r}$ y velocidad instantánea $\vec{v}$ en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s se muestran en la figura 3.5. Observe que en todos los puntos el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria. La magnitud de $\vec{v}$ aumenta al avanzar el vehículo, lo que indica que la rapidez del vehículo está aumentando.

Evalúe su comprensión de la sección 3.1 ¿En cual de las siguientes situaciones el vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ en un intervalo *sería* igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo? i) Un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva a rapidez constante; ii) un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva y aumenta su rapidez; iii) un cuerpo que se mueve en línea recta a rapidez constante; iv) un cuerpo que se mueve en línea recta y aumenta su rapidez.

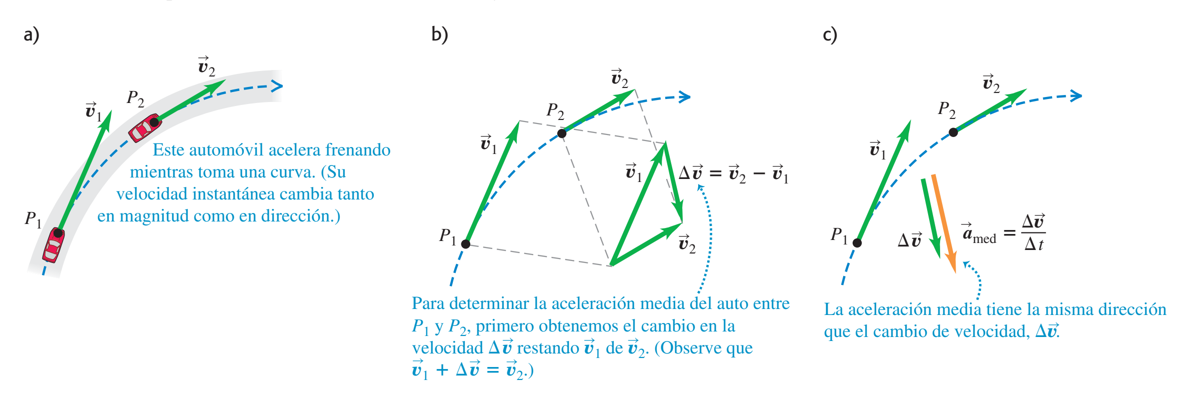
MP

3.2 El vector de aceleración

Consideremos ahora la *aceleración* de una partícula que se mueve en el espacio. Al igual que en el movimiento rectilíneo, la aceleración describe el cambio en la velocidad de la partícula; no obstante, aquí la trataremos como un vector para describir los cambios tanto en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) *como* en la dirección de la velocidad (esto es, la dirección en que se mueve la partícula).

En la figura 3.6a, un automóvil (tratado como partícula) se mueve en una trayectoria curva. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan las velocidades instantáneas del auto en el

3.6 a) Un automóvil se mueve por una curva de P_1 a P_2. b) Se obtiene $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ mediante resta de vectores. c) El vector $\vec{a}_{med} = \Delta\vec{v}/\Delta t$ representa la aceleración media entre P_1 y P_2.



instante t_1, cuando el auto está en el punto P_1, y en t_2 cuando está en P_2. Las dos velocidades pueden diferir en magnitud y dirección. Durante el intervalo de t_1 a t_2, el *cambio vectorial de velocidad* es $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$ (figura 3.6b). Definimos la **aceleración media** $\vec{a}_{med}$ del auto en este intervalo como el cambio de velocidad dividido entre el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad \text{(vector de aceleración media)} \qquad (3.8)$$

La aceleración media es una cantidad *vectorial* en la misma dirección que el vector $\Delta\vec{v}$ (figura 3.6c). Observe que $\vec{v}_2$ es la resultante de la velocidad original $\vec{v}_1$ y el cambio $\Delta\vec{v}$ (figura 3.6b). La componente x de la ecuación (3.8) es $a_{med\text{-}x} = (v_{2x} - v_{1x})/(t_2 - t_1) = \Delta v_x/\Delta t$, que no es sino la ecuación (2.4) para la aceleración media en movimiento rectilíneo.

Al igual que en el capítulo 2, definimos la **aceleración instantánea** $\vec{a}$ en el punto P_1 como el límite de la aceleración media cuando el punto P_2 se acerca a P_1 y $\Delta\vec{v}$ y Δt se acercan a cero. La aceleración instantánea también es igual a la tasa (variación) instantánea de cambio de velocidad con el tiempo. Como no estamos limitados a movimiento rectilíneo, la aceleración instantánea ahora es un vector:

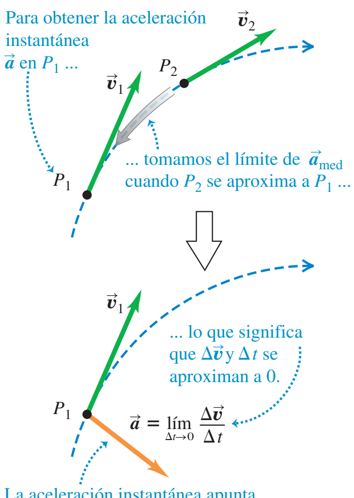
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{(vector de aceleración instantánea)} \qquad (3.9)$$

El vector de velocidad $\vec{v}$, como vimos, es tangente a la trayectoria de la partícula. No obstante, las figuras 3.6c y 3.7 muestran que si la trayectoria es curva, el vector de aceleración instantánea $\vec{a}$ siempre apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria, es decir, hacia el interior de cualquier curva descrita por la partícula.

CUIDADO **Cualquier partícula que siga una trayectoria curva está acelerando** Si una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración siempre es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizá le parezca que esta conclusión es contraria a su intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para implicar que la velocidad aumenta. La definición más precisa de la ecuación (3.9) muestra que la aceleración no es cero cuando el vector de velocidad cambia de cualquier forma, ya sea en su magnitud, dirección o ambas.

Para convencerse de que una partícula no tiene aceleración cero cuando se mueve en una trayectoria curva con rapidez constante, piense en lo que siente cuando viaja en automóvil. Si el auto acelera, usted tiende a moverse en dirección

3.7 La aceleración instantánea $\vec{a}$ en el punto P_1 de la figura 3.6.



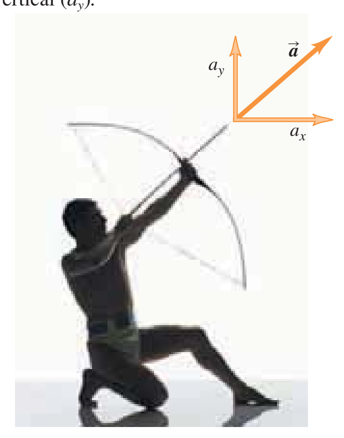
opuesta a la aceleración del vehículo. (Veremos por qué en el capítulo 4.) Así, tendemos a movernos hacia atrás cuando el auto acelera hacia adelante (aumenta su velocidad), y hacia el frente cuando el auto desacelera (frena). Si el auto da vuelta en un camino horizontal, tendemos a deslizamos hacia afuera de la curva; por lo tanto, el auto tiene una aceleración hacia adentro de la curva.

Normalmente nos interesará la aceleración instantánea, no la media. Por ahora, usaremos el término "aceleración" para referirnos al vector de aceleración instantánea, $\vec{a}$.

Cada componente del vector de aceleración es la derivada de la componente correspondiente de la velocidad:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \qquad \text{(componentes de la aceleración instantánea)} \tag{3.10}$$

3.8 Cuando el arquero dispara la flecha, ésta acelera tanto hacia adelante como hacia arriba. Por lo tanto, su vector de aceleración tiene una componente horizontal (a_x) y también una componente vertical (a_y).



En términos de vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \tag{3.11}$$

La componente x de las ecuaciones (3.10) y (3.11), $a_x = dv_x/dt$, es la expresión de la sección 2.3 para la aceleración instantánea en una dimensión, ecuación (2.5). La figura 3.8 muestra un ejemplo de vector de aceleración que tiene componentes tanto x como y.

Además, como cada componente de velocidad es la derivada de la coordenada correspondiente, expresamos las componentes a_x, a_y y a_z del vector aceleración $\vec{a}$ como

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.12}$$

y el vector de aceleración $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{3.13}$$

Ejemplo 3.2 Cálculo de aceleración media e instantánea

Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del ejemplo 3.1. Determinamos que las componentes de la velocidad instantánea en cualquier instante t son

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\ \text{m/s}^2)(2t)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\ \text{m/s} + (0.025\ \text{m/s}^3)(3t^2)$$

y que el vector de velocidad es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (-0.50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath} + [1.0\ \text{m/s} + (0.075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}$$

a) Obtenga las componentes de la aceleración media en el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s. *b*) Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación vectorial entre velocidad, aceleración media y aceleración instantánea.

PLANTEAR: En el inciso *a*), determinamos primero los valores de v_x y v_y al principio y al final del intervalo, y después usamos la ecuación (3.8) para calcular las componentes de la aceleración media. En el inciso *b*) determinamos las componentes de la aceleración instantánea en cualquier tiempo t derivando respecto al tiempo las componentes de la velocidad, como en la ecuación (3.10).

EJECUTAR: *a*) Si sustituimos $t = 0.0$ s, o bien, $t = 2.0$ s en las expresiones para v_x y v_y, veremos que al principio del intervalo ($t = 0.0$ s) las componentes de velocidad son

$$v_x = 0.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.0\ \text{m/s}$$

y que al final del intervalo ($t = 2.0$ s) las componentes son

$$v_x = -1.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.3\ \text{m/s}$$

Los valores en $t = 2.0$ s son los mismos que obtuvimos en el ejemplo 3.1.) Así, las componentes de la aceleración media en el intervalo son

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1.0\ \text{m/s} - 0.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = -0.5\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{med-}y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1.3\ \text{m/s} - 1.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = 0.15\ \text{m/s}^2$$

b) Con la ecuación (3.10), obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0.50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0.075\ \text{m/s}^3)(2t)$$

Podemos escribir el vector de aceleración instantánea $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (-0.50 \text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (0.15 \text{ m/s}^3)t\hat{\jmath}$$

En el instante $t = 2.0$ s, las componentes de la aceleración instantánea son

$$a_x = -0.50 \text{ m/s}^2 \qquad a_y = (0.15 \text{ m/s}^3)(2.0 \text{ s}) = 0.30 \text{ m/s}^2$$

El vector de aceleración en este instante es

$$\vec{a} = (-0.50 \text{ m/s}^2)\hat{\imath} + (0.30 \text{ m/s}^2)\hat{\jmath}$$

La magnitud de la aceleración en este instante es

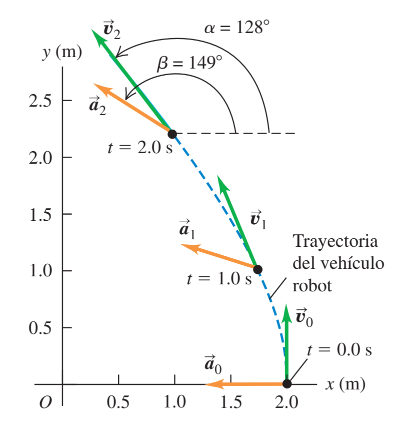
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$
$$= \sqrt{(-0.50 \text{ m/s}^2)^2 + (0.30 \text{ m/s}^2)^2} = 0.58 \text{ m/s}^2$$

La dirección de $\vec{a}$ con respecto al eje x positivo está dada por el ángulo β, donde

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0.30 \text{ m/s}^2}{-0.50 \text{ m/s}^2} = -0.60$$
$$\beta = 180° - 31° = 149°$$

EVALUAR: Usted debería utilizar los resultados del inciso *b*) para calcular la aceleración instantánea en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. La figura 3.9 muestra la trayectoria y los vectores de velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s. Observe que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ *no* están en la misma dirección en ningún momento. El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria, y el de aceleración $\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo de ésta.

3.9 Trayectoria del vehículo robot que muestra la velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s ($\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$), $t = 1.0$ s ($\vec{v}_1$ y $\vec{a}_1$) y $t = 2.0$ s ($\vec{v}_2$ y $\vec{a}_2$).



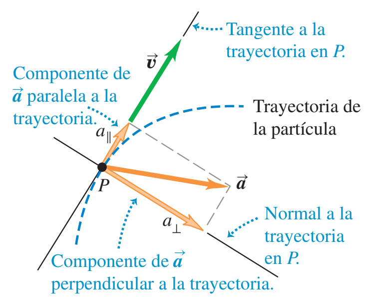
Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

El vector de aceleración $\vec{a}$ de una partícula puede describir cambios en la rapidez de ésta, en la dirección de su movimiento o en ambas. Resulta útil destacar que la componente de la aceleración *paralela* a la trayectoria de la partícula —esto es, paralela a la velocidad— nos indica acerca de los cambios en la *rapidez* de la partícula; en tanto que la componente de la aceleración *perpendicular* a la trayectoria —y por lo tanto, perpendicular a la velocidad— nos indica los cambios en la *dirección del movimiento* de la partícula. La figura 3.10 muestra estas componentes, que se denotan como $a_\parallel$ y $a_\perp$. Para ver por qué las componentes paralela y perpendicular de $\vec{a}$ tienen tales propiedades, consideremos dos casos especiales.

En la figura 3.11*a*, el vector de aceleración es *paralelo* a la velocidad $\vec{v}_1$, de manera que $\vec{a}$ tiene sólo una componente paralela $a_\parallel$ (es decir, $a_\perp = 0$). El cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ en un intervalo pequeño Δt tiene la misma dirección que $\vec{a}$ y, por lo tanto, que $\vec{v}_1$. La velocidad $\vec{v}_2$ al final de Δt, dada por $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, es un vector con la misma dirección que $\vec{v}_1$ pero de mayor magnitud. Es decir, durante el intervalo Δt la partícula de la figura 3.11a se movió en línea recta con rapidez creciente.

En la figura 3.11b, la aceleración es *perpendicular* a la velocidad, de manera que $\vec{a}$ tiene sólo una componente perpendicular $a_\perp$ (es decir, $a_\parallel = 0$). En un intervalo pequeño Δt, el cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ es un vector casi perpendicular a $\vec{v}_1$. Otra vez, $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, pero aquí $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen diferente dirección. Al aproximarse el intervalo

3.10 La aceleración puede descomponerse en una componente $a_\parallel$ paralela a la trayectoria (es decir, en la tangente a la trayectoria), y una componente $a_\perp$ perpendicular a la trayectoria (es decir, en la normal a la trayectoria).



3.11 El efecto de la aceleración con dirección a) paralela y b) perpendicular a la velocidad de la partícula.

a)

Aceleración paralela a la velocidad de la partícula:
- La *magnitud* cambia, pero no la *dirección* de la velocidad.
- La partícula se mueve en línea recta con rapidez cambiante.

$\Delta\vec{v}$ $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ $\vec{a}$

b)

Aceleración perpendicular a la velocidad de la partícula:
- La *dirección* cambia, pero no la *magnitud* de la velocidad.
- La partícula se mueve en una curva con rapidez constante.

$\vec{v}_1$ $\Delta\vec{v}$ ϕ $\vec{v}_2$ $\vec{a}$

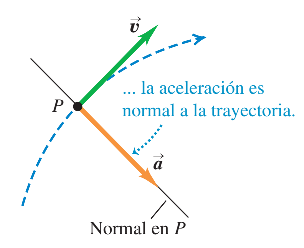
Δt a cero, el ángulo ϕ en la figura también se acerca a cero, $\Delta\vec{v}$ se hace perpendicular *tanto* a $\vec{v}_1$ como a $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen la misma magnitud. Dicho de otro modo, la rapidez de la partícula no cambia, pero la dirección del movimiento cambia y su trayectoria se curva.

En general, la aceleración $\vec{a}$ tiene componentes *tanto* paralela *como* perpendicular a la velocidad $\vec{v}$, como en la figura 3.10. Entonces, cambiarán *tanto* la rapidez de la partícula (descrita por la componente paralela $a_{\parallel}$) *como* su dirección (descrita por la componente perpendicular $a_{\perp}$), por lo que seguirá una trayectoria curva.

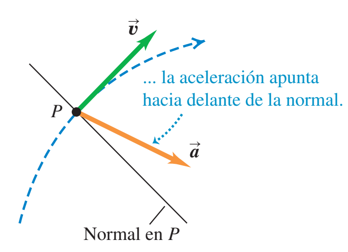
La figura 3.12 muestra una partícula que se mueve con trayectoria curva en tres situaciones distintas: rapidez constante, creciente y decreciente. Si la rapidez es constante, $\vec{a}$ es perpendicular, o *normal*, a la trayectoria y a $\vec{v}$ y apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (figura 3.12a). Si la rapidez aumenta, todavía hay una componente perpendicular de $\vec{a}$, pero también una paralela con la misma dirección que $\vec{v}$ (figura 3.12b). Entonces, $\vec{a}$, apunta hacia adelante de la normal a la trayectoria (como en el ejemplo 3.2). Si la rapidez disminuye, la componente paralela tiene dirección opuesta a $\vec{v}$ y $\vec{a}$, apunta hacia atrás de la normal a la trayectoria (figura 3.12c). Usaremos otra vez esas ideas en la sección 3.4 al estudiar el caso especial de movimiento en un círculo.

3.12 Vectores de velocidad y aceleración para una partícula que pasa por un punto *P* de una trayectoria curva con rapidez **a)** constante, **b)** creciente y **c)** decreciente.

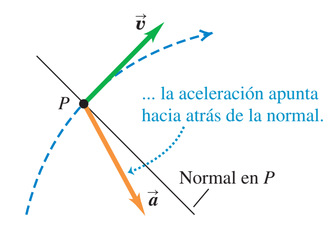
a) Cuando la rapidez es constante en una trayectoria curva ...



b) Cuando la rapidez se incrementa en una trayectoria curva ...



c) Cuando la rapidez disminuye en una trayectoria curva ...



Ejemplo 3.3 Cálculo de las componentes paralela y perpendicular de la aceleración

Para el vehículo de los ejemplos 3.1 y 3.2, obtenga las componentes paralela y perpendicular de la aceleración en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

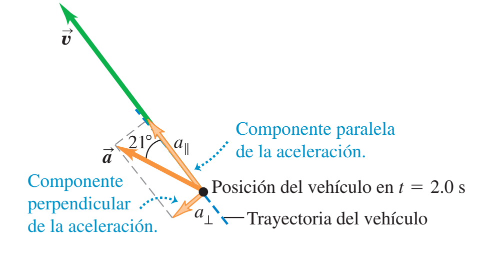
IDENTIFICAR: Queremos obtener las componentes del vector de aceleración $\vec{a}$ que sean paralela y perpendicular al vector de velocidad $\vec{v}$.

PLANTEAR: Obtuvimos las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{v}$ en los ejemplos 3.2 y 3.1, respectivamente, lo cual nos permite determinar el ángulo entre los dos vectores y, por lo tanto, las componentes de $\vec{a}$.

EJECUTAR: En el ejemplo 3.2 vimos que en $t = 2.0$ s la partícula tiene una aceleración de magnitud 0.58 m/s^2 con un ángulo de 149° con respecto al eje $+x$. Por el ejemplo 3.1, sabemos que en ese instante el vector de velocidad tiene un ángulo de 128° con respecto al eje $+x$. Así, la figura 3.9 muestra que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{v}$ es $149° - 128° = 21°$ (figura 3.13). Las componentes paralela y perpendicular de la aceleración son entonces

$$a_{\parallel} = a\cos 21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\cos 21° = 0.54\ \text{m/s}^2$$
$$a_{\perp} = a\,\text{sen}\,21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,21° = 0.21\ \text{m/s}^2$$

3.13 Componentes paralela y perpendicular de la aceleración del vehículo en $t = 2.0$ s.



EVALUAR: La componente paralela $a_{\parallel}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$, lo cual indica que la rapidez aumenta en este instante; el valor de $a_{\parallel} = 0.54$ m/s^2 significa que la rapidez está aumentando a una tasa de 0.54 m/s por segundo. Como la componente perpendicular $a_{\perp}$ no es cero, se sigue que en este instante el vehículo cambia de dirección y sigue una trayectoria curva; en otras palabras, el vehículo está dando vuelta.

Ejemplo conceptual 3.4 Aceleración de una esquiadora

Una esquiadora se mueve sobre una rampa de salto, como se muestra en la figura 3.14a. La rampa es recta entre *A* y *C*, y es curva a partir de *C*. La rapidez de la esquiadora aumenta al moverse pendiente abajo de *A* a *E,* donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector de aceleración en los puntos *B*, *D*, *E* y *F*.

SOLUCIÓN

La figura 3.14b muestra la solución. En el punto *B,* la esquiadora se mueve en línea recta con rapidez creciente, así que su aceleración apunta cuesta abajo, en la misma dirección que su velocidad.

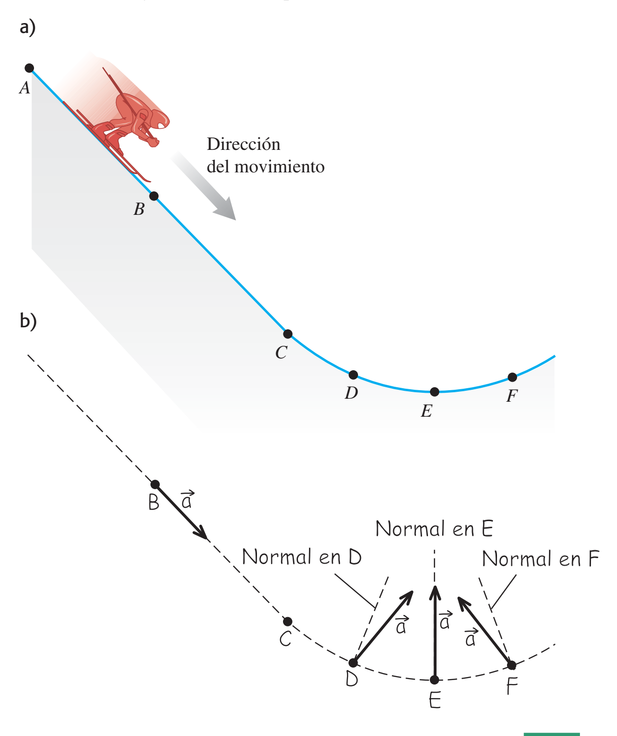
En *D* la esquiadora sigue una trayectoria curva, así que su aceleración tiene una componente perpendicular. También hay una componente en la dirección del movimiento porque su rapidez aún va en aumento en este punto. Por lo tanto, el vector de aceleración apunta *adelante* de la normal a su trayectoria en el punto *D.*

La rapidez de la esquiadora no cambia instantáneamente en *E*; la rapidez es máxima en este punto, así que su derivada es cero. Por lo tanto, no hay componente paralela de $\vec{a}$, y la aceleración es perpendicular al movimiento.

Por último, en *F* la aceleración tiene una componente perpendicular (porque la trayectoria es curva aquí) y una componente paralela *opuesta* a la dirección de su movimiento (porque la rapidez está disminuyendo). De manera que en este punto, el vector de aceleración apunta *hacia atrás* de la normal a la trayectoria.

En la siguiente sección examinaremos la aceleración de la esquiadora después de salir de la rampa.

3.14 a) La trayectoria de la esquiadora. b) Nuestra solución.



Evalúe su comprensión de la sección 3.2 Un trineo viaja por la cima de una montaña cubierta de nieve. El trineo disminuye su rapidez conforme asciende por un lado de la montaña y la aumenta cuando desciende por el otro lado. ¿Cuál de los vectores (1 a 9) en la figura muestra correctamente la dirección de la aceleración del trineo en la cima? (Considere el 9 como la aceleración cero.)

1 2 3 4 5 6 7 8

Trayectoria del trineo

o bien, 9: aceleración = 0

3.3 Movimiento de proyectiles

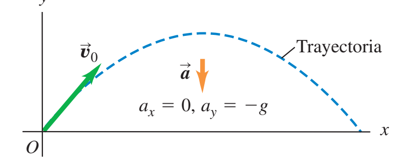
Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración (debida a la gravedad) constante tanto en magnitud como en dirección. Despreciaremos los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación terrestres. Como todos los modelos, éste tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance; en tanto que la resistencia del aire es de importancia vital para un paracaidista. No obstante, podemos aprender mucho analizando este modelo sencillo. En el resto del capítulo, la frase "movimiento de proyectil" implicará que se desprecia la resistencia del aire. En el capítulo 5 veremos qué sucede cuando la resistencia no puede despreciarse.

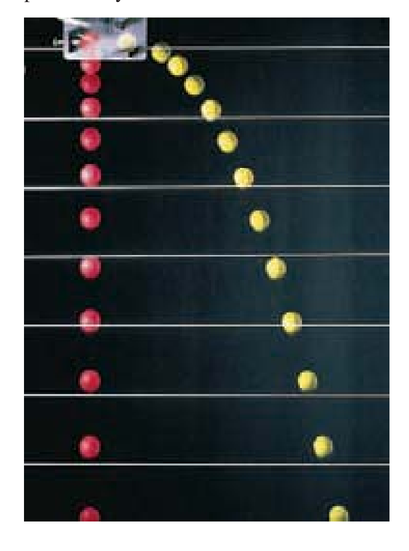
El movimiento de un proyectil siempre está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial (figura 3.15). La razón es que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede mover un

3.15 La trayectoria de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que contiene el vector de velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



3.16 La bola roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante dado, ambas bolas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferente posición x y velocidad x.



ActivPhysics ONLINE

3.1 Resolución de problemas de movimiento de proyectiles
3.2 Dos pelotas que caen
3.3 Cambio de la velocidad en x
3.4 Aceleraciones x y y de proyectiles

proyectil lateralmente. Por lo tanto, este movimiento es *bidimensional*. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas xy, con el eje x horizontal y el eje y vertical hacia arriba.

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar por separado las coordenadas x y y. La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (Por definición, g siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, a_y es negativa.) Así, *podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.* La figura 3.16 muestra dos proyectiles con diferente movimiento x, pero con idéntico movimiento y: uno se deja caer desde el reposo y el otro se proyecta horizontalmente, aunque ambos proyectiles caen la misma distancia en el mismo tiempo.

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales. Las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)} \tag{3.14}$$

Dado que las aceleraciones x y y son constantes, podemos usar las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) directamente. Por ejemplo, suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y que en este tiempo sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento x, sustituimos 0 por a_x en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

Para el movimiento y, sustituimos y por x, v_y por v_x, v_{0y} por v_{0x} y $a_y = -g$ por a_x:

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

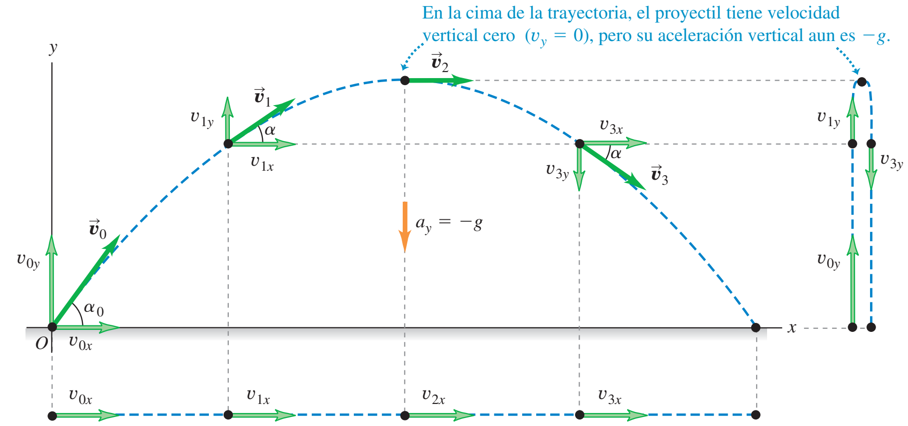
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

Por lo general, lo más sencillo es tomar la posición inicial (en $t = 0$) como origen; así, $x_0 = y_0 = 0$. Este punto podría ser la posición de una pelota cuando sale de la mano del lanzador, o la posición de una bala cuando sale del cañón de un arma.

La figura 3.17 muestra la trayectoria de un proyectil que parte de (o pasa por) el origen en el tiempo $t = 0$. La posición, la velocidad, las componentes de velocidad y

3.17 Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.





aceleración se muestran en una serie de instantes equiespaciados. La componente x de la aceleración es 0, así que v_x es constante. La componente y de la aceleración es constante pero no cero, así que v_y cambia en cantidades iguales a intervalos de tiempo iguales, justo igual que si el proyectil fuera lanzado verticalmente con la misma velocidad y inicial. En el punto más alto de la trayectoria, $v_y = 0$.

También podemos representar la velocidad inicial $\vec{v}_0$ con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo α_0 con el eje $+x$ (como se nuestra en la figura 3.18). En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \tag{3.19}$$

Usando estas relaciones en las ecuaciones (3.15) a (3.18) y haciendo $x_0 = y_0 = 0$, tenemos

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.20}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \qquad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.23}$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil de la figura 3.17 en cualquier instante t.

Podemos obtener mucha información de estas ecuaciones. Por ejemplo, en cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición $\vec{r}$) está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.25}$$

La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$ (véase la figura 3.17), está dada por

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.26}$$

El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t. De las ecuaciones (3.20) y (3.21), que suponen $x_0 = y_0 = 0$, obtenemos $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$ y

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}x^2 \tag{3.27}$$

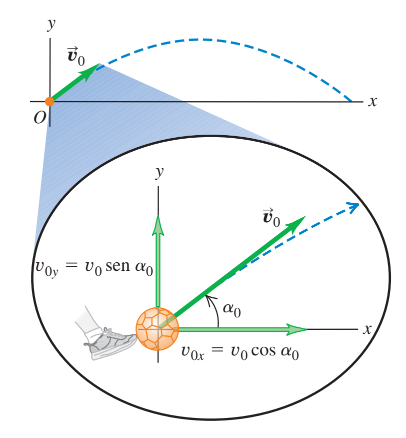
No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Las cantidades v_0, tan α_0, cos α_0 y g son constantes, así que la ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2$$

donde b y c son constantes. Ésta es la ecuación de una *parábola*. En el movimiento de proyectiles, con nuestro modelo simplificado, la trayectoria siempre es una parábola (figura 3.19).

Cuando la resistencia del aire *no* es insignificante y debe incluirse, calcular la trayectoria se vuelve mucho más complicado; los efectos de dicha resistencia dependen

3.18 Las componentes de la velocidad inicial v_{0x} y v_{0y} de un proyectil (como un balón de fútbol) se relacionan con la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial α_0.

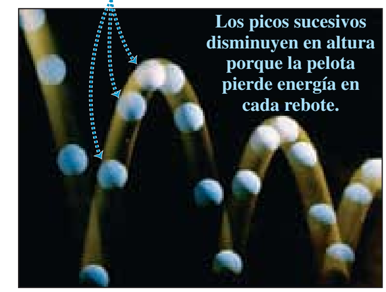


ActivPhysics Online

3.5 Componentes de la velocidad inicial
3.6 Práctica de tiro al blanco I
3.7 Práctica de tiro al blanco II

3.19 Las trayectorias casi parabólicas a) de una pelota que rebota y b) de borbotones de roca fundida expulsada de un volcán.

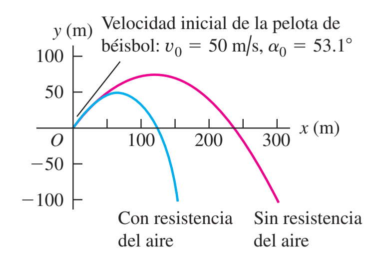
a) Las imágenes sucesivas de la pelota están separadas por intervalos iguales.



b)



3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



de la velocidad, por lo que la aceleración ya no es constante. La figura 3.20 es una simulación computarizada de la trayectoria de una pelota de béisbol tanto sin resistencia del aire como con una resistencia proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota. Vemos que el efecto de la resistencia es muy grande, la altura máxima y el alcance se reducen, y la trayectoria ya no es parabólica. (Si usted observa cuidadosamente la figura 3.19b, se dará cuenta de que las trayectorias de los borbotones volcánicos se desvían de una manera similar de una forma parabólica.)

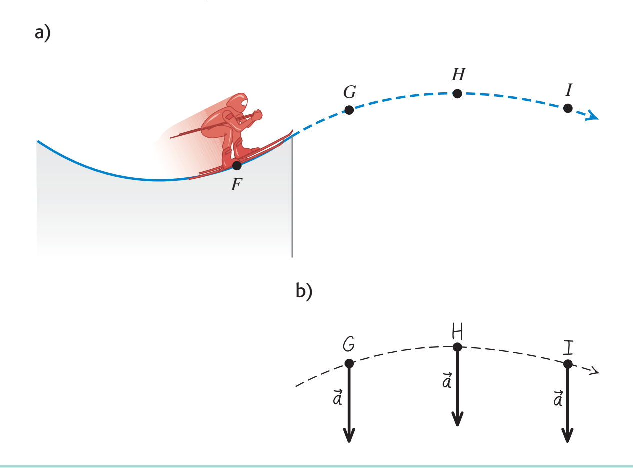
Ejemplo conceptual 3.5 Aceleración de una esquiadora, continuación

Consideremos de nuevo a la esquiadora del ejemplo conceptual 3.4. ¿Qué aceleración tiene en los puntos G, H e I de la figura 3.21a *después* de que sale de la rampa? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

La figura 3.21b muestra nuestra respuesta. La aceleración de la esquiadora cambió de un punto a otro mientras estaba en la rampa pero, apenas la esquiadora sale de la rampa, se convierte en un proyectil. Así, en los puntos G, H e I, y de hecho en *todos* los puntos después de salir de la rampa, la aceleración de la esquiadora apunta verticalmente hacia abajo y tiene magnitud g. Por más compleja que sea la aceleración de una partícula antes de convertirse en proyectil, su aceleración como proyectil está dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

3.21 a) Trayectoria de la esquiadora durante el salto. b) Nuestra solución.



Estrategia para resolver problemas 3.1 Movimiento de proyectil



NOTA: Las estrategias que usamos en las secciones 2.4 y 2.5 para problemas de aceleración constante en línea recta también sirven aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* El concepto clave que debemos recordar es que durante todo el movimiento de un proyectil, la aceleración es hacia abajo y tiene magnitud constante g. Advierta que las ecuaciones para el movimiento de proyectiles no son válidas durante el lanzamiento de una pelota, porque ahí actúan sobre la pelota tanto la mano del lanzador como la gravedad. Las ecuaciones sólo se aplican una vez que la pelota sale de la mano del lanzador.

PLANTEAR *el problema con los siguientes pasos:*

1. Defina su sistema de coordenadas y dibuje sus ejes. Normalmente lo más sencillo es tomar el eje x como horizontal y el eje y hacia arriba y colocar el origen en la posición inicial ($t = 0$), donde el cuerpo se vuelve primero un proyectil (como donde la pelota sale de la mano del lanzador). Así, las componentes de la aceleración (constante) son $a_x = 0$, $a_y = -g$, y la posición inicial es $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.

2. Haga una lista de las cantidades conocidas e incógnitas, y decida cuáles incógnitas son sus objetivos. Por ejemplo, en algunos problemas se da la velocidad inicial (ya sea las componentes, o la magnitud y dirección) y se pide obtener las coordenadas y componentes de velocidad en un instante posterior. En todo caso, usará las ecuaciones (3.20) a (3.23). (Algunas otras ecuaciones dadas en la sección 3.3 también podrían ser útiles.) Asegúrese de tener tantas ecuaciones como incógnitas por determinar.
3. Plantee el problema con palabras y luego tradúzcalo a símbolos. Por ejemplo, ¿*cuándo* llega la partícula a cierto punto? (Es decir, ¿con qué valor de t?) ¿*Dónde* está la partícula cuando la velocidad tiene cierto valor? (Es decir, ¿cuánto valen x y y cuando v_x o v_y tiene ese valor?) Puesto que $v_y = 0$ en el punto más alto de la trayectoria, la pregunta "¿cuándo alcanza el proyectil su punto más alto?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $v_y = 0$?" Asimismo, "¿cuándo vuelve el proyectil a su altura inicial?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $y = y_0$?"

EJECUTAR *la solución:* Use las ecuaciones (3.20) a (3.23) para obtener las incógnitas. Resista la tentación de dividir la trayectoria en segmentos y analizarlos individualmente. ¡No hay que volver a comenzar cuando el proyectil llega a su altura máxima! Lo más fácil suele ser usar los mismos ejes y escala de tiempo durante todo el problema. Utilice el valor $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, examine sus resultados para ver si son lógicos y si los valores numéricos son razonables.

Ejemplo 3.6 Cuerpo que se proyecta horizontalmente

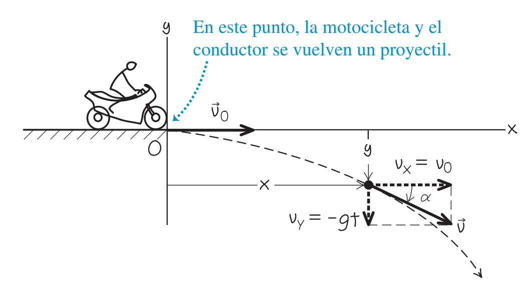
Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez que el acróbata sale del risco, se mueve como un proyectil. Por lo tanto, su velocidad en el borde del risco es su velocidad inicial.

PLANTEAR: El esquema se muestra en la figura 3.22. Elegimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el borde del risco, donde la motocicleta se convierte en proyectil, así que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. La velocidad inicial es puramente horizontal (es decir, $\alpha_0 = 0$), así que sus componentes son $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = 9.0 \text{ m/s}$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = 0$. Para determinar la posición de la motocicleta en $t = 0.50$ s, usamos las ecuaciones (3.20) y (3.21), que dan x y y en función del tiempo. Dados estos valores, calcularemos la distancia del origen con la ecuación (3.24). Por último, usaremos las ecuaciones (3.22) y (3.23) para determinar las componentes de velocidad v_x y v_y en $t = 0.50$ s.

3.22 Esquema para este problema.



EJECUTAR: ¿Dónde está la motocicleta en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas x y y son

$$x = v_{0x}t = (9.0 \text{ m/s})(0.50 \text{ s}) = 4.5 \text{ m}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s})^2 = -1.2 \text{ m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está debajo de su punto inicial.

¿A qué distancia está ahora la motocicleta del origen? Por la ecuación (3.24),

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (-1.2 \text{ m})^2} = 4.7 \text{ m}$$

¿Qué velocidad tiene en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en ese momento son

$$v_x = v_{0x} = 9.0 \text{ m/s}$$
$$v_y = -gt = (-9.8 \text{ m/s}^2)(0.50 \text{ s}) = -4.9 \text{ m/s}$$

La motocicleta tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando salió del risco en $t = 0$ pero, además, hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (negativa). Si usamos vectores unitarios, la velocidad en $t = 0.50$ s es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9.0 \text{ m/s})\hat{\imath} + (-4.9 \text{ m/s})\hat{\jmath}$$

También podemos expresar la velocidad en términos de magnitud y dirección. Por la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en este instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(9.0 \text{ m/s})^2 + (-4.9 \text{ m/s})^2} = 10.2 \text{ m/s}$$

Por la ecuación (3.26), el ángulo α del vector de velocidad es

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\left(\frac{-4.9 \text{ m/s}}{9.0 \text{ m/s}}\right) = -29°$$

En este instante la velocidad está dirigida 29° por debajo de la horizontal.

EVALUAR: Al igual que en la figura 3.17, el aspecto horizontal del movimiento no cambia por la gravedad; la motocicleta se sigue moviendo horizontalmente a 9.0 m/s, cubriendo 4.5 m en 0.50 s. Dado que la motocicleta tiene cero velocidad inicial vertical, cae verticalmente igual que un objeto que se suelta desde el reposo y desciende una distancia de $\frac{1}{2}gt^2 = 1.2$ m en 0.50 s.

Ejemplo 3.7 Altura y alcance de un proyectil I: Una pelota de béisbol

Un bateador golpea una pelota de béisbol de modo que ésta sale del bate a una rapidez $v_0 = 37.0$ m/s con un ángulo $\alpha_0 = 53.1°$, en un lugar donde $g = 9.80$ m/s^2. *a*) Calcule la posición de la pelota y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2.00$ s. *b*) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto. *c*) Obtenga el *alcance horizontal R*, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como muestra la figura 3.20, los efectos de la resistencia del aire sobre el movimiento de una pelota de béisbol no son insignificantes; no obstante, por sencillez, los despreciaremos en este ejemplo y usaremos las ecuaciones del movimiento de proyectiles para describir el movimiento.

PLANTEAR: El esquema se muestra en la figura 3.23. Usaremos el mismo sistema de coordenadas que en las figuras 3.17 o 3.18. Así, podremos usar las ecuaciones (3.20) a (3.23) sin modificaciones. Las incógnitas son **1.** la posición y velocidad de la pelota 2.00 s después de perder contacto con el bate, **2.** el tiempo transcurrido entre que la pelota sale del bate y alcanza su altura máxima (cuando $v_y = 0$) y la coordenada y en ese momento, y **3.** la coordenada x en el momento en que la coordenada y es igual al valor inicial y_0.

La pelota sale del bate más o menos un metro sobre el suelo, pero ignoraremos esta distancia y supondremos que parte del nivel del suelo ($y_0 = 0$). La velocidad inicial de la pelota tiene componentes

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37.0 \text{ m/s})\cos 53.1° = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = (37.0 \text{ m/s})\operatorname{sen} 53.1° = 29.6 \text{ m/s}$$

EJECUTAR: *a*) Queremos obtener x, y, v_x y v_y en el instante $t = 2.00$ s. Por las ecuaciones (3.20) a (3.23),

$$x = v_{0x}t = (22.2 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) = 44.4 \text{ m}$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (29.6 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2$$
$$= 39.6 \text{ m}$$
$$v_x = v_{0x} = 22.2 \text{ m/s}$$
$$v_y = v_{0y} - gt = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})$$
$$= 10.0 \text{ m/s}$$

La componente y de la velocidad es positiva, lo cual significa que la pelota todavía va en ascenso en este instante (figura 3.23). La magnitud y dirección de la velocidad se obtienen de las ecuaciones (3.25) y (3.26):

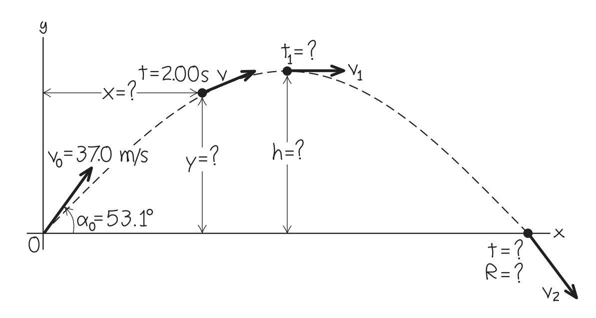
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2 \text{ m/s})^2 + (10.0 \text{ m/s})^2}$$
$$= 24.3 \text{ m/s}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0 \text{ m/s}}{22.2 \text{ m/s}}\right) = \arctan 0.450 = 24.2°$$

La dirección de la velocidad (es decir, la dirección del movimiento) es 24.2° sobre la horizontal.

b) En el punto más alto, la velocidad vertical v_y es cero. ¿Cuándo sucede esto? Sea ese instante t_1; entonces,

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 3.02 \text{ s}$$

3.23 Esquema para este problema.



La altura h en este instante es el valor de y cuando $t = t_1 = 3.02$ s:

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$= (29.6 \text{ m/s})(3.02 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(3.02 \text{ s})^2$$
$$= 44.7 \text{ m}$$

c) Obtendremos el alcance horizontal en dos pasos. Primero, ¿*cuándo* cae la pelota al suelo? Esto ocurre cuando $y = 0$, digamos, en t_2; entonces,

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$

Ésta es una ecuación cuadrática en t_2. Con dos raíces:

$$t_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6 \text{ m/s})}{9.80 \text{ m/s}^2} = 6.04 \text{ s}$$

Hay dos instantes en los que $y = 0$; $t_2 = 0$ es cuando la pelota *sale* del suelo y $t_2 = 2v_{0y}/g = 6.04$ s es cuando regresa. Esto es exactamente el doble del tiempo que tarda en llegar al punto más alto que encontramos en el inciso *b*) $t_1 = v_{0y}/g = 3.02$ s, así que el tiempo de bajada es igual al tiempo de subida. Esto *siempre* sucede si los puntos inicial y final están a la misma altura y se puede despreciar la resistencia del aire.

El alcance horizontal R es el valor de x cuando la pelota vuelve al suelo, es decir, en $t = 6.04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22.2 \text{ m/s})(6.04 \text{ s}) = 134 \text{ m}$$

La componente vertical de la velocidad cuando la pelota toca el suelo es

$$v_y = v_{0y} - gt_2 = 29.6 \text{ m/s} - (9.80 \text{ m/s}^2)(6.04 \text{ s})$$
$$= -29.6 \text{ m/s}$$

Es decir, v_y tiene la misma magnitud que la velocidad vertical inicial v_{0y} pero dirección opuesta (hacia abajo). Dado que v_x es constante, el ángulo $\alpha = -53.1°$ (debajo de la horizontal) en este punto es el negativo del ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1°$.

EVALUAR: A menudo es útil verificar los resultados obteniéndolos de una forma distinta. Por ejemplo, podemos verificar nuestra respuesta para la altura máxima del inciso *b*) aplicando la fórmula de aceleración constante, ecuación (2.13), al movimiento y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

En el punto más alto, $v_y = 0$ y $y = h$. Al sustituirlos, junto con $y_0 = 0$, obtenemos

$$0 = v_{0y}^2 - 2gh$$

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(29.6\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = 44.7\ \text{m}$$

que es la misma altura que obtuvimos en el inciso *b*).

Es interesante destacar que $h = 44.7$ m del inciso *b*) es comparable con la altura de 52.4 m del techo sobre el campo de juego en el Metrodomo Hubert H. Humphrey en Minneapolis, y el alcance horizontal $R = 134$ m del inciso *c*) es mayor que la distancia de 99.7 m entre home y la barda del jardín derecho en el Campo Safeco en Seatle. (La altura de la pelota cuando cruza la barda es más que suficiente para librarla, así que el batazo es un jonrón.)

En el mundo real, una pelota bateada con la rapidez y el ángulo iniciales que usamos aquí no alcanzará ni la altura ni la distancia que calculamos. (Si lo hiciera, los jonrones serían mucho más comunes y el béisbol sería un juego mucho menos interesante.) El motivo es que la resistencia del aire, que no se tomó en cuenta en este ejemplo, en realidad es un factor importante a las velocidades que suelen tener las pelotas lanzadas y bateadas (véase la figura 3.20).

Ejemplo 3.8 Altura y alcance de un proyectil II: Altura máxima, alcance máximo

Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo inicial α_0 (entre 0° y 90°), deduzca expresiones generales para la altura máxima h y el alcance horizontal R (figura 3.23). Para una v_0, dada, ¿qué valor de α_0 da la altura máxima? ¿Y qué valor da el alcance horizontal máximo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste es realmente el mismo ejercicio que los incisos *b*) y *c*) del ejemplo 3.7. La diferencia es que buscamos expresiones generales para h y R. También nos interesan los valores de α_0 que dan los valores máximos de h y R.

PLANTEAR: En el inciso *b*) del ejemplo 3.7 vimos que el proyectil alcanza el punto máximo de su trayectoria (por lo que $v_y = 0$) en el tiempo $t_1 = v_{0y}/g$ y en el inciso *c*) del ejemplo 3.7 determinamos que el proyectil regresa a su altura inicial (por lo que $y = y_0$) en el tiempo $t_2 = 2v_{0y}/g$. (Como vimos en el ejemplo 3.7, $t_2 = 2t_1$.) Para determinar la altura h en el punto máximo de la trayectoria, usaremos la ecuación (3.21) para calcular la coordenada y en t_1. Para determinar R, sustituimos t_2 en la ecuación (3.20) para calcular la coordenada x en t_2. Expresaremos nuestras respuestas en términos de la rapidez de lanzamiento v_0 y el ángulo de disparo α_0 usando la ecuación (3.19).

EJECUTAR: Por la ecuación (3.19), $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ y $v_{0x} = v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0$. Por lo tanto, podemos escribir el tiempo t_1 en que $v_y = 0$ como

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0}{g}$$

Luego, por la ecuación (3.21), la altura en ese instante es

$$h = (v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0)\left(\frac{v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0}{g}\right)^2$$

$$= \frac{v_0^2 \,\text{sen}^2\, \alpha_0}{2g}$$

Para una rapidez de lanzamiento dada v_0, el valor máximo de h se da con sen $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_0 = 90°$; es decir, cuando el proyectil se lanza verticalmente. Esto es lo que deberíamos esperar. Si se lanza horizontalmente, como en el ejemplo 3.6, $\alpha_0 = 0$ ¡y la altura máxima es cero!

El tiempo t_2 en que el proyectil regresa al suelo es

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0}{g}$$

El alcance horizontal R es el valor de x en el este instante. Por la ecuación (3.20),

$$R = (v_0 \cos \alpha_0)t_2 = (v_0 \cos \alpha_0)\frac{2v_0 \,\text{sen}\, \alpha_0}{g}$$

Ahora podemos usar la identidad trigonométrica 2 sen α_0 cos α_0 = sen $2\alpha_0$ para rescribir esto como

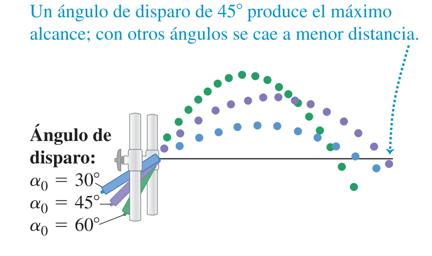
$$R = \frac{v_0^2 \,\text{sen}\, 2\alpha_0}{g}$$

El valor máximo de sen $2\alpha_0$ es 1; esto ocurre cuando $2\alpha_0 = 90°$, o bien, $\alpha_0 = 45°$. Este ángulo da el alcance máximo para una rapidez inicial dada.

EVALUAR: La figura 3.24 se basa en una fotografía compuesta de tres trayectorias de una pelota proyectada desde un cañón de resorte con ángulos de 30, 45 y 60°. La rapidez inicial v_0 es aproximadamente igual en los tres casos. Los alcances horizontales son casi iguales con los ángulos de 30 y 60°, y el alcance de 45° es el mayor que ambos. ¿Puede demostrar que para una v_0 dada el alcance es igual para un ángulo inicial α_0 que para $90° - \alpha_0$?

CUIDADO **Altura y alcance de un proyectil** No recomendamos memorizar las expresiones anteriores para h y R; son aplicables sólo en las circunstancias especiales que describimos. En particular, la expresión para el alcance R *sólo* puede utilizarse cuando las alturas de lanzamiento y aterrizaje son iguales. En muchos de los problemas al final de este capítulo *no* deben aplicarse estas ecuaciones.

3.24 Un ángulo de disparo de 45° produce el alcance horizontal máximo. El alcance es menor con ángulos de 30 y 60°.



Ejemplo 3.9 Alturas inicial y final distintas

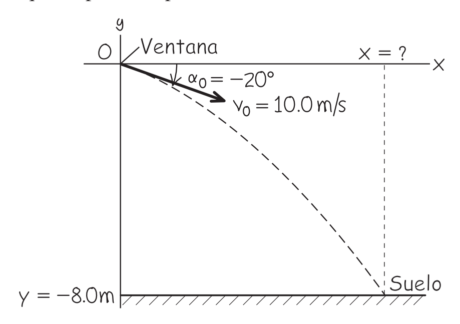
Usted lanza una pelota desde su ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° debajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana la pelota llegará al piso? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en nuestro cálculo del alcance horizontal en los ejemplos 3.7 y 3.8, estamos tratando de hallar la coordenada horizontal de un proyectil cuando está a un valor dado de y. La diferencia en este caso es que este valor de y *no* es igual a la coordenada y inicial.

PLANTEAR: Una vez más, elegimos el eje x como horizontal, y el eje y, hacia arriba. Colocamos el origen de coordenadas en el punto donde la pelota sale de su mano (figura 3.25). Así, tenemos $v_0 = 10.0$ m/s y $\alpha_0 = -20°$; el ángulo es negativo porque la velocidad inicial está debajo de la horizontal. Nuestra variable meta es el valor de x en el punto donde la pelota llega al suelo; es decir, cuando $y = -8.0$ m. Dado que las alturas inicial y final de la pelota son distintas, no podemos usar la expresión para el alcance horizontal del ejemplo 3.8. En vez de ello, usamos primero la ecuación (3.21) para hallar el instante t en que la pelota llega a $y = -8.0$ m y, después, calculamos el valor de x en ese instante con la ecuación (3.20).

3.25 Esquema para este problema.



EJECUTAR: Para determinar t, rescribimos la ecuación (3.21) en la forma estándar de una ecuación cuadrática en t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0)t + y = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$t = \frac{v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2\,\mathrm{sen}^2\alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l}(10.0\text{ m/s})\,\mathrm{sen}(-20°)\\ \pm\sqrt{(10.0\text{ m/s})^2\mathrm{sen}^2(-20°) - 2(9.80\text{ m/s}^2)(-8.0\text{ m})}\end{array}\right]}{9.80\text{ m/s}^2}$$

$$= -1.7\text{ s} \quad \text{o} \quad 0.98\text{ s}$$

Podemos desechar la raíz negativa, ya que se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos indica que la pelota tarda 0.98 s en llegar al suelo. Por la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$x = (v_0\cos\alpha_0)t = (10.0\text{ m/s})[\cos(-20°)](0.98\text{ s})$$
$$= 9.2\text{ m}$$

La pelota llega al suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

EVALUAR: La raíz $t = -1.7$ s es un ejemplo de solución "ficticia" a una ecuación cuadrática. Ya vimos esto en el ejemplo 2.8 de la sección 2.5; le recomendamos repasarlo.

Con el origen que elegimos, teníamos alturas inicial y final $y_0 = 0$ y $y = -8.0$ m. ¿Puede demostrar, con las ecuaciones (3.16) y (3.18), que se obtienen los mismos valores de t y x si se coloca el origen en el suelo, inmediatamente abajo de donde la pelota sale de la mano?

Ejemplo 3.10 La cuidadora y el mono

Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como no logra atraerlo, la cuidadora apunta su rifle con un dardo sedante directamente hacia el mono y dispara (figura 3.26). El astuto mono se suelta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle, intentando caer al suelo y escapar. Demuestre que el dardo *siempre* golpea al mono, sea cual fuere la velocidad inicial del dardo (siempre que dé en el mono antes de que éste llegue al piso).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo, tenemos *dos* cuerpos que se mueven como proyectiles, el dardo sedante y el mono. Ambos tienen posición y velocidad iniciales distintas; sin embargo, entran en movimiento de proyectil al mismo tiempo. Para demostrar que el dardo golpea al mono, debemos probar que hay un instante en que el mono y el dardo tienen las mismas coordenadas x y y.

PLANTEAR: Elegimos las direcciones x y y acostumbradas, y colocamos el origen en el extremo del cañón del rifle (figura 3.26). Primero usaremos la ecuación (3.20) para encontrar el tiempo t en que las coordenadas x_{mono} y x_{dardo} sean iguales. Luego, usaremos la ecuación (3.21) para verificar si y_{mono} y y_{dardo} también son iguales en ese instante; si lo son, el dardo golpeará al mono.

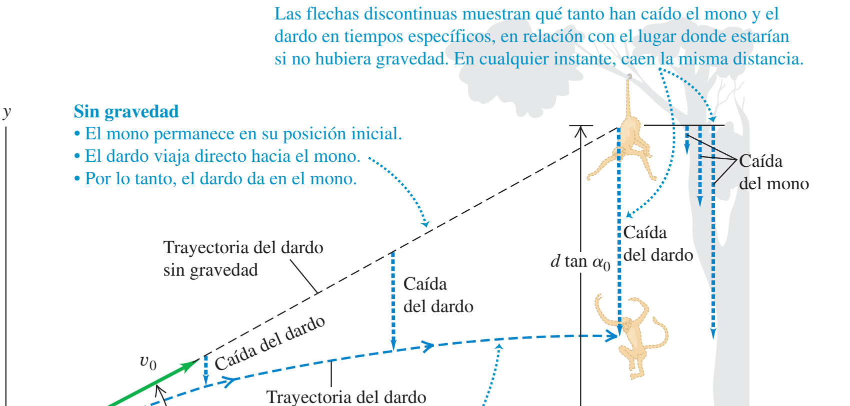
EJECUTAR: El mono cae verticalmente, así que $x_{mono} = d$ en *todo* momento. En el caso del dardo, la ecuación (3.20) nos indica que $x_{dardo} = (v_0 \cos \alpha_0)t$. Cuando las coordenadas x son iguales, $d = (v_0 \cos \alpha_0)t$, o bien,

$$t = \frac{d}{v_0\cos\alpha_0}$$

Para que el dardo golpee al mono, debe cumplirse que $y_{mono} = y_{dardo}$ en este instante. El mono está en caída libre unidimensional; su posición en cualquier momento está dada por la ecuación (2.12) cambiando debidamente los símbolos. La figura 3.26 muestra que la altura inicial del mono es $d \tan \alpha_0$ (el cateto opuesto de un triángulo rectángulo con ángulo a_0 y cateto adyacente d), y obtenemos

$$y_{mono} = d\tan\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

3.26 El dardo con sedante golpea al mono que cae.



Para el dardo, usamos la ecuación (3.21):

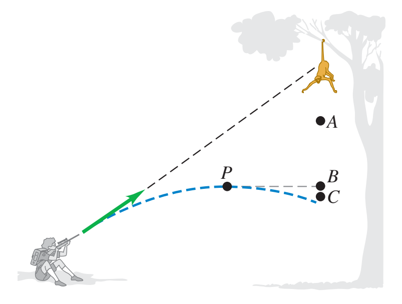
$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vemos que si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t$ cuando las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$, y el dardo habrá acertado. Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$; así,

$$(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)\frac{d}{v_0 \cos \alpha_0} = d \tan \alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas x son iguales, las y también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono *siempre* lo golpeará, sin importar v_0. Este resultado también es independiente de g, la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad ($g = 0$), el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos "caen" la misma distancia $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ por debajo de sus posiciones con $g = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono (figura 3.26).

Evalúe su comprensión de la sección 3.3 En el ejemplo 3.10, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad inicial relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono, como se indica en la figura. Cuando el dardo está en P, ¿el mono estará en i) el punto A (más alto que P), ii) en el punto B (a la misma altura que P) o iii) en el punto C (más abajo que P)? Desprecie la resistencia del aire. MP



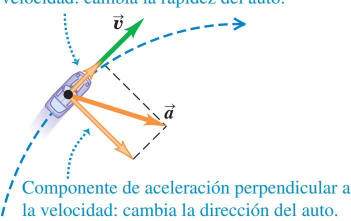
3.4 Movimiento en un círculo

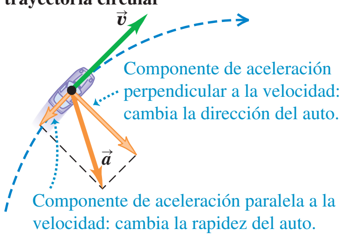
Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

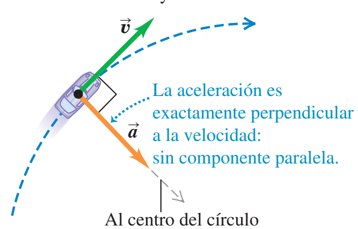


4.1 Magnitud de aceleración centrípeta

3.27 Un automóvil con movimiento circular uniforme. La rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular.

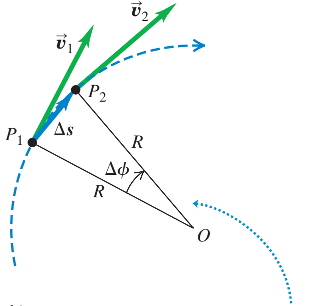




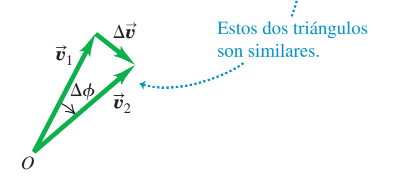


3.28 Determinación del cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$, aceleración media $\vec{a}_{\text{med}}$, y aceleración instantánea $\vec{a}_{\text{rad}}$ de una partícula que se mueve en un círculo con rapidez constante.

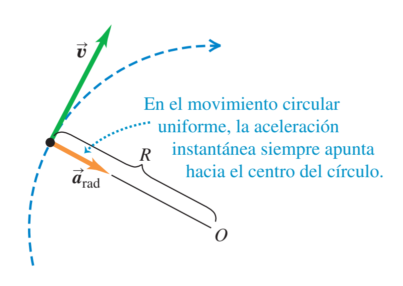
a) Un punto se mueve una distancia Δs a rapidez constante en una trayectoria circular



b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



c) La aceleración instantánea



Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, tiene un **movimiento circular uniforme**. Un automóvil que da vuelta a una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento (figura 3.27; compárela con la figura 3.12). No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector de aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (¡nunca hacia fuera!) al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez. Nuestro siguiente trabajo consiste en demostrar que la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme se relaciona de manera sencilla con la rapidez de la partícula y el radio del círculo.

La figura 3.28a muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O. La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt. El cambio vectorial en la velocidad $\Delta\vec{v}$ durante este tienpo se muestra en la figura 3.28b.

Los ángulos rotulados $\Delta\phi$ en las figuras 3.28a y 3.28b son iguales porque $\vec{v}_1$ es perpendicular a la línea OP_1 y $\vec{v}_2$ es perpendicular a la línea OP_2. Por lo tanto, los triángulos en las figuras 3.28a y 3.28b son *semejantes*. Los cocientes de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{o} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es entonces

$$a_{\text{med}} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración *instantánea* $\vec{a}$ en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sin embargo, el límite de $\Delta s/\Delta t$ es la rapidez v_1 en el punto P_1. Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y con v representar la rapidez en cualquier punto. Así,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (3.28)$$

Agregamos el subíndice "rad" para recordar que la dirección de la aceleración instantánea siempre sigue un radio del círculo, hacia su centro. Como la rapidez es constan-

te, la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea. Esto se muestra en la figura 3.28c; compárela con la ilustración derecha de la figura 3.27.

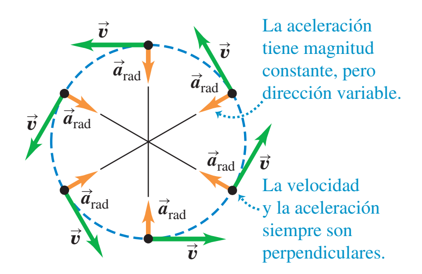
En conclusión, *en el movimiento circular uniforme, la magnitud a de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la velocidad v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a* $\vec{v}$ *y hacia adentro sobre el radio*.

Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama **aceleración centrípeta**. La palabra "centrípeta" significa "que busca el centro" en griego. La figura 3.29a muestra las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme.

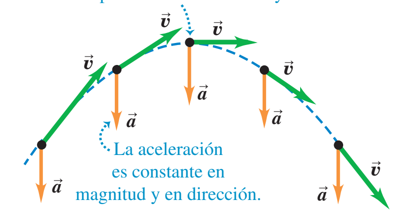
CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra movimiento de proyectiles** La aceleración en el movimiento circular uniforme tiene algunas similitudes con la aceleración en el movimiento de proyectiles que no enfrenta resistencia del aire, pero también existen algunas diferencias importantes entre ambas. Tanto en el movimiento circular uniforme (figura 3.29a) como en el movimiento de proyectiles (figura 3.29b) la *magnitud* de la aceleración siempre es la misma. Sin embargo, en el movimiento circular uniforme la *dirección* de $\vec{a}$ cambia continuamente, de manera que siempre apunta hacia el centro del círculo. (En la parte superior del círculo, la aceleración apunta hacia abajo; en la parte inferior del círculo, la aceleración apunta hacia arriba.) En contraste, en el movimiento de proyectiles la dirección de $\vec{a}$ es la misma en todo momento.

3.29 Aceleración y velocidad a) para una partícula con movimiento circular uniforma y b) para un proyectil sin resistencia del aire.

a) Movimiento circular uniforme



b) Movimiento del proyectil



También podemos expresar la magnitud de la aceleración en un movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, el tiempo de una revolución (una vuelta completa al círculo). En un tiempo T, la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$ así que su rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.29}$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.28), obtenemos la expresión alterna

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{3.30}$$

Ejemplo 3.11 Aceleración centrípeta en un camino curvo

Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una "aceleración lateral" de $0.96g$, que es $(0.96)(9.8\ \text{m/s}^2) = 9.4\ \text{m/s}^2$. Ésta es la aceleración centrípeta máxima que puede lograr el auto sin salirse de la trayectoria circular derrapando. Si el auto viaja a 40 m/s (cerca de 89 mi/h o 144 km/h), ¿cuál es el radio mínimo de curva que puede describir? (Suponga que no hay peralte.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que el coche se mueve en una curva —es decir, un arco de círculo— con rapidez constante, podemos aplicar las ideas del movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (3.28) para obtener la incógnita R (el radio de la curva) en términos de la aceleración centrípeta dada a_{rad} y la rapidez v.

EJECUTAR: Nos dan a_{rad} y v, así que despejamos R de la ecuación (3.28):

$$R = \frac{v^2}{a_{rad}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9.4\ \text{m/s}^2} = 170\ \text{m (aprox. 560 ft)}$$

EVALUAR: Nuestro resultado muestra que el radio de giro requerido R es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Por lo tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye en un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá en un 36% (de 170 m a 109 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.

Ejemplo 3.12 Aceleración centrípeta en un juego mecánico

En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante en un círculo de 5.0 m de radio, dando una vuelta completa cada 4.0 s. ¿Qué aceleración tienen?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La rapidez es constante, así que es un problema de movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Nos dan el radio $R = 5.0$ m y el periodo $T = 4.0$ s, así que podemos usar la ecuación (3.30) para calcular la aceleración. Como alternativa, podríamos calcular primero la rapidez v con la ecuación (3.29) y luego obtener la aceleración con la ecuación (3.28).

EJECUTAR: Por la ecuación (3.30),

$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2(5.0\ \text{m})}{(4.0\ \text{s})^2} = 12\ \text{m/s}^2$$

Verificaremos esta respuesta usando la ecuación (3.28) después de calcular la rapidez v. Por la ecuación (3.29), la rapidez es la circunferencia dividida entre el periodo T:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5.0\ \text{m})}{4.0\ \text{s}} = 7.9\ \text{m/s}$$

La aceleración centrípeta es, entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.9\ \text{m/s})^2}{5.0\ \text{m}} = 12\ \text{m/s}^2$$

Obtenemos el mismo valor de a_{rad} con ambas estrategias.

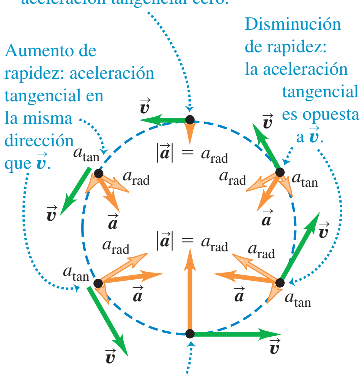
EVALUAR: Al igual que en el ejemplo anterior, la dirección de $\vec{a}$ siempre es hacia el centro del círculo. La magnitud de $\vec{a}$ es mayor que g, la aceleración debida a la gravedad, así que este juego mecánico sólo es para los audaces. (Algunas montañas rusas someten a sus pasajeros a aceleraciones de hasta $4g$.)

Movimiento circular no uniforme

En esta sección, hemos supuesto que la rapidez de la partícula es constante. Si la rapidez varía, tenemos un **movimiento circular no uniforme**. Un ejemplo es un carro de montaña rusa que frena y se acelera al moverse en un lazo vertical. En el movimiento circular no uniforme, la ecuación (3.28) nos sigue dando la componente *radial* de la aceleración $a_{\text{rad}} = v^2/R$, que siempre es *perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, dado que la rapidez v tiene diferentes valores en diferentes puntos del movimiento, a_{rad} no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor donde la rapidez es mayor.

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración *paralela* a la velocidad instantánea. Ésta es la componente $a_{\parallel}$ que vimos en la sección 3.2, y aquí la llamamos a_{tan} para destacar que es *tangente* al círculo. Por lo dicho al final de la sección 3.2, sabemos que la componente de aceleración tangencial a_{tan} es igual a la tasa de cambio de la *rapidez*. Entonces,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_{\text{tan}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{(movimiento circular no uniforme)} \tag{3.31}$$



3.30 Partícula que se mueve en un lazo vertical, como un carrito de montaña rusa, con rapidez variable.

El vector de aceleración de una partícula que se mueve con rapidez variable en un círculo es la suma vectorial de las componentes de aceleración radial y tangencial. Esta última tiene la dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando (figura 3.30).

En el movimiento circular *uniforme*, la aceleración no tiene componente tangencial; no obstante, la componente radial es la magnitud de $d\vec{v}/dt$.

CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra no uniforme** Observe que las dos cantidades

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{y} \quad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

no son iguales. La primera, al igual que la aceleración tangencial, es la tasa de cambio de la rapidez; es igual a cero siempre que una partícula se mueve con rapidez constante, incluso cuando cambia la dirección de su movimiento (como en el movimiento circular *uniforme*). La segunda es la magnitud de la aceleración vectorial; es igual a cero cuando el vector de *aceleración* de la partícula es cero, es decir, cuando la partícula se mueve en línea recta con rapidez constante. En el movimiento circular *uniforme* $|d\vec{v}/dt| = a_{\text{rad}} = v^2/r$; en el movimiento circular *no uniforme* también existe una componente tangencial de la aceleración, de manera que $|d\vec{v}/dt| = \sqrt{a_{\text{rad}}^2 + a_{\text{tan}}^2}$.

Evalúe su comprensión de la sección 3.4 Suponga que, en la parte inferior del lazo, la partícula de la figura 3.30 experimenta una aceleración cuatro veces mayor que en la parte superior del mismo. En comparación con la parte superior del lazo, la rapidez de la partícula en la parte inferior es i) $\sqrt{2}$ veces mayor; ii) 2 veces mayor; iii) $2\sqrt{2}$ veces mayor; iv) 4 veces mayor; o v) 16 veces mayor.

3.5 Velocidad relativa

Sin duda usted ha observado que un automóvil que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo, obtienen diferentes resultados si un observador se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador dado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación en la que se entiende que la velocidad relativa es muy importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos a un plano.

3.31 Los pilotos de acrobacias aéreas enfrentan un complicado problema de velocidades relativas. Deben estar pendientes de su movimiento relativo al aire (para mantener un flujo de aire sobre las alas suficiente para la sustentación), su movimiento relativo a los otros aviones (para mantener una formación cerrada sin chocar) y su movimiento relativo al público (para que los espectadores no los pierdan de vista).



Velocidad relativa en una dimensión

Una mujer camina con una velocidad de 1.0 m/s por el pasillo de un vagón de ferrocarril que se mueve a 3.0 m/s (figura 3.32a). ¿Qué velocidad tiene la mujer? Es una pregunta sencilla, pero no tiene una sola respuesta. Para un pasajero sentado en el tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s. Para un ciclista parado junto al tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s + 3.0 m/s = 4.0 m/s. Un observador en otro tren que va en la dirección opuesta daría otra respuesta. Debemos especificar quién es el observador y dar la velocidad *relativa* a él. La velocidad de la mujer relativa al tren es 1.0 m/s, relativa al ciclista es 4.0 m/s, etcétera. Cada observador, equipado en principio con un metro y un cronómetro, constituye lo que llamamos un **marco de referencia**. Así, un marco de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo.

Llamemos A al marco de referencia del ciclista (en reposo con respecto al suelo) y B al marco de referencia del tren en movimiento. En el movimiento rectilíneo, la posición de un punto P relativa al marco de referencia A está dada por $x_{P/A}$ (la posición de P con respecto a A), y la posición de P con respecto al marco B está dada por $x_{P/B}$ (véase la figura 3.32b). La distancia del origen de A al origen de B es $x_{B/A}$. La figura 3.32b muestra que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \qquad (3.32)$$

Esto nos dice que la distancia total del origen de A al punto P es la distancia del origen de B al punto P más la distancia del origen de A al origen de B.

La velocidad de P relativa al marco A, denotada con $v_{P/A\text{-}x}$, es la derivada de $x_{P/A}$ con respecto al tiempo. Las otras velocidades se obtienen de igual manera, así que la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.32) nos da la relación entre las velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \qquad \text{o}$$

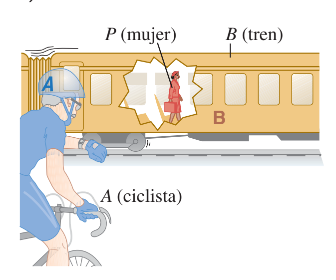
$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x} \qquad \text{(velocidad relativa en una línea)} \qquad (3.33)$$

Volviendo a la mujer en el tren de la figura 3.32, vemos que A es el marco de referencia del ciclista, B es el marco de referencia del tren, y el punto P representa a la mujer. Usando la notación anterior, tenemos

$$v_{P/B\text{-}x} = +1.0 \text{ m/s} \qquad v_{B/A\text{-}x} = +3.0 \text{ m/s}$$

3.32 a) Una mujer camina dentro de un tren. b) La posición de la mujer (partícula P) relativa al marco de referencia del ciclista y al marco de referencia del tren.

a)



b)

y_A Marco del ciclista. Marco del tren. y_B $v_{B/A}$ Velocidad del tren relativa al ciclista. Posición de la mujer en ambos marcos. P x_A, x_B O_A O_B $x_{B/A}$ $x_{P/B}$ $x_{P/A}$

Por la ecuación (3.33), la velocidad $v_{P/A}$ de la mujer relativa al ciclista es

$$v_{P/A\text{-}x} = +1.0 \text{ m/s} + 3.0 \text{ m/s} = +4.0 \text{ m/s}$$

lo cual ya sabíamos.

En este ejemplo, ambas velocidades son a la derecha, e implícitamente tomamos esta dirección como positiva. Si la mujer camina a la *izquierda* relativa al tren, entonces, $v_{P/B\text{-}x} = -1.0$ m/s, y su velocidad relativa al ciclista es $v_{P/A\text{-}x} = -1.0$ m/s $+ 3.0$ m/s $= +2.0$ m/s. La suma de la ecuación (3.33) siempre es algebraica, y cualquiera o todas las velocidades pueden ser negativas.

Si la mujer se asoma por la ventana, le parecerá que el ciclista estacionario se mueve hacia atrás; llamamos $v_{A/P\text{-}x}$ a la velocidad del ciclista relativa a ella. Es evidente que ésta es el negativo de $v_{P/A\text{-}x}$. En general, si A y B son dos puntos o marcos de referencia cualesquiera,

$$v_{A/B\text{-}x} = -v_{B/A\text{-}x} \tag{3.34}$$

Estrategia para resolver problemas 3.2 Velocidad relativa



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Siempre que lea la frase "velocidad relativa a" o "velocidad con respecto a", seguramente le resultarán útiles los conceptos de velocidad relativa.

PLANTEAR *el problema:* Rotule todos los marcos de referencia del problema. Cada cuerpo en movimiento tiene su propio marco de referencia; además, casi siempre será preciso incluir el marco de referencia de la superficie terrestre. (Frases como "el automóvil viaja al norte a 90 km/h" se refieren implícitamente a la velocidad del auto relativa a la superficie terrestre.) Use los rótulos para identificar la incógnita. Por ejemplo, si quiere obtener la velocidad de un auto (C) con respecto a un autobús (B), ésta es $v_{C/B\text{-}x}$.

EJECUTAR *la solución:* Despeje la incógnita empleando la ecuación (3.33). (Si las velocidades no tienen la misma dirección, será preciso usar la forma vectorial de esta ecuación, que deduciremos más adelante en esta misma sección.) Es importante observar el orden de los dobles subíndices en la ecuación (3.33): $v_{A/B\text{-}x}$ siempre significa "velocidad de A relativa a B". Estos subíndices obedecen un tipo interesante de álgebra, como muestra la ecuación (3.33). Si los consideramos cada uno como una fracción, la fracción del miembro izquierdo es el *producto* de las fracciones del miembro derecho: $P/A = (P/B)(B/A)$. Puede usar esta útil regla al aplicar la ecuación (3.33) a cualquier cantidad de marcos de referencia. Por ejemplo, si hay tres marcos de referencia distintos A, B y C, podemos escribir de inmediato

$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/C\text{-}x} + v_{C/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Esté pendiente de los signos menos en su respuesta. Si la incógnita es la velocidad de un automóvil relativa a un autobús ($v_{C/B\text{-}x}$), asegúrese de no haber calculado por equivocación la velocidad del *autobús* relativa al *automóvil* ($v_{B/C\text{-}x}$). Si cometió este error, la ecuación (3.34) le dará la respuesta correcta.

Ejemplo 3.13 Velocidad relativa en un camino recto

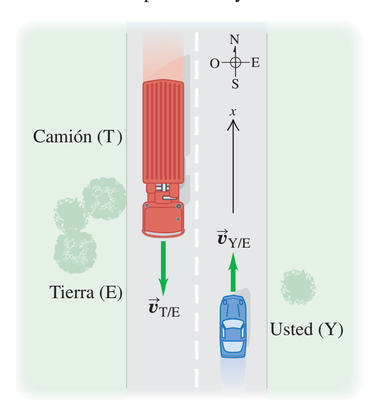
Imagine que viaja al norte en un camino recto de dos carriles a 88 km/h constantes. Un camión que viaja a 104 km/h constantes se acerca a usted (en el otro carril, por fortuna). *a*) ¿Qué velocidad tiene el camión relativa a usted? *b*) ¿Y la de usted relativa al camión? *c*) ¿Cómo cambian las velocidades relativas una vez que los dos vehículos se han pasado?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo es sobre velocidades relativas en una recta.

PLANTEAR: Sea usted Y, el camión T y la superficie de la Tierra E, y sea el norte la dirección positiva (figura 3.33). Entonces, su velocidad relativa a la Tierra es $v_{Y/E\text{-}x} = +88$ km/h. En un principio, el camión se acerca a usted, así que debe ir hacia el sur, es decir, que su velocidad relativa a la Tierra es $v_{T/E\text{-}x} = -104$ km/h. La incógnita del inciso *a*) es $v_{T/Y\text{-}x}$; la incónita del inciso *b*) es $v_{Y/T\text{-}x}$. Obtendremos ambas respuestas utilizando la ecuación (3.33) para velocidad relativa.

3.33 Marcos de referencia para usted y el camión.



EJECUTAR: *a*) Para obtener $v_{Y/T\text{-}x}$, primero escribimos la ecuación (3.33) para los tres marcos, Y, T y E, y luego reacomodamos:

$$v_{T/E\text{-}x} = v_{T/Y\text{-}x} + v_{Y/E\text{-}x}$$
$$v_{T/Y\text{-}x} = v_{T/E\text{-}x} - v_{Y/E\text{-}x}$$
$$= -104 \text{ km/h} - 88 \text{ km/h} = -192 \text{ km/h}$$

El camión se mueve a 192 km/h en la dirección negativa (al sur) relativo a usted.

b) Por la ecuación (3.34),

$$v_{Y/T\text{-}x} = -v_{T/Y\text{-}x} = -(-192 \text{ km/h}) = +192 \text{ km/h}$$

Usted se mueve a 192 km/h en la dirección positiva (al norte) relativo al camión.

c) Las velocidades relativas *no* cambian después de que los vehículos se pasan. Las posiciones relativas de los cuerpos no importan. La velocidad del camión relativa a usted sigue siendo 192 km/h, pero ahora se aleja en vez de acercarse.

EVALUAR: Para comprobar su respuesta del inciso *b*), use la ecuación (3.33) directamente en la forma $v_{Y/T\text{-}x} = v_{Y/E\text{-}x} + v_{E/T\text{-}x}$. (Recuerde que la velocidad de la Tierra relativa al camión es opuesta a la velocidad del camión con respecto a la Tierra: $v_{E/T\text{-}x} = -v_{T/E\text{-}x}$.) ¿Obtiene el mismo resultado?

Velocidad relativa en dos o tres dimensiones

Podemos extender el concepto de velocidad relativa al movimiento en un plano o en el espacio, usando suma vectorial para combinar velocidades. Suponga que la mujer de la figura 3.32a camina no por el pasillo del vagón sino de un costado al otro, con rapidez de 1.0 m/s (figura 3.34a). También podemos describir su posición *P* en dos marcos de referencia distintos: *A* para el observador terrestre estacionario y *B* para el tren en movimiento; pero en vez de coordenadas *x* usamos vectores de posición [&*lcacc*{~bfit~r~normal~}{|Ararr|}&] porque el problema es bidimensional. Entonces, como muestra la figura 3.34b,

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \tag{3.35}$$

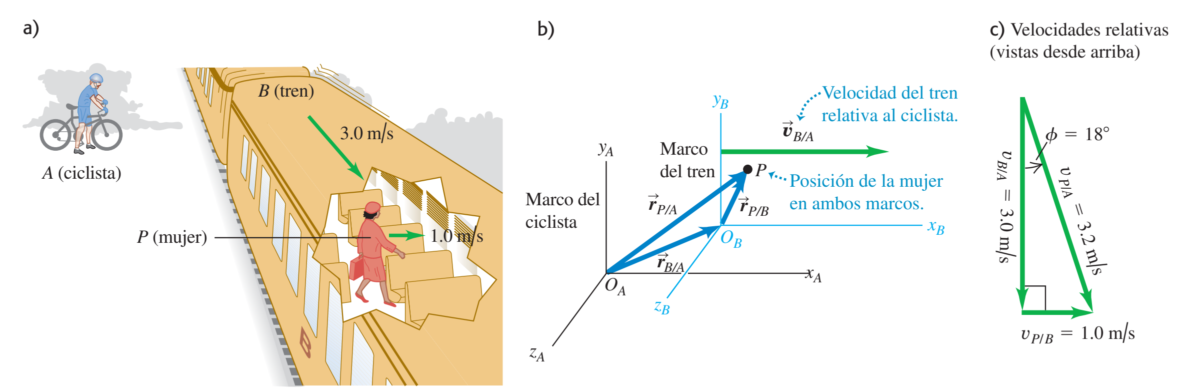
Igual que antes, derivamos con respecto al tiempo para obtener una relación entre las velocidades; la velocidad de *P* relativa a *A* es $\vec{v}_{P/A} = d\vec{r}_{P/A}/dt$, e igual para las demás velocidades. Obtenemos

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \quad \text{(velocidad relativa en el espacio)} \tag{3.36}$$

La ecuación (3.36) se conoce como *transformción galileana de la velocidad* y muestra que la velocidad de un cuerpo *P* con respecto al marco *A* y su velocidad con respecto al marco *B* ($\vec{v}_{P/A}$ y $\vec{v}_{P/B}$, respectivamente) están relacionadas con la velocidad del marco *B* con respecto al marco *A* $(\vec{v}_{B/A})$. Si las tres velocidades están en la misma línea, la ecuación (3.36) se reduce a la ecuación (3.33) para las componentes de las velocidades en esa línea.

Si la velocidad del tren relativa al suelo tiene magnitud $v_{B/A} = 3.0$ m/s y la velocidad de la mujer relativa al vagón tiene magnitud $v_{P/B} = 1.0$ m/s, su vector de velocidad

3.34 a) Mujer que camina a lo ancho de un vagón de ferrocarril. b) Posición de la mujer relativa al marco de referencia del ciclista y al marco del tren. c) Diagrama vectorial para la velocidad de la mujer relativa al suelo (el marco del ciclista), $\vec{v}_{P/A}$.



$\vec{v}_{P/A}$ relativo al suelo es como se muestra en la figura 3.34c. El teorema de Pitágoras nos da

$$v_{P/A} = \sqrt{(3.0\ \text{m/s})^2 + (1.0\ \text{m/s})^2} = \sqrt{10\ \text{m}^2/\text{s}^2} = 3.2\ \text{m/s}$$

La figura 3.34c también indica que la *dirección* del vector de velocidad de la mujer relativo al suelo forma un ángulo ϕ con el vector de velocidad del tren $\vec{v}_{B/A}$, donde

$$\tan\phi = \frac{v_{P/B}}{v_{B/A}} = \frac{1.0\ \text{m/s}}{3.0\ \text{m/s}} \qquad \text{y} \qquad \phi = 18°$$

Como en el caso del movimiento rectilíneo, tenemos la regla general de que si A y B son dos puntos o marcos de referencia *cualesquiera,*

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \tag{3.37}$$

La velocidad de la mujer con respecto al tren es el negativo de la velocidad del tren con respecto a la mujer, etcétera.

A principios del siglo XX, en su teoría especial de la relatividad Albert Einstein demostró que la relación de suma de velocidades dada en la ecuación (3.36) se modifica cuando la rapidez se aproxima a la rapidez de la luz, que se denota con c. Resultó que si la mujer de la figura 3.32a pudiera caminar por el pasillo a $0.30c$ y el tren pudiera viajar a $0.90c$, entonces la rapidez de la mujer relativa al suelo no sería de $1.20c$ sino de $0.94c$. ¡Nada puede viajar más rápido que la luz! Regresaremos a la teoría especial de la relatividad en el capítulo 37.

Ejemplo 3.14 Vuelo con viento cruzado

La brújula de un avión indica que va al norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de velocidad en dos dimensiones (hacia el norte y hacia el este), así que tenemos un problema de velocidad relativa usando vectores.

PLANTEAR: Nos dan la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa al aire (A), así como la magnitud y dirección de la velocidad del viento, que es la velocidad del aire (A) con respecto a la Tierra (E):

$$\vec{v}_{P/A} = 240\ \text{km/h} \qquad \text{al norte}$$
$$\vec{v}_{A/E} = 100\ \text{km/h} \qquad \text{al este}$$

Nuestras incógnitas son la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa a la Tierra (E), $\vec{v}_{P/E}$. Así, que las calcularemos usando la ecuación (3.36).

EJECUTAR: Usando la ecuación (3.36), tenemos

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

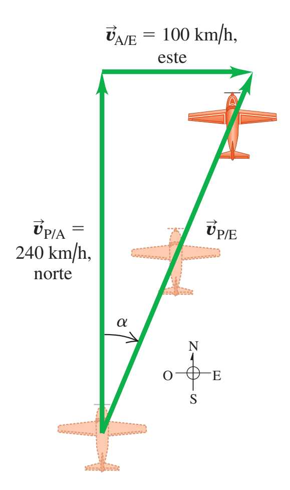
Las tres velocidades relativas y su relación se muestran en la figura 3.35; las incógnitas son la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo α. Del diagrama obtenemos

$$v_{P/E} = \sqrt{(240\ \text{km/h})^2 + (100\ \text{km/h})^2} = 260\ \text{km/h}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{100\ \text{km/h}}{240\ \text{km/h}}\right) = 23°\ \text{E del N}$$

EVALUAR: El viento lateral aumenta la rapidez del avión relativa al suelo, pero al precio de desviarlo de su curso.

3.35 El avión apunta al norte, pero el viento sopla al este, dando la velocidad resultante $\vec{v}_{P/E}$ relativa a la Tierra.



Ejemplo 3.15 Corrección por viento cruzado

En el ejemplo 3.14, ¿qué rumbo debería tomar el piloto para viajar al norte? ¿Cuál será su velocidad relativa a la tierra? (Suponga que su rapidez con respecto al aire y la velocidad del viento son las del ejemplo 3.14.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 3.14, éste es un problema de velocidad relativa con vectores.

PLANTEAR: La figura 3.36 ilustra la situación. Ahí, los vectores se acomodaron según la ecuación vectorial de velocidad relativa, ecuación (3.36):

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

Como muestra la figura 3.36, el piloto apunta la nariz del avión con un ángulo β hacia el viento para compensar su efecto. Este ángulo, que nos da la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ (la velocidad del avión relativa al aire), es una de nuestras incógnitas. La otra es la rapidez del avión sobre el suelo, que es la magnitud del vector $\vec{v}_{P/E}$ (la velocidad del avión relativa a la Tierra). Veamos las cantidades que conocemos y las que desconocemos:

$\vec{v}_{P/E}$ = magnitud desconocida	al norte
$\vec{v}_{P/A}$ = 240 km/h	dirección desconocida
$\vec{v}_{A/E}$ = 100 km/h	al este

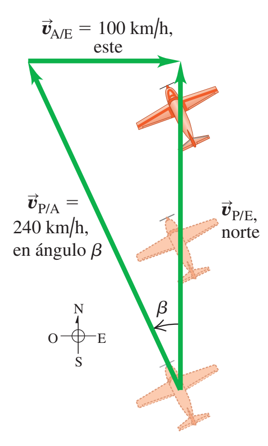
Podemos calcular las incógnitas empleando la figura 3.36 y trigonometría.

EJECUTAR: Por el diagrama, la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo β están dados por

$$v_{P/E} = \sqrt{(240\text{ km/h})^2 - (100\text{ km/h})^2} = 218\text{ km/h}^2$$

$$\beta = \arcsen\left(\frac{100\text{ km/h}}{240\text{ km/h}}\right) = 25°$$

3.36 El piloto debe apuntar el avión en la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ para viajar al norte relativo a la Tierra.



El piloto debería dirigirse 25° al oeste del norte, y su rapidez con respecto al suelo será entonces de 218 km/h.

EVALUAR: Observe que había dos incógnitas —la magnitud de un vector y la dirección de un vector— tanto en este ejemplo como en el ejemplo 3.14. La diferencia es que, en el ejemplo 3.14, la magnitud y dirección se referían al *mismo* vector ($\vec{v}_{P/E}$), mientras que en este ejemplo se refieren a vectores *distintos* ($\vec{v}_{P/E}$ y $\vec{v}_{P/A}$).

No es sorpresa que un viento de frente reduzca la rapidez de un avión relativa al suelo. Lo que este ejemplo demuestra es que un *viento cruzado* también frena los aviones: es una triste realidad de la industria aeronáutica.

Evalúe su comprensión de la sección 3.5 Suponga que la nariz del avión se apunta al este y que el avión tiene una velocidad de vuelo de 150 km/h. Debido al viento, el avión se mueve al *norte* relativo al suelo y su rapidez relativa al suelo es de 150 km/h. ¿Cuál es la velocidad del aire relativa a la Tierra? i) 150 km/h de este a oeste; ii) 150 km/h de sur a norte; iii) 150 km/h de sureste a noroeste; iv) 212 km/h de este a oeste; v) 212 km/h de sur a norte; vi) 212 km/h de sureste a noroeste; vii) no hay velocidad del aire posible que cause esto.

MP

CAPÍTULO 3 RESUMEN

Vectores de posición, velocidad y aceleración: El vector de posición $\vec{r}$ de un punto P en el espacio es el vector del origen a P. Sus componentes son las coordenadas x, y y z.

El vector de velocidad media $\vec{v}_{med}$ durante el intervalo Δt es el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ (el cambio del vector de posición $\vec{r}$) dividido entre Δt. El vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ es la derivada de $\vec{r}$, con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de x, y y z con respecto al tiempo. La rapidez instantánea es la magnitud de $\vec{v}$. La velocidad $\vec{v}$ de una partícula siempre es tangente a la trayectoria de la partícula. (Véase el ejemplo 3.1.)

El vector de aceleración media $\vec{a}_{med}$ durante el intervalo de tiempo Δt es igual a $\Delta\vec{v}$ (el cambio en el vector de velocidad $\vec{v}$) dividido entre Δt. El vector de aceleración instantánea $\vec{a}$ es la derivada de $\vec{v}$, con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de v_x, v_y y v_z con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 3.2.)

La componente de aceleración paralela a la dirección de la velocidad instantánea afecta la rapidez; en tanto que la componente de $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{v}$ afecta la dirección del movimiento. (Véanse los ejemplos 3.3 y 3.4.)

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad (3.1)$$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (3.2)$$

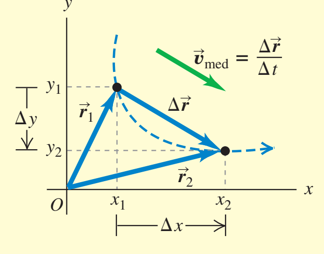
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.3)$$

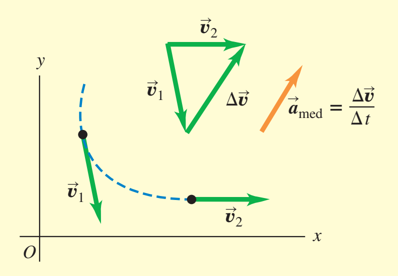
$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (3.4)$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (3.8)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.9)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (3.10)$$





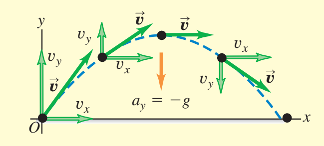
Movimiento de proyectiles: En el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire, $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Las coordenadas y componentes de la velocidad son funciones sencillas del tiempo, y la forma de la trayectoria siempre es una parábola. Por convención, colocamos el origen en la posición inicial del proyectil. (Véanse los ejemplos 3.5 a 3.10.)

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \quad (3.20)$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.21)$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \quad (3.22)$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \quad (3.23)$$

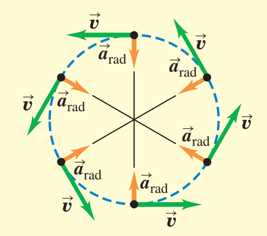


Movimiento circular uniforme y no uniforme: Cuando una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R con rapidez constante v (movimiento circular uniforme), su aceleración $\vec{a}$ está dirigida hacia el centro del círculo y es perpendicular a $\vec{v}$. La magnitud a_{rad} de la aceleración se puede expresar en términos de v y R, o en términos de R y el periodo T (el tiempo que tarda en dar una vuelta), donde $v = 2\pi R/T$. (Véanse los ejemplos 3.11 y 3.12.)

Aunque la rapidez en un movimiento circular no sea constante (movimiento circular no uniforme), habrá una componente radial de $\vec{a}$ dada por la ecuación (3.28) o la ecuación (3.30), pero también habrá una componente de $\vec{a}$ paralela (tangencial) a la trayectoria; esta componente tangencial es igual a la tasa de cambio de la rapidez, dv/dt.

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad (3.28)$$

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (3.30)$$



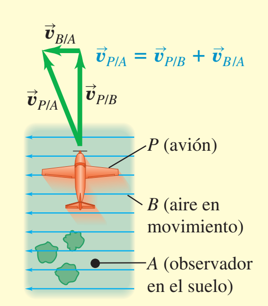
Velocidad relativa: Cuando un cuerpo P se mueve relativo a un cuerpo (o marco de referencia) B, y B se mueve relativo a A, denotamos la velocidad de P relativa a B con $\vec{v}_{P/B}$, la velocidad de P relativa a A con $\vec{v}_{P/A}$, y la velocidad de B relativa a A con $\vec{v}_{B/A}$. Si todas estas velocidades están en la misma línea, sus componentes sobre la línea están relacionadas por la ecuación (3.33). De forma más general, estas velocidades están relacionadas por la ecuación (3.36). (Véanse los ejemplos 3.13 a 3.15.)

$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x} \quad (3.33)$$

(velocidad relativa en una línea)

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \quad (3.36)$$

(velocidad relativa en el espacio)



Términos clave

vector de posición, *72*
velocidad media, *72*
aceleración instantánea, *72*
aceleración media, *75*
velocidad instantánea, *75*
proyectil, *79*
trayectoria, *79*
movimiento circular uniforme, *88*
aceleración centrípeta, *89*
periodo, *89*
movimiento circular no uniforme, *90*
velocidad relativa, *91*
marco de referencia, *91*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Un automóvil que va por una curva a rapidez constante tiene una aceleración dirigida hacia el interior de la curva (véase la sección 3.2, en especial la figura 3.12a).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

3.1 Respuesta: iii) Si la velocidad instantánea $\vec{v}$ es constante durante un intervalo, su valor en cualquier punto (incluyendo el final del intervalo) es igual a la velocidad media $\vec{v}_{med}$ durante el intervalo. En i) y ii) la dirección de $\vec{v}$ al final del intervalo es tangente a la trayectoria en ese punto; mientras que la dirección de $\vec{v}_{med}$ apunta desde el inicio de la trayectoria hasta el final (en la dirección del desplazamiento neto). En iv) $\vec{v}$ y $\vec{v}_{med}$ se encuentran a lo largo de la línea recta, aunque $\vec{v}$ tiene una magnitud mayor porque la rapidez ha ido en aumento.

3.2 Respuesta: vector 7 En el punto más alto de la trayectoria del trineo, la rapidez es mínima. En ese punto, la rapidez no aumenta ni disminuye, y la componente paralela de la aceleración (es decir, la componente horizontal) es cero. La aceleración sólo tiene una componente perpendicular hacia el interior de la trayectoria curva del trineo. Dicho de otro modo, la aceleración es hacia abajo.

3.3 Respuesta: i) Si no hubiera gravedad ($g = 0$), el mono no caería y el dardo seguiría una trayectoria recta (que se indica como línea discontinua). El efecto de la gravedad es hacer que tanto el mono como el dardo caigan la misma distancia $\frac{1}{2}gt^2$ abajo de sus posiciones con $g = 0$. El punto A está a la misma distancia abajo de la posición inicial del mono de la que el punto P está abajo de la recta discontinua, así que el punto A es donde encontraríamos al mono en el instante en cuestión.

3.4 Respuesta: ii) Tanto en la parte alta como en la baja del lazo, la aceleración es puramente radial y está dada por la ecuación (3.28). El radio R es el mismo en ambos puntos, así que la diferencia de aceleración se debe exclusivamente a diferencias de rapidez. Puesto que a_{rad} es proporcional al cuadrado de v, la rapidez deberá ser dos vece mayor en la parte baja del lazo que en su parte alta.

3.5 Respuesta: vi) El efecto del viento es anular el movimiento hacia el este del avión e imprimirle un movimiento hacia el norte. Así que la velocidad del aire en relación con el suelo (la velocidad del viento) debe tener una componente de 150 km/h hacia el oeste y una componente de 150 km/h hacia el norte. La combinación de ambas es un vector con magnitud $\sqrt{(150\text{ km/h})^2 + (150\text{ km/h})^2} = 212\text{ km/h}$ que apunta hacia el noroeste.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P3.1. Un péndulo simple (una masa que oscila en el extremo de un cordel) oscila en un arco circular. ¿Qué dirección tiene su aceleración en los extremos del arco? ¿Y en el punto medio? En cada caso, explique cómo obtuvo su respuesta.

P3.2. Vuelva a dibujar la figura 3.11a como si $\vec{a}$ fuera antiparalela a $\vec{v}_1$. ¿La partícula se mueve en línea recta? ¿Qué pasa con la rapidez?

P3.3. Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire. ¿Hay un punto donde $\vec{a}$ sea paralela a $\vec{v}$? ¿Y perpendicular a $\vec{v}$? Explique su respuesta.

P3.4. Cuando se dispara un rifle a un blanco lejano, el cañón no se apunta exactamente al blanco. ¿Por qué? ¿El ángulo de corrección depende de la distancia al blanco?

P3.5. En el instante que usted dispara una bala horizontalmente de una arma, suelta una bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo? Explique su respuesta.

P3.6. Un paquete se deja caer desde un avión que vuela en línea recta con altitud y rapidez constantes. Si se desprecia la resistencia del aire, ¿qué trayectoria del paquete observaría el piloto? ¿Y una persona situada en el suelo?

P3.7. Dibuje las seis gráficas de las componentes x y y de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo, para un movimiento de proyectil con $x_0 = y_0 = 0$ y $0 < \alpha_0 < 90°$.

P3.8. Se lanza un objeto directo hacia arriba sin que sufra resistencia del aire. ¿Cómo es posible que el objeto tenga aceleración cuando se detiene al llegar a su punto más alto?

P3.9. Si una rana puede saltar con la misma rapidez inicial sin importar la dirección (hacia adelante o hacia arriba), ¿qué relación hay entre la altura vertical máxima y el alcance horizontal máximo de su salto, $R_{máx} = v_0^2/g$?

P3.10. Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. Al llegar a su máxima altura, ¿cuáles son su vector de velocidad, su rapidez y su vector de aceleración?

P3.11. En el movimiento circular uniforme, ¿cuáles son la velocidad *media* y la aceleración *media* durante una revolución? Explique su respuesta.

P3.12. En el movimiento circular uniforme, ¿cómo cambia la aceleración cuando la rapidez aumenta al triple? ¿Y cuando el radio se reduce a la mitad?

P3.13. En el movimiento circular uniforme, la aceleración es perpendicular a la velocidad en todo instante. ¿Sigue siendo válido esto cuando el movimiento no es uniforme, es decir, cuando la rapidez no es constante?

P3.14. Incluso sin viento, las gotas de lluvia suelen dejar rayas diagonales en las ventanas laterales de un automóvil en movimiento. ¿Por qué? ¿Es la misma explicación para las rayas diagonales en el parabrisas?

P3.15. En una tormenta con viento fuerte, ¿qué determina la orientación óptima de un paraguas?

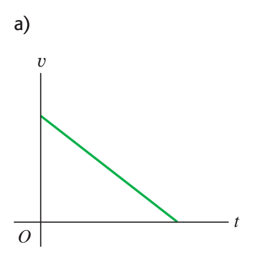
P3.16. Imagine que está en la ribera oeste de un río que fluye al norte a 1.2 m/s. Usted nada con rapidez de 1.5 m/s relativa al agua, y el río tiene 60 m de ancho. ¿Qué trayectoria relativa a tierra le permitirá cruzar el río en el menor tiempo? Explique su razonamiento.

P3.17. Cuando usted deja caer un objeto desde cierta altura, éste tarda un tiempo T en llegar al piso si no hay resistencia del aire. Si usted lo dejara caer desde una altura tres veces mayor, ¿cuánto tiempo tardaría el objeto (en términos de T) en llegar al suelo?

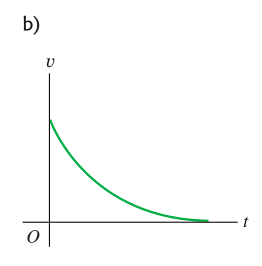
P3.18. Se lanza una piedra hacia el aire con un ángulo por encima de la horizontal, y se desprecia la resistencia del aire. ¿Cuál de las gráficas en la figura 3.37 describe mejor la *rapidez* v de la piedra en función del tiempo t mientras está en el aire?

Figura 3.37 Pregunta P3.18.

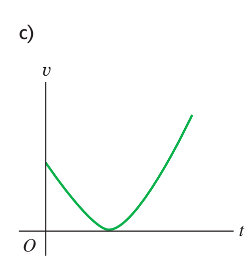
a)



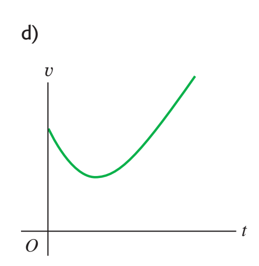
b)



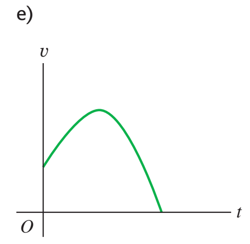
c)



d)



e)



Ejercicios

Sección 3.1 Vectores de posición y velocidad

3.1. Una ardilla tiene coordenadas x y y (1.1 m, 3.4 m) en $t_1 = 0$ y coordenadas (5.3 m, -0.5 m) en $t_2 = 3.0$ s. Para este intervalo, obtenga *a*) las componentes de la velocidad media, y *b*) la magnitud y dirección de esta velocidad.

3.2. Un rinoceronte está en el origen de las coordenadas en $t_1 = 0$. Para el intervalo de $t_1 = 0$ a $t_2 = 12.0$ s, la velocidad media del animal tiene componente x de -3.8 m/s y componente y de 4.9 m/s. En $t_2 = 12.0$ s, *a*) ¿qué coordenadas x y y tiene el rinoceronte? *b*) ¿Qué tan lejos está del origen?

3.3. Un diseñador de páginas Web crea una animación en la que un punto en una pantalla de computadora tiene una posición $\vec{r} = [4.0\text{ cm} + (2.5\text{ cm/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (5.0\text{ cm/s})t\hat{\jmath}$. *a*) Determine la magnitud y dirección de la velocidad media del punto entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. *b*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad instantánea en $t = 0$, en $t = 1.0$ s y en $t = 2.0$ s. *c*) Dibuje la trayectoria del punto de $t = 0$ a $t = 2.0$ s, y muestre las velocidades calculadas en el inciso *b*).

3.4. Si $\vec{r} = bt^2\hat{\imath} + ct^3\hat{\jmath}$, donde b y c son constantes positivas, ¿cuándo el vector de velocidad forma un ángulo de 45° con los ejes x y y?

Sección 3.2 El vector de aceleración

3.5. Un jet vuela a altitud constante. En el instante $t_1 = 0$, tiene componentes de velocidad $v_x = 90$ m/s, $v_y = 110$ m/s. En $t_2 = 30.0$ s, las componentes son $v_x = -170$ m/s, $v_y = 40$ m/s. *a*) Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren? Para este intervalo, calcule *b*) las componentes de la aceleración media, y *c*) la magnitud y dirección de esta aceleración.

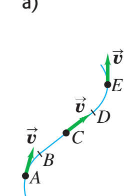
3.6. Un perro que corre en un campo tiene componentes de velocidad $v_x = 2.6$ m/s y $v_y = -1.8$ m/s en $t_1 = 10.0$ s. Para el intervalo de $t_1 = 10.0$ s a $t_2 = 20.0$ s, la aceleración media del perro tiene magnitud de 0.45 m/s^2 y dirección de 31.0° medida del eje $+x$ al eje $+y$. En $t_2 = 20.0$ s, *a*) ¿qué componentes x y y tiene la velocidad del perro? *b*) ¿Qué magnitud y dirección tiene esa velocidad? *c*) Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren?

3.7. Las coordenadas de un ave que vuela en el plano xy están dadas por $x(t) = \alpha t$ y $y(t) = 3.0\text{ m} - \beta t^2$, donde $\alpha = 2.4$ m/s y $\beta = 1.2$ m/s^2. *a*) Dibuje la trayectoria del ave entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. *b*) Calcule los vectores de velocidad y aceleración en función de t. *c*) Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad y aceleración del ave en $t = 2.0$ s. *d*) Dibuje los vectores de velocidad y aceleración en $t = 2.0$ s. En este instante, ¿el ave está acelerando, frenando o su rapidez no está cambiando instantáneamente? ¿Está dando vuelta? Si así es, ¿en qué dirección?

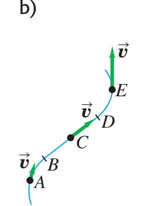
3.8. Una partícula sigue una trayectoria como se muestra en la figura 3.38. Entre B y D, la trayectoria es recta. Dibuje los vectores de aceleración en A, C y E si *a*) la partícula se mueve con rapidez constante, *b*) la partícula aumenta de rapidez continuamente; *c*) la rapidez de la partícula disminuye continuamente.

Figura 3.38 Ejercicio 3.8.

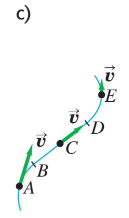
a)



b)



c)



Sección 3.3 Movimiento de proyectiles

3.9. Un libro de física que se desliza sobre una mesa horizontal a 1.10 m/s cae al piso en 0.350 s. Ignore la resistencia del aire. Calcule *a*) la altura de la mesa; *b*) la distancia horizontal del borde de la mesa al punto donde cae el libro; *c*) las componentes horizontal y vertical, y la magnitud y dirección, de la velocidad del libro justo antes de tocar el piso. *d*) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

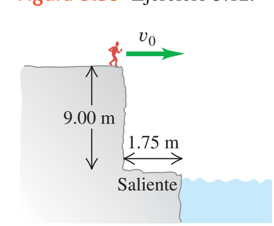
3.10. Un helicóptero militar está en una misión de entrenamiento y vuela horizontalmente con una rapidez de 60.0 m/s y accidentalmente suelta una bomba (desactivada, por suerte) a una altitud de 300 m. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué tiempo tarda la

bomba en llegar al suelo? *b*) ¿Qué distancia horizontal viaja mientras cae? *c*) Obtenga las componentes horizontal y vertical de su velocidad justo antes de llegar al suelo. *d*) Dibuje gráficas *x*-*t*, *y*-*t*, v_x-*t* y v_y-*t* para el movimiento de la bomba. *e*) ¿Dónde está el helicóptero cuando la bomba toca tierra, si la rapidez del helicóptero se mantuvo constante?

3.11. Dos grillos, Chirpy y Milada, saltan desde lo alto de un acantilado vertical. Chirpy simplemente se deja caer y llega al suelo en 3.50 s; en tanto que Milada salta horizontalmente con una rapidez inicial de 95.0 cm/s. ¿A qué distancia de la base del acantilado tocará Milada el suelo?

3.12. Una osada nadadora de 510 N se lanza desde un risco con un impulso horizontal, como se muestra en la figura 3.39. ¿Qué rapidez mínima debe tener al saltar de lo alto del risco para no chocar con la saliente en la base, que tiene una anchura de 1.75 m y está 9.00 m abajo del borde superior del risco?

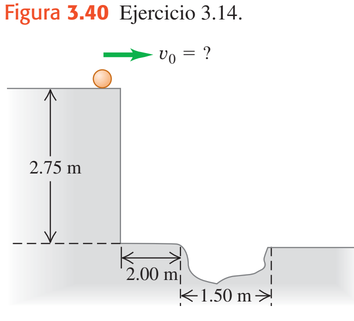
Figura 3.39 Ejercicio 3.12.



3.13. Salto del río I. Un automóvil llega a un puente durante una tormenta y el conductor descubre que las aguas se lo han llevado. El conductor debe llegar al otro lado, así que decide intentar saltar la brecha con su auto. La orilla en la que se encuentra está 21.3 m arriba del río, mientras que la orilla opuesta está a sólo 1.8 m sobre las aguas. El río es un torrente embravecido con una anchura de 61.0 m. *a*) ¿Qué tan rápido deberá ir el auto cuando llegue a la orilla para librar el río y llegar a salvo al otro lado? *b*) ¿Qué rapidez tendrá el auto justo antes de que aterrice en la orilla opuesta?

3.14. Una pequeña canica rueda horizontalmente con una rapidez v_0 y cae desde la parte superior de una plataforma de 2.75 m de alto, sin que sufra resistencia del aire. A nivel del piso, a 2.00 m de la base de la plataforma, hay una cavidad (figura 3.40). ¿En qué intervalo de rapideces v_0 la canica caerá dentro de la cavidad?

Figura 3.40 Ejercicio 3.14.



3.15. Dentro de una nave espacial en reposo sobre la Tierra, una pelota rueda desde la parte superior de una mesa horizontal y cae al piso a una distancia *D* de la pata de la mesa. Esta nave espacial ahora desciende en el inexplorado Planeta X. El comandante, el Capitán Curioso, hace rodar la misma pelota desde la misma mesa con la misma rapidez inicial que en la Tierra, y se da cuenta de que la pelota cae al piso a una distancia 2.76*D* de la pata de la mesa. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en el Planeta X?

3.16. Un mariscal de campo novato lanza un balón con una componente de velocidad inicial hacia arriba de 16.0 m/s y una componente de velocidad horizontal de 20.0 m/s. Ignore de la resistencia del aire. *a*) ¿Cuánto tiempo tardará el balón en llegar al punto más alto de la trayectoria? *b*) ¿A qué altura está este punto? *c*) ¿Cuánto tiempo pasa desde que se lanza el balón hasta que vuelve a su nivel original? ¿Qué relación hay entre este tiempo y el calculado en el inciso *a*)? *d*) ¿Qué distancia horizontal viaja el balón en este tiempo? *e*) Dibuje gráficas *x*-*t*, *y*-*t*, v_x-*t* y v_y-*t* para el movimiento.

3.17. Se dispara un proyectil desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 80.0 m/s a 60.0° por encima de la horizontal sin que sufra resistencia del aire. *a*) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial del proyectil. *b*)¿Cuánto tarda el proyectil en alcanzar su punto más alto? *c*) Calcule su altura máxima por encima del suelo. *d*) ¿Qué tan lejos del punto de lanzamiento cae el proyectil al suelo? *e*) Determine las componentes horizontal y vertical de su aceleración y velocidad en el punto de su máxima altura.

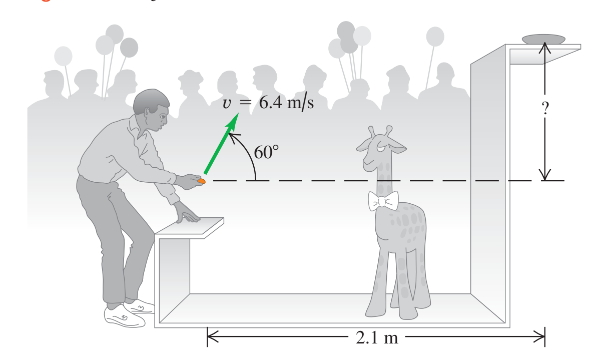
3.18. Una pistola que dispara una luz bengala le imprime una velocidad inicial de 125 m/s en un ángulo de 55.0° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire. Si la bengala se dispara, obtenga su altura máxima y la distancia del punto de disparo al punto de caída, *a*) en los salares planos de Utah y *b*) en el Mar de la Tranquilidad en la Luna, donde $g = 1.67\ \text{m/s}^2$.

3.19. Un pelotero de grandes ligas batea una pelota de modo que sale del bate con una rapidez de 30.0 m/s y un ángulo de 36.9° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿En cuáles *dos* instantes la pelota estuvo a 10.0 m sobre el punto en que se salió del bate? *b*) Obtenga las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la pelota en cada uno de los dos instantes calculados en el inciso *a*). *c*) ¿Qué magnitud y dirección tenía la velocidad de la pelota al regresar al nivel en el que se bateó?

3.20. Un atleta lanza la bala a cierta distancia sobre el suelo plano con velocidad de 12.0 m/s, 51.0° sobre la horizontal. La bola golpea el suelo 2.08 s después. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración de la bala en vuelo? *b*) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la bala al principio y el final de su trayectoria? *c*) A qué distancia horizontal llegó la bala? *d*) ¿Por qué la expresión para *R* del ejemplo 3.8 *no* da la respuesta correcta para el inciso *c*)? *e*) ¿A qué altura sobre el suelo se lanzó la bala? *f*) Dibuje las gráficas *x*-*t*, *y*-*t*, v_x-*t* y v_y-*t* para el movimiento.

3.21. Gane el premio. En una feria, se gana una jirafa de peluche lanzando una moneda a un platito, el cual está sobre una repisa más arriba del punto en que la moneda sale de la mano y a una distancia horizontal de 2.1 m desde ese punto (figura 3.41). Si lanza la moneda con velocidad de 6.4 m/s, a un ángulo de 60° sobre la horizontal, la moneda caerá en el platito. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿A qué altura está la repisa sobre el punto donde se lanza la moneda? *b*) ¿Qué componente vertical tiene la velocidad de la moneda justo antes de caer en el platito?

Figura 3.41 Ejercicio 3.21.



3.22. Suponga que el ángulo inicial α_0 de la figura 3.26 es de 42.0° y la distancia *d* es de 3.00 m. ¿Dónde se encontrarán el dardo y el mono, si la rapidez inicial del dardo es *a*) 12.0 m/s? *b*) ¿8.0 m/s? *c*) ¿Qué sucederá si la rapidez inicial del dardo es de 4.0 m/s? Dibuje la trayectoria en cada caso.

3.23. Un hombre está parado en la azotea de un edificio de 15.0 m y lanza una piedra con velocidad de 30.0 m/s en un ángulo de 33.0° sobre la horizontal. Puede despreciarse la resistencia del aire. Calcule

a) la altura máxima que alcanza la piedra sobre la azotea; *b*) la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo; y *c*) la distancia horizontal desde la base del edificio hasta el punto donde la roca golpea el suelo. *d*) Dibuje las gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.24. Los bomberos están lanzando un chorro de agua a un edificio en llamas, utilizando una manguera de alta presión que imprime al agua una rapidez de 25.0 m/s al salir por la boquilla. Una vez que sale de la manguera, el agua se mueve con movimiento de proyectil. Los bomberos ajustan el ángulo de elevación α. de la manguera hasta que el agua tarda 3.00 s en llegar a un edificio que está a 45.0 m de distancia. Ignore la resistencia del aire y suponga que la boquilla de la manguera está a nivel del suelo. *a*) Calcule el ángulo de elevación de α. *b*) Determine la rapidez y aceleración del agua en el punto más alto de su trayectoria. *c*) ¿A qué altura sobre el suelo incide el agua sobre el edificio, y con qué rapidez lo hace?

3.25. Un globo de 124 kg que lleva una canastilla de 22 kg desciende con rapidez constante hacia abajo de 20.0 m/s. Una piedra de 1.0 kg se lanza desde la canastilla con una velocidad inicial de 15.0 m/s perpendicular a la trayectoria del globo en descenso, medida relativa a una persona en reposo en la canasta. Esa persona ve que la piedra choca contra el suelo 6.00 s después de lanzarse. Suponga que el globo continúa su descenso a los 20.0 m/s constantes. *a*) ¿A qué altura estaba el globo cuando se lanzó la piedra? *b*) ¿Y cuando chocó contra el suelo? *c*) En el instante en que la piedra tocó el suelo, ¿a qué distancia estaba de la canastilla? *d*) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la piedra justo antes de chocar contra el suelo, relativas a un observador i) en reposo en la canastilla; ii) en reposo en el suelo.

3.26. Un cañón, situado a 60.0 m de la base de un risco vertical de 25.0 m de altura, dispara un obús de 15 kg con un ángulo de 43.0° sobre la horizontal, hacia el risco. *a*) ¿Qué velocidad inicial mínima debe tener el obús para librar el borde superior del risco? *b*) El suelo en la parte superior del risco es plano, con una altura constante de 25.0 m sobre el cañón. En las condiciones del inciso *a*), ¿a qué distancia del borde del risco cae el obús?

3.27. Un avión vuela con una velocidad de 90.0 m/s a un ángulo de 23.0° arriba de la horizontal. Cuando está 114 m directamente arriba de un perro parado en suelo plano, se cae una maleta del compartimiento de equipaje. ¿A qué distancia del perro caerá la maleta? Ignore la resistencia del aire.

Sección 3.4 Movimiento en un círculo

3.28. Imagine que, en su primer día de trabajo para un fabricante de electrodomésticos, le piden que averigüe qué hacerle al periodo de rotación de una lavadora para triplicar la aceleración centrípeta, y usted impresiona a su jefa contestando inmediatamente. ¿Qué le contesta?

3.29. La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h. *a*) ¿Qué aceleración radial tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g. *b*) Si a_{rad} en el ecuador fuera mayor que g, los objetos saldrían volando hacia el espacio. (Veremos por qué en el capítulo 5.) ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación para que esto sucediera?

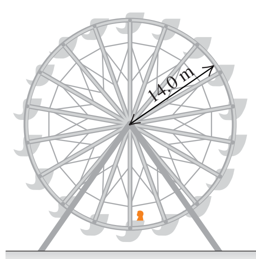
3.30. Un modelo de rotor de helicóptero tiene cuatro aspas, cada una de 3.40 m de longitud desde el eje central hasta la punta. El modelo se gira en un túnel de viento a 550 rpm. *a*) ¿Qué rapidez lineal tiene la punta del aspa en m/s? *b*) ¿Qué aceleración radial tiene la punta del aspa, expresada como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad, es decir, g?

3.31. En una prueba de un "traje g", un voluntario se gira en un círculo horizontal de 7.0 m de radio. ¿Con qué periodo de rotación la aceleración centrípeta tiene magnitud de *a*) $3.0g$? *b*) ¿$10g$?

3.32. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (suponiendo que fuera circular) es de 1.50×10^8 km, y la Tierra la recorre en 365 días. *a*) Calcule la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en m/s. *b*) Calcule la aceleración radial de la Tierra hacia el Sol en m/s^2. *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) para el movimiento del planeta Mercurio (radio orbital $= 5.79 \times 10^7$ km, periodo orbital $= 88.0$ días).

3.33. Una rueda de la fortuna de 14.0 m de radio gira sobre un eje horizontal en el centro (figura 3.42). La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7.00 m/s. ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar *a*) por el punto más bajo de su movimiento circular? *b*) ¿Por el punto más alto de su movimiento circular? *c*) ¿Cuánto tarda una revolución de la rueda?

Figura 3.42 Ejercicios 3.33 y 3.34.



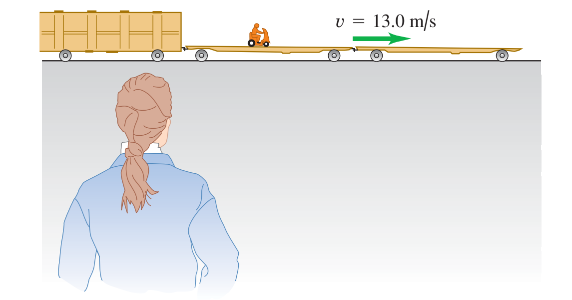
3.34. La rueda de la figura 3.42, que gira en sentido antihorario, se acaba de poner en movimiento. En un instante dado, un pasajero en el borde de la rueda que está pasando por el punto más bajo de su movimiento circular tiene una rapidez de 3.00 m/s, la cual está aumentando a razón de 0.500 m/s^2. *a*) Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración del pasajero en este instante. *b*) Dibuje la rueda de la fortuna y el pasajero mostrando sus vectores de velocidad y aceleración.

3.35. Hipergravedad. En el Centro de Investigación Ames de la NASA, se utiliza el enorme centrifugador "20-G" para probar los efectos de aceleraciones muy elevadas ("hipergravedad") sobre los pilotos y los astronautas. En este dispositivo, un brazo de 8.84 m de largo gira uno de sus extremos en un plano horizontal, mientras el astronauta se encuentra sujeto con una banda en el otro extremo. Suponga que el astronauta está alineado en el brazo con su cabeza del extremo exterior. La aceleración máxima sostenida a la que los seres humanos se han sometido en esta máquina comúnmente es de 12.5 g. *a*) ¿Qué tan rápido debe moverse la cabeza del astronauta para experimentar esta aceleración máxima? *b*) ¿Cuál es la *diferencia* entre la aceleración de su cabeza y pies, si el astronauta mide 2.00 m de altura? *c*) ¿Qué tan rápido, en rpm (rev/min), gira el brazo para producir la aceleración sostenida máxima?

Sección 3.5 Velocidad relativa

3.36. Un vagón abierto de ferrocarril viaja a la derecha con rapidez de 13.0 m/s relativa a un observador que está parado en tierra. Alguien se mueve en motoneta sobre el vagón abierto (figura 3.43). ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la motoneta relativa al vagón abierto si su velocidad relativa al observador en el suelo es *a*) 18.0 m/s a la derecha? *b*) ¿3.0 m/s a la izquierda? *c*) ¿Cero?

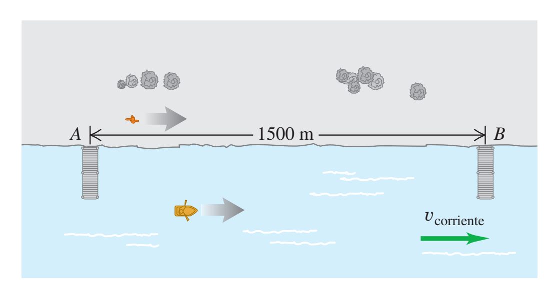
Figura 3.43 Ejercicio 3.36.



3.37. Una “banda móvil” de un aeropuerto se mueve a 1.0 m/s y tiene 35.0 m de largo. Si una mujer entra en un extremo y camina a 1.5 m/s relativa a la banda móvil, ¿cuánto tardará en llegar al otro extremo si camina *a*) en la misma dirección en que se mueve la banda? *b*) ¿Y en la dirección opuesta?

3.38. Dos muelles, *A* y *B*, están situados en un río; *B* está 1500 m río abajo de *A* (figura 3.44). Dos amigos deben ir de *A* a *B* y regresar. Uno rema un bote con rapidez constante de 4.00 km/h relativa al agua; el otro camina en tierra a 4.00 km/h constantes. La velocidad del río es 2.80 km/h en la dirección de *A* a *B*. ¿Cuánto tardará cada persona en hacer el viaje redondo?

Figura 3.44 Ejercicio 3.38.



3.39. Una canoa tiene una velocidad de 0.40 m/s al sureste, relativa a la Tierra. La canoa está en un río que fluye al este a 0.50 m/s relativa a la Tierra. Calcule la velocidad (magnitud y dirección) de la canoa relativa al río.

3.40. Un piloto desea volar al oeste. Un viento de 80.0 km/h (aprox. 50 mi/h) sopla al sur. *a*) Si la rapidez (en aire estacionario) del avión es de 320.0 km/h (aprox. 200 mi/h), ¿qué rumbo debe tomar el piloto? *b*) ¿Cuál es la rapidez del avión sobre el suelo? Ilustre con un diagrama vectorial.

3.41. Cruce del río I. Un río fluye al sur con rapidez de 2.0 m/s. Un hombre cruza el río en una lancha de motor con velocidad relativa al agua de 4.2 m/s al este. El río tiene 800 m de ancho. *a*) ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la lancha relativa a la Tierra? *b*) ¿Cuánto tiempo tarda en cruzar el río? *c*) ¿A qué distancia al sur de su punto de partida llegará a la otra orilla?

3.42. Cruce del río II. *a*) ¿Qué dirección debería tomar la lancha del ejercicio 3.41, para llegar a un punto en la orilla opuesta directamente al este de su punto de partida? (La rapidez de la lancha relativa al agua sigue siendo 4.2 m/s.) *b*) ¿Qué velocidad tendría la lancha relativa a la Tierra? *c*) ¿Cuánto tardaría en cruzar el río?

3.43. La nariz de un avión ultraligero apunta al sur, y el velocímetro indica 35 m/s. Hay un viento de 10 m/s que sopla al suroeste relativo a la Tierra. *a*) Dibuje un diagrama de suma vectorial que muestre la relación de $\vec{v}_{P/E}$ (velocidad del avión relativa a la Tierra) con los dos vectores dados. *b*) Si *x* es al este y *y* al norte, obtenga las componentes de $\vec{v}_{P/E}$. *c*) Obtenga la magnitud y dirección de $\vec{v}_{P/E}$.

Problemas

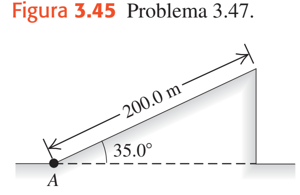
3.44. Un cohete de modelo defectuoso se mueve en el plano *xy* (la dirección $+y$ es vertical hacia arriba). La aceleración del cohete tiene componentes dadas por $a_x(t) = \alpha t^2$ y $a_y(t) = \beta - \gamma t$, donde $\alpha = 2.50\ \text{m/s}^4$, $\beta = 9.00\ \text{m/s}^2$ y $\gamma = 1.40\ \text{m/s}^3$. En $t = 0$ el cohete está en el origen y tiene velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$ con $v_{0x} = 1.00$ m/s y $v_{0y} = 7.00$ m/s. *a*) Calcule los vectores de velocidad y posición en función del tiempo. *b*) ¿Qué altura máxima alcanza el cohete? *c*) Dibuje el camino que sigue el cohete. *d*) ¿Qué desplazamiento horizontal tiene el cohete al volver a $y = 0$?

3.45. Se realiza un lanzamiento en ángulo de un cohete desde la parte superior de una torre, cuya altura es $h_0 = 50.0$ m. A causa del diseño de los motores, sus coordenadas de posición tienen la forma $x(t) = A + Bt^2$ y $y(t) = C + Dt^3$, donde *A*, *B*, *C* y *D* son constantes. Además, la aceleración del cohete 1.00 s después del lanzamiento es $\vec{a} = (4.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath})\ \text{m/s}^2$. Considere que la base de la torre es el origen de las coordenadas. *a*) Determine las constantes *A*, *B*, *C* y *D*, incluyendo sus unidades en el SI. *b*) En el instante posterior al lanzamiento del cohete, ¿cuáles son sus vectores de aceleración y velocidad? *c*) ¿Cuáles son las componentes *x* y *y* de la velocidad del cohete 10.0 s después del lanzamiento, y qué tan rápido se mueve el cohete? *d*) ¿Cuál es el vector de posición del cohete 10.0 s después del lanzamiento?

3.46. Un ave vuela en el plano *xy* con un vector de velocidad dado por $\vec{v} = (\alpha - \beta t^2)\hat{\imath} + \gamma t\hat{\jmath}$, donde $\alpha = 2.4\ \text{m/s}$, $\beta = 1.6\ \text{m/s}^3$ y $\gamma = 4.0\ \text{m/s}^2$. La dirección $+y$ es vertical hacia arriba. En $t = 0$, el ave está en el origen. *a*) Calcule los vectores de posición y aceleración del ave en función del tiempo. *b*) ¿Qué altura (coordenada *y*) tiene el ave al volar sobre $x = 0$ por primera vez después de $t = 0$?

3.47. Un cohete de prueba se lanza acelerándolo a 1.25 m/s² por un plano inclinado de 200.0 m, partiendo del reposo en el punto *A* (figura 3.45). El plano inclinado se eleva a 35.0° por encima de la horizontal, y en el instante en que el cohete sale del plano, sus motores se apagan y queda sujeto solamente a la gravedad (se puede ignorar la resistencia del aire). Determine *a*) la altura máxima sobre el suelo a la que llega el cohete, y *b*) el alcance máximo horizontal del cohete más allá del punto *A*.

Figura 3.45 Problema 3.47.



3.48. Atletismo en Marte. En el salto de longitud, una atleta se lanza en ángulo por encima del suelo y cae a la misma altura, tratando de alcanzar la máxima distancia horizontal. Suponga que en la Tierra, ella se encuentra en el aire durante un tiempo *T*, alcanza una altura máxima *h* y una distancia horizontal *D*. Si ella saltara *exactamente* de la misma forma durante una competencia en Marte, donde g_{Marte} es 0.379 del valor de *g* en la Tierra, determine su tiempo en el aire, su altura máxima y la distancia horizontal alcanzada. Exprese cada una de estas tres cantidades en términos de su valor en la Tierra. Ignore la resistencia del aire en ambos planetas.

3.49. ¡Dinamita! Una cuadrilla de demolición usa dinamita para derribar un edificio viejo. Los fragmentos del edificio salen disparados en todas direcciones, y después se encuentran a distancias de hasta 50 m de la explosión. Estime la rapidez máxima con que salieron disparados los fragmentos. Describa todas las suposiciones que haga.

3.50. Espiral ascendente. Es común ver a las aves de presa ascender en corrientes calientes de aire, por lo general describiendo una trayectoria espiral. Se puede modelar un movimiento espiral como movimiento circular uniforme combinado con una velocidad constante hacia arriba. Suponga que un ave describe un círculo completo con radio de 8.00 m cada 5.00 s y asciende verticalmente a razón de 3.00 m/s. Determine lo siguiente: *a*) la rapidez del ave relativa al suelo; *b*) la aceleración del ave (magnitud y dirección); y *c*) el ángulo entre el vector de velocidad del ave y la horizontal.

3.51. Un veterinario de la selva provisto de una cerbatana cargada con un dardo sedante y un mono astuto de 1.5 kg están a 25 m arriba del suelo en árboles separados 90 m. En el momento justo en que el veterinario dispara el dardo horizontalmente al mono, éste se deja caer del árbol en un vano intento por escapar del dardo. ¿Qué velocidad de salida mínima debe tener el dardo para golpear al mono antes de que éste llegue al suelo?

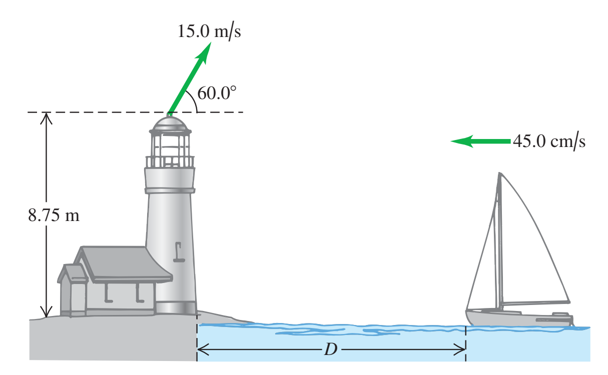
3.52. Una doble de cine se deja caer desde un helicóptero que está a 30.0 m sobre el suelo y se mueve con velocidad constante, cuyas

componentes son de 10.0 m/s hacia arriba y 15.0 m/s horizontal hacia el sur. Ignore la resistencia del aire. *a*) En qué punto del suelo (relativo a la posición del helicóptero cuando se suelta) deberá haber colocado ella los colchones que amortiguan el golpe? *b*) Dibuje gráficas *x-t*, *y-t*, v_x-*t* y v_y-*t* para su movimiento.

3.53. Al combatir los incendios forestales, los aviones apoyan a los equipos terrestres dejando caer agua sobre el fuego. Un piloto practica tirando un bote con tinte rojo, tratando de atinarle a un blanco en el suelo. Si el avión vuela horizontalmente a 90.0 m de altura con rapidez de 64.0 m/s (143 mi/h), ¿a qué distancia horizontal del blanco el piloto debería soltar el bote? Ignore la resistencia del aire.

3.54. Conforme un barco se acerca al muelle a 45.0 cm/s, es necesario lanzar hacia el barco una pieza importante para que pueda atracar. El equipo se lanza a 15.0 m/s a 60.0° por encima de la horizontal desde lo alto de una torre en la orilla del agua, 8.75 m por encima de la cubierta del barco (figura 3.46). Para que el equipo caiga justo enfrente del barco, ¿a qué distancia *D* del muelle debería estar el barco cuando se lance el equipo? Se desprecia la resistencia del aire.

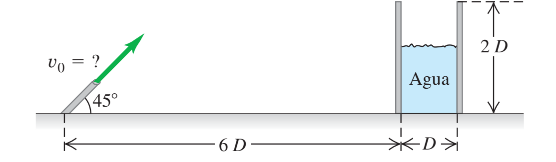
Figura 3.46 Problema 3.54.



3.55. El jonrón más largo. Según el *Libro de récords Guiness*, el jonrón más largo que se ha medido fue bateado por Roy "Dizzy" Carlyle en un juego de ligas menores. La pelota viajó 188 m (618 ft) antes de caer al suelo fuera del parque. *a*) Suponiendo que la velocidad inicial de la pelota estuviera a 45° sobre la horizontal e ignorando la resistencia del aire, ¿cuál debió ser la rapidez inicial de la pelota si se golpeó en un punto a 0.9 m (3.0 ft) sobre el suelo? Suponga que el suelo es perfectamente plano. *b*) ¿A qué altura habría pasado la bola sobre una barda de 3.0 m (10 ft) situada a 116 m (380 ft) de *home*?

3.56. Se utiliza una manguera para llenar de agua un contenedor cilíndrico grande de diametro *D* y altura 2*D*. La manguera lanza el agua a 45° sobre la horizontal, desde el mismo nivel que la base del tanque, y está a una distancia de 6*D* (figura 3.47) de éste. ¿Para qué *intervalo* de rapideces de lanzamiento (v_0) el agua entrará en el contenedor? Ignore la resistencia el aire, y exprese su respuesta en términos de *D* y de *g*.

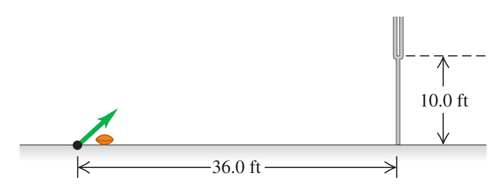
Figura 3.47 Problema 3.56.



3.57. Se lanza un proyectil desde el nivel del suelo sin que haya resistencia del aire. Usted quiere evitar que el proyectil entre en una capa de inversión de temperatura en la atmósfera a una altura *h* por encima del suelo. *a*) ¿Cuál es la máxima rapidez de lanzamiento que se podría imprimir al proyectil si se lanza en línea recta hacia arriba? Exprese su respuesta en términos de *h* y *g*. *b*) Suponga que el lanzador disponible dispara los proyectiles, al doble de la rapidez máxima de lanzamiento que usted determinó en el inciso *a*). ¿A qué ángulo máximo por encima de la horizontal debería lanzarse el proyectil? *c*) ¿A qué distancia (en términos de *h*) desde el lanzador cae al suelo el proyectil en el inciso *b*)?

3.58. Pateando un gol de campo. En fútbol americano, después de anotar un touchdown, el equipo tiene la oportunidad de ganar un punto más pateando el balón por encima de una barra sostenida entre dos postes. La barra está colocada en posición horizontal a 10.0 ft por encima del suelo, y el balón se patea desde nivel del suelo a una distancia horizontal de 36.0 ft con respecto a la barra (figura 3.48). Las reglas del fútbol se indican en unidades inglesas pero, para este problema, realice la conversión a unidades del SI. *a*) Hay un ángulo mínimo por encima del suelo, de tal forma que si el balón se lanza por debajo de este ángulo, jamás podrá saltar por encima de la barra, sin importar la rapidez que le imprima la patada. ¿Cuál es ese ángulo? *b*) Si el balón se patea a 45.0° por encima de la horizontal, ¿cuál debe ser su rapidez inicial para apenas alcanzar a librar la barra? Exprese su respuesta en m/s y km/h.

Figura 3.48 Problema 3.58.



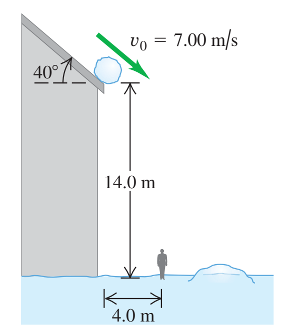
3.59. Se lanza un proyectil con rapidez v_0 y ángulo α_0 sobre la horizontal desde una altura *h* sobre el suelo. *a*) Demuestre que, si no se considera la resistencia del aire, la distancia horizontal que recorre el proyectil antes de tocar el suelo es

$$x = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g}\left(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + 2gh}\right)$$

Verifique que, si el punto de lanzamiento está en el suelo ($h = 0$), esto es igual al alcance horizontal *R* obtenido en el ejemplo 3.8. *b*) Con $v_0 = 10$ m/s y $h = 5.0$ m, grafique *x* en función del ángulo de lanzamiento α_0 para valores de α_0 desde 0° hasta 90°. La gráfica deberá mostrar que *x* es cero si $\alpha_0 = 90°$, pero *x* no es cero si $\alpha_0 = 0$. Explique esto. *c*) Vimos en el ejemplo 3.10 que, para un proyectil que cae a la misma altura de la que se lanzó, el alcance horizontal es máximo con $\alpha_0 = 45°$. Para el caso graficado en el inciso *b*), ¿el ángulo que produce la distancia horizontal máxima es igual, menor o mayor que 45°? (Éste es un resultado general para el caso en que un proyectil se lanza de un punto más alto que en el que cae.)

3.60. ¡Cuidado! Una bola de nieve rueda del techo de un granero con inclinación hacia abajo de 40° (figura 3.49). El borde del techo está a 14.0 m del suelo y la bola tiene una rapidez de 7.00 m/s al salir del techo. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿A qué distancia del borde del granero golpea la bola el piso si no golpea otra cosa al caer? *b*) Dibuje las gráficas *x-t*, *y-t*, v_x-*t* y v_y-*t* para el movimiento del inciso *a*). *c*) Un hombre de 1.9 m de estatura está parado a 4.0 m del granero. ¿Lo golpeará la bola?

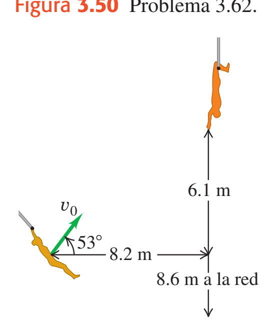
Figura 3.49 Problema 3.60.



3.61. *a*) Demuestre que un proyectil lanzado con ángulo α_0 tiene el mismo alcance horizontal que uno lanzado con la misma rapidez pero con ángulo $(90° - \alpha_0)$. *b*) Una rana salta con rapidez de 2.2 m/s y cae a 25 cm de donde saltó. ¿Con qué ángulos con respecto a la horizontal pudo haber saltado?

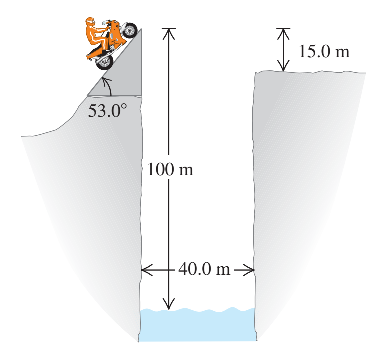
3.62. En el trapecio volador. Un nuevo acto circense se llama los Maromeros del Norte. La hermosa Maribel se columpia de un trapecio y se proyecta con un ángulo de 53°. José Roberto, cuyas manos están 6.1 m arriba y 8.2 m adelante del punto de lanzamiento (figura 3.50), debe atraparla. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué velocidad inicial v_0 debe tener Maribel para justo alcanzar a José Roberto? *b*) Para la rapidez inicial calculada en el inciso *a*), ¿qué magnitud y dirección tiene la velocidad de Maribel cuando alcanza a José Roberto? *c*) Suponiendo que Maribel tiene la rapidez inicial calculada en el inciso *a*), dibuje las gráficas *x-t*, *y-t*, v_x-*t* y v_y-*t* que muestren el movimiento de los dos trapecistas. Las gráficas deberán mostrar el movimiento hasta el momento en que Maribel llega a José Roberto. *d*) La noche del debut, José Roberto no atrapa a Maribel. ¿Qué distancia horizontal recorre ella, desde su punto de lanzamiento, antes de caer en la red que está 8.6 m debajo de dicho punto?

Figura 3.50 Problema 3.62.



3.63. Salto del río II. Un profesor de física hacía acrobacias audaces en su tiempo libre. Su última acrobacia fue un intento por saltar un río en motocicleta (figura 3.51). La rampa de despegue está inclinada a 53.0°, el río tiene 40.0 m de ancho y la ribera lejana está a 15.0 m bajo el tope de la rampa. El río está a 100 m abajo de la rampa. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué rapidez se necesita en el tope de la rampa para alcanzar apenas el borde de la ribera lejana? *b*) Si su rapidez era sólo la mitad del valor obtenido en *a*), ¿dónde cayó?

Figura 3.51 Problema 3.63.



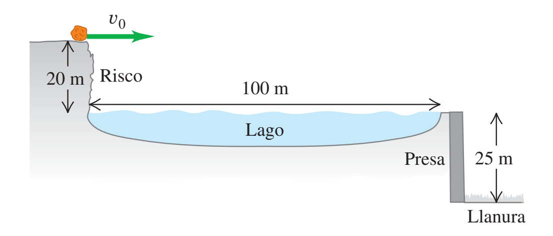
3.64. Se lanza una piedra de la azotea de un edificio con rapidez v_0 y ángulo α_0 con respecto a la horizontal. La altura del edificio es *h*. Puede despreciarse la resistencia del aire. Calcule la magnitud de la velocidad de la piedra junto antes de tocar el suelo, y demuestre que es independiente de α_0.

3.65. Un carro de 5500 kg que lleva un lanzador vertical de cohetes avanza a la derecha con rapidez constante de 30.0 m/s por una vía horizontal. Lanza un cohete de 45.0 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 40.0 m/s relativa al carro. *a*) ¿Qué altura alcanzará el cohete? *b*) ¿A qué distancia del carro caerá el cohete a tierra? *c*) ¿Qué distancia avanza el carro mientras el cohete está en el aire? *d*) ¿Con qué ángulo, relativo a la horizontal y medido por un observador en reposo en el suelo, viaja el cohete en el momento en que sale disparado? *e*) Dibuje la trayectoria del cohete vista por un observador: i) estacionario en el carro; ii) estacionario en el suelo.

3.66. Se lanza una pelota de 2.7 kg verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 20.0 m/s desde el borde de un acantilado de 45.0 m de altura. En el instante de lanzamiento, una mujer comienza a correr alejándose de la base del acantilado con rapidez constante de 6.00 m/s. La mujer corre en línea recta sobre suelo plano, y puede despreciarse la acción de la resistencia del aire sobre la pelota. *a*) ¿Con qué ángulo arriba de la horizontal deberá lanzarse la pelota para que la corredora la atrape justo antes de que toque el suelo, y qué distancia corre la mujer antes de atrapar la pelota? *b*) Dibuje con precisión la trayectoria de la pelota vista por: i) una persona en reposo en el suelo; ii) la corredora.

3.67. Un peñasco de 76.0 kg está rodando horizontalmente hacia el borde de un acantilado que está 20 m arriba de la superficie de un lago, como se indica en la figura 3.52. La parte superior de la cara vertical de una presa está a 100 m del pie del acantilado, al nivel de la superficie del lago. Hay una llanura 25 m debajo del tope de la presa. *a*) ¿Qué rapidez mínima debe tener la roca al perder contacto con el acantilado para llegar hasta la llanura sin golpear la presa? *b*) ¿A qué distancia del pie de la presa caerá la roca en la llanura?

Figura 3.52 Problema 3.67.



3.68. Lanzamiento de almuerzo. Enriqueta va a su clase de física, trotando por la acera a 3.05 m/s. Su esposo Bruno se da cuenta de que ella salió con tanta prisa que olvidó su almuerzo, así que corre a la ventana de su departamento, que está 43.9 m directamente arriba de la acera, para lanzárselo. Bruno lanza el almuerzo horizontalmente 9.00 s después de que Enriqueta ha pasado debajo de la ventana, y ella lo atrapa corriendo. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Con qué rapidez inicial debe haber lanzado Bruno el almuerzo para que Enriqueta lo atrape justo antes de tocar la acera? *b*) ¿Dónde está ella cuando atrapa el almuerzo?

3.69. Dos tanques participan en un ejercicio de maniobras en terreno plano. El primero lanza una bala de práctica cargada con pintura, con rapidez de salida de 250 m/s a 10.0° sobre la horizontal, mientras avanza hacia el segundo tanque con una rapidez de 15.0 m/s relativa al suelo. El segundo tanque va en retirada a 35.0 m/s relativa al suelo, pero es alcanzado por la bala. Ignore la resistencia del aire y suponga que la bala golpea al tanque a la misma altura desde la que fue disparada. Calcule la distancia entre los tanques *a*) cuando se disparó la bala y *b*) en el momento del impacto.

3.70. ¡Bang! Un estudiante está sentado en una plataforma a una altura *h* sobre el suelo. Lanza un petardo horizontalmente con una rapidez *v*. Sin embargo, un viento que sopla paralelo al suelo imprime al petardo una aceleración horizontal constante de magnitud *a*. El resultado es que el petardo cae al suelo directamente abajo del estudiante. Determine la altura *h* en términos de *v*, *a* y *g*. Ignore el efecto de la resistencia del aire sobre el movimiento vertical.

3.71. Un cohete se lanza verticalmente partiendo del reposo con una aceleración constante hacia arriba de 1.75 m/s^2. De repente, 22.0 s después del lanzamiento, del cohete debe desprenderse un tanque de combustible innecesario. Un miembro de la tripulación mide la rapidez inicial del tanque en 25.0 m/s e indica que éste se mueve en forma perpendicular a la trayectoria del cohete. El tanque de combustible no sufre resistencia del aire y sólo experimenta la fuerza de gravedad una vez que abandona el cohete. *a*) ¿Con qué rapidez se desplaza el cohete en el instante en que el tanque de combustible se desprende? *b*) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad del tanque de combustible justo en el momento del desprendimiento, de acuerdo con las mediciones que realiza i) un miembro de la tripulación y ii) un técnico ubicado en tierra? *c*) ¿A qué ángulo con respecto a la horizontal se mueve inicialmente el tanque de combustible que se desprende, de acuerdo con las mediciones de i) un miembro de la tripulación y ii) un técnico ubicado en tierra? *d*) ¿Cuál es la altura máxima por encima de la plataforma de lanzamiento que alcanza el tanque que se desprende?

3.72. Cuando se encuentra a 145 m por encima del suelo, un cohete, que viaja verticalmente hacia arriba a una rapidez constante de 8.50 m/s relativa al suelo, lanza un segundo cohete con una rapidez de 12.0 m/s a un ángulo de 53.0° por encima de la horizontal; ambas cantidades son medidas por un astronauta que va sentado en el interior del cohete. La resistencia del aire es muy insignificante como para tomarse en cuenta. *a*) En el momento en que se lanza el segundo cohete, ¿cuáles son las componentes horizontal y vertical de su velocidad relativa a i) el astronauta que va sentado dentro del cohete y ii) la estación de control de la misión ubicada en tierra? *b*) Determine la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento del segundo cohete de acuerdo con las mediciones del centro de control. *c*) ¿Cuál es la altura máxima por encima del suelo que alcanza el segundo cohete?

3.73. En una celebración del 4 de julio, se lanza un petardo desde nivel del suelo con una velocidad inicial de 25.0 m/s a 30.0° con respecto a la *vertical*. Cuando alcanza su altura máxima, estalla en muchos fragmentos lanzando una ráfaga de chispas. Dos de esos fragmentos viajan hacia delante inicialmente a 20.0 m/s a ±53.0° con respecto a la horizontal; ambas cantidades se miden *relativas al petardo original justo antes de que estalle*. ¿Con qué ángulo con respecto a la horizontal se mueven inicialmente los dos fragmentos justo después del estallido, según las mediciones de un espectador ubicado en el suelo?

3.74. En una película de aventuras, el héroe debe lanzar una granada desde su auto, que viaja a 90.0 km/h, al de su enemigo, que viaja a 110 km/h. El auto del enemigo está 15.8 m adelante del auto del héroe cuando éste suelta la granada. Si la velocidad inicial de la granada relativa al héroe está a 45° sobre la horizontal, ¿qué magnitud de velocidad inicial deberá tener? Ambos autos viajan en la misma dirección en un camino plano, y puede despreciarse la resistencia del aire. Obtenga la magnitud de la velocidad relativa tanto al héroe como al suelo.

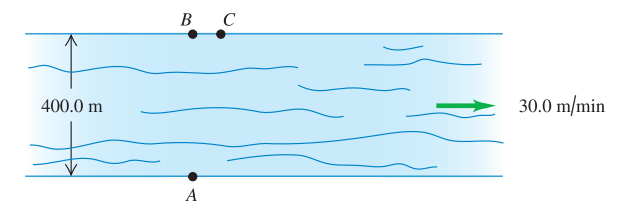
3.75. Una piedra atada a una cuerda se mueve en el plano *xy*; sus coordenadas en función del tiempo son

$$x(t) = R\cos\omega t \qquad y(t) = R\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

donde R y ω son constantes. *a*) Demuestre que la distancia de la piedra al origen es constante e igual a R, es decir, que su trayectoria es un círculo de radio R. *b*) Demuestre que la velocidad de la piedra siempre es perpendicular a su vector de posición. *c*) Demuestre que la aceleración de la piedra siempre es opuesta en dirección al vector de posición y tiene magnitud $\omega^2 R$. *d*) Demuestre que la magnitud de la velocidad de la piedra es constante e igual a ωR. *e*) Combine los resultados de *c*) y *d*) para demostrar que la aceleración de la piedra tiene magnitud constante v^2/R.

3.76. Un río de 400.0 m de ancho fluye de oeste a este a 30.0 m/min. La lancha donde usted viaja se mueve a 100.0 m/min relativa al agua, sin importar la dirección en que apunte. Para cruzar el río, usted parte de un muelle en el punto A en la ribera sur. Hay una lancha que llega a tierra directamente en el sentido opuesto, en el punto B de la ribera norte, y también una que llega al punto C, 75.0 m corriente abajo desde B (figura 3.53). *a*) ¿A qué punto de la ribera norte llegaría usted a tierra, si su lancha apuntara perpendicularmente a la corriente del agua, y qué distancia viajaría? *b*) Si usted dirige inicialmente su lancha justo hacia el punto C y no cambiara ese rumbo en relación con la orilla, ¿a qué punto de la ribera norte llegaría? *c*) Para llegar al punto C: i) ¿con qué rumbo debería dirigir su bote?, ii) ¿cuánto tiempo tardaría en cruzar el río?, iii) ¿qué distancia viajaría?, y iv) ¿cuál sería la rapidez de su lancha según la medición de un observador situado en la ribera del río?

Figura 3.53 Problema 3.76.



3.77. Cicloide. Una partícula se mueve en el plano *xy*. Sus coordenadas están dadas en función del tiempo por

$$x(t) = R(\omega t - \mathrm{sen}\,\omega t) \qquad y(t) = R(1 - \cos\omega t)$$

donde R y ω son constantes. *a*) Dibuje la trayectoria de la partícula. (Es la trayectoria de un punto en el borde de una rueda que rueda con rapidez constante sobre una superficie horizontal. La curva descrita por el punto en el espacio se llama *cicloide*.) *b*) Determine las componentes de velocidad y de aceleración de la partícula en cualquier instante t. *c*) ¿En qué instantes la partícula está momentáneamente en reposo? ¿Qué coordenadas tiene la partícula en esos instantes? ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración en esos instantes? *d*) ¿La magnitud de la aceleración depende del tiempo? Compare este movimiento con el movimiento circular uniforme.

3.78. Un proyectil se dispara desde el punto A con un ángulo por encima de la horizontal. En su punto más alto, después de haber viajado una distancia horizontal D a partir de su punto de lanzamiento, explota súbitamente en dos fragmentos idénticos que viajan horizontalmente con velocidades iguales, pero en sentido opuesto, según las mediciones *relativas al proyectil justo antes de que explote*. Si un fragmento cae de regreso en el punto A, ¿a qué distancia de A (en términos de D) caerá el otro fragmento?

3.79. Centrifugador en Mercurio. Un centrifugador-laboratorio en la Tierra efectúa n rpm (rev/min) y produce una aceleración de 5.00g en su extremo externo. *a*) ¿Cuál es la aceleración (en g) en un punto a mitad del camino hacia el extremo externo? *b*) Ahora se utiliza esta centrifugadora en una cápsula espacial en el planeta Mercurio, donde g_{Mercurio} es 0. 378 del valor de g en la Tierra. ¿Cuántas rpm (en términos de n) producirían $5g_{\text{Mercurio}}$ en su extremo externo?

3.80. Gotas de lluvia. Cuando la velocidad de un tren es de 12.0 m/s al este, las gotas de lluvia que caen verticalmente con respecto a la Tierra dejan huellas inclinadas 30.0° con respecto a la vertical en las ventanillas del tren. *a*) ¿Qué componente horizontal tiene la velocidad de una gota con respecto a la Tierra? ¿Y con respecto al tren? *b*) ¿Qué magnitud tiene la velocidad de la gota con respecto a la Tierra? ¿Y con respecto al tren?

3.81. Una piloto de avión fija un curso al oeste según la brújula y mantiene una rapidez con respecto al aire de 220 km/h. Después de volar 0.500 h, ella está sobre una ciudad 120 km al oeste y 20 km al sur de su punto de partida. *a*) Calcule la velocidad del viento (magnitud y dirección). *b*) Si dicha velocidad es de 40 km/h al sur, ¿qué curso debe fijar la piloto para viajar al oeste? La rapidez con respecto al aire es la misma de 220 km/h.

3.82. Un elevador sube con rapidez constante de 2.50 m/s. En el techo del elevador, 3.00 m arriba del piso, un perno se afloja y cae. *a*) ¿Cuánto tarda en llegar al piso del elevador? ¿Qué rapidez tiene el perno justo antes de tocar el piso *b*) según un observador en el elevador? *c*) ¿Y según un observador parado en uno de los pisos del edificio? *d*) Según el observador del inciso *c*), ¿qué distancia recorrió el perno entre el techo y el piso del elevador?

3.83. Suponga que el elevador del problema 3.82 parte del reposo y mantiene una aceleración constante hacia arriba de 4.00 m/s^2, y que el perno se cae justo en el instante en que el elevador comienza a moverse. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda el perno en tocar el piso del elevador? *b*) Justo cuando toca el piso, ¿qué tan rápido se mueve el perno de acuerdo con un observador i) en el elevador, ii) situado en un piso del edificio? *c*) De acuerdo con cada observador del inciso *b*), ¿qué distancia recorre el perno entre el techo y el piso del elevador?

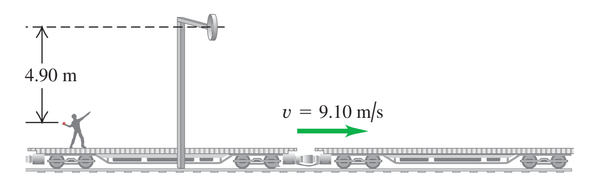
3.84. La ciudad *A* se ubica directamente al oeste de la ciudad *B*. Cuando no hay viento, un avión realiza el viaje redondo de 5550 km entre ambas ciudades en 6.60 h, volando con la misma rapidez en ambas direcciones. Cuando un viento fuerte y constante de 225 km/h sopla de oeste a este y el avión viaja con la misma rapidez que antes, ¿cuánto tardará el vuelo?

3.85. En un partido durante la Copa Mundial de fútbol, Juan corre al norte hacia la portería con una rapidez de 8.00 m/s relativa al suelo. Un compañero le pasa el balón, el cual tiene una rapidez de 12.0 m/s y se mueve en una dirección 37.0° al este del norte, relativa al suelo. ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad del balón relativa a Juan?

Problemas de desafío

3.86. Un hombre sobre un vagón abierto de ferrocarril que viaja con rapidez constante de 9.10 m/s (figura 3.54) quiere lanzar una pelota a través de un aro estacionario a 4.90 m sobre la altura de la mano, de modo que la bola se mueva horizontalmente al pasar por el aro. El hombre lanza la bola con una rapidez de 10.8 m/s con respecto a sí mismo. *a*) ¿Qué componente vertical debe tener la velocidad inicial de la bola? *b*) ¿Cuántos segundos después del lanzamiento la bola atravesará el aro? *c*) ¿A qué distancia horizontal del aro se deberá soltar la bola? *d*) Cuando la pelota sale de la mano del hombre, ¿qué dirección tiene su velocidad relativa al marco de referencia del vagón? ¿Y relativa al marco de referencia de un observador parado en el suelo?

Figura 3.54 Problema de desafío 3.86.

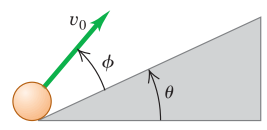


3.87. Una escopeta dispara muchos perdigones hacia arriba. Algunos viajan casi verticalmente, pero otros se desvían hasta 1.0° de la vertical. Suponga que la rapidez inicial de todos los perdigones es uniforme de 150 m/s e ignore la resistencia del aire. *a*) ¿En qué radio del punto de disparo caerán los perdigones? *b*) Si hay 1000 perdigones y se distribuyen uniformemente en un círculo del radio calculado en el inciso *a*), ¿qué probabilidad hay de que al menos un perdigón caiga en la cabeza de quien disparó? (Suponga que la cabeza tiene 10 cm de radio.) *c*) En realidad, la resistencia del aire tiene varios efectos: frena los perdigones al subir, reduce la componente horizontal de su velocidad y limita la rapidez con que caen. ¿Cuál efecto tenderá a hacer el radio mayor que el calculado en *a*), y cuál tenderá a reducirlo? ¿Qué efecto global cree que tendrá la resistencia? (Su efecto sobre una componente de velocidad se incrementa al aumentar la magnitud de la componente.)

3.88. Un proyectil se lanza desde un punto *P*. Su movimiento es tal que su distancia respecto a *P* siempre aumenta. Determine el ángulo máximo arriba de la horizontal con que pudo haberse lanzado. Ignore la resistencia del aire.

3.89. Movimiento de proyectil en una pendiente I. Una pelota de béisbol recibe una velocidad inicial de magnitud v_0 a un ángulo ϕ sobre la superficie de una rampa que, a la vez, está inclinada θ grados sobre la horizontal (figura 3.55). *a*) Calcule la distancia sobre la rampa desde el punto de lanzamiento hasta donde el objeto golpea la rampa. Responda en términos de v_0, g, θ y ϕ. *b*) ¿Qué ángulo ϕ da el alcance máximo sobre la rampa? (*Nota:* tal vez le interesen los tres métodos de resolución presentados por I. R. Lapidus en *Amer. Jour. of Phys*., vol. 51 (1983), pp. 806 y 847. Véase también H. A. Buckmaster, *Amer. Jour. of Phys.,* vol. 53 (1985), pp. 638-641, donde se estudian a fondo este problema y otros similares.)


Figura 3.55 Problema de desafío 3.89.



3.90. Movimiento de proyectil en una pendiente II. Remítase al problema de desafío 3.89. *a*) Un arquero parado en un terreno con inclinación ascendente constante de 30.0° apunta hacia un blanco situado 60.0 m más arriba del plano. La flecha en el arco y el centro del blanco están ambos a 1.50 m sobre el suelo. Justo al salir del arco, la rapidez inicial de la flecha es de 32.0 m/s. ¿Con qué ángulo sobre la *horizontal* debe apuntar el arquero para dar en el blanco? Si hay dos ángulos, calcule el menor. Tal vez necesite resolver la ecuación del ángulo por iteración, es decir, ensayo y error. Compare el ángulo con el que se necesita cuando el suelo está horizontal. *b*) Repita con una pendiente constante *hacia abajo* de 30.0°.

3.91. Sin motivo aparente, un *poodle* (caniche) está corriendo con rapidez constante de $v = 5.00$ m/s en un círculo con radio $R = 2.50$ m. Sea $\vec{v}_1$, el vector de velocidad en t_1, y $\vec{v}_2$ en t_2. Considere $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. Recuerde que $\vec{a}_{\text{med}} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Para $\Delta t = 0.5$ s, 0.1 s y 0.05 s, calcule la magnitud (con cuatro cifras significativas) y la dirección (relativa a $\vec{v}_1$) de la aceleración media $\vec{a}_{\text{med}}$. Compare su resultado con la expresión general para la aceleración $\vec{a}$ instantánea en movimiento circular uniforme deducida en el texto.

3.92. Un cohete diseñado para colocar cargas pequeñas en órbita se lleva hasta una altitud de 12.0 km sobre el nivel del mar, montado en un avión comercial convertido. Cuando el avión está volando en línea recta, con rapidez constante de 850 km/h, deja caer el cohete. Después, el avión mantiene la misma altitud y rapidez, y sigue volando en línea recta. El cohete cae durante un lapso corto, después del cual se enciende el motor. A partir de ese momento, los efectos combinados del empuje y la gravedad imparten al cohete una aceleración constante de magnitud 3.00g dirigida con un ángulo de 30.0° arriba de la horizontal. Por motivos de seguridad, el cohete deberá estar por lo menos a 1.00 km adelante del avión cuando vuelva a alcanzar la altitud de éste. Hay que determinar el tiempo mínimo que el cohete debe caer antes de que su motor se encienda. Se puede ignorar la resistencia del aire. La respuesta debe incluir i) un diagrama que muestre las trayectorias de vuelo del cohete y del avión, rotuladas en varios puntos con vectores que representen su velocidad y su aceleración; ii) una gráfica *x-t* que muestre los movimientos del cohete y del avión; y iii) una gráfica *y-t* que muestre los movimientos del cohete y del avión. En el

diagrama y las gráficas, indique los momentos cuando el cohete se deja caer, el motor del cohete se enciende y el cohete en ascenso alcanza la altura del avión.

3.93. Dos estudiantes pasean en canoa por un río. Yendo río arriba, dejan caer accidentalmente una botella vacía al agua, después de lo cual reman durante 60 minutos hasta llegar a un punto a 2.0 km río arriba. En ese momento, se dan cuenta de que la botella no está y, preocupados por la ecología, se dan vuelta y reman río abajo. Alcanzan la botella (que se ha estado moviendo con la corriente) 5.0 km río abajo del punto donde se dieron la vuelta, y la recogen. *a*) Suponiendo un esfuerzo de paleo constante todo el tiempo, ¿con qué rapidez fluye el río? *b*) ¿Qué rapidez tendría la canoa en un lago tranquilo con el mismo esfuerzo de paleo?

LEYES DEL MOVIMIENTO DE NEWTON





?El niño que está de pie empuja al niño que está sentado en el columpio. ¿El niño sentado empuja hacia atrás? Si acaso, ¿empuja con la misma cantidad de fuerza o con una cantidad diferente?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Lo que significa el concepto de fuerza en la física y por qué las fuerzas son vectores.
- La importancia de la fuerza neta sobre un objeto y lo que sucede cuando la fuerza neta es cero.
- La relación entre la fuerza neta sobre un objeto, la masa del objeto y su aceleración.
- La manera en que se relacionan las fuerzas que dos objetos ejercen entre sí.

En los dos últimos capítulos vimos cómo describir el movimiento en una, dos o tres dimensiones. Sin embargo, ¿cuáles son las *causas* del movimiento? Por ejemplo, ¿cómo puede un remolcador empujar un trasatlántico que es mucho más pesado que él? ¿Por qué es más difícil controlar un automóvil en hielo mojado que en concreto seco? Las respuestas a estas preguntas y a otras similares nos llevan al tema de la **dinámica**, es decir, la relación entre el movimiento y las fuerzas que lo causan. En los dos capítulos anteriores estudiamos la *cinemática*, el lenguaje para describir el movimiento. Ahora estamos en condiciones de pensar en lo que hace que los cuerpos se muevan como lo hacen.

En este capítulo usaremos dos conceptos nuevos, la *fuerza* y la *masa*, para analizar los principios de la dinámica, los cuales están establecidos en sólo tres leyes que fueron claramente enunciadas por Sir Isaac Newton (1642-1727), quien las publicó, por primera vez, en 1687 en su *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ("Principios matemáticos de la filosofía natural"). Tales enunciados se conocen como **leyes del movimiento de Newton**. La primera ley dice que si la fuerza neta sobre un cuerpo es cero, su movimiento no cambia. La segunda ley relaciona la fuerza con la aceleración cuando la fuerza neta *no* es cero. La tercera ley es una relación entre las fuerzas que ejercen dos cuerpos que interactúan entre sí.

Las leyes de Newton no son producto de deducciones matemáticas, sino una síntesis que los físicos han descubierto al realizar un sinnúmero de *experimentos* con cuerpos en movimiento. (Newton usó las ideas y las observaciones que muchos científicos hicieron antes que él, como Copérnico, Brahe, Kepler y especialmente Galileo Galilei, quien murió el mismo año en que nació Newton.) Dichas leyes son verdaderamente fundamentales porque no pueden deducirse ni demostrarse a partir de otros principios. Las leyes de Newton son la base de la **mecánica clásica** (también llamada **mecánica newtoniana**); al usarlas seremos capaces de comprender los tipos de movimiento más conocidos. Las leyes de Newton requieren modificación sólo en situaciones que implican rapideces muy altas (cercanas a la rapidez de la luz) o para tamaños muy pequeños (dentro del átomo).

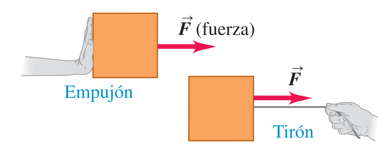
El planteamiento de las leyes de Newton es sencillo, pero muchos estudiantes las encuentran difíciles de comprender y manejar. La razón es que, antes de estudiar física,

hemos pasado años caminando, lanzando pelotas, empujando cajas y haciendo muchas otras cosas que implican movimiento. Al hacerlo, hemos desarrollado ciertas ideas de "sentido común" con respecto al movimiento y sus causas. Sin embargo, muchas de esas ideas no resisten un análisis lógico. Una buena parte de la tarea de este capítulo —y del resto de nuestro estudio— es ayudarnos a reconocer cuándo las ideas de "sentido común" nos llevan al error, y cómo ajustar nuestro entendimiento del mundo físico de modo que sea congruente con lo que nos dicen los experimentos.

4.1 Fuerza e interacciones

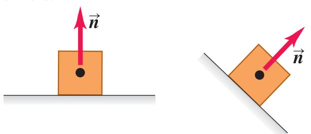
4.1 Algunas propiedades de las fuerzas.

- Una fuerza es un empujón o un tirón.
- Una fuerza es una interacción entre dos objetos o entre un objeto y su ambiente.
- Una fuerza es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

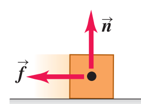


4.2 Cuatro tipos de fuerzas comunes.

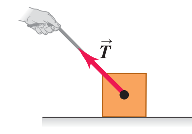
a) **Fuerza normal $\vec{n}$:** cuando un objeto descansa o se empuja sobre una superficie, ésta ejerce un empujón sobre el objeto que es perpendicular a la superficie.



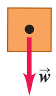
b) **Fuerza de fricción $\vec{f}$:** además de la fuerza normal, una superficie puede ejercer una fuerza de fricción sobre un objeto que es paralela a la superficie.



c) **Fuerza de tensión $\vec{T}$:** una fuerza de tirón ejercida sobre un objeto por una cuerda, un cordón, etc.



d) **Peso $\vec{w}$:** el tirón de la gravedad sobre un objeto es una fuerza de largo alcance (una fuerza que actúa en una distancia).



En el lenguaje cotidiano, **fuerza** es un empujón o un tirón. Una mejor definición es que una fuerza es una *interacción* entre dos cuerpos o entre un cuerpo y su ambiente (figura 4.1). Es la causa de por qué siempre nos referimos a la fuerza que un cuerpo *ejerce* sobre un segundo cuerpo. Cuando empujamos un automóvil atascado en la nieve, ejercemos una fuerza sobre el auto; un cable de acero ejerce una fuerza sobre la viga que levanta en una construcción, etcétera. Como se muestra en la figura 4.1, la fuerza es una cantidad *vectorial*: podemos empujar un cuerpo o tirar de él en diferentes direcciones.

Cuando una fuerza implica contacto directo entre dos cuerpos, como un empujón o un tirón que usted ejerce con la mano sobre un objeto, la llamamos **fuerza de contacto**. Las figuras 42a, 4.2b y 4.2c muestran tres tipos comunes de fuerzas de contacto. La **fuerza normal** (figura 4.2a) es ejercida sobre un objeto por cualquier superficie con la que esté en contacto. El adjetivo *normal* significa que la fuerza siempre actúa perpendicular a la superficie de contacto, sin importar el ángulo de esa superficie. En cambio, la **fuerza de fricción** (figura 4.2b) ejercida sobre un objeto por una superficie actúa *paralela* a la superficie, en la dirección opuesta al deslizamiento. La fuerza de tirón ejercida por una cuerda o por un cordel estirado sobre un objeto al cual se ata se llama **fuerza de tensión** (figura 4.2c). Cuando usted tira de la correa de su perro, la fuerza que tira del cuello de la mascota es una fuerza de tensión.

Además de las fuerzas de contacto, también hay **fuerzas de largo alcance** que actúan aunque los cuerpos estén separados. La fuerza entre dos imanes es un ejemplo de este tipo de fuerza, así como la gravedad (figura 4.2d); la Tierra atrae hacia sí cualquier objeto que se deje caer, incluso cuando no haya contacto directo entre el objeto y la Tierra. La fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre un cuerpo se llama **peso** del cuerpo.

Por lo tanto, para describir una fuerza vectorial $\vec{F}$, debemos indicar su *dirección* de acción y su *magnitud*, la cantidad que describe "cuánto" o "qué tan tanto" la fuerza empuja o tira. La unidad SI de magnitud de fuerza es el *newton*, que se abrevia N. (Daremos una definición precisa del newton en la sección 4.3.) La tabla 4.1 presenta algunas magnitudes de fuerza comunes.

Tabla 4.1 Magnitudes de fuerzas comunes

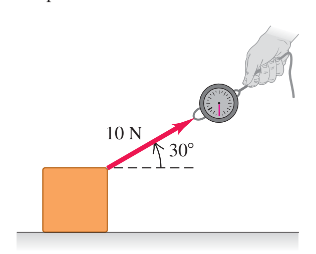
Fuerza gravitacional del Sol sobre la Tierra	3.5×10^{22} N
Empuje de un trasbordador espacial durante el lanzamiento	3.1×10^{7} N
Peso de una ballena azul grande	1.9×10^{6} N
Fuerza de tracción máxima de una locomotora	8.9×10^{5} N
Peso de un jugador de fútbol americano de 250 lb	1.1×10^{3} N
Peso de una manzana mediana	1 N
Peso de los huevos de insecto más pequeños	2×10^{-6} N
Atracción eléctrica entre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno	8.2×10^{-8} N
Peso de una bacteria muy pequeña	1×10^{-18} N
Peso de un átomo de hidrógeno	1.6×10^{-26} N
Peso de un electrón	8.9×10^{-30} N
Atracción gravitacional entre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno	3.6×10^{-47} N

Un instrumento común para medir magnitudes de fuerza es la *balanza de resorte*, que consiste en un resorte espiral protegido en una caja, con un puntero conectado a un extremo. Cuando se aplican fuerzas a los extremos del resorte, éste se estira y la cantidad de estiramiento depende de la fuerza. Puede establecerse una escala para el puntero y calibrarla usando varios cuerpos idénticos de 1 N de peso cada uno. Cuando uno, dos o más de estos cuerpos se suspenden simultáneamente de la balanza, la fuerza total que estira el resorte es 1 N, 2 N, etcétera, y podemos marcar las posiciones correspondientes del puntero 1 N, 2 N, etcétera. Luego podemos usar el instrumento para medir la magnitud de una fuerza desconocida. Se puede hacer un instrumento similar para fuerzas que empujen.

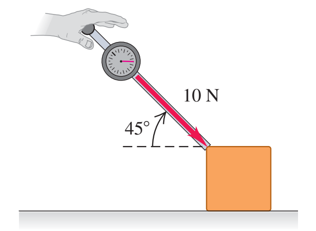
La figura 4.3 muestra una balanza de resorte que se utiliza para medir un tirón o un empujón que se aplica a una caja. En ambos casos, dibujamos un vector que represente la fuerza aplicada. Los rótulos indican la magnitud y la dirección de la fuerza; en tanto que la longitud del vector también indica la magnitud: cuanto más grande sea el vector, mayor será la magnitud de la fuerza.

4.3 Uso de una flecha como vector para indicar la fuerza que ejercemos cuando a) tiramos de un bloque con una cuerda, o b) lo empujamos con una vara.

a) Un tirón de 10 N dirigido a 30° por encima de la horizontal



b) Un empujón de 10 N dirigido a 45° por debajo de la horizontal



Superposición de fuerzas

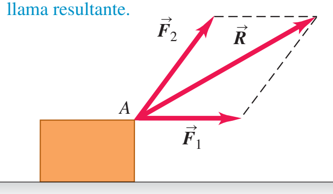
Cuando se lanza una pelota, hay al menos dos fuerzas que actúan sobre ella: el empujón de la mano y el tirón hacia abajo de la gravedad. Los experimentos muestran que si dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ actúan al mismo tiempo en un punto A de un cuerpo (figura 4.4), el efecto sobre el movimiento del cuerpo es igual al de una sola fuerza $\vec{R}$ igual a la *suma vectorial* de las fuerzas originales: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. En general, *el efecto de cualquier cantidad de fuerzas aplicadas a un punto de un cuerpo es el mismo de una sola fuerza igual a la suma vectorial de las fuerzas*. Éste es el importante principio de **superposición de fuerzas**.

El descubrimiento experimental de que las fuerzas se combinan por suma vectorial es de enorme importancia. Usaremos este hecho muchas veces en nuestro estudio de la física, pues nos permite sustituir una fuerza por sus vectores componentes, como hicimos con los desplazamientos en la sección 1.8. Por ejemplo, en la figura 4.5a, la fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo en el punto O. Los vectores componentes de $\vec{F}$ en las direcciones Ox y Oy son $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$. Si éstos se aplican simultáneamente, como en la figura 4.5b, el efecto es idéntico al de la fuerza original $\vec{F}$. *Cualquier fuerza puede ser sustituida por sus vectores componentes, actuando en el mismo punto*.

Suele ser más conveniente describir una fuerza $\vec{F}$ en términos de sus componentes x y y, F_x y F_y en vez de sus vectores componentes (recuerde de la sección 1.8 que los *vectores componentes* son vectores, pero las *componentes* sólo son números). En el caso de la figura 4.5, F_x y F_y son ambas positivas; para otras orientaciones de $\vec{F}$, cualquiera de ellas puede ser negativa o cero.

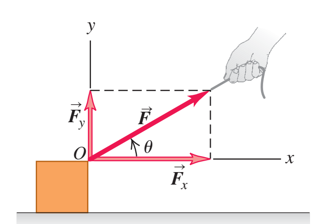
Ninguna regla establece que los ejes de coordenadas deben ser verticales y horizontales. En la figura 4.6 un bloque de piedra es arrastrado rampa arriba por una fuerza $\vec{F}$, representada por sus componentes F_x y F_y paralela y perpendicular a la rampa inclinada.

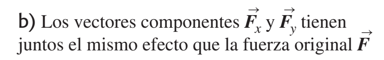
4.4 Superposición de fuerzas.



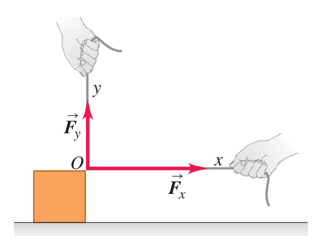
4.5 La fuerza $\vec{F}$, que actúa con un ángulo θ con respecto al eje x, puede ser sustituida por sus vectores componentes rectangulares, $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$.

a) Vectores componentes: $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$
Componentes: $F_x = F \cos\theta$ y $F_y = F \operatorname{sen}\theta$

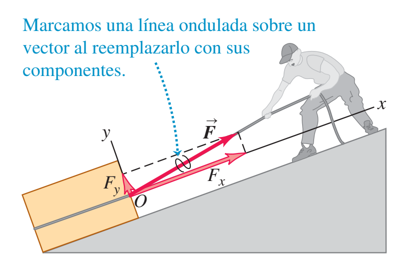




b) Los vectores componentes $\vec{F}_x$ y $\vec{F}_y$ tienen juntos el mismo efecto que la fuerza original $\vec{F}$



4.6 F_x y F_y son las componentes de $\vec{F}$ paralela y perpendicular a la superficie del plano inclinado.



4.7 Obtención de las componentes de la suma vectorial (resultante) $\vec{R}$ de dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

$\vec{R}$ es la suma (resultante) de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

La componente y de $\vec{R}$ es igual a la suma de las componentes y de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Lo mismo es válido para las componentes.

CUIDADO **Uso de una línea ondulada en diagramas de fuerza** En la figura 4.6, dibujamos una línea ondulada sobre el vector de fuerza $\vec{F}$ para indicar que lo hemos sustituido por sus componentes x y y. De lo contrario, el diagrama incluiría la misma fuerza dos veces. Haremos esto en cualquier diagrama de fuerza donde una fuerza se sustituya por sus componentes. Esté alerta a la línea ondulada en otras figuras de este capítulo y capítulos posteriores.

A menudo necesitaremos obtener la suma vectorial (resultante) de *todas* las fuerzas que actúan sobre un cuerpo. Llamaremos a esto la **fuerza neta** que actúa sobre el cuerpo. Usaremos la letra griega Σ (sigma mayúscula, que equivale a la S romana) para denotar sumatoria. Si las fuerzas son $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, etcétera, abreviaremos la sumatoria como

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum \vec{F} \qquad (4.1)$$

donde $\sum \vec{F}$ se lee "suma vectorial de las fuerzas" o "fuerza neta". La versión con componentes de la ecuación (4.1) es el par de ecuaciones

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y \qquad (4.2)$$

donde $\sum F_x$ es la suma de las componentes x y $\sum F_y$ es la suma de las componentes y (figura 4.7). Cada componente puede ser positiva o negativa, así que tenga cuidado con los signos al sumar en la ecuación (4.2).

Una vez que se tienen R_x y R_y, puede obtenerse la magnitud y la dirección de la fuerza neta $\vec{R} = \sum \vec{F}$ que actúa sobre el cuerpo. La magnitud es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

y el ángulo θ entre $\vec{R}$ y el eje $+x$ puede obtenerse de la relación $\tan\theta = R_y/R_x$. Las componentes R_x y R_y pueden ser positivas, negativas o cero, y el ángulo θ puede estar en cualquier cuadrante.

En problemas tridimensionales, las fuerzas pueden tener componentes z, así que agregamos la ecuación $R_z = \sum F_z$ a la ecuación (4.2). La magnitud de la fuerza neta es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Ejemplo 4.1 Superposición de fuerzas

Tres luchadores profesionales pelean por el mismo cinturón de campeonato. Vistos desde arriba, aplican al cinturón las tres fuerzas horizontales de la figura 4.8a. Las magnitudes de las tres fuerzas son $F_1 = 250$ N, $F_2 = 50$ N y $F_3 = 120$ N. Obtenga las componentes x y y de la fuerza neta sobre el cinturón, así como la magnitud y dirección de la fuerza neta.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo no es más que un problema de suma vectorial. Lo único nuevo es que los vectores representan fuerzas.

PLANTEAR: Debemos calcular las componentes x y y de la fuerza neta $\vec{R}$, así que utilizaremos el método de componentes de la suma vectorial expresada en la ecuación (4.2). Una vez que tenemos las componentes de $\vec{R}$, podemos calcular su magnitud y dirección.

EJECUTAR: Por la figura 4.8a, los ángulos entre las fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ y el eje $+x$ son $\theta_1 = 180° - 53° = 127°$, $\theta_2 = 0°$ y $\theta_3 = 270°$. Las componentes x y y de las tres fuerzas son

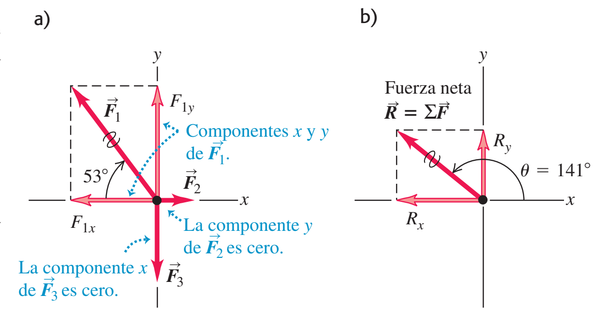
$$F_{1x} = (250\ \text{N})\cos 127° = -150\ \text{N}$$

$$F_{1y} = (250\ \text{N})\,\text{sen}\,127° = 200\ \text{N}$$

$$F_{2x} = (50\ \text{N})\cos 0° = 50\ \text{N}$$

$$F_{2y} = (50\ \text{N})\,\text{sen}\,0° = 0\ \text{N}$$

4.8 a) Tres fuerzas que actúan sobre el cinturón. b) La fuerza neta $\vec{R} = \sum\vec{F}$ y sus componentes.



$$F_{3x} = (120\ \text{N})\cos 270° = 0\ \text{N}$$

$$F_{3y} = (120\ \text{N})\,\text{sen}\,270° = -120\ \text{N}$$

Por la ecuación (4.2), la fuerza neta $\vec{R} = \sum\vec{F}$ tiene componentes

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = (-150\ \text{N}) + 50\ \text{N} + 0\ \text{N} = -100\ \text{N}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 200\ \text{N} + 0\ \text{N} + (-120\ \text{N}) = 80\ \text{N}$$

La fuerza neta tiene componente x negativa y componente y positiva, así que apunta a la izquierda y hacia arriba en la parte superior de la figura 4.8b (es decir, en el segundo cuadrante).

La magnitud de la fuerza neta $\vec{R} = \Sigma\vec{F}$ es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-100\ \text{N})^2 + (80\ \text{N})^2} = 128\ \text{N}$$

Para obtener el ángulo entre la fuerza neta y el eje $+x$, usamos la relación $\tan\theta = R_y/R_x$, o bien,

$$\theta = \arctan\frac{R_y}{R_x} = \arctan\left(\frac{80\ \text{N}}{-100\ \text{N}}\right) = \arctan(-0.80)$$

Las dos posibles soluciones son $\theta = -39°$ y $\theta = -39° + 180° = 141°$. Puesto que la fuerza neta está en el segundo cuadrante, como indicamos, la respuesta correcta es 141° (véase la figura 4.8b).

EVALUAR: En esta situación, la fuerza neta *no* es cero, y vemos intuitivamente que el luchador 1 (quien ejerce la mayor fuerza, $\vec{F}_1$, sobre el cinturón) probablemente se quedará con el cinturón después del forcejeo. En la sección 4.2 exploraremos a fondo qué sucede en situaciones en las que la fuerza neta sí *es* cero.

Evalúe su comprensión de la sección 4.1 La figura 4.6 muestra una fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre un bloque. Con los ejes x y y que se indican en la figura, ¿qué enunciado acerca de las componentes de la fuerza *gravitacional* que la tierra ejerce sobre el bloque (su peso) es *correcto*? i) Las componentes x y y son ambas positivas. ii) La componente x es cero y la componente y es positiva. iii) La componente x es negativa y la componente y es positiva. iv) Las componentes x y y son ambas negativas. v) La componente x es cero y la componente y es negativa. vi) La componente x es positiva y la componente y es negativa.

4.2 Primera ley de Newton

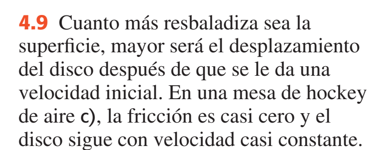
Hemos visto algunas propiedades de las fuerzas, pero no hemos dicho cómo afectan el movimiento. Por principio de cuentas, consideremos qué sucede cuando la fuerza neta sobre un cuerpo es *cero*. Sin duda el lector estará de acuerdo en que si un cuerpo está en reposo y ninguna fuerza neta actúa sobre él (es decir, no hay empujón ni tirón netos), el cuerpo permanecerá en reposo. Pero, ¿Qué sucedería si la fuerza neta es cero y actúa sobre un cuerpo *en movimiento*?

Para saber qué sucede en este caso, suponga que usted desliza un disco de hockey sobre una mesa horizontal, aplicándole una fuerza horizontal con la mano (figura 4.9a). Cuando usted deja de empujar, el disco *no* sigue moviéndose indefinidamente; se frena y se detiene. Para mantenerlo en movimiento, hay que seguirlo empujando (es decir, aplicando una fuerza). Podríamos llegar a la conclusión de "sentido común" de que los cuerpos en movimiento naturalmente se detienen y que se necesita una fuerza para mantener el movimiento.

Imagine ahora que usted empuja el disco en una superficie lisa de hielo (figura 4.9b). Al dejar de empujar, el disco se desliza mucho más lejos antes de detenerse. Ponga el disco y empújelo en una mesa de hockey de aire, donde flota sobre un delgado "cojín" de aire, y llegará aún más lejos (figura 4.9c). En cada caso, lo que frena el disco es la *fricción*, una interacción entre la superficie inferior del disco y la superficie sobre la que se desliza. Cada superficie ejerce una fuerza de fricción sobre el disco, la cual reduce su movimiento; la diferencia entre los tres casos es la magnitud de la fuerza de fricción. El hielo ejerce menos fricción que la superficie de la mesa, y el disco viaja más lejos. Las moléculas de gas de la mesa de hockey de aire son las que menos fricción ejercen. Si pudiéramos eliminar totalmente la fricción, el disco nunca se frenaría y no necesitaríamos fuerza alguna para mantener el disco en movimiento, una vez que empieza a hacerlo. Así, la idea de "sentido común" de que se requiere una fuerza para conservar el movimiento es *incorrecta*.

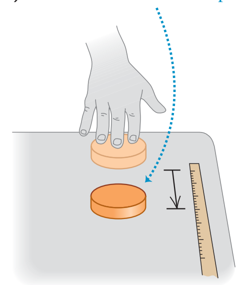
Experimentos como el que describimos demuestran que, si ninguna fuerza neta actúa sobre un cuerpo, éste permanece en reposo, o bien, se mueve con velocidad constante en línea recta. Una vez que un cuerpo se pone en movimiento, no se necesita una fuerza neta para mantenerlo en movimiento; a tal observación la conocemos como *primera ley del movimiento de Newton*:

Primera ley del movimiento de Newton: un cuerpo sobre el que no actúa una fuerza neta se mueve con velocidad constante (que puede ser cero) y aceleración cero.

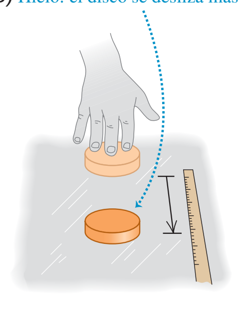


4.9 Cuanto más resbaladiza sea la superficie, mayor será el desplazamiento del disco después de que se le da una velocidad inicial. En una mesa de hockey de aire **c)**, la fricción es casi cero y el disco sigue con velocidad casi constante.

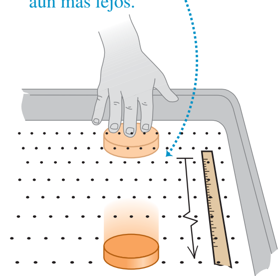
a) Mesa: el disco se detiene pronto.



b) Hielo: el disco se desliza más lejos.

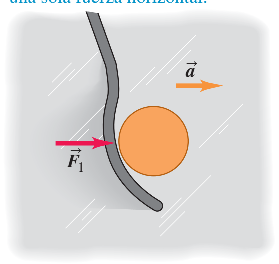


c) Mesa de hockey de aire: el disco se desliza aún más lejos.

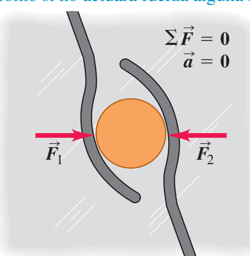


4.10 a) Un disco de hockey acelera en la dirección de la fuerza neta aplicada $\vec{F}_1$. b) Si la fuerza neta es cero, la aceleración es cero y el disco está en equilibrio.

a) Sobre una superficie sin fricción, un disco acelera cuando actúa sobre él una sola fuerza horizontal.



b) Un objeto sobre el que actúan fuerzas cuya suma vectorial sea cero se comporta como si no actuara fuerza alguna sobre él.



La tendencia de un cuerpo a seguir moviéndose una vez iniciado su movimiento es resultado de una propiedad llamada **inercia**. Usamos inercia cuando tratamos de sacar salsa de tomate de una botella agitándola. Primero hacemos que la botella (y la salsa del interior) se mueva hacia adelante; al mover la botella bruscamente hacia atrás, la salsa tiende a seguir moviéndose hacia adelante y, con suerte, cae en nuestra hamburguesa. La tendencia de un cuerpo en reposo a permanecer en reposo también se debe a la inercia. Quizás el lector haya visto sacar un mantel de un tirón de debajo de la vajilla sin romper nada. La fuerza sobre la vajilla no basta para moverla mucho durante el breve lapso que toma retirar el mantel.

Es importante señalar que lo que importa en la primera ley de Newton es la fuerza *neta*. Por ejemplo, dos fuerzas actúan sobre un libro en reposo en una mesa horizontal: una fuerza de apoyo hacia arriba, o fuerza normal, ejercida por la mesa (véase la figura 4.2a) y la fuerza hacia abajo debida a la atracción gravitacional terrestre (una fuerza de largo alcance que actúa aun si la mesa está más arriba del suelo; véase la figura 4.2d). El empuje hacia arriba de la superficie es tan grande como la atracción gravitatoria hacia abajo, así que la fuerza *neta* sobre el libro (la suma vectorial de las dos fuerzas) es cero. En concordancia con la primera ley de Newton, si el libro está en reposo en la mesa, sigue en reposo. El mismo principio se aplica a un disco de hockey que se desliza en una superficie horizontal sin fricción: la resultante del empuje hacia arriba de la superficie y la atracción gravitatoria hacia abajo es cero. Si el disco está en movimiento, sigue moviéndose con velocidad constante porque la fuerza *neta* que actúa sobre él es cero.

Veamos otro ejemplo. Suponga que un disco de hockey descansa en una superficie horizontal con fricción despreciable, como una mesa de hockey de aire o una plancha de hielo húmedo. Si el disco está inicialmente en reposo y luego una sola fuerza horizontal $\vec{F}_1$ actúa sobre él (figura 4.10a), comenzará a moverse. Si el disco ya se estaba moviendo, la fuerza cambiará su rapidez, su dirección, o ambas, dependiendo de la dirección de la fuerza. En este caso, la fuerza neta es $\vec{F}_1$, *no* es cero. (También hay dos fuerzas verticales, la atracción gravitacional terrestre y la fuerza normal hacia arriba de la superficie pero, como ya dijimos, estas dos fuerzas se cancelan.)

Suponga ahora que aplicamos una segunda fuerza $\vec{F}_2$ (figura 4.10b), igual en magnitud a $\vec{F}_1$ pero de dirección opuesta. Una fuerza es el negativo de la otra, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, y su suma vectorial es cero:

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = \mathbf{0}$$

Otra vez, vemos que, si el cuerpo está inicialmente en reposo, sigue en reposo; y si se está moviendo, sigue moviéndose en la misma dirección con rapidez constante. Estos resultados muestran que, en la primera ley de Newton, *una fuerza neta de cero equivale a ninguna fuerza*. Éste es sólo el principio de superposición de fuerzas que vimos en la sección 4.1.

Cuando un cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante (en línea recta con rapidez constante), decimos que el cuerpo está en **equilibrio**. Para que esté en equilibrio, sobre un cuerpo no deben actuar fuerzas, o deben actuar varias fuerzas cuya resultante —es decir, la fuerza neta— sea cero:

$$\sum\vec{F} = \mathbf{0} \qquad \text{(cuerpo en equilibrio)} \qquad (4.3)$$

Para que esto se cumpla, cada componente de la fuerza neta debe ser cero, así que

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \text{(cuerpo en equilibrio)} \qquad (4.4)$$

Estamos suponiendo que el cuerpo puede representarse adecuadamente con una partícula puntual. Si el cuerpo tiene tamaño finito, tendremos que considerar también en *qué parte* del cuerpo se aplican las fuerzas. Volveremos a esto en el capítulo 11.

Ejemplo conceptual 4.2 Fuerza neta cero significa velocidad constante

En la película clásica de ciencia ficción de 1950 *Rocketship X-M*, una nave se mueve en el vacío del espacio exterior, lejos de cualquier planeta, cuando sus motores se descomponen. El resultado es que la nave baja su velocidad y se detiene. ¿Qué dice la primera ley de Newton acerca de esto?

SOLUCIÓN

En esta situación no actúan fuerzas sobre la nave, así que, según la primera ley de Newton, *no* se detendrá; se seguirá moviendo en línea recta con rapidez constante. En algunas películas de ciencia ficción se ha utilizado muy adecuadamente la ciencia; pero ésta no fue una de ellas.

Ejemplo conceptual 4.3 Velocidad constante significa fuerza neta igual a cero

Imagine que conduce un Porsche Carrera GT en una pista de prueba recta a una rapidez constante de 150 km/h y rebasa a un Volkswagen Sedán 1971 que va a 75 km/h. ¿Sobre qué auto es mayor la fuerza neta?

SOLUCIÓN

La palabra clave aquí es "neta". Ambos automóviles están en equilibrio porque sus velocidades son constantes; por lo tanto, la fuerza *neta* sobre cada uno de ellos es *cero*.

Esta conclusión parece ir contra el "sentido común", que nos dice que el automóvil más rápido debe estar siendo impulsado por una fuerza mayor. Es verdad que la fuerza hacia adelante que actúa sobre el Porsche es mucho mayor (gracias a su motor de alta potencia) que la del Volkswagen; pero también sobre los autos actúa una fuerza *hacia atrás* debida a la fricción con el camino y la resistencia del aire. La única razón por la que es necesario tener funcionando el motor de estos vehículos es para contrarrestar dicha fuerza hacia atrás, de modo que la resultante sea cero y el coche viaje a velocidad constante. La fuerza hacia atrás sobre el Porsche es mayor por su mayor rapidez, y por ello su motor necesita ser más potente que el del Volkswagen.

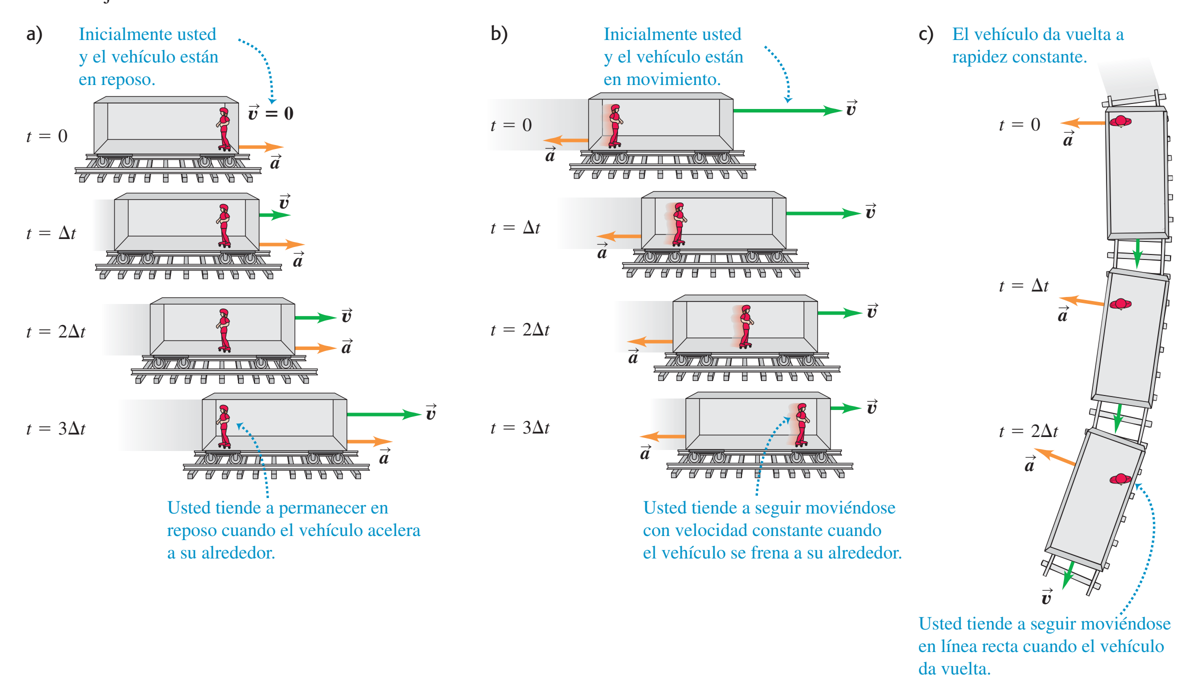
Marcos de referencia inerciales

Al tratar la velocidad relativa en la sección 3.5, presentamos el concepto de *marco de referencia*. Este concepto es fundamental para las leyes del movimiento de Newton. Suponga que está en un autobús que viaja por una carretera recta y acelera. Si pudiera pararse en el pasillo usando patines, comenzaría a moverse *hacia atrás* relativo al autobús, conforme éste aumenta de rapidez. En cambio, si el autobús frenara, usted comenzaría a moverse hacia delante, respecto del autobús, por el pasillo. En ambos casos, parecería que no se cumple la primera ley de Newton: no actúa una fuerza neta sobre usted, pero su velocidad cambia. ¿Qué sucede aquí?

La cuestión es que el autobús acelera con respecto al suelo y *no* es un marco de referencia adecuado para la primera ley de Newton. Ésta es válida en algunos marcos de referencia, pero no en otros. Un marco de referencia en el que *es* válida la primera ley de Newton es un **marco de referencia inercial**. La Tierra es aproximadamente un marco de referencia inercial, pero el autobús no. (La Tierra no es un marco plenamente inercial debido a la aceleración asociada a su rotación y su movimiento alrededor del Sol, aunque tales efectos son pequeños; véanse los ejercicios 3.29 y 3.32.) Como usamos la primera ley de Newton para definir lo que es un marco de referencia inercial, se le conoce como *ley de inercia*.

La figura 4.11 muestra cómo podemos usar la primera ley de Newton para entender lo que sentimos al viajar en un vehículo que acelera. En la figura 4.11a, un vehículo está inicialmente en reposo y comienza a acelerar hacia la derecha. Una pasajera en patines (que casi eliminan los efectos de la fricción) prácticamente no tiene fuerza neta actuando sobre ella; por lo tanto, tiende a seguir en reposo relativo al marco de referencia inercial de la Tierra. Al acelerar el vehículo a su alrededor, la pasajera se mueve hacia atrás con respecto al vehículo. Del mismo modo, una pasajera en un vehículo que está frenando tiende a seguir moviéndose con velocidad constante relativa a la Tierra, por lo que esta pasajera se mueve hacia adelante con respecto al vehículo (figura 4.11b). Un vehículo también acelera si se mueve con rapidez constante pero da vuelta (figura 4.11c). En este caso, la pasajera tiende a seguir moviéndose con rapidez constante en línea recta relativa a la Tierra; con respecto al vehículo, la pasajera se mueve hacia el exterior de la vuelta.

4.11 Viaje en un vehículo con aceleración.



En los casos de la figura 4.11, un observador en el marco de referencia del vehículo podría concluir que *hay* una fuerza neta que actúa sobre la pasajera, ya que la velocidad de ésta *relativa al vehículo* cambia en cada caso. Esto no es correcto; la fuerza neta sobre la pasajera es cero. El error del observador es tratar de aplicar la primera ley de Newton en el marco de referencia del vehículo, que *no* es inercial y en el cual dicha ley no es válida (figura 4.12). En este libro *sólo* usaremos marcos de referencia inerciales.

Hemos mencionado sólo un marco de referencia (aproximadamente) inercial: la superficie de la Tierra. No obstante, hay muchos otros. Si tenemos un marco de referencia inercial A, donde se cumple la primera ley de Newton, cualquier otro marco de referencia B será inercial si se mueve con velocidad constante $\vec{v}_{B/A}$. relativa a A. Para demostrarlo, usamos la ecuación de velocidad relativa (3.36) de la sección 3.5:

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}$$

Suponga que P es un cuerpo que se mueve con velocidad constante $\vec{v}_{P/A}$ con respecto a un marco inercial A. Por la primera ley de Newton, la fuerza neta sobre este cuerpo es cero. La velocidad de P relativa a otro marco B tiene un valor distinto, $\vec{v}_{P/B} = \vec{v}_{P/A} - \vec{v}_{B/A}$. No obstante, si la velocidad relativa $\vec{v}_{B/A}$ de los dos marcos es constante, $\vec{v}_{P/B}$ también es constante, y B es un marco inercial. La velocidad de P en este marco es constante y la fuerza neta sobre P es cero, así que la primera ley de Newton se cumple en B. Observadores en los marcos A y B diferirán en cuanto a la velocidad de P, pero coincidirán en que es constante (aceleración cero) y no hay fuerza neta actuando sobre P.

No hay un marco de referencia inercial que sea preferible a todos los demás para formular las leyes de Newton. Si un marco es inercial, todos los que se muevan con velocidad constante relativa a él serán inerciales. Desde esta perspectiva, el estado de reposo y el de movimiento con velocidad constante no son muy diferentes; ambos se dan cuando la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero.

4.12 Desde el marco de referencia de este automóvil, parece que una fuerza empuja hacia adelante a los maniquíes para pruebas de choque, cuando el automóvil se detiene repentinamente. Sin embargo, tal fuerza no existe realmente: al detenerse el vehículo, los maniquíes se siguen moviendo hacia adelante como consecuencia de la primera ley de Newton.



Evalúe su comprensión de la sección 4.2 ¿En cuál de las siguientes situaciones la fuerza neta sobre el cuerpo es cero: i) un avión que vuela al norte con rapidez constante de 120 m/s y altitud constante; ii) un automóvil que sube en línea recta por una colina con pendiente de 3°, a una rapidez constante de 90 km/h; iii) un halcón que se mueve en círculos con rapidez constante de 20 km/h a una altura constante de 15 m sobre un campo abierto; iv) una caja con superficies lisas, sin fricción, que está en la parte de atrás de un camión cuando éste acelera hacia adelante en un camino plano a 5 m/s^2?

4.3 Segunda ley de Newton

Al tratar la primera ley de Newton, vimos que cuando ninguna fuerza, o una fuerza neta cero, actúa sobre un cuerpo, éste se mueve con aceleración cero y su velocidad es constante. En la figura 4.13a, un disco de hockey se desliza a la derecha sobre hielo húmedo, donde la fricción es despreciable. No actúan fuerzas horizontales sobre el disco; la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza de contacto hacia arriba ejercida por el hielo se cancelan. Así, la fuerza neta $\sum\vec{F}$ que actúa sobre el disco es cero, el disco tiene aceleración cero y su velocidad es constante.

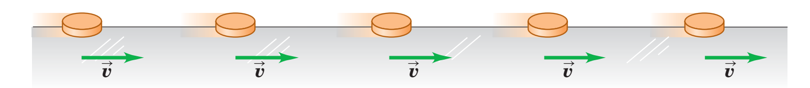
Sin embargo, ¿qué sucede si la fuerza neta *no* es cero? En la figura 4.13b aplicamos una fuerza horizontal constante al disco en la dirección de su movimiento. Entonces, $\sum\vec{F}$ es constante y en la misma dirección horizontal que $\vec{v}$. Vemos que, mientras la fuerza actúa, la velocidad del disco cambia a ritmo constante; es decir, el disco se mueve con aceleración constante. La rapidez del disco aumenta, así que $\vec{a}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$ y $\sum\vec{F}$.

En la figura 4.13c invertimos la dirección de la fuerza sobre el disco, de modo que $\sum\vec{F}$ actúe en la dirección opuesta a $\vec{v}$. Aquí también el disco tiene una aceleración: se mueve cada vez más lentamente a la derecha. La aceleración $\vec{a}$ en este caso es a la izquierda, en la misma dirección que $\sum\vec{F}$. Como en el caso anterior, el experimento muestra que la aceleración es constante si $\sum\vec{F}$ es constante.

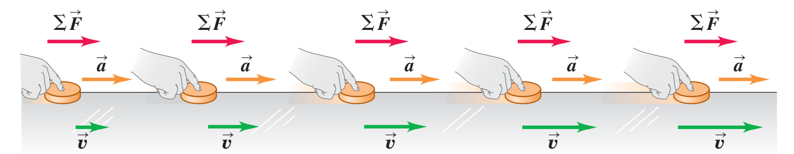
La conclusión es que *una fuerza neta que actúa sobre un cuerpo hace que éste acelere en la misma dirección que la fuerza neta*. Si la magnitud de la fuerza neta es constante, como en las figuras 4.13b y 4.13c, también lo será la magnitud de la aceleración.

4.13 Análisis de la relación entre la aceleración de un cuerpo y la fuerza neta que actúa sobre éste (aquí, un disco de hockey sobre una superficie sin fricción).

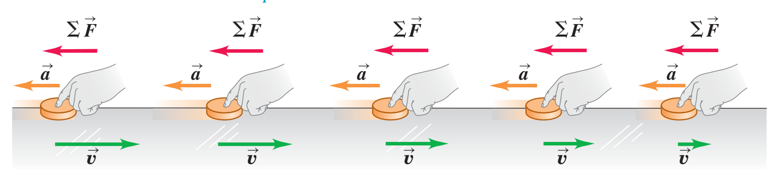
a) Un disco que se mueve con velocidad constante (en equilibrio): $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$, $\vec{a} = \mathbf{0}$.



b) Una fuerza neta constante en la dirección del movimiento provoca una aceleración constante en la misma dirección que la fuerza neta.

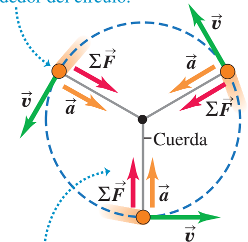


c) Una fuerza neta constante opuesta a la dirección del movimiento causa una aceleración constante en la misma dirección que la fuerza neta.



4.14 Vista superior de un disco de hockey en movimiento circular uniforme en una superficie horizontal sin fricción.

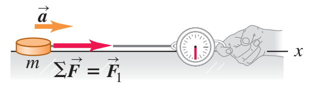
El disco se mueve a rapidez constante alrededor del círculo.



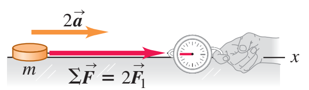
En cualquier punto, la aceleración $\vec{a}$ y la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ tienen la misma dirección, siempre hacia el centro del círculo.

4.15 Para un cuerpo de cierta masa m, la magnitud de la aceleración del cuerpo es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo.

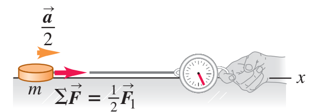
a) Una fuerza neta constante $\Sigma\vec{F}$ provoca una aceleración constante $\vec{a}$.



b) Al duplicarse la fuerza neta, se duplica la aceleración.



c) Al reducirse a la mitad la fuerza neta, la aceleración se reduce a la mitad.



Estas conclusiones sobre fuerza neta y aceleración también son válidas para un cuerpo que se mueve en trayectoria curva. Por ejemplo, la figura 4.14 muestra un disco de hockey que se mueve en un círculo horizontal en una superficie de hielo con fricción despreciable. Una cuerda que sujeta el disco al hielo ejerce una fuerza de tensión de magnitud constante hacia el centro del círculo. El resultado es una fuerza neta y una aceleración de magnitud constante y dirigidas al centro del círculo. La rapidez del disco es constante, así que es un movimiento circular uniforme, como vimos en la sección 3.4.

La figura 4.15a muestra otro experimento que explora la relación entre la aceleración y fuerza neta. Aplicamos una fuerza horizontal constante a un disco de hockey en una superficie horizontal sin fricción, usando la balanza de resorte descrita en la sección 4.1, con el resorte estirado una cantidad constante. Al igual que en las figuras 4.13b y 4.13c, esta fuerza horizontal es la fuerza neta sobre el disco. Si alteramos la magnitud de la fuerza neta, la aceleración cambia en la misma proporción. Al duplicar la fuerza neta se duplica la aceleración (figura 4.15b); al reducir a la mitad la fuerza neta se reduce a la mitad la aceleración (figura 4.15c), y así sucesivamente. Muchos experimentos semejantes muestran que *para un cuerpo dado, la magnitud de la aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre él.*

Masa y fuerza

Nuestros resultados indican que para un cuerpo dado, el *cociente* de la magnitud $|\sum\vec{F}|$ de la fuerza neta entre la magnitud $a = |\vec{a}|$ de la aceleración es constante, sin importar la magnitud de la fuerza neta. Llamamos a este cociente *masa inercial*, o simplemente **masa**, del cuerpo y la denotamos con m. Es decir,

$$m = \frac{|\sum\vec{F}|}{a} \quad \text{o} \quad |\sum\vec{F}| = ma \quad \text{o} \quad a = \frac{|\sum\vec{F}|}{m} \tag{4.5}$$

La masa es una medida cuantitativa de la inercia, que se mencionó en la sección 4.2. La última de las ecuaciones (4.5) indica que cuanto mayor sea su masa, más se "resiste" un cuerpo a ser acelerado. Cuando sostenemos en la mano una fruta en el supermercado y la movemos un poco hacia arriba y hacia abajo para estimar su masa, estamos aplicando una fuerza para saber cuánto acelera la fruta hacia arriba y hacia abajo. Si una fuerza causa una aceleración grande, la fruta tiene una masa pequeña; si la misma fuerza causa sólo una aceleración pequeña, la fruta tiene una masa grande. De la misma forma, si golpeamos una pelota de ping-pong y un balón de baloncesto con la misma fuerza, el balón tendrá una aceleración mucho menor porque su masa es mucho mayor.

La unidad de masa en el SI es el **kilogramo**. En la sección 1.3 dijimos que el kilogramo se define oficialmente como la masa de un cilindro de aleación platino-iridio que se mantiene en una bóveda cerca de París. Podemos usar este kilogramo estándar, junto con la ecuación (4.5), para definir el **newton**:

Un newton es la cantidad de fuerza neta que proporciona una aceleración de 1 metro por segundo al cuadrado a un cuerpo con masa de 1 kilogramo.

Podemos usar esta definición para calibrar las balanzas de resorte y otros instrumentos que miden fuerzas. Por la forma en que definimos el newton, está relacionado con las unidades de masa, longitud y tiempo. Para que la ecuación (4.5) sea dimensionalmente congruente, debe cumplirse que

$$1 \text{ newton} = (1 \text{ kilogramo}) \, (1 \text{ metro por segundo al cuadrado})$$

o bien,

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Usaremos esta relación muchas veces en los próximos capítulos, así que no la olvide.

También podemos usar la ecuación (4.5) para comparar una masa con la masa estándar y así *medir* masas. Suponga que aplica una fuerza neta constante $\sum\vec{F}$ a un

cuerpo de masa conocida m_1 y observa una aceleración de magnitud a_1 (figura 4.16a). Luego aplica la misma fuerza a otro cuerpo con masa desconocida m_2 y observa una aceleración de magnitud a_2 (figura 4.16b). Entonces, según la ecuación (4.5),

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

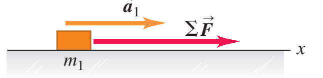
$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2} \qquad \text{(misma fuerza neta)} \tag{4.6}$$

Para la misma fuerza neta, el cociente de las masas de dos cuerpos es el inverso del cociente de sus aceleraciones. En principio, podríamos usar la ecuación (4.6) para medir una masa desconocida m_2, pero suele ser más fácil determinar la masa indirectamente midiendo el *peso* del cuerpo. Volveremos a esto en la sección 4.4.

Cuando dos cuerpos de masas m_1 y m_2 se unen, vemos que la masa del cuerpo compuesto siempre es $m_1 + m_2$ (figura 4.16c). Esta propiedad aditiva de la masa tal vez parezca obvia, pero debe verificarse experimentalmente. En última instancia, la masa de un cuerpo está relacionada con el número de protones, electrones y neutrones que contiene. Ésta no sería una buena forma de *definir* la masa porque no hay manera práctica de contar tales partículas. No obstante, el concepto de masa es la forma más fundamental de caracterizar la cantidad de materia que un cuerpo contiene.

4.16 Para una fuerza neta constante dada $\sum\vec{F}$, la aceleración es inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Las masas se suman como escalares ordinarios.

a) Una fuerza $\sum\vec{F}$ conocida provoca que un objeto con masa m_1 tenga una aceleración $\vec{a}_1$.



b) Al aplicar la misma fuerza $\sum\vec{F}$ a un segundo objeto, se percibe la aceleración que nos permite medir la masa.



c) Cuando se unen dos objetos, el mismo procedimiento muestra que su masa compuesta es la suma de sus masas individuales.



Enunciado de la segunda ley de Newton

Nos hemos cuidado de decir que la fuerza *neta* sobre un cuerpo hace que éste se acelere. Los experimentos demuestran que si se aplica a un cuerpo una combinación de fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, ..., el cuerpo tendrá la misma aceleración (magnitud y dirección) que si se aplicara una sola fuerza igual a la suma vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$. Es decir, el principio de superposición de las fuerzas (véase la figura 4.4) también se cumple cuando la fuerza neta no es cero y el cuerpo se está acelerando.

La ecuación (4.5) relaciona la magnitud de la fuerza neta sobre un cuerpo con la magnitud de la aceleración que produce. También vimos que la dirección de la fuerza neta es igual a la dirección de la aceleración, sea la trayectoria del cuerpo recta o curva. Newton juntó todas estas relaciones y resultados experimentales en un sólo enunciado conciso que ahora llamamos *segunda ley del movimiento de Newton*:

Segunda ley del movimiento de Newton: si una fuerza externa neta actúa sobre un cuerpo, éste se acelera. La dirección de aceleración es la misma que la dirección de la fuerza neta. El vector de fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración.

En símbolos,

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(segunda ley del movimiento de Newton)} \tag{4.7}$$

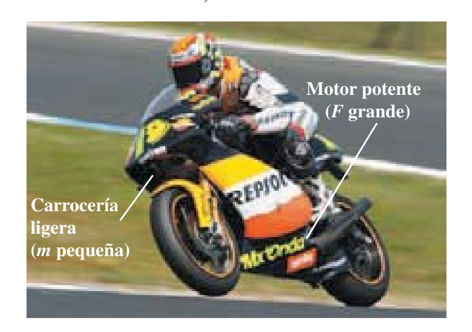
Un enunciado alterno establece que la aceleración de un cuerpo es la misma dirección que la fuerza neta que actúa sobre él, y es igual a la fuerza neta dividida entre la masa del cuerpo.

$$\vec{a} = \frac{\sum\vec{F}}{m}$$

La segunda ley de Newton es una ley fundamental de la naturaleza, la relación básica entre fuerza y movimiento. Casi todo el resto del capítulo, y todo el que sigue, se dedica a aprender a aplicar este principio en diversas situaciones.

La ecuación (4.7) tiene muchas aplicaciones prácticas (figura 4.17). De hecho, el lector la ha estado usando toda su vida para medir la aceleración de su cuerpo. En su oído interno, microscópicas células de pelo detectan la magnitud y dirección de la fuerza que deben ejercer para acelerar pequeñas membranas junto con el resto del cuerpo. Por la segunda ley de Newton, la aceleración de las membranas —y por ende

4.17 El diseño de las motocicletas de alto desempeño depende fundamentalmente de la segunda ley de Newton. Para aumentar al máximo la aceleración hacia adelante, el diseñador hace a la motocicleta lo más ligera posible (es decir, reduce la masa al mínimo) y utiliza el motor más potente posible (es decir, aumenta al máximo la fuerza hacia adelante).



la de todo el cuerpo— es proporcional a esta fuerza y tiene la misma dirección. Así, ¡usted puede sentir la magnitud y dirección de su aceleración incluso con los ojos cerrados!

ActivPhysics ONLINE
2.1.3 Cambio de tensión
2.1.4 Deslizamiento en una rampa

Uso de la segunda ley de Newton

Hay al menos cuatro aspectos de la segunda ley de Newton que merecen atención especial. Primero, la ecuación (4.7) es *vectorial*. Normalmente la usaremos en forma de componentes, con una ecuación para cada componente de fuerza y la aceleración correspondiente:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \qquad \text{(segunda ley del movimiento de Newton)} \tag{4.8}$$

Este conjunto de ecuaciones de componentes equivale a la ecuación vectorial única (4.7). Cada componente de la fuerza total es igual a la masa multiplicada por la componente correspondiente de la aceleración.

Segundo, el enunciado de la segunda ley de Newton se refiere a fuerzas *externas*, es decir, fuerzas ejercidas sobre el cuerpo por otros cuerpos de su entorno. Un cuerpo no puede afectar su propio movimiento ejerciendo una fuerza sobre sí mismo; si fuera posible, ¡podríamos levantarnos hasta el techo tirando de nuestro cinturón! Por ello, sólo incluimos fuerzas externas en $\sum\vec{F}$ en las ecuaciones (4.7) y (4.8).

Tercero, las ecuaciones (4.7) y (4.8) sólo son válidas si la masa m es *constante*. Es fácil pensar en sistemas con masa cambiante, como un camión tanque con fugas, un cohete o un vagón de ferrocarril en movimiento que se carga con carbón; no obstante, tales sistemas se manejan mejor usando el concepto de cantidad de movimiento que veremos en el capítulo 8.

Por último, la segunda ley de Newton sólo es válida en marcos de referencia inerciales, al igual que la primera. Por lo tanto, la ley no es válida en el marco de referencia de los vehículos en aceleración de la figura 4.11; con respecto a esos marcos, la pasajera acelera aunque la fuerza neta sobre ella sea cero. Normalmente supondremos que la Tierra es una aproximación adecuada a un marco inercial, aunque estrictamente no lo es por su rotación y movimiento orbital.

CUIDADO $m\vec{a}$ **no es una fuerza** Tenga en cuenta que aun cuando el vector $m\vec{a}$ sea igual a la suma vectorial $\sum\vec{F}$ de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, el vector $m\vec{a}$ *no* es una fuerza. La aceleración es un *resultado* de una fuerza neta distinta de cero; no es una fuerza por sí misma. Es "sentido común" pensar que hay una "fuerza de aceleración" que nos empuja contra el asiento cuando nuestro automóvil acelera hacia delante desde el reposo; pero *no existe tal fuerza*; más bien, nuestra inercia nos hace tender a permanecer en reposo con respecto a la Tierra, y el auto acelera a nuestro alrededor (véase la figura 4.11a). Esta confusión de "sentido común" surge al tratar de aplicar la segunda ley de Newton donde no es válida: en un marco de referencia no inercial de un automóvil en aceleración. Nosotros sólo examinaremos el movimiento en marcos de referencia *inerciales*.

En este capítulo, aprenderemos cómo usar la segunda ley de Newton, empezando con ejemplos del movimiento rectilíneo. Después, en el capítulo 5 consideraremos casos más generales y desarrollaremos estrategias más detalladas para resolver problemas.

Ejemplo 4.4 Cálculo de aceleración por una fuerza

Un trabajador aplica una fuerza horizontal constante con magnitud de 20 N a una caja con masa de 40 kg que descansa en un piso plano con fricción despreciable. ¿Qué aceleración sufre la caja?

SOLUCIÓN

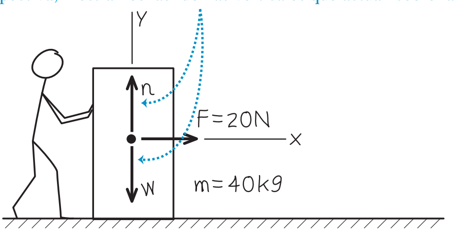
IDENTIFICAR: En este problema intervienen fuerza y aceleración. Siempre que usted se tope con un problema de esta clase, abórdelo empleando la segunda ley de Newton.

PLANTEAR: En *cualquier* problema que implique fuerzas, el primer paso consiste en elegir un sistema de coordenadas y después identificar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en cuestión.

Suele ser conveniente elegir un eje que apunte en la dirección de la aceleración del cuerpo o en la dirección opuesta que, en este caso, es horizontal. Por lo tanto, tomamos el eje $+x$ en la dirección de la fuerza horizontal aplicada (es decir, la dirección en la que se acelera la caja), y el $+y$, hacia arriba (figura 4.18b). En casi todos los problemas de

4.18 Nuestro esquema para este problema. Las baldosas bajo la caja están recién enceradas, así que suponga que la fricción es despreciable.

La caja no tiene aceleración vertical, de manera que las componentes verticales de la fuerza neta suman cero. Sin embargo, para una mejor perspectiva, mostramos las fuerzas verticales que actúan sobre la caja.



fuerzas que veremos (incluido éste), todos los vectores de fuerza están en un plano, así que no se usa el eje z.

Las fuerzas que actan sobre la caja son i) la f uerza horizontal $\vec{F}$ ejercida por el trabajador, cuya magnitud es 20 N; ii) el peso $\vec{w}$ de la caja, es decir, la fuerza hacia abajo producida por la atracción gravitacional que ejerce la tierra, y iii) la fuerza de soporte hacia arriba $\vec{n}$ ejercida por la superficie horizontal plana. Como en la sección 4.2, llamamos a $\vec{n}$ fuerza *normal* porque es perpendicular a la superficie de contacto. (Usamos una n cursiva para evitar confusiones con la abreviatura N, de newton.) Consideramos que la fricción es despreciable, así que no hay fuerza de fricción.

Puesto que la caja no se mueve verticalmente, la aceleración y es cero: $a_y = 0$. Nuestra incógnita es la componente x de la aceleración, a_x. La obtendremos usando la segunda ley de Newton en forma de componentes, dada por la ecuación (4.8).

EJECUTAR: Por la figura 4.18, sólo la fuerza de 20 N tiene una componente x distinta de cero. Por lo tanto, la primera relación de las ecuaciones (4.8) nos indica que

$$\sum F_x = F = 20\text{ N} = ma_x$$

Así, la componente x de la aceleración es

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{20\text{ N}}{40\text{ kg}} = \frac{20\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2}{40\text{ kg}} = 0.50\text{ m/s}^2$$

EVALUAR: La aceleración apunta en la dirección $+x$, igual que la fuerza neta. La fuerza neta es constante, así que la aceleración es constante. Si conocemos la posición y velocidad iniciales de la caja, podremos calcular su posición y velocidad en cualquier instante posterior con las ecuaciones de movimiento con aceleración constante del capítulo 2.

Cabe señalar que, para obtener a_x, no tuvimos que usar la componente y de la segunda ley de Newton, ecuación (4.8), $\sum F_y = ma_y$. Utilizando esta ecuación, ¿puede el lector demostrar que la magnitud n de la fuerza normal en esta situación es igual al peso de la caja?

Ejemplo 4.5 Cálculo de la fuerza a partir de la aceleración

Una camarera empuja una botella de salsa de tomate con masa de 0.45 kg a la derecha sobre un mostrador horizontal liso. Al soltarla, la botella tiene una rapidez de 2.8 m/s, pero se frena por la fuerza de fricción horizontal constante ejercida por el mostrador. La botella se desliza 1.0 m antes de detenerse. ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza de fricción que actúa sobre la botella?

SOLUCIÓN

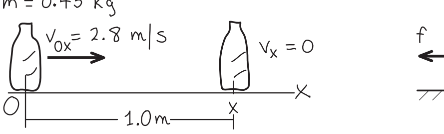
IDENTIFICAR: Al igual que el ejemplo anterior, en este problema intervienen fuerzas y aceleración (el frenado de la botella de salsa), así que usaremos la segunda ley de Newton para resolverlo.

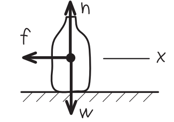
PLANTEAR: Como en el ejemplo 4.4, lo primero es elegir un sistema de coordenadas e identificar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (en este caso, la botella de salsa). Como indica la figura 4.19, elegimos el eje $+x$ en la dirección en que se desliza la botella, y tomaremos como origen el punto donde la botella sale de la mano de la camarera a 2.8 m/s. En la figura 4.19 se muestran también las fuerzas que actúan sobre la botella. La fuerza de fricción $\vec{f}$ frena la botella, así que su dirección debe ser opuesta a la dirección de la velocidad (véase la figura 4.13c).

Nuestra incógnita es la magnitud f de la fuerza de fricción. La obtendremos usando la componente x de la segunda ley de Newton, ecuación (4.8). Para ello, primero necesitamos conocer la componente x de la aceleración de la botella, a_x. No nos dan el valor de a_x en el problema, pero nos indican que la fuerza de fricción es constante. Por lo tanto, la aceleración también es constante, así que calculamos a_x usando una de las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4. Dado que conocemos la coordenada x y la velocidad x inicial de la botella

4.19 Nuestro esquema para este problema.

Dibujamos un diagrama para el movimiento de la botella y uno que muestra las fuerzas sobre la botella.





($x_0 = 0$, $v_{0x} = 2.8$ m/s), así como su coordenada x y velocidad final x ($x = 1.0$ m, $v_x = 0$), la ecuación más fácil de usar para determinar a_x es la ecuación (2.13), $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$.

EJECUTAR: Por la ecuación (2.13),

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} = \frac{(0\text{ m/s})^2 - (2.8\text{ m/s})^2}{2(1.0\text{ m} - 0\text{ m})} = -3.9\text{ m/s}^2$$

El signo negativo indica que la aceleración es a la *izquierda*; la velocidad tiene la dirección opuesta a la aceleración, como debe ser, pues la botella se está frenando. La fuerza neta en la dirección x es $-f$ de la fuerza de fricción, así que

$$\sum F_x = -f = ma_x = (0.45\text{ kg})(-3.9\text{ m/s}^2) = -1.8\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = -1.8\text{ N}$$

continúa

Otra vez, el signo negativo indica que la fuerza sobre la botella está dirigida a la izquierda. La magnitud de la fuerza de fricción es $f = 1.8$ N. Recuerde que ¡las magnitudes *siempre* son positivas!

EVALUAR: Elegimos el eje $+x$ en la dirección del movimiento de la botella, así que a_x fue negativa. Para verificar su resultado, lo invitamos a repetir el cálculo con el eje $+x$ en dirección *opuesta* al movimiento (a la izquierda en la figura 4.19), así que a_x positiva. En este caso, debería hallar que $\sum F_x$ es igual a $+f$ (porque ahora la fuerza de fricción está en la dirección $+x$), que a la vez es igual a $+1.8$ N. Las *magnitudes* de fuerzas que obtenga (que siempre son números positivos) ¡nunca deberán depender de los ejes de coordenadas que elija!

Notas acerca de las unidades

Conviene hablar un poco acerca de las unidades. En el sistema métrico cgs (que no usamos aquí), la unidad de masa es el gramo (10^{-3} kg), igual a 10^{-3} kg, y para la distancia es el centímetro, igual a 10^{-2} m. La unidad cgs de fuerza se llama *dina*:

$$1 \text{ dina} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 = 10^{-5} \text{ N}$$

En el sistema británico, la unidad de fuerza es la *libra* (o libra-fuerza) y la unidad de masa es el *slug* (figura 4.20). La unidad de aceleración es el pie por segundo al cuadrado, así que

$$1 \text{ libra} = 1 \text{ slug} \cdot \text{ft/s}^2$$

La definición oficial de libra es

$$1 \text{ libra} = 4.448221615260 \text{ newtons}$$

Conviene recordar que una libra es aproximadamente 4.4 N y un newton es aproximadamente 0.22 lb. Otro hecho útil: un cuerpo con una masa de 1 kg tiene un peso de aproximadamente 2.2 1b en la superficie terrestre.

Las unidades de fuerza, masa y aceleración en los tres sistemas se resumen en la tabla 4.2.

4.20 En inglés, slug significa "babosa". Sin embargo, la unidad inglesa de masa nada tiene que ver con este animal. Una babosa de jardín común tiene una masa de unos 15 gramos, lo que equivale aproximadamente a 10^{-3} slug.

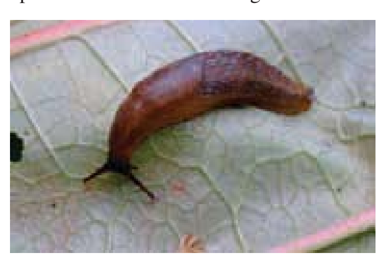


Tabla 4.2 Unidades de fuerza, masa y aceleración

Sistemas de unidades	Fuerza	Masa	Aceleración
SI	newton (N)	kilogramo (kg)	m/s^2
cgs	dina (din)	gramo (g)	cm/s^2
Británico	libra (lb)	slug	ft/s^2

Evalúe su comprensión de la sección 4.3 Ordene las siguientes situaciones de acuerdo con la magnitud de la aceleración del objeto, de la más baja a la más alta. ¿Hay casos que tengan la misma magnitud de aceleración? i) Sobre un objeto de 2.0 kg actúa una fuerza neta de 2.0 N; ii) sobre un objeto de 2.0 kg actúa una fuerza neta de 8.0 N; iii) sobre un objeto de 8.0 kg actúa una fuerza neta de 2.0 N; iv) sobre un objeto de 8.0 kg actúa una fuerza neta de 8.0 N.

MP

4.4 Masa y peso

El *peso* de un cuerpo es una fuerza que nos es familiar: es la fuerza con que la Tierra atrae al cuerpo. (Si usted estuviera en otro planeta, su peso sería la fuerza gravitacional que ese planeta ejerce sobre usted.) Por desgracia, es común usar incorrecta e indistintamente los términos *masa* y *peso* en la conversación cotidiana. Es absolutamente indispensable que el lector entienda claramente las diferencias entre estas dos cantidades físicas.

La masa caracteriza las propiedades *inerciales* de un cuerpo; es lo que mantiene a la vajilla en la mesa cuando sacamos el mantel de un tirón. A mayor masa, se necesitará más fuerza para causar una aceleración dada; esto se refleja en la segunda ley de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$.

El peso, en cambio, es una *fuerza* ejercida sobre un cuerpo por la atracción de la Tierra. La masa y el peso están relacionados: los cuerpos con masa grande tienen un peso grande. Sería difícil lanzar un peñasco por su gran *masa*, y sería difícil levantarlo del suelo por su gran *peso*.

Para entender la relación entre masa y peso, note que un cuerpo en caída libre tiene una aceleración igual a g y, por la segunda ley de Newton, una fuerza debe producir esa aceleración. Si un cuerpo de 1 kg cae con una aceleración de 9.8 m/s^2, la fuerza requerida tiene la magnitud

$$F = ma = (1 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 9.8 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 9.8 \text{ N}$$

ActivPhysics ONLINE

2.9 Salto con garrocha

La fuerza que hace que el cuerpo se acelere hacia abajo es su peso. Cualquier cuerpo con masa de 1 kg, cercano a la superficie de la Tierra, *debe* tener un peso de 9.8 N para sufrir la aceleración que observamos en la caída libre. En términos más generales, un cuerpo de masa m debe tener un peso de magnitud w dada por

$$w = mg \qquad \text{(magnitud del peso de un cuerpo de masa } m\text{)} \tag{4.9}$$

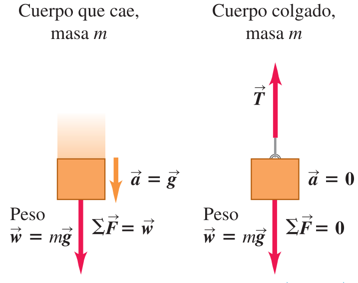
Por lo tanto, la magnitud w del peso de un cuerpo es directamente proporcional a su masa m. El peso de un cuerpo es una fuerza, una cantidad vectorial, y podemos escribir la ecuación (4.9) como ecuación vectorial (figura 4.21):

$$\vec{w} = m\vec{g} \tag{4.10}$$

Recuerde que g es la *magnitud* de $\vec{g}$, la aceleración debida a la gravedad, así que g siempre es positiva, por definición. Así, w, dada por la ecuación (4.9) es la *magnitud* del peso y también es positiva siempre.

CUIDADO **El peso de un cuerpo actúa en todo momento** Es importante entender que el peso de un cuerpo actúa sobre el cuerpo *todo el tiempo*, esté en caída libre o no. Si colgamos un objeto de una cadena, está en equilibrio y su aceleración es cero, pero su peso, dado por la ecuación (4.10) sigue tirando hacia abajo sobre él (figura 4.21). En este caso, la cadena tira del objeto hacia arriba con una fuerza ascendente. La *suma vectorial* de las fuerzas es cero, pero el peso continúa actuando.

4.21 La relación entre masa y peso.



• La relación entre masa y peso es: $\vec{w} = m\vec{g}$.
• La relación es la misma si un cuerpo está en caída o estacionario.

Ejemplo conceptual 4.6 Fuerza neta y aceleración en caída libre

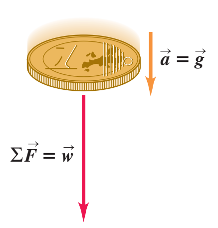
En el ejemplo 2.6 (sección 2.5), se dejó caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa. Si suponemos caída libre, con efectos despreciables de la fricción con el aire, ¿cómo varía la fuerza neta sobre la moneda conforme ésta cae?

SOLUCIÓN

En caída libre, la aceleración $\vec{a}$ de la moneda es constante e igual a $\vec{g}$. Por la segunda ley de Newton, la fuerza neta $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ también es constante e igual a $m\vec{g}$, que es el peso $\vec{w}$ de la moneda (figura 4.22). La velocidad de la moneda cambia durante la caída, pero la fuerza neta que actúa sobre ella permanece constante. Si esto le sorprende, es quizá porque usted aún tiene la idea de "sentido común" errónea de que una mayor velocidad implica mayor fuerza. Si es así, debería volver a leer el ejemplo conceptual 4.3.

La fuerza neta sobre una moneda en caída libre es constante incluso si inicialmente se lanza hacia arriba. La fuerza que nuestra mano ejerce sobre la moneda al lanzarla es una fuerza de contacto, y desaparece apenas la moneda pierde contacto con la mano. De aquí en adelante, la única fuerza que actúa sobre la moneda es su peso $\vec{w}$.

4.22 La aceleración de un objeto en caída libre es constante, lo mismo que la fuerza neta que actúa sobre él.



Variación de g con la ubicación

Usaremos $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ para problemas en la Tierra (o, si los demás datos del problema se dan con sólo dos cifras significativas, $g = 9.8\ \text{m/s}^2$). En realidad, el valor de g varía un poco en diferentes puntos de la superficie terrestre, entre 9.78 y 9.82 m/s^2, porque la Tierra no es perfectamente esférica y por los efectos de su rotación y el movimiento orbital. En un punto donde $g = 9.80\ \text{m/s}^2$, el peso de un kilogramo estándar es $w = 9.80$ N. En un punto donde $g = 9.78\ \text{m/s}^2$, el peso es $w = 9.78$ N pero la masa sigue siendo 1 kg. El peso de un cuerpo varía de un lugar a otro; la masa no.

Si llevamos un kilogramo estándar a la superficie lunar, donde la aceleración en caída libre (igual al valor de g en la superficie lunar) es 1.62 m/s^2, su peso será 1.62 N,

4.23 El peso de una masa de 1 kilogramo a) en la Tierra y b) en la Luna.

pero su masa será aún 1 kg (figura 4.23). Un astronauta de 80.0 kg pesa (80.0 kg)(9.80 m/s^2) = 784 N en la Tierra, pero en la Luna sólo pesaría (80.0 kg)(1.62 m/s^2) = 130 N. En el capítulo 12 veremos cómo calcular el valor de g en la superficie lunar o en otros planetas.

Medición de masa y peso

En la sección 4.3 describimos una forma de comparar masas comparando sus aceleraciones cuando se someten a la misma fuerza neta. Por lo regular, no obstante, la forma más fácil de medir la masa de un cuerpo consiste en medir su peso, generalmente comparándolo con un estándar. Por la ecuación (4.9), dos cuerpos que tienen el mismo peso en cierto lugar también tienen la misma masa. Podemos comparar pesos con mucha precisión; la conocida balanza de brazos iguales (figura 4.24) puede determinar con gran precisión (hasta 1 parte en 10^6) si los pesos de dos cuerpos son iguales y, por lo tanto, si sus masas lo son. (Este método no funciona en la aparente "gravedad cero" del espacio exterior. En cambio, aplicamos una fuerza conocida a un cuerpo, medimos su aceleración y calculamos la masa como el cociente de la fuerza entre la aceleración. Este método, o una variación, se usa para medir la masa de los astronautas en las estaciones espaciales en órbita, así como las masas de partículas atómicas y subatómicas.)

El concepto de masa desempeña dos papeles un tanto distintos en mecánica. El peso de un cuerpo (la fuerza gravitacional que actúa sobre él) es proporcional a su masa; podemos llamar *masa gravitacional* a la propiedad relacionada con interacciones gravitacionales. Por otro lado, podemos llamar *masa inercial* a la propiedad inercial que aparece en la segunda ley de Newton. Si estas dos cantidades fueran distintas, la aceleración debida a la gravedad bien podría ser distinta para diferentes cuerpos. Sin embargo, experimentos de gran precisión han concluido que *son* iguales, con una precisión mejor que 1 parte en 10^{12}.

CUIDADO **No confunda masa con peso** Frecuentemente podemos usar mal las unidades del SI para masa y peso en la vida cotidiana. Es muy común decir "esta caja pesa 6 kg". Lo que queremos decir es que la *masa* de la caja, la cual quizá se determinó indirectamente *pesándola*, es de 6 kg. ¡Tenga cuidado de evitar este error! En el SI, el peso (una fuerza) se mide en newtons; y la masa, en kilogramos.

Ejemplo 4.7 Masa y peso

Un Rolls-Royce Phantom de 2.49×10^4 N que viaja en la dirección $+x$ se detiene abruptamente; la componente x de la fuerza neta que actúa sobre él es -1.83×10^4 N. ¿Qué aceleración tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos otra vez la segunda ley de Newton para relacionar fuerza y aceleración. Para ello, necesitamos conocer la masa del automóvil. Sin embargo, dado que el newton es una unidad de fuerza, sabemos que 2.49×10^4 N es el *peso* del auto, no su masa. Por lo tanto, tendremos que usar también la relación entre la masa y el peso de un cuerpo.

PLANTEAR: Nuestra incógnita es la componente x de la aceleración del automóvil, a_x (El movimiento es exclusivamente en la dirección x) Usaremos la ecuación (4.9) para determinar la masa del auto a partir de su peso; después, usaremos la componente x de la segunda ley de Newton, de la ecuación (4.8), para calcular a_x.

EJECUTAR: La masa m del auto es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{2.49 \times 10^4\ \text{N}}{9.80\ \text{m/s}^2} = \frac{2.49 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2}$$
$$= 2540\ \text{kg}$$

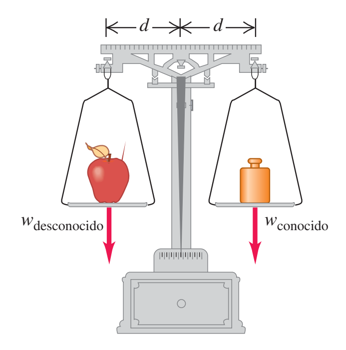
Entonces, $\sum F_x = ma_x$ nos da

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{-1.83 \times 10^4\ \text{N}}{2540\ \text{kg}} = \frac{-1.83 \times 10^4\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2}{2540\ \text{kg}}$$
$$= -7.20\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: El signo negativo implica que el vector aceleración apunta en la dirección $-x$. Esto es lógico: el auto se está moviendo en la dirección $+x$ y está frenando.

Cabe señalar que esta aceleración también puede escribirse como $-0.735g$. Además, -0.735 es el cociente de -1.83×10^4 N (la componente x de la fuerza neta) y 2.49×10^4 N (el peso). Efectivamente, la aceleración de un cuerpo expresada como múltiplo de g siempre es igual al cociente de la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo, entre su peso. ¿Entiende por qué?

Evalúe su comprensión de la sección 4.4 Suponga que una astronauta llega a un planeta donde $g = 19.6 \text{ m/s}^2$. En comparación con la Tierra, ¿le sería más fácil, más difícil o igual de fácil caminar ahí? ¿Le sería más fácil, más difícil o igual de fácil atrapar una pelota que se mueve horizontalmente a 12 m/s? (Suponga que el traje espacial es un modelo ligero que no impide en absoluto los movimientos de la astronauta.)



4.24 Una balanza de brazos iguales determina la masa de un cuerpo (como una manzana) comparando su peso con un peso conocido.

4.5 Tercera ley de Newton

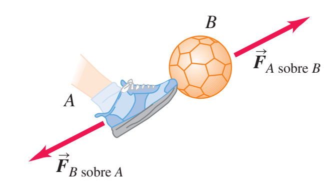
Una fuerza que actúa sobre un cuerpo siempre es el resultado de su interacción con otro cuerpo, así que las fuerzas siempre vienen en pares. No podemos tirar de una perilla sin que ésta tire de nosotros. Al patear un balón de fútbol, la fuerza hacia adelante que el pie ejerce sobre él lo lanza en su trayectoria, pero sentimos la fuerza que el balón ejerce sobre el pie. Si pateamos un peñasco, el dolor que sentiríamos se debería a la fuerza que el peñasco ejerce sobre el pie.

En todos estos casos, la fuerza que ejercemos sobre el otro cuerpo tiene dirección opuesta a la que el cuerpo ejerce sobre nosotros. Los experimentos muestran que, al interactuar dos cuerpos, las fuerzas que ejercen mutuamente son *iguales en magnitud* y *opuestas en dirección*. Ésta es la *tercera ley del movimiento de Newton*.

Tercera ley del movimiento de Newton: si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B (una "acción"), entonces, B ejerce una fuerza sobre A (una "reacción"). Estas dos fuerzas tienen la misma magnitud pero dirección opuesta, y actúan sobre *diferentes* cuerpos.

Por ejemplo, en la figura 4.25, $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ es la fuerza aplicada *por* el cuerpo A (primer subíndice) *sobre* el cuerpo B (segundo subíndice), y $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ es la fuerza aplicada *por* el cuerpo B (primer subíndice) *sobre* el cuerpo A (segundo subíndice). El enunciado matemático de la tercera ley es

$$\vec{F}_{A \text{ sobre } B} = -\vec{F}_{B \text{ sobre } A} \quad \text{(tercera ley del movimiento de Newton)} \quad (4.11)$$



4.25 Si el cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ sobre el cuerpo B, entonces, el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ sobre el cuerpo A que tiene la misma magnitud, pero dirección opuesta: $\vec{F}_{A \text{ sobre } B} = -\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$.

No importa si un cuerpo es inanimado (como el balón de la figura 4.25) y el otro no lo es (como el pateador): necesariamente ejercen fuerzas entre sí que cumplen la ecuación (4.11). ?

Expresado en palabras, en la tercera ley de Newton, "acción" y "reacción" son las dos fuerzas opuestas (en la figura 4.25, $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ y $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$), y podemos llamarlas **par acción-reacción**. Esto no implica una relación de causa y efecto; podemos considerar cualquiera de las fuerzas como la "acción", y la otra como la "reacción". A menudo decimos sólo que las fuerzas son "iguales y opuestas" para indicar que tienen igual magnitud y dirección opuesta.

CUIDADO **Las dos fuerzas en un par acción-reacción actúan sobre cuerpos diferentes** Destacamos que las dos fuerzas descritas en la tercera ley de Newton actúan sobre cuerpos *distintos*. Esto es importante en problemas que implican la primera o segunda ley de Newton, en los que actúan fuerzas sobre un cuerpo. Por ejemplo, la fuerza neta que actúa sobre el balón de la figura 4.25 es la suma vectorial del peso del balón y la fuerza $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ ejercida por el pateador. No incluimos $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ porque esta fuerza actúa sobre el pateador, no sobre el balón.

En la figura 4.25, las fuerzas de acción y reacción son de *contacto*, y sólo existen cuando dos cuerpos se tocan. Sin embargo, la tercera ley de Newton también es válida para las fuerzas de *largo alcance* que no requieren contacto físico, como la de atracción gravitacional. Una pelota de ping-pong ejerce una fuerza gravitacional hacia arriba sobre la Tierra, igual en magnitud a la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce hacia abajo sobre la pelota. Si dejamos caer la pelota, ésta y la Tierra se aceleran una hacia la otra. La fuerza neta sobre cada cuerpo tiene la misma magnitud, pero la aceleración de la Tierra es pequeñísima porque su masa es tan grande. Y sin embargo, ¡se mueve!

Ejemplo conceptual 4.8 ¿Cuál fuerza es mayor?

Después de que su automóvil deportivo se descompone, usted comienza a empujarlo hacia el taller mecánico más cercano. Cuando el auto comienza a moverse, ¿cómo es la fuerza que usted ejerce sobre el auto en comparación con la que éste ejerce sobre usted? ¿Y cuando ya va empujando al auto con rapidez constante?

SOLUCIÓN

En *ambos* casos, la fuerza que usted ejerce sobre el automóvil es igual en magnitud y opuesta en dirección a la que el auto ejerce sobre usted. Es cierto que usted debe empujar con más fuerza para poner en movimiento el auto que para mantenerlo en movimiento; sin embargo, de cualquier manera el auto lo empuja a usted con tanta fuerza como usted a él. La tercera ley de Newton da el mismo resultado si los cuerpos están en reposo, moviéndose con velocidad constante o acelerando.

Quizá se pregunte cómo el automóvil "sabe" que debe empujarlo a usted con la misma magnitud de fuerza que usted ejerce sobre él. Podría ser útil recordar que las fuerzas que usted y el auto se ejercen mutuamente en realidad son interacciones entre los átomos de la superficie de sus manos y los átomos de la superficie del auto. Tales interacciones son análogas a diminutos resortes entre átomos adyacentes, y un resorte comprimido ejerce fuerzas de la misma magnitud en ambos extremos.

No obstante, la razón fundamental por la que sabemos que objetos con distinta masa ejercen fuerzas de la misma magnitud entre sí es que los *experimentos nos demuestran que así es*. Nunca debemos olvidar que la física es algo más que una mera colección de reglas y ecuaciones; más bien, es una descripción sistemática del mundo natural basada en experimentación y observación.

Ejemplo conceptual 4.9 Aplicación de la tercera ley de Newton: Objetos en reposo

Una manzana está en equilibrio sobre una mesa. ¿Qué fuerzas actúan sobre ella? ¿Cuál es la fuerza de reacción para cada una de ellas? ¿Cuáles son los pares acción-reacción?

SOLUCIÓN

La figura 4.26a muestra las fuerzas que actúan sobre la manzana. En el diagrama, $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$ es el peso de la manzana, es decir, la fuerza gravitacional hacia abajo ejercida *por* la Tierra (primer subíndice) *sobre* la manzana (segundo subíndice). Asimismo, $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ es 1a fuerza hacia arriba ejercida *por* la mesa (primer subíndice) *sobre* la manzana (segundo subíndice).

Al tirar la Tierra de la manzana, ésta ejerce una fuerza igualmente intensa hacia arriba, $\vec{F}_{\text{manzana sobre Tierra}}$ sobre la Tierra como se indica en la figura 4.26b. $\vec{F}_{\text{manzana sobre Tierra}}$ y $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$ son un par acción-reacción y representan la interacción mutua entre la manzana y la Tierra, así

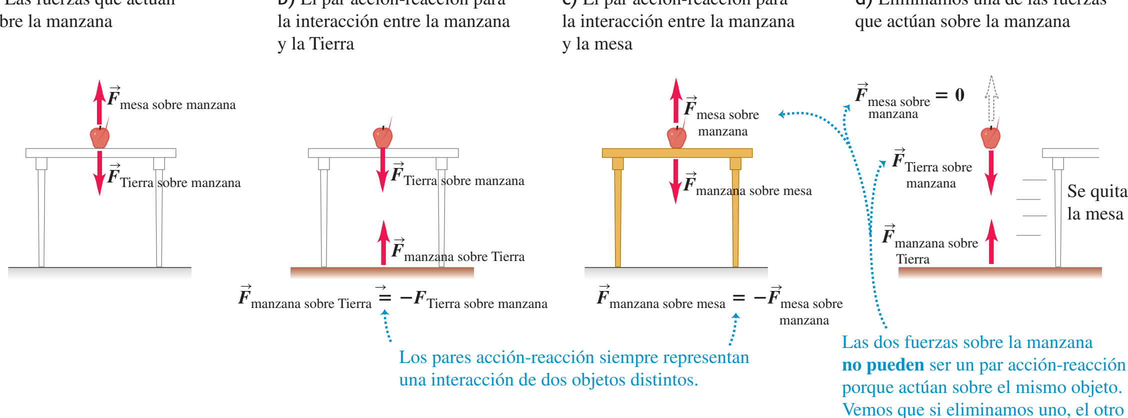
$$\vec{F}_{\text{manzana sobre Tierra}} = -\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$$

Además, la mesa empuja la manzana hacia arriba con fuerza $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$, y la reacción correspondiente es la fuerza hacia abajo $\vec{F}_{\text{manzana sobre mesa}}$ que la manzana ejerce sobre la mesa (figura 4.26c). De manera que tenemos

$$\vec{F}_{\text{manzana sobre mesa}} = -\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$$

Las dos fuerzas que actúan sobre la manzana son $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ y $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$. ¿Son un par acción-reacción? No, aunque sean iguales y opuestas. No representan la interacción de dos cuerpos; son dos fuerzas distintas que actúan sobre el *mismo* cuerpo. *Las dos fuerzas de un par acción-reacción* ***nunca*** *actúan sobre el mismo cuerpo*. Veámoslo de otra forma. Si quitáramos repentinamente la mesa de debajo de la manzana (figura 4.26d), las fuerzas $\vec{F}_{\text{manzana sobre mesa}}$ y $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ serían cero, pero $\vec{F}_{\text{manzana sobre Tierra}}$ y $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$ seguirán existiendo (la interacción gravitacional aún estaría presente). Puesto que $\vec{F}_{\text{mesa sobre manzana}}$ ahora es cero, no puede ser el negativo de $\vec{F}_{\text{Tierra sobre manzana}}$, y estas fuerzas no pueden ser un par acción-reacción.

4.26 Las dos fuerzas de un par acción-reacción siempre actúan sobre cuerpos distintos.



Ejemplo conceptual 4.10 Aplicación de la tercera ley de Newton: Objetos en movimiento

Un cantero (picapedrero) arrastra un bloque de mármol sobre un piso tirando de una cuerda atada al bloque (figura 4.27a). El bloque podría estar o no en equilibrio. ¿Qué relaciones hay entre las diversas fuerzas? ¿Cuáles son los pares acción-reacción?

SOLUCIÓN

Usaremos subíndices en todas las fuerzas por claridad: B para el bloque, R para la cuerda y M para el hombre. El vector $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ representa la fuerza ejercida por el *hombre* sobre la *cuerda*; su reacción es la fuerza igual y opuesta $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$ ejercida por la *cuerda* sobre el *hombre*. El vector $\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ es la fuerza ejercida por la *cuerda* sobre el *bloque*; su reacción es la fuerza igual y opuesta $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ que el *bloque* ejerce sobre la *cuerda*. Por estos dos pares acción-reacción (figura 4.27b), tenemos

$$\vec{F}_{\text{R sobre M}} = -\vec{F}_{\text{M sobre R}} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{\text{B sobre R}} = -\vec{F}_{\text{R sobre B}}$$

Tenga claro que las fuerzas $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ *no* son un par acción-reacción (figura 4.27c); ambas actúan sobre el *mismo* cuerpo (la cuerda); una acción y su reacción siempre *deben* actuar sobre cuerpos *distintos*. Además, las fuerzas $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ no necesariamente tienen la misma magnitud. Si aplicamos la segunda ley de Newton a la cuerda, obtenemos

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{M sobre R}} + \vec{F}_{\text{B sobre R}} = m_{\text{cuerda}}\vec{a}_{\text{cuerda}}$$

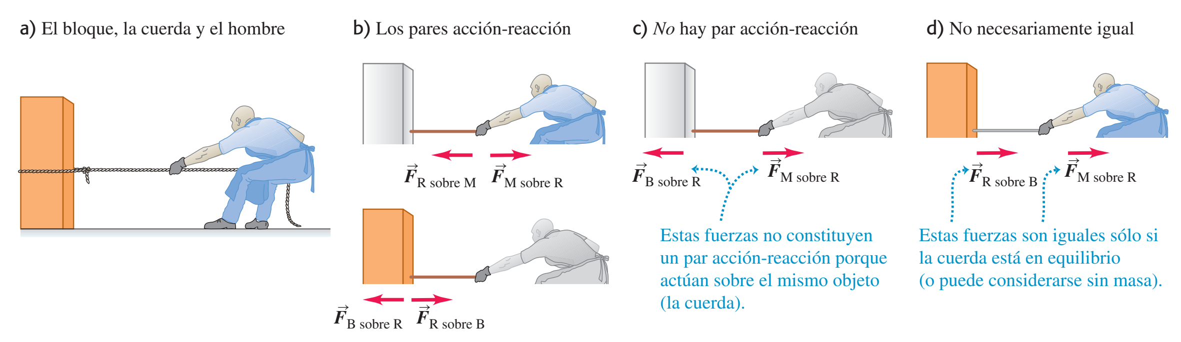
Si el bloque y la cuerda tienen una aceleración (es decir, si su rapidez está aumentando o disminuyendo), la cuerda no está en equilibrio y $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ deberá tener distinta magnitud que $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$. En contraste, las fuerzas de acción-reacción $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$ siempre tienen la misma magnitud, al igual que $\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$. La tercera ley de Newton se cumple, estén los cuerpos acelerando o no.

En el caso especial en que la cuerda está en equilibrio, las fuerzas $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ tienen igual magnitud; pero esto es un ejemplo de la *primera* ley de Newton, no de la *tercera*. Otra forma de ver esto es que, en el equilibrio, $\vec{a}_{\text{cuerda}} = \mathbf{0}$ en la ecuación anterior. Entonces, $\vec{F}_{\text{B sobre R}} = -\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ por la primera o la segunda ley de Newton.

Esto se cumple también si la cuerda está acelerando pero tiene masa insignificante en comparación con el bloque o el hombre. En este caso, $m_{\text{cuerda}} = 0$ en la ecuación anterior y, otra vez, $\vec{F}_{\text{B sobre C}} = -\vec{F}_{\text{M sobre R}}$. Puesto que $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ *siempre* es igual a $-\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ por la tercera ley de Newton (son un par acción-reacción), en estos mismos casos especiales $\vec{F}_{\text{R sobre B}}$ es igual a $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ (figura 4.27d), es decir, la fuerza de la cuerda sobre el bloque es igual a la del hombre sobre la cuerda y podemos pensar que la cuerda "transmite" al bloque, sin cambio, la fuerza que la persona ejerce sobre la cuerda. Esta perspectiva es útil, pero hay que recordar que *sólo* es válida si la cuerda tiene masa insignificante o está en equilibrio.

Si hasta aquí se siente abrumado con los subíndices, no se desanime. Repase la explicación comparando los símbolos con los diagramas vectoriales, hasta asegurarse de que entiende todo.

4.27 Identificación de las fuerzas que actúan cuando un hombre tira de una cuerda atada a un bloque.



Ejemplo conceptual 4.11 ¿Una paradoja de la tercera ley de Newton?

En el ejemplo conceptual 4.10 vimos que el cantero tira de la combinación cuerda-bloque con la misma fuerza con que esa combinación tira de él. ¿Por qué, entonces, se mueve el bloque mientras el hombre permanece estacionario?

SOLUCIÓN

La solución a esta aparente contradicción radica en la diferencia entre la *segunda* ley de Newton y la *tercera*. Las únicas fuerzas que intervienen en la segunda ley son las que actúan *sobre* el cuerpo en cuestión. La suma vectorial de esas fuerzas determina la forma en que ese cuerpo se acelera (y si se acelera o no). En contraste, la tercera ley de Newton relaciona las fuerzas que dos cuerpos *distintos* ejercen uno sobre el otro. La tercera ley, por sí sola, nada nos dice acerca del movimiento de cualquiera de los dos cuerpos.

Cuando la combinación cuerda-bloque inicialmente está en reposo, comenzará a deslizarse si la fuerza que ejerce el cantero $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ es *mayor* que la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre el bloque (figura 4.28). (El bloque de mármol tiene base lisa, lo cual ayuda a reducir la fricción.) Por lo tanto, hay una fuerza neta sobre la combinación cuerda-bloque hacia la derecha, de manera que acelera hacia la derecha. En contraste, el cantero *no* se mueve porque la fuerza neta que actúa sobre él es *cero*. Dado que el hombre tiene zapatos con suelas

continúa

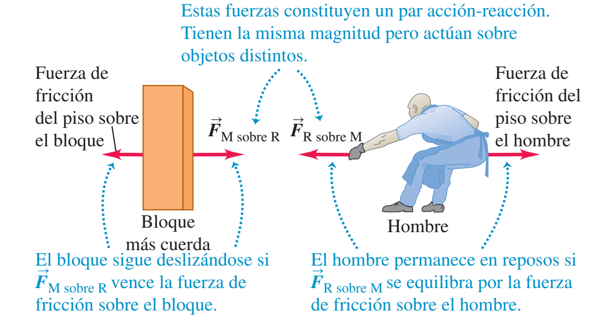
antiderrapantes que no se resbalan sobre el piso, la fuerza de fricción que el piso ejerce sobre él es suficiente para equilibrar exactamente el tirón de la cuerda, $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$. (Tanto el bloque como el hombre experimentan también una fuerza de gravedad hacia abajo y una fuerza normal hacia arriba ejercida por el piso, las cuales se equilibran entre sí y se anulan, por lo que no se incluyeron en la figura 4.28.)

Una vez que el bloque esté en movimiento, el hombre no tendrá que tirar con tanta fuerza; sólo deberá desarrollar la fuerza suficiente para equilibrar exactamente la fuerza de fricción sobre el bloque. Entonces, la fuerza neta sobre el bloque en movimiento será cero, y el bloque se seguirá moviendo hacia el hombre con velocidad constante, en concordancia con la primera ley de Newton.

Concluimos que el bloque se mueve mientras el hombre no lo hace debido a que las correspondientes fuerzas de fricción son diferentes. Si el piso estuviera recién encerado, de modo que la fricción entre el piso y los zapatos del cantero fuera pequeña, el tirón de la cuerda haría que el bloque empezara a deslizarse a la derecha *y* él comenzaría a deslizarse hacia la izquierda.

La moraleja de este ejemplo es que, al analizar el movimiento de un cuerpo, sólo debemos considerar las fuerzas que actúan *sobre* ese cuerpo. Desde ésta perspectiva, la tercera ley de Newton es meramente una herramienta que nos ayuda a identificar las fuerzas.

4.28 Las fuerzas horizontales que actúan sobre la combinación bloque-cuerda (izquierda) y el hombre (derecha). (No se muestran las fuerzas verticales.)



Un cuerpo, como la cuerda de la figura 4.27, al cual se aplican fuerzas que tiran de sus extremos, está en *tensión*. La **tensión** en cualquier punto es la magnitud de la fuerza que actúa en él (véase la figura 4.2c). En la figura 4.27b, la tensión en el extremo derecho de la cuerda es la magnitud de $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ (o de $\vec{F}_{\text{R sobre M}}$), y en el izquierdo, la de $\vec{F}_{\text{B sobre C}}$ (o de $\vec{F}_{C\text{ sobre B}}$). Si la cuerda está en equilibrio y sólo actúan sobre ella fuerzas en sus extremos, la tensión es igual en ambos extremos y en toda la cuerda. Por lo tanto, si las magnitudes de $\vec{F}_{\text{B sobre R}}$ y $\vec{F}_{\text{M sobre R}}$ son de 50 N, la tensión en la cuerda es 50 N (*no* 100 N). El vector de fuerza *total* $\vec{F}_{\text{B sobre R}} + \vec{F}_{\text{M sobre R}}$ que actúa sobre la cuerda en este caso ¡es cero!

Hacemos hincapié una vez más en una verdad fundamental: las dos fuerzas de un par acción-reacción *nunca* actúan sobre el mismo cuerpo. Recordar este sencillo hecho a menudo le ayudará a evitar confusiones acerca de los pares acción-reacción y la tercera ley de Newton.

Evalúe su comprensión de la sección 4.5 Imagine que conduce su automóvil por un camino rural y un mosquito se estrella contra el parabrisas. ¿Qué tiene mayor magnitud, la fuerza que el auto ejerció sobre el mosquito o la que éste ejerció sobre el vehículo? ¿O son iguales las magnitudes? Si son diferentes, ¿cómo podemos conciliar este hecho con la tercera ley de Newton? Si son iguales, ¿por qué el mosquito se aplasta y el auto no sufre daños?



2.1.1 Magnitudes de fuerza

4.6 Diagramas de cuerpo libre

Las tres leyes del movimiento de Newton contienen todos los principios básicos que necesitamos para resolver una amplia variedad de problemas de mecánica. Estas leyes tienen un planteamiento sencillo; sin embargo, el proceso de aplicarlas a situaciones específicas puede constituir un verdadero reto. En esta breve sección mencionaremos algunas ideas y técnicas que pueden usarse en cualquier problema en que intervengan las leyes de Newton. El lector aprenderá otras en el capítulo 5, que extiende el uso de las leyes de Newton a situaciones más complicadas.

1. *Las leyes primera y segunda de Newton se refieren a un cuerpo específico*. Al usar la primera ley de Newton, $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$, en una situación de equilibrio, o la segunda, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, en una situación sin equilibrio, debemos decidir desde un

principio a qué cuerpo nos estamos refiriendo. Esta decisión tal vez parezca trivial, pero no lo es.

2. *Sólo importan las fuerzas que actúan sobre el cuerpo*. La sumatoria $\sum\vec{F}$ incluye todas las fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo en cuestión. Por lo tanto, una vez que usted haya elegido el cuerpo que analizará, tendrá que identificar todas las fuerzas que actúan sobre él. No se confunda entre las fuerzas que actúan sobre un cuerpo y las fuerzas que éste ejerce sobre algún otro. Por ejemplo, para analizar a una persona que camina, incluiríamos en $\sum\vec{F}$ la fuerza que el suelo ejerce sobre la persona al caminar, pero *no* la fuerza que la persona ejerce sobre el suelo (figura 4.29). Estas fuerzas forman un par acción-reacción y están relacionadas por la tercera ley de Newton; pero en $\sum\vec{F}$ sólo entra el miembro del par que actúa sobre el cuerpo que se esté considerando.
3. *Los diagramas de cuerpo libre son indispensables para identificar las fuerzas pertinentes*. Un **diagrama de cuerpo libre** es un diagrama que muestra el cuerpo elegido solo, "libre" de su entorno, con vectores que muestren las magnitudes y direcciones de todas las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo por todos los cuerpos que interactúan con él. Ya mostramos algunos diagramas de cuerpo libre en las figuras 4.18, 4.19, 4.21 y 4.26a. No olvide incluir todas las fuerzas que actúen *sobre* el cuerpo, y cuídese también de *no* incluir fuerzas que el cuerpo ejerza sobre otro cuerpo. En particular, las dos fuerzas de un par acción-reacción *nunca* deben aparecer en el mismo diagrama de cuerpo libre, porque nunca actúan sobre el mismo cuerpo. Tampoco se incluyen las fuerzas que un cuerpo ejerce sobre sí mismo, ya que éstas no pueden afectar su movimiento.

CUIDADO **Fuerzas en los diagramas de cuerpo libre** Al terminar de dibujar un diagrama de cuerpo libre, usted *debe* ser capaz de contestar, para cada fuerza, la pregunta: "¿qué otro cuerpo está aplicando dicha fuerza?" Si no puede responderla, tal vez está tratando con una fuerza inexistente. Cuídese sobre todo de evitar fuerzas ficticias como "la fuerza de aceleración" o "la fuerza $m\vec{a}$", que mencionamos en la sección 4.3.

Si en un problema intervienen dos o más cuerpos, hay que descomponer el problema y dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. Por ejemplo, en la figura 4.27c hay un diagrama de cuerpo libre aparte para la cuerda en el caso en que ésta se considera sin masa (no actúa fuerza gravitacional sobre ella). La figura 4.28 también muestra diagramas para el bloque y el cantero; sin embargo, éstos *no* están completos porque no muestran todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo. (Omitimos las fuerzas verticales: la fuerza del peso ejercida por la Tierra y la fuerza normal hacia arriba ejercida por el piso.)

La figura 4.30 de la página 128 presenta algunas situaciones reales y los diagramas de cuerpo libre correspondientes. Observe que en cada situación una persona ejerce una fuerza sobre algo de su entorno; pero la fuerza que se destaca en el diagrama de cuerpo libre de la persona es la reacción de los alrededores *sobre* la persona.

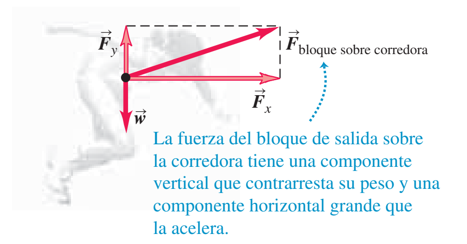
4.29 El simple acto de caminar depende esencialmente de la tercera ley de Newton. Para iniciar el movimiento hacia adelante, empujamos el suelo hacia atrás con el pie. En reacción, el suelo empuja nuestro pie (y por lo tanto todo nuestro cuerpo) hacia adelante con una fuerza de la misma magnitud. Esta fuerza *externa*, aplicada por el suelo, es la que acelera nuestro cuerpo hacia adelante.



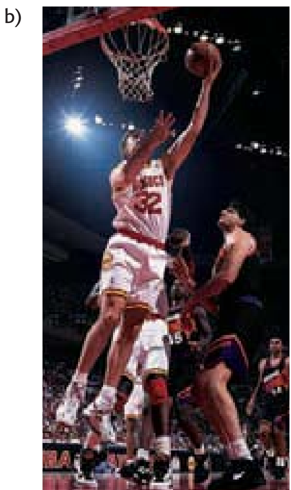
Evalúe su comprensión de la sección 4.6 La fuerza de flotabilidad que se muestra en la figura 4.30c es una mitad de un par acción-reacción. ¿Cuál fuerza es la otra mitad de este par? i) el peso del buzo; ii) la fuerza de empuje hacia delante; iii) la fuerza de arrastre hacia atrás; iv) la fuerza hacia abajo que el buzo ejerce sobre el agua; v) la fuerza hacia atrás que el buzo ejerce sobre el agua al patalear.

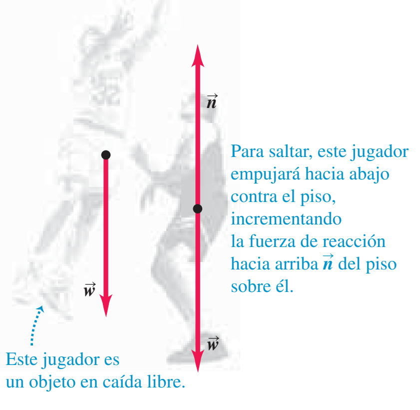
4.30 Ejemplos de diagramas de cuerpo libre. En cada caso, el diagrama de cuerpo libre muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto en cuestión.

a)



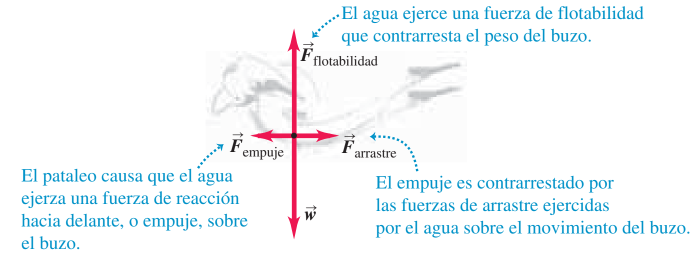
b)





c)

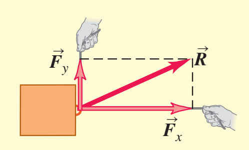




CAPÍTULO 4 RESUMEN

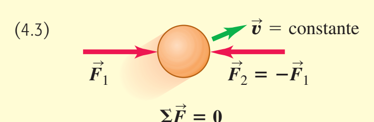
Fuerza como vector: La fuerza es una medida cuantitativa de la interacción de dos cuerpos. Es una cantidad vectorial. Si varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, el efecto sobre su movimiento es igual al que se da cuando una sola fuerza, igual a la suma vectorial (resultante) de las fuerzas, actúa sobre el cuerpo. (Véase el ejemplo 4.1.)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots = \sum \vec{F} \quad (4.1)$$



La fuerza neta sobre un cuerpo y la primera ley de Newton: La primera ley de Newton dice que, si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo (la *fuerza neta*) es cero, el cuerpo está en equilibrio y tiene aceleración cero. Si el cuerpo está inicialmente en reposo, permanece en reposo; si está inicialmente en movimiento, sigue moviéndose con velocidad constante. Esta ley sólo es válida en marcos de referencia inerciales. (Véanse los ejemplos 4.2 y 4.3.)

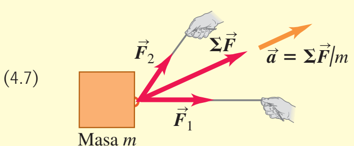
$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \quad (4.3)$$



Masa, aceleración y segunda ley de Newton: Las propiedades inerciales de un cuerpo se caracterizan por su *masa*. La aceleración de un cuerpo bajo la acción de un conjunto de fuerzas dado es directamente proporcional a la suma vectorial de las fuerzas (la *fuerza neta*) e inversamente proporcional a la masa del cuerpo. Esta relación es la segunda ley de Newton. Al igual que la primera ley, ésta sólo es válida en marcos de referencia inerciales. La unidad de fuerza se define en términos de las unidades de masa y aceleración. En el SI, la unidad de fuerza es el newton (N), igual a 1 kg · m/s^2. (Véanse los ejemplos 4.4 y 4.5.)

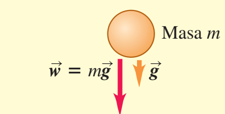
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (4.7)$$

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \quad (4.8)$$



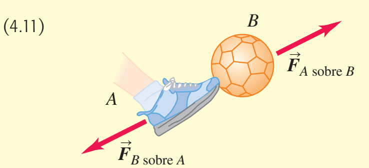
Peso: El peso $\vec{w}$ de un cuerpo es la fuerza gravitacional ejercida sobre él por la Tierra. El peso es una cantidad vectorial. La magnitud del peso de un cuerpo en un lugar dado es igual al producto de su masa m y la magnitud de la aceleración debida a la gravedad g en ese lugar. Mientras que el peso de un cuerpo depende de su ubicación, la masa es independiente de la ubicación. (Véanse los ejemplos 4.6 y 4.7.)

$$w = mg \quad (4.9)$$



Tercera ley de Newton y pares acción-reacción: La tercera ley de Newton dice que cuando dos cuerpos interactúan, se ejercen mutuamente fuerzas que en todo instante son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Estas fuerzas se denominan fuerzas de acción-reacción y cada una actúa sólo sobre uno de los dos cuerpos; nunca actúan sobre el mismo cuerpo. (Véanse los ejemplos 4.8 a 4.11.)

$$\vec{F}_{A \text{ sobre } B} = -\vec{F}_{B \text{ sobre } A} \quad (4.11)$$



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La tercera ley de Newton nos dice que el niño sentado (a quien llamaremos Raymundo) empuja sobre el niño que está de pie (a quien llamaremos Esteban) justo tan fuerte como Esteban empuja a Raymundo, pero en la dirección opuesta. Esto es válido si Raymundo empuja "activamente" sobre Esteban (por ejemplo, si Raymundo empujó su mano contra Esteban) o "pasivamente" (si la espalda de Raymundo es la que empuja, como en la fotografía con que inicia el capítulo). Las magnitudes de fuerza serían mayores en el caso "activo" que en el caso "pasivo", pero de cualquier modo, el empuje de Raymundo sobre Esteban es tan fuerte como el empuje de Esteban sobre Raymundo.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

4.1 Respuesta: iv) La fuerza gravitacional sobre el bloque apunta directo hacia abajo. En la figura 4.6 el eje x apunta hacia arriba a la derecha, y el eje y apunta hacia arriba a la izquierda. Por lo tanto, la fuerza gravitacional tiene tanto una componente x como una componente y, y ambas son negativas.

4.2 Respuesta: i), ii) y iv) En i), ii) y iv) el cuerpo no acelera, por lo cual la fuerza neta sobre él es cero. En la situación iv), la caja permanece estacionaria o en reposo, vista en el marco de referencia inercial del suelo, mientras el camión acelera hacia adelante, como la patinadora de la fig. 4.11a. En la situación iii), el halcón se mueve en un círculo; por lo tanto, está acelerando y *no* está en equilibrio.

4.3 Respuesta: iii), i) y iv) (empatados), ii) La aceleración es igual a la fuerza neta dividida entre la masa. Por lo tanto, la magnitud de la aceleración en cada situación es

i) $a = (2.0\text{ N})/(2.0\text{ kg}) = 1.0\text{ m/s}^2$;
ii) $a = (8.0\text{ N})/(2.0\text{ N}) = 4.0\text{ m/s}^2$;
iii) $a = (2.0\text{ N})/(8.0\text{ kg}) = 0.25\text{ m/s}^2$;
iv) $a = (8.0\text{ N})/(8.0\text{ kg}) = 1.0\text{ m/s}^2$.

4.4 La astronauta requeriría esforzarse el doble para caminar porque su peso en ese planeta sería el doble que en la Tierra. En cambio, sería igualmente fácil atrapar la pelota que se mueve horizontalmente. La *masa* de la pelota no cambia, así que la fuerza horizontal que la astronauta tendría que ejercer para detenerla (esto es, para impartirle la misma aceleración) sería la misma que en la Tierra.

4.5 Por la tercera ley de Newton, las dos fuerzas tienen la misma magnitud. Puesto que la masa del automóvil es mucho mayor que la del mosquito, el vehículo sufre una aceleración minúscula, imperceptible, en respuesta a la fuerza del impacto. En cambio, el mosquito, con su masa tan pequeña, sufre una aceleración catastróficamente alta.

4.6 Respuesta: iv) La fuerza de flotabilidad es una fuerza *hacia arriba* que el *agua* ejerce sobre el *buzo*. Por la tercera ley de Newton, la otra mitad del par acción-reacción es una fuerza *hacia abajo* que el *buzo* ejerce sobre el *agua* y tiene la misma magnitud que la fuerza de flotabilidad. Es cierto que el peso del buzo es también hacia abajo y tiene la misma magnitud que la fuerza de flotabilidad; sin embargo, el peso actúa sobre el mismo cuerpo (el buzo) que la fuerza de flotabilidad y, por lo tanto, estas fuerzas no constituyen un par acción-reacción.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P4.1. ¿Un cuerpo puede estar en equilibrio si sólo una fuerza actúa sobre él? Explique su respuesta.

P4.2. Una bola lanzada verticalmente hacia arriba tiene velocidad cero en su punto más alto. ¿Está en equilibrio ahí? ¿Por qué?

P4.3. Un globo con helio se mantiene en el aire sin ascender ni descender. ¿Está en equilibrio? ¿Qué fuerzas actúan sobre él?

P4.4. Al volar en un avión de noche en aire tranquilo, no tenemos sensación de movimiento, aunque el avión vaya a 800 km/h (500 mi/h). ¿Por qué?

P4.5. Si se tira de los extremos de una cuerda en equilibrio con fuerzas de igual magnitud y dirección opuesta, ¿por qué la tensión en la cuerda total no es cero?

P4.6. Imagine que ata un ladrillo al extremo de una cuerda y lo hace girar alrededor de usted en un círculo horizontal. Describa la trayectoria del ladrillo después de que usted repentinamente suelta la cuerda.

P4.7. Si un automóvil se detiene repentinamente, los pasajeros tienden a moverse hacia adelante, en relación con sus asientos. ¿Por qué? Si el auto da una vuelta abrupta, los pasajeros tienden a deslizarse hacia un lado. ¿Por qué?

P4.8. Algunas personas dicen que la "fuerza de la inercia" (o la "fuerza del ímpetu") lanza a los pasajeros hacia adelante cuando un automóvil frena abruptamente. ¿Qué error tiene esa explicación?

P4.9. Un pasajero de un autobús en movimiento, sin ventanillas, ve que una pelota que estaba en reposo en el pasillo comienza a moverse repentinamente hacia atrás. Piense en dos posibles explicaciones y en cómo decidir cuál es correcta.

P4.10. Suponga que usted elige como unidades fundamentales del SI fuerza, longitud y tiempo, en vez de masa, longitud y tiempo. ¿Qué unidades tendría la masa en términos de las unidades fundamentales?

P4.11. En la Antigüedad, algunos griegos creían que el "estado natural" de un objeto era estar reposo, por lo que los objetos buscarían su estado natural llegando al reposo si se les dejaba solos. Explique porque esta visión parecería realmente muy convincente en el mundo actual.

P4.12. ¿Por qué es la Tierra sólo un marco de referencia aproximadamente inercial?

P4.13. ¿La segunda ley de Newton se cumple para un observador en una vagoneta que acelera, frena o da vuelta? Explique su respuesta.

P4.14. Algunos estudiantes llaman "fuerza de aceleración" a la cantidad $m\vec{a}$. ¿Es correcto decir que esa cantidad es una fuerza? En tal caso, ¿qué ejerce dicha fuerza? Si no, ¿cómo puede describirse mejor esta cantidad?

P4.15. La aceleración de un cuerpo que cae se mide en un elevador que viaja hacia arriba a una rapidez constante de 9.8 m/s. ¿Qué resultado se obtiene?

P4.16. Podemos jugar a atrapar pelotas en un autobús que se mueve con rapidez constante en un camino recto, igual que si estuviera en reposo. ¿Podemos hacerlo si el autobús da vuelta con rapidez constante en un camino horizontal? ¿Por qué?

P4.17. Algunos estudiantes afirman que la fuerza de gravedad sobre un objeto es de 9.8 m/s^2. ¿Qué es incorrecto en este punto de vista?

P4.18. La cabeza de un martillo se está aflojando de su mango de madera. ¿Cómo golpearía el mango contra una acera de concreto para apretar la cabeza? ¿Por qué funciona esto?

P4.19. ¿Por qué puede doler más patear un peñasco que un guijarro? ¿El peñasco *debe* doler más? Explique su respuesta.

P4.20. "No es la caída lo que lastima, es la parada repentina al final". Traduzca este dicho al lenguaje de las leyes del movimiento de Newton.

P4.21. Una persona puede clavarse en agua desde una altura de 10 m sin lastimarse, pero si salta desde un edificio de 10 m y cae en una acera de concreto, seguramente se lastimará mucho. ¿A qué se debe la diferencia?

P4.22. ¿Por qué por seguridad los automóviles se diseñan de tal forma que se aplasten por el frente y por detrás? ¿Y por qué no para choques de lado y volcaduras?

P4.23. Al dispararse una bala de un rifle, ¿cuál es el origen de la fuerza que acelera la bala?

P4.24. Si un peso grande se levanta con un cordel que apenas lo resiste, es posible levantarlo tirando uniformemente; pero si se da un tirón repentino, el cordel se rompe. Explique esto en términos de las leyes del movimiento de Newton.

P4.25. Una caja grande cuelga del extremo de una cuerda vertical. ¿La tensión en la cuerda es mayor cuando la caja está en reposo o cuando sube con rapidez constante? Si la caja sube, ¿la tensión en la cuerda es mayor cuando está acelerando o cuando está frenando? En cada caso, explique en términos de las leyes del movimiento de Newton.

P4.26. ¿Cuál siente un mayor tirón por la gravedad terrestre, una piedra de 10 kg o una piedra de 20 kg? Si usted las deja caer, ¿por qué la piedra de 20 kg no cae con el doble de la aceleración que la piedra de 10 kg? Explique su razonamiento.

P4.27. ¿Por qué no debemos decir que 1.0 kg *es igual* a 2.2 lb?

P4.28. Un caballo está enganchado a un carro. Puesto que el carro tira hacia atrás del caballo tan fuerte como éste tira del carro, ¿por qué el carro no está en equilibrio, sin importar qué tan fuerte el caballo tire del carro?

P4.29. ¿Verdadero o falso? Usted ejerce un empujón P sobre un objeto y éste lo empuja a usted hacia atrás con una fuerza F. Si el objeto se mueve a velocidad constante, entonces, F es igual a P, pero si el objeto acelera, entonces, P debe ser mayor que F.

P4.30. Un camión grande (T) y un automóvil compacto (C) chocan de frente y el camión ejerce una fuerza $\vec{F}_{\text{T sobre C}}$ sobre el auto, y éste ejerce una fuerza $\vec{F}_{\text{C sobre T}}$ sobre el camión. ¿Cuál fuerza tiene mayor magnitud, o son iguales? ¿Su respuesta depende de la rapidez de cada vehículo antes del choque? ¿Por qué?

P4.31. Cuando un automóvil se detiene en una carretera horizontal, ¿qué fuerza hace que frene? Cuándo el auto aumenta su rapidez en la misma carretera, ¿qué fuerza hace que acelere? Explique su respuesta.

P4.32. Un automóvil compacto empuja una camioneta grande averiada, y viajan por la carretera con la misma velocidad y aceleración. Cuando el auto acelera, ¿la fuerza que ejerce sobre la camioneta es mayor, menor o de la misma magnitud que la camioneta ejerce sobre él? ¿A cuál vehículo se aplica la mayor fuerza neta, o son iguales las fuerzas netas? Explique su respuesta.

P4.33. Considere dos personas que tiran en direcciones opuestas de los extremos de una cuerda. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que A ejerce sobre B es tan grande como la que B ejerce sobre A. Entonces, ¿qué determina quién gana? (*Sugerencia*: dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan sobre cada persona.)

P4.34. En la Luna, $g = 1.62$ m/s^2. Si un ladrillo de 2 kg cae sobre su pie desde una altura de 2 m, ¿le dolerá más, menos o lo mismo en la Luna que en la Tierra? Explique su respuesta. Si se lanza el mismo ladrillo y lo golpea a usted moviéndose horizontalmente a 6 m/s, le dolerá más, menos o igual en la Luna que en la Tierra? Explique su respuesta. (En la Luna, suponga que está dentro de un recinto presurizado, así que no usa traje espacial.)

P4.35. Un manual para aprendices de pilotos indica: "cuando un avión vuela a una altitud constante, sin ascender ni descender, la fuerza de sustentación de las alas es igual al peso del avión. Cuando el avión asciende a ritmo constante, la sustentación es mayor que el peso; cuando el avión desciende a ritmo constante, la sustentación es menor que el peso". ¿Son correctas estas afirmaciones? Explique su respuesta.

P4.36. Si usted tiene las manos mojadas y no dispone de una toalla, puede eliminar el exceso de agua sacudiéndolas. ¿Por qué se elimina el agua así?

P4.37. Si está en cuclillas (digamos, al examinar los libros del estante más bajo en una biblioteca o librería) y se para repentinamente, probablemente sentirá un mareo temporal. ¿Cómo explican las leyes del movimiento de Newton este suceso?

P4.38. Cuando un automóvil es golpeado por atrás, los pasajeros sienten un *latigazo*. Use las leyes del movimiento de Newton para explicar este fenómeno.

P4.39. En un choque de frente entre dos automóviles, los pasajeros que no usan cinturón de seguridad podrían ser lanzados a través del parabrisas. Use las leyes del movimiento de Newton para explicar este fenómeno.

P4.40. En un choque de frente entre un automóvil compacto de 1000 kg y uno grande de 2500 kg, ¿cuál experimenta mayor fuerza? Explique su respuesta. ¿Cuál experimenta mayor aceleración? ¿Por que? Ahora explique por qué los pasajeros del auto más pequeño tienen mayor probabilidad de lesionarse que los del auto grande, aunque las carrocerías de ambos vehículos tengan la misma resistencia.

P4.41. Suponga que está en un cohete sin ventanillas que viaja en el espacio profundo, lejos de cualquier otro objeto. Sin ver hacia fuera del cohete y sin hacer contacto alguno con el mundo exterior, explique cómo podría determinar si el cohete: *a*) se mueve hacia adelante con una rapidez constante igual al 80% de la de la luz; *b*) está acelerando hacia adelante.

Ejercicios

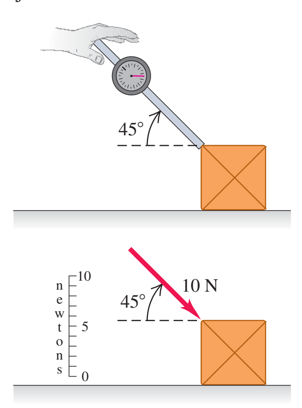
Sección 4.1 Fuerza e interacciones

4.1. Dos fuerzas tienen la misma magnitud F. ¿Qué ángulo hay entre los dos vectores si su resultante tiene magnitud *a*) $2F$? *b*) $\sqrt{2}F$? *c*) cero? Dibuje los 3 vectores en cada situación.

4.2. En vez de usar los ejes x y y de la figura 4.8 para analizar la situación del ejemplo 4.1, use ejes girados 37.0° en el sentido antihorario, de modo que el eje y sea paralelo a la fuerza de 250 N. *a*) Para estos ejes, obtenga las componentes x y y de la fuerza neta sobre el cinturón. *b*) Use esas componentes para obtener la magnitud y dirección de la fuerza neta. Compare sus resultados con los del ejemplo 4.1.

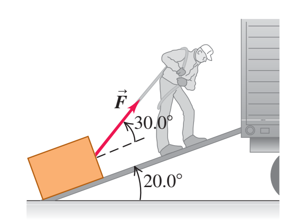
4.3. Un almacenista empuja una caja por el piso, como se indica en la figura 4.31, con una fuerza de 10 N que apunta 45° hacia abajo de la horizontal. Obtenga las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

Figura **4.31** Ejercicio 4.3.



4.4. Un hombre arrastra hacia arriba un baúl por la rampa de un camión de mudanzas. La rampa está inclinada 20.0º y el hombre tira con una fuerza $\vec{F}$ cuya dirección forma un ángulo de 30.0° con la rampa (figura 4.32). *a*) ¿Qué $\vec{F}$ se necesita para que la componente F_x paralela a la rampa sea de 60.0 N? *b*) ¿Qué magnitud tendrá entonces la componente F_y perpendicular a la rampa?

Figura **4.32** Ejercicio 4.4.



4.5. Dos perros tiran horizontalmente de cuerdas atadas a un poste; el ángulo entre las cuerdas es de 60.0°. Si el perro *A* ejerce una fuerza de 270 N, y el *B*, de 300 N, calcule la magnitud de la fuerza resultante y su ángulo con respecto a la cuerda del perro *A*.

4.6. Dos fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, actúan sobre un punto. La magnitud de $\vec{F}_1$ es de 9.00 N, y su dirección es de 60.0° sobre el eje *x* en el segundo cuadrante. La magnitud de $\vec{F}_2$ es 6.00 N, y su dirección es 53.1° bajo el eje *x* en el tercer cuadrante. *a*) Obtenga las componentes *x* y *y* de la fuerza resultante. *b*) Obtenga la magnitud de la fuerza resultante.

Sección 4.3 Segunda ley de Newton

4.7. Si se aplica una fuerza neta horizontal de 132 N a una persona de 60 kg que descansa en el borde de una alberca, ¿qué aceleración horizontal se produce?

4.8. ¿Qué fuerza neta se requiere para impartir a un refrigerador de 135 kg una aceleración de 1.40 m/s^2?

4.9. Una caja descansa sobre un estanque helado que actúa como superficie horizontal sin fricción. Si un pescador aplica una fuerza horizontal de 48.0 N a la caja y produce una aceleración de 3.00 m/s^2, ¿qué masa tiene la caja?

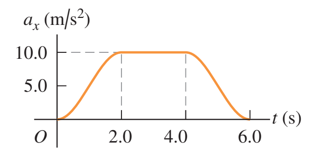
4.10. Un estibador aplica una fuerza horizontal constante de 80.0 N a un bloque de hielo en reposo sobre un piso horizontal, en el que la fricción es despreciable. El bloque parte del reposo y se mueve 11.0 m en 5.00 s. *a*) ¿Qué masa tiene el bloque? *b*) Si el trabajador deja de empujar a los 5.00 s, qué distancia recorrerá el bloque en los siguientes 5.00 s?

4.11. Un disco de hockey con masa de 0.160 kg está en reposo en el origen ($x = 0$) sobre la pista, que es y sin fricción. En el tiempo $t = 0$, un jugador aplica una fuerza de 0.250 N al disco, paralela al eje *x*, y deja de aplicarla en $t = 2.00$ s. *a*) ¿Qué posición y rapidez tiene el disco en $t = 2.00$ s? *b*) Si se aplica otra vez esa fuerza en $t = 5.00$ s, ¿qué posición y rapidez tiene el disco en $t = 7.00$ s?

4.12. Una fuerza horizontal neta de 140 N actúa sobre una caja de 32.5 kg que inicialmente está en reposo en el piso de una bodega. *a*) ¿Qué aceleración se produce? *b*) ¿Qué distancia recorre la caja en 10.0 s? *c*) ¿Qué rapidez tiene después de 10.0 s?

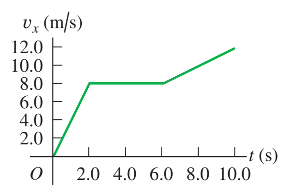
4.13. Un carrito de juguete de 4.50 kg sufre una aceleración en línea recta (el eje *x*). La gráfica de la figura 4.33 muestra esta aceleración en función del tiempo. *a*) Calcule la fuerza neta máxima sobre este carrito. ¿Cuándo ocurre esta fuerza máxima? *b*) En qué instantes la fuerza neta sobre el carrito es constante? *c*) ¿Cuándo la fuerza neta es igual a cero?

Figura **4.33** Ejercicio 4.13.



4.14. Un gato de 2.75 kg se mueve en línea recta (el eje *x*). La figura 4.34 muestra una gráfica de la componente *x* de la velocidad de este gato en función del tiempo. *a*) Calcule la fuerza neta máxima sobre este gato. ¿Cuándo ocurre dicha fuerza? *b*) ¿Cuándo la fuerza neta sobre el gato es igual a cero? *c*) ¿Cuál es la fuerza neta en el tiempo 8.5 s?

Figura **4.34** Ejercicio 4.14.



4.15. Un pequeño cohete de 8.00 kg quema combustible que ejerce una fuerza hacia arriba que varía con el tiempo sobre él,mientras se mueve en la plataforma de lanzamiento. Esta fuerza cumple con la ecuación $F = A + Bt^2$. Las mediciones demuestran que en $t = 0$, la fuerza es de 100.0 N y al final de los primeros 2.00 s, es de 150.0 N. *a*) Encuentre las constantes *A* y *B*, incluyendo sus unidades del SI. *b*) Obtenga la fuerza *neta* sobre este cohete y su aceleración i) en el instante en que empieza a quemarse el combustible y ii) 3.00 s después del comienzo de la ignición del combustible. *c*) Suponga que usted estuvo usando el cohete en el espacio exterior, lejos de cualquier gravedad. ¿Cuál sería su aceleración 3.00 s después de la ignición del combustible?

4.16. Un electrón (masa $= 9.11 \times 10^{-31}$ kg) sale de un extremo de un cinescopio con rapidez inicial cero y viaja en línea recta hacia la rejilla aceleradora, a 1.80 cm de distancia, llegando a ella con rapidez de 3.00×10^6 m/s. Si la fuerza neta es constante, calcule *a*) la aceleración, *b*) el tiempo para llegar a la rejilla, y *c*) la fuerza neta en newtons. (Puede despreciarse la fuerza gravitacional sobre el electrón.)

Sección 4.4 Masa y peso

4.17. Supermán lanza un peñasco de 2400 N a un adversario. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar al peñasco para darle una aceleración horizontal de 12.0 m/s^2?

4.18. Una bola de bolos pesa 71.2 N. El jugador aplica una fuerza horizontal de 160 N (36.0 lb) a la bola. ¿Qué magnitud tiene la aceleración horizontal de la bola?

4.19. En la superficie de Io, una luna de Júpiter, la aceleración debida a la gravedad es $g = 1.81\ \text{m/s}^2$. Una sandía pesa 44.0 N en la superficie terrestre. *a*) ¿Qué masa tiene la sandía en la superficie terrestre? *b*) ¿Qué masa y peso tiene en la superficie de Io?

4.20. La mochila de una astronauta pesa 17.5 N cuando ella está en la Tierra, pero sólo 3.24 N cuando está en la superficie de un asteroide. *a*) ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en ese asteroide? *b*) ¿Cuál es la masa de la mochila en el asteroide?

Sección 4.5 Tercera ley de Newton

4.21. Una velocista de alto rendimiento puede arrancar del bloque de salida con una aceleración casi horizontal de magnitud $15\ \text{m/s}^2$. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar una corredora de 55 kg al bloque de salida al inicio para producir esta aceleración? ¿Qué cuerpo ejerce la fuerza que impulsa a la corredora: el bloque de salida o ella misma?

4.22. Imagine que sostiene un libro que pesa 4 N en reposo en la palma de su mano. Complete lo que sigue: *a*) ___________ ejerce una fuerza hacia abajo de magnitud 4 N sobre el libro. *b*) La mano ejerce una fuerza hacia arriba de magnitud ___________ sobre ___________. *c*) ¿La fuerza hacia arriba del inciso *b*) es la reacción a la fuerza hacia abajo del inciso *a*)? *d*) La reacción a la fuerza en el inciso *a*) es una fuerza de magnitud ___________ ejercida sobre ___________ por ___________; su dirección es ___________. *e*) La reacción a la fuerza del inciso *b*) es una fuerza de magnitud ___________ ejercida sobre ___________ por ___________; su dirección es ___________. *f*) Las fuerzas de los incisos *a*) y *b*) son iguales y opuestas por la ___________ ley de Newton. *g*) Las fuerzas de los incisos *b*) y *e*) son iguales y opuestas por la ___________ ley de Newton. Suponga ahora que ejerce una fuerza hacia arriba de 5 N sobre el libro. *h*) ¿Éste sigue en equilibrio? *i*) ¿La fuerza que la mano ejerce sobre el libro es igual y opuesta a la que la Tierra ejerce sobre el libro? *j*) ¿La fuerza que la Tierra ejerce sobre el libro es igual y opuesta a la que el libro ejerce sobre la Tierra? *k*) La fuerza que la mano ejerce sobre el libro es igual y opuesta a la que el libro ejerce sobre la mano? Por último, suponga que usted quita de repente la mano mientras el libro está subiendo. *l*) ¿Cuantas fuerzas actúan entonces sobre el libro? *m*) ¿El libro está en equilibrio?

4.23. Se empuja una botella a lo largo de una mesa y cae por el borde. *No* desprecie la resistencia del aire. *a*) ¿Qué fuerzas se ejercen sobre la botella mientras está en el aire? *b*) ¿Cuál es la reacción a cada fuerza; es decir, qué cuerpo ejerce la reacción sobre qué otro cuerpo?

4.24. La fuerza normal hacia arriba que el piso de un elevador ejerce sobre un pasajero que pesa 650 N es de 620 N. ¿Cuáles son las fuerzas de reacción a estas dos fuerzas? ¿El pasajero está acelerando? Si acaso, ¿en qué dirección y qué magnitud tiene la aceleración?

4.25. Una estudiante con 45 kg de masa se lanza desde un trampolín alto. Tomando 6.0×10^{24} kg como masa de la Tierra, calcule la aceleración de la Tierra hacia ella, si la de ella es de $9.8\ \text{m/s}^2$ hacia la Tierra. Suponga que la fuerza neta sobre la Tierra es la fuerza de gravedad que ella ejerce.

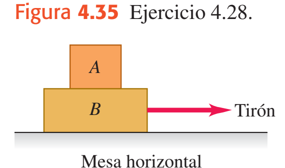
Sección 4.6 Diagramas de cuerpo libre

4.26. Un atleta lanza una pelota de masa m directamente hacia arriba y ésta no experimenta resistencia del aire considerable. Dibuje un diagrama de cuerpo libre de esta pelota mientas está en el aire y *a*) se mueva hacia arriba; *b*) en su punto más alto; *c*) se mueva hacia abajo. *d*) Repita los incisos *a*), *b*) y *c*) si el atleta lanza la pelota a un ángulo de 60° por encima de la horizontal, en vez de directamente hacia arriba.

4.27. Dos cajas, A y B, descansan juntas sobre una superficie horizontal sin fricción. Las masas correspondientes son m_A y m_B. Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ a la caja A y las dos cajas se mueven hacia la derecha. *a*) Dibuje los diagramas de cuerpo libre claramente marcados para cada caja. Indique cuáles pares de fuerzas, si acaso, son pares acción-reacción según la tercera ley. *b*) Si la magnitud de $\vec{F}$ es menor que el peso total de las dos cajas, ¿hará que se muevan las cajas? Explique su respuesta.

4.28. Una persona jala horizontalmente del bloque B de la figura 4.35, haciendo que ambos bloques se muevan juntos como una unidad. Mientras este sistema se mueve, elabore un cuidadoso diagrama de cuerpo libre, rotulado, del bloque A, si *a*) la mesa no tiene fricción; y si *b*) hay fricción entre el bloque B y la mesa, y la fuerza sobre el bloque B es igual a la fuerza de fricción sobre él debido a la mesa.

Figura 4.35 Ejercicio 4.28.



4.29. Una pelota cuelga de una cuerda larga atada al techo de un vagón de tren que viaja al este sobre vías horizontales. Un observador dentro del tren observa que la pelota cuelga inmóvil. Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente marcado para la pelota, si *a*) el tren tiene velocidad uniforme y *b*) si el tren acelera de manera uniforme. ¿La fuerza neta sobre la pelota es cero en cualquier caso? Explique su respuesta.

4.30. Una caja grande que contiene su nueva computadora descansa en la plataforma de su camioneta, que está detenida en un semáforo. El semáforo cambia a verde, usted pisa el acelerador y la camioneta se acelera. Horrorizado, ve cómo la caja comienza a deslizarse hacia la parte de atrás de la camioneta. Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente marcado para la camioneta y para la caja. Indique los pares de fuerzas, si los hay, que sean pares acción-reacción según la tercera ley. (Entre la plataforma de la camioneta y la caja hay fricción.)

4.31. Una silla de 12.0 kg de masa descansa en un piso horizontal, que tiene cierta fricción. Usted empuja la silla con una fuerza $F = 40.0$ N dirigida con un ángulo de 37.0° bajo la horizontal, y la silla se desliza sobre el piso. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente marcado para la silla. *b*) Use su diagrama y las leyes de Newton para calcular la fuerza normal que el piso ejerce sobre la silla.

4.32. Un esquiador de 65.0 kg de masa es remolcado cuesta arriba por una ladera nevada con rapidez constante, sujeto a una cuerda paralela al suelo. La pendiente es constante de 26.0° sobre la horizontal, y la fricción es despreciable. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente marcado para el esquiador. *b*) Calcule la tensión en la cuerda.

4.33. Un camión está jalando un automóvil en una autopista horizontal mediante una cuerda horizontal. El auto está en la marcha (cambio) neutral, de manera que se puede suponer que no hay fricción considerable entre sus llantas y la autopista. Conforme el camión acelera para alcanzar la rapidez de crucero en la autopista, dibuje un diagrama de cuerpo libre de *a*) el auto y *b*) el camión. *c*) ¿Qué fuerza acelera este sistema hacia delante? Explique cómo se origina esta fuerza.

Problemas

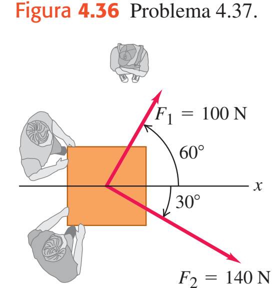
4.34. Una bala de rifle calibre 22 que viaja a 350 m/s golpea un árbol grande, penetrando a una profundidad de 0.130 m. La masa de la bala es de 1.80 g. Suponga una fuerza de frenado constante. *a*) ¿Cuánto tarda la bala en detenerse? b) ¿Qué fuerza (en N) ejerce el árbol sobre la bala?

4.35. Dos caballos tiran horizontalmente de cuerdas atadas al tronco de un árbol. Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que aplican al tronco son tales que la fuerza neta (resultante) $\vec{R}$ tiene magnitud igual a la de $\vec{F}_1$ y está a 90° de $\vec{F}_1$. Sea $F_1 = 1300$ N y $R = 1300$ N. Calcule la magnitud de $\vec{F}_2$ y su dirección (relativa a $\vec{F}_1$).

4.36. Imagine que acaba de llegar al Planeta X y deja caer una pelota de 100 g desde una altura de 10.0 m, la cual tarda 2.2 s en llegar al suelo. Puede ignorar cualquier fuerza que la atmósfera del planeta ejerza sobre la pelota. ¿Cuánto pesa la pelota de 100 g en la superficie del Planeta X?

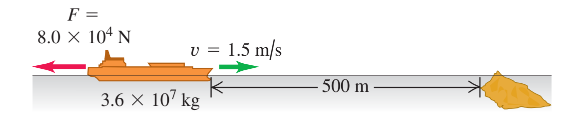
4.37. Dos adultos y un niño quieren empujar un carrito con ruedas en la dirección x de la figura 4.36. Los adultos empujan con fuerzas horizontales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ como se muestra en la figura. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza *más pequeña* que el niño debería ejercer. Se pueden despreciar los efectos de la fricción. *b*) Si el niño ejerce la fuerza mínima obtenida en el inciso *a*), el carrito acelerará a 2.0 m/s^2 en la dirección $+x$. ¿Cuánto pesa el carrito?

Figura 4.36 Problema 4.37.



4.38. Los motores de un buque tanque se averiaron y el viento empuja la nave con rapidez constante de 1.5 m/s directo hacia un arrecife (figura 4.37). Cuando el barco está a 500 m del arrecife, el viento cesa y el maquinista logra poner en marcha los motores. El timón está atorado, así que la única opción es intentar acelerar hacia atrás. La masa del buque y su carga es 3.6×10^7 kg y los motores producen una fuerza horizontal neta de 8.0×10^4 N. ¿Chocará el barco contra el arrecife? Si lo hace, ¿se derramará el petróleo? El casco puede resistir impactos a una rapidez de 0.2 m/s o menos. Puede despreciarse la fuerza de retardo que el agua ejerce sobre el casco de la nave.

Figura 4.37 Problema 4.38.



4.39. Salto vertical sin carrera. El jugador de baloncesto Darrell Griffith saltó una vez 1.2 m (4 ft) sin carrera. (Esto significa que subió 1.2 m después de que sus pies se separaron del piso.) Griffith pesaba 890 N (200 lb). *a*) ¿Qué rapidez tenía al separarse del piso? *b*) Si sus pies tardaron 0.300 s en separarse del piso después de que Griffith inició su salto, ¿qué aceleración media (magnitud y dirección) tuvo mientras se estaba empujando contra el piso? *c*) Dibuje su diagrama de cuerpo libre (véase la sección 4.6). En términos de las fuerzas del diagrama, ¿qué fuerza neta actuó sobre Griffith? Use las leyes de Newton y los resultados del inciso *b*) para calcular la fuerza media que aplicó sobre el piso.

4.40. Un anuncio asegura que cierto automóvil puede "parar en un diez". ¿Qué fuerza neta sería necesaria para detener un auto de 850 kg que viaja a 45.0 km/h en una distancia igual al diámetro de una moneda de 10 centavos de dólar (1.8 cm)?

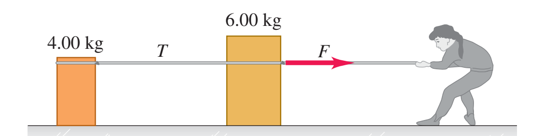
4.41. Una cubeta de 4.80 kg, llena de agua, se acelera hacia arriba con un cordel de masa despreciable, cuya resistencia a la rotura es de 75.0 N. *a*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la cubeta. En términos de las fuerzas de su diagrama, ¿qué fuerza neta actúa sobre la cubeta? *b*) Aplique la segunda ley de Newton a la cubeta y determine la aceleración máxima hacia arriba que puede imprimirse a la cubeta sin romper el cordel.

4.42. Una paracaidista confía en que la resistencia del aire (principalmente sobre su paracaídas) reducirá su velocidad hacia abajo. Ella y su paracaídas tienen una masa de 55.0 kg y la resistencia del aire ejerce una fuerza total hacia arriba de 620 N sobre ella y el paracaídas. *a*) ¿Cuánto pesa la paracaidista? *b*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la paracaidista (véase la sección 4.6) y úselo para calcular la fuerza neta que actúa sobre ella. ¿Esta fuerza es hacia arriba o hacia abajo? *c*) ¿Qué aceleración (magnitud y dirección) tiene la paracaidista?

4.43. Dos cajas, una de 4.00 kg y la otra de 6.00 kg, descansan en la superficie horizontal sin fricción de un estanque congelado, unidas por una cuerda delgada (figura 4.38). Una mujer (con zapatos de golf que le dan tracción sobre el hielo) aplica una fuerza horizontal F a la caja de 6.00 kg y le imparte una aceleración de 2.50 m/s^2. *a*) ¿Qué aceleración tiene la caja de 4.00 kg? *b*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la caja de 4.00 kg y úselo junto con la segunda ley de Newton para calcular la tensión T en la cuerda que une las dos cajas. *c*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la caja de 6.00 kg. ¿Qué dirección tiene la fuerza neta sobre esta caja? ¿Cuál tiene mayor magnitud, la fuerza T o la fuerza F? *d*) Use el inciso *c*) y la segunda ley de Newton para calcular la magnitud de la fuerza F.

4.44. Una astronauta está unida a una nave espacial mediante un cable fuerte. La astronauta y su traje tienen una masa total de 105 kg; en tanto que la masa del cable es despreciable. La masa de la nave espacial es de 9.05×10^4 kg y está lejos de cualquier cuerpo astronómico grande, así que podemos despreciar las fuerzas gravitacionales sobre ella y la astronauta. También suponemos que inicialmente la nave espacial y la astronauta están en reposo en un marco de referencia inercial. Entonces, la astronauta tira del cable con una fuerza de 80.0 N. *a*) ¿Qué fuerza ejerce el cable sobre la astronauta? *b*) Puesto que $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, ¿cómo puede un cable "sin masa" ($m = 0$) ejercer una fuerza? *c*) ¿Qué aceleración tiene la astronauta? *d*) ¿Qué fuerza ejerce el cable sobre la nave espacial? *e*) ¿Qué aceleración tiene la nave espacial?

Figura 4.38 Problema 4.43.



4.45. Imagine que, con la finalidad de estudiar los daños en aviones que chocan con aves grandes, usted diseña un cañón para acelerar objetos del tamaño de un pollo, de modo que su desplazamiento en el cañón esté dado por $x = (9.0 \times 10^3\ \text{m/s}^2)t^2 - (8.0 \times 10^4\ \text{m/s}^3)t^3$. El objeto sale del cañón en $t = 0.025$ s. *a*) ¿Qué longitud debe tener el cañón? *b*) ¿Con qué rapidez salen los objetos del cañón? *c*) ¿Qué fuerza neta debe ejercerse sobre un objeto de 1.50 kg en: i) $t = 0$? Y ii) $t = 0.025$ s?

4.46. Una nave espacial desciende verticalmente cerca de la superficie del Planeta X. Un empuje hacia arriba de 25.0 kN, producido por los motores, la frena a razón de 1.20 m/s^2, pero la nave aumenta su rapidez a razón de 0.80 m/s^2 si el empuje hacia arriba es de 10.0 kN. *a*) En cada caso, ¿qué dirección tiene la aceleración de la nave? *b*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la nave. En cada caso, aumentando o disminuyendo su rapidez, ¿qué dirección tiene la fuerza neta sobre la nave? *c*) Aplique la segunda ley de Newton a cada caso para averiguar el peso de la nave cerca de la superficie del Planeta X.

4.47. Un instrumento de 6.50 kg se cuelga de un alambre vertical dentro de una nave espacial que despega de la superficie de la Tierra. Esta nave parte del reposo y alcanza una altitud de 276 m en 15.0 s con aceleración constante. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para

el instrumento durante este tiempo. Indique qué fuerza es mayor. *b*) Obtenga la fuerza que el alambre ejerce sobre el instrumento.

4.48. Suponga que el cohete del problema 4.47 se acerca para un aterrizaje vertical, en vez de realizar un despegue. El capitán ajusta el empuje de los motores, de manera que la magnitud de la aceleración del cohete es la misma que tenía durante el despegue. Repita los incisos *a*) y *b*).

4.49. Un gimnasta de masa m sube por una cuerda vertical de masa despreciable sujeta al techo. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el gimnasta. Calcule la tensión en la cuerda si el gimnasta *a*) sube a un ritmo constante; *b*) cuelga inmóvil de la cuerda; *c*) sube la cuerda con aceleración de magnitud $|\vec{a}|$; *d*) baja deslizándose por la cuerda con aceleración hacia abajo de magnitud $|\vec{a}|$.

4.50. Un elevador cargado, cuyos cables están muy desgastados, tiene masa total de 2200 kg, y los cables aguantan una tensión máxima de 28,000 N. *a*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del elevador. En términos de las fuerzas de su diagrama, ¿qué fuerza neta actúa sobre el elevador? Aplique la segunda ley de Newton al elevador y calcule con qué aceleración máxima puede subir el elevador sin que se rompan los cables. *b*) ¿Cuál sería la respuesta al inciso *a*), si el elevador estuviera en la Luna, donde $g = 1.62 \text{ m/s}^2$)?

4.51. Salto al suelo. Un hombre de 75.0 kg se lanza desde una plataforma situada 3.10 m sobre el suelo. Mantiene las piernas rectas al caer pero, al tocar el piso, dobla las rodillas y, tratado como partícula, avanza 0.60 m más antes de parar. *a*) ¿Qué rapidez tiene al tocar el suelo? *b*) Tratándolo como partícula, ¿con qué aceleración (magnitud y dirección) se frena, si la aceleración se supone constante? *c*) Dibuje su diagrama de cuerpo libre (véase la sección 4.6). En términos de las fuerzas del diagrama, ¿qué fuerza neta actúa sobre él? Use las leyes de Newton y los resultados del inciso *b*) para calcular la fuerza media que sus pies ejercen sobre el piso al amortiguar la caída. Exprese la fuerza en newtons y como múltiplo de su peso.

4.52. Un martillo de 4.9 N con velocidad inicial de 3.2 m/s hacia abajo es detenido en una distancia de 0.45 cm por un clavo en una tabla de pino. Además del peso, la persona que lo usa le aplica una fuerza descendente de 15 N. Suponga que la aceleración de la cabeza del martillo es constante mientras está en contacto con el clavo y se mueve hacia abajo. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la cabeza del martillo. Identifique la fuerza de reacción a cada fuerza de acción del diagrama. *b*) Calcule la fuerza hacia abajo $\vec{F}$ ejercida por la cabeza del martillo sobre el clavo mientras está en contacto con él y moviéndose hacia abajo. *c*) Suponga que la tabla es de madera dura y la distancia que el martillo recorre al detenerse es de sólo 0.12 cm. Las fuerzas descendentes sobre el martillo son las mismas que en el inciso *b*). ¿Qué fuerza $\vec{F}$ ejerce ahora la cabeza del martillo sobre el clavo, mientras está en contacto con él y moviéndose hacia abajo?

4.53. Un cable uniforme de peso w cuelga verticalmente hacia abajo, sostenido en su extremo superior por una fuerza hacia arriba de magnitud w. ¿Qué tensión hay en el cable *a*) en el extremo superior? b) ¿En el extremo inferior? *c*) ¿Y en medio? Su respuesta a cada inciso deberá incluir un diagrama de cuerpo libre. (*Sugerencia*: elija como cuerpo por analizar un punto o una sección del cable.) *d*) Grafique la tensión en la cuerda contra la distancia de su extremo superior.

4.54. Los dos bloques de la figura 4.39 están unidos por una cuerda gruesa uniforme de 4.00 kg. Se aplica una fuerza de 200 N hacia arriba, como se indica. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el bloque de 6.00 kg, uno para la cuerda de 4.00 kg y uno para el bloque de 5.00 kg. Para cada fuerza, indique qué cuerpo la ejerce. *b*) ¿Qué aceleración tiene el sistema? *c*) ¿Qué tensión hay en la parte superior de la cuerda? *d*) ¿Y en su parte media?

4.55. Un atleta, cuya masa es de 90.0 kg, está levantando pesas. Partiendo de una posición en reposo, levanta, con aceleración constante, una barra que pesa 490 N, elevándola 0.6 m en 1.6 s. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre claramente marcado para la barra y para el atleta. *b*) Use los diagramas del inciso *a*) y las leyes de Newton para obtener la fuerza total que sus pies ejercen sobre el piso mientras levanta la barra.

Figura 4.39 Problema 4.54.

4.56. Un globo aerostático sostiene una canasta, un pasajero y un poco de carga. Sea M la masa total. Aunque sobre el globo actúa una fuerza de sustentación ascendente, el globo inicialmente está acelerando hacia abajo a razón de $g/3$. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el globo en descenso. *b*) Determine la fuerza de sustentación hacia arriba en términos del peso total inicial Mg. *c*) El pasajero nota que se dirige hacia una catarata y decide que necesita subir. ¿Qué fracción del peso total deberá tirar por la borda para que el globo se acelere *hacia arriba* a razón de $g/2$? Suponga que la fuerza de sustentación no cambia.

4.57. Un estudiante trata de levantar una cadena que consta de tres eslabones idénticos. Cada uno tiene una masa de 300 g. La cadena está colgada verticalmente de una cuerda; el estudiante sostiene el extremo superior del cordel y tira hacia arriba. De esta forma, el estudiante ejerce, por medio de la cuerda, una fuerza de 12 N hacia arriba sobre la cadena. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para *cada* eslabón de la cadena y también para toda la cadena considerada como un solo cuerpo. *b*) Use los resultados del inciso *a*) y las leyes de Newton para calcular: i) la aceleración de la cadena y ii) la fuerza ejercida por el eslabón superior sobre el eslabón central.

4.58. La posición de un helicóptero de entrenamiento de 2.75×10^5 N que se prueba está dada por $\vec{r} = (0.020 \text{ m/s}^3)t^3\hat{\imath} + (2.2 \text{ m/s})t\hat{\jmath} - (0.060 \text{ m/s}^2)t^2\hat{k}$. Determine la fuerza neta sobre el helicóptero en $t = 5.0$ s.

4.59. Un objeto con masa m se mueve sobre el eje x. Su posición en función del tiempo está dada por $x(t) = At - Bt^3$, donde A y B son constantes. Calcule la fuerza neta sobre el objeto en función del tiempo.

4.60. Sobre un objeto con masa m inicialmente en reposo actúa una fuerza $\vec{F} = k_1\hat{\imath} + k_2t^3\hat{\jmath}$, donde k_1 y k_2 son constantes. Calcule la velocidad $\vec{v}(t)$ del objeto en función del tiempo.

Problemas de desafío

4.61. Si conocemos $F(t)$, la fuerza en función del tiempo, para movimiento rectilíneo, la segunda ley de Newton nos da $a(t)$, la aceleración en función del tiempo, que podemos integrar para obtener $v(t)$ y $x(t)$. Sin embargo, suponga que lo que se conoce es $F(v)$. *a*) La fuerza neta sobre un cuerpo que se mueve sobre el eje x es $-Cv^2$. Use la segunda ley de Newton escrita como $\sum F = m\,dv/dt$, y dos integraciones para demostrar que $x - x_0 = (m/C) \ln (v_0/v)$. *b*) Demuestre que dicha ley puede escribirse como $\sum F = mv\,dv/dx$. Deduzca la expresión del inciso *a*) usando esta forma y una integración.

4.62. Un objeto de masa m está en reposo en equilibrio en el origen. En $t = 0$ se aplica una fuerza $\vec{F}(t)$ con componentes

$$F_x(t) = k_1 + k_2 y \qquad F_y(t) = k_3 t$$

donde k_1, k_2 y k_3 son constantes. Calcule los vectores de posición $\vec{r}(t)$ y velocidad $\vec{v}(t)$ en función del tiempo.

5 APLICACIÓN DE LAS LEYES DE NEWTON

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo usar la primera ley de Newton para resolver problemas donde intervienen fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio.
- Cómo usar la segunda ley de Newton para resolver problemas donde intervienen fuerzas que actúan sobre un cuerpo en aceleración.
- La naturaleza de los diferentes tipos de fuerzas de fricción: fricción estática, fricción cinética, fricción de rodamiento y resistencia de fluidos; y cómo resolver problemas relacionados con tales fuerzas.
- Cómo resolver problemas donde intervienen fuerzas que actúan sobre un cuerpo que se mueve en una trayectoria circular.
- Las propiedades clave de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza.



?Suponga que el ave que vuela entra en una corriente de aire que asciende con rapidez constante. En esta situación, ¿qué tiene mayor magnitud: la fuerza de gravedad o la fuerza ascendente del aire sobre el ave?

En el capítulo 4 vimos que las tres leyes de Newton del movimiento, cimientos de la mecánica clásica, tienen un planteamiento muy sencillo; no obstante, su *aplicación* a situaciones como un velero para hielo que se desliza sobre un lago congelado, un trineo que se lleva colina abajo o un avión que efectúa una vuelta cerrada requiere capacidad analítica y técnica. En este capítulo ampliaremos las destrezas para resolver problemas que el lector comenzó a desarrollar en el capítulo anterior.

Comenzaremos con problemas de equilibrio, donde un cuerpo está en reposo o se mueve con velocidad constante. Luego generalizaremos nuestras técnicas de resolución de problemas a cuerpos que no están en equilibrio, para lo que necesitaremos examinar con precisión las relaciones entre fuerzas y movimiento. Aprenderemos a describir y analizar la fuerza de contacto que actúa sobre un cuerpo que descansa o se desliza en una superficie. Por último, estudiaremos el caso importante del movimiento circular uniforme, en el que un cuerpo se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante.

En todas estas situaciones interviene el concepto de fuerza, que usaremos en todo nuestro estudio de la física. Cerraremos el capítulo con una mirada a la naturaleza fundamental de la fuerza y las clases de fuerzas que hay en nuestro Universo físico.

5.1 Empleo de la primera ley de Newton: Partículas en equilibrio

En el capítulo 4 aprendimos que un cuerpo está en *equilibrio* si está en reposo o se mueve con velocidad constante en un marco de referencia inercial. Una lámpara colgante, un puente colgante y un avión que vuela en línea recta a altitud y rapidez constantes son ejemplos de situaciones de equilibrio. Aquí sólo consideraremos el equilibrio de un cuerpo que puede modelarse como partícula. (En el capítulo 11 veremos los principios adicionales que necesitaremos aplicar, cuando esto no sea posible.) El principio físico fundamental es la primera ley de Newton: si una partícula está en

reposo o se mueve con velocidad constante en un marco de referencia inercial, la fuerza neta que actúa sobre ella —es decir, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella— debe ser cero:

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \qquad \text{(partícula en equilibrio, forma vectorial)} \tag{5.1}$$

Normalmente usaremos esta ecuación en forma de componentes:

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \quad \text{(partícula en equilibrio, forma de componentes)} \tag{5.2}$$

Esta sección trata sobre el uso de la primera ley de Newton para resolver problemas de cuerpos en equilibrio. Quizás algunos de los problemas parezcan complicados; no obstante, lo importante es recordar que *todos* los problemas que implican partículas en equilibrio se resuelven igual. La estrategia siguiente detalla los pasos a seguir. Estudie detenidamente la estrategia, vea cómo se aplica en los ejemplos y trate de aplicarla al resolver problemas de tarea.

Estrategia para resolver problemas 5.1 Primera ley de Newton: Equilibrio de una partícula



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Es preciso usar la primera ley de Newton con cualquier problema que implique fuerzas que actúan sobre un cuerpo en equilibrio, es decir, que esté en reposo o en movimiento con velocidad constante. Por ejemplo, un automóvil está en equilibrio cuando está estacionado; pero también cuando viaja por una carretera recta con rapidez constante.

Si en el problema intervienen dos o más cuerpos, y los cuerpos interactúan, también será preciso usar la *tercera* ley de Newton, la cual nos permite relacionar la fuerza que un cuerpo ejerce sobre otro, es decir, la que el segundo cuerpo ejerce sobre el primero.

Asegúrese de identificar la(s) incógnita(s). En los problemas de equilibrio, las incógnitas suelen ser la magnitud de una de las fuerzas, las componentes de una fuerza o la dirección (ángulo) de una fuerza.

PLANTEAR *el problema* con los pasos siguientes:

1. Haga un dibujo sencillo de la situación física, con dimensiones y ángulos. ¡No tiene que ser una obra de arte!
2. Para cada cuerpo en equilibrio, dibuje un diagrama de cuerpo libre. Por ahora, consideramos el cuerpo como partícula, así que represéntelo con un punto grueso. *No* incluya en el diagrama los otros cuerpos que interactúan con él, como la superficie donde descansa o una cuerda que tira de él.
3. Pregúntese ahora qué interactúa con el cuerpo tocándolo o de alguna otra forma. En el diagrama de cuerpo libre, dibuje un vector de fuerza para cada interacción y rotule cada fuerza con un símbolo que represente su *magnitud*. Si conoce el ángulo de la fuerza, dibújelo con exactitud y rotúlelo. Incluya el peso del cuerpo, excepto si su masa (y por ende su peso) es insignificante. Si se da la masa, use $w = mg$ para obtener el peso. Una superficie en contacto con el cuerpo ejerce una fuerza normal perpendicular a la superficie y tal vez una fuerza de fricción paralela a la superficie. Una cuerda o cadena no puede empujar un cuerpo, sólo tirar de él en la dirección de su longitud.
4. En el diagrama de cuerpo libre *no* muestre las fuerzas que el cuerpo en cuestión ejerce sobre otro cuerpo. Las sumas de las ecuaciones (5.1) y (5.2) sólo incluyen fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo en cuestión. Para cada fuerza sobre el cuerpo, pregúntese “¿Qué otro cuerpo causa esa fuerza?” Si no puede contestar, tal vez esté imaginando una fuerza inexistente.
5. Elija sus ejes de coordenadas e inclúyalas en su diagrama de cuerpo libre. (Si hay más de un cuerpo en el problema, es preciso elegir ejes por separado para cada cuerpo.) Rotule la dirección positiva de cada eje. Por ejemplo, si un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie plana, suele ser más sencillo tomar ejes en las direcciones paralela y perpendicular a ella, aun si está inclinada.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Obtenga las componentes de cada fuerza a lo largo de cada uno de los ejes de coordenadas del cuerpo. Marque con una línea ondulada cada vector que se haya sustituido por sus componentes, para no contarlo dos veces. Tenga presente que, aunque la *magnitud* de una fuerza siempre es positiva, la *componente* de una fuerza en una dirección dada puede ser positiva o negativa.
2. Iguale a cero la suma algebraica de las componentes x de las fuerzas. En otra ecuación, haga lo mismo con las componentes y. (*Nunca* sume componentes x y y en una sola ecuación.)
3. Si hay dos o más cuerpos, repita los pasos anteriores para cada uno. Si los cuerpos interactúan, use la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que ejercen entre sí.
4. Asegúrese de tener la misma cantidad de ecuaciones independientes y de incógnitas. Despeje las ecuaciones para obtener la expresión algebraica de las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que sus resultados sean congruentes. Si la solución es una expresión simbólica o algebraica, trate de encontrar casos especiales (valores específicos o casos extremos) con los que pueda hacer una estimación rápida. Verifique que su fórmula funciona en tales casos.

Ejemplo 5.1 Equilibrio unidimensional: Tensión en una cuerda sin masa

Una gimnasta de masa $m_G = 50.0$ kg se cuelga del extremo inferior de una cuerda colgante. El extremo superior está fijo al techo de un gimnasio. ¿Cuánto pesa la gimnasta? ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce la cuerda sobre ella? ¿Qué tensión hay en la parte superior de la cuerda? Suponga que la masa de la cuerda es despreciable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La gimnasta y la cuerda están en equilibrio, así que podemos aplicar la primera ley de Newton a ambos cuerpos. La gimnasta y la cuerda ejercen fuerzas entre sí, es decir, interactúan, así que también usaremos la tercera ley de Newton para relacionar tales fuerzas. Las incógnitas son el peso de la gimnasta, w_G, la fuerza que la cuerda ejerce sobre la gimnasta (llamémosla $T_{\text{R sobre G}}$) y la tensión que el techo ejerce sobre la parte superior de la cuerda (llamémosla $T_{\text{C sobre R}}$).

PLANTEAR: Dibujaremos diagramas de cuerpo libre individuales para la gimnasta (figura 5.lb) y la cuerda (figura 5.1c). Tomaremos el eje $+y$ hacia arriba, como se muestra. Todas las fuerzas actúan verticalmente, así que sólo tienen componente en y.

Las dos fuerzas $T_{\text{R sobre G}}$ y $T_{\text{G sobre R}}$ son la fuerza hacia arriba de la cuerda sobre la gimnasta (en la figura 5.1b) y la fuerza hacia abajo de la gimnasta sobre la cuerda (en la figura 5.1c) respectivamente. Estas fuerzas forman un par acción-reacción, así que deben tener la misma magnitud.

Vemos también que el peso de la gimnasta w_G es la fuerza de atracción (hacia abajo) que la *Tierra* ejerce sobre la *gimnasta*. Su fuerza de reacción es la fuerza de atracción igual y opuesta (hacia arriba) que la *gimnasta* ejerce sobre la *Tierra*. Esta fuerza actúa sobre la Tierra, no sobre la gimnasta, por lo que no aparece en su diagrama de cuerpo libre (figura 5.1b). Compare esto con el caso de la manzana en el ejemplo conceptual 4.9 (sección 4.5). Asimismo, la fuerza que la cuerda ejerce sobre el techo no aparece en la figura 5.1c.

5.1 Nuestros esquemas para este problema.

a) La situación

b) Diagrama de cuerpo libre de la gimnasta

c) Diagrama de cuerpo libre de la cuerda

EJECUTAR: La magnitud del peso de la gimnasta es el producto de su masa y la aceleración debida a la gravedad, g:

$$w_G = m_G g = (50.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 490\text{ N}$$

Esta fuerza apunta en la dirección $-y$, así que su componente en esa dirección es $-w_G$. La fuerza hacia arriba que la cuerda ejerce sobre la gimnasta tiene magnitud desconocida $T_{\text{R sobre G}}$ y una componente y positiva $+T_{\text{R sobre G}}$. Dado que la gimnasta está en equilibrio, la suma de las componentes y de fuerza que actúan sobre ella debe ser cero:

$$\text{Gimnasta:}\quad \sum F_y = T_{\text{R sobre G}} + (-w_G) = 0 \quad \text{así que}$$
$$T_{\text{R sobre G}} = w_G = 490\text{ N}$$

La cuerda tira de la gimnasta *hacia arriba* con una fuerza $T_{\text{R sobre G}}$ de magnitud 490 N. Por la tercera ley de Newton, la gimnasta tira de la cuerda *hacia abajo* con una fuerza de la misma magnitud, $T_{\text{G sobre R}} = 490$ N.

La cuerda también está en equilibrio. Hemos supuesto que no tiene peso, así que la fuerza hacia arriba de magnitud $T_{\text{C sobre R}}$ que el techo ejerce sobre su extremo superior deberá hacer que la fuerza vertical *neta* que actúa sobre la cuerda sea igual a cero. Expresado como ecuación:

$$\text{Cuerda:}\quad \sum F_y = T_{\text{C sobre R}} + (-T_{\text{G sobre R}}) = 0 \quad \text{así que}$$
$$T_{\text{C sobre R}} = T_{\text{G sobre R}} = 490\text{ N}$$

EVALUAR: La *tensión* en cualquier punto de la cuerda es la fuerza que actúa en ese punto. En el caso de esta cuerda sin peso, la tensión $T_{\text{G sobre R}}$ en el extremo inferior tiene el mismo valor que la tensión $T_{\text{C sobre R}}$ en el extremo superior. De hecho, en una cuerda ideal sin peso, la tensión tiene el mismo valor en todos los puntos de la cuerda. (Compare esto con lo dicho en el ejemplo conceptual 4.10 de la sección 4.5.)

Observe que definimos tensión como la *magnitud* de una fuerza, así que siempre es positiva. En cambio, la componente y de la fuerza que actúa sobre la cuerda en su extremo inferior es $-T_{\text{G sobre R}} = -490$ N.

Ejemplo 5.2 Equilibrio unidimensional: Tensión en una cuerda con masa

Suponga que en el ejemplo 5.1, el peso de la cuerda no es despreciable, sino de 120 N. Calcule la tensión en cada extremo de la cuerda.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo anterior, las incógnitas son las magnitudes $T_{\text{G sobre R}}$ y $T_{\text{C sobre R}}$ de las fuerzas que actúan sobre la parte inferior y superior de la cuerda, respectivamente. De nuevo, aplicaremos la primera ley de Newton a la gimnasta y la cuerda, y usaremos la tercera ley de Newton para relacionar las fuerzas que la gimnasta y la cuerda ejercen una sobre la otra.

PLANTEAR: Una vez más, dibujamos diagramas de cuerpo libre individuales para la gimnasta (figura 5.2a) y para la cuerda (figura 5.2b). La única diferencia con respecto a los diagramas del ejemplo 5.1 es que ahora *tres* fuerzas actúan sobre la cuerda: la fuerza hacia abajo ejercida por la gimnasta ($T_{\text{G sobre R}}$), la fuerza hacia arriba ejercida por el techo ($T_{\text{C sobre R}}$) y el peso de la cuerda con magnitud $w_R = 120$ N).

EJECUTAR: El diagrama de cuerpo libre de la gimnasta es el mismo del ejemplo 5.1, así que su condición de equilibrio tampoco ha cambiado. Por la tercera ley de Newton, $T_{\text{R sobre G}} = T_{\text{G sobre R}}$, y tenemos

$$\text{Gimnasta:}\quad \sum F_y = T_{\text{R sobre G}} + (-w_G) = 0 \quad \text{así que}$$
$$T_{\text{R sobre G}} = T_{\text{G sobre R}} = w_G = 490\text{ N}$$

La condición de equilibrio $\sum F_y = 0$ para la cuerda es

$$\text{Cuerda:}\quad \sum F_y = T_{\text{C sobre R}} + (-T_{\text{G sobre R}}) + (-w_R) = 0$$

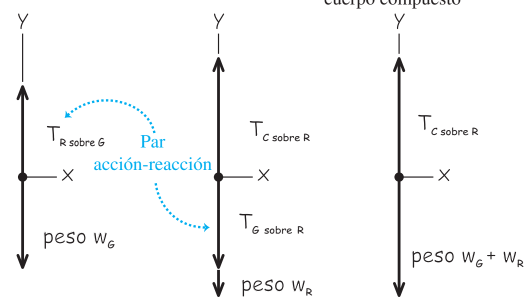
Observe que la componente y de $T_{\text{C sobre R}}$ es positiva porque apunta en la dirección $+y$, pero las componentes y tanto de $T_{\text{G sobre R}}$ como de w_R

5.2 Nuestros esquemas para este problema, incluyendo el peso de la cuerda.

a) Diagrama de cuerpo libre para la gimnasta

b) Diagrama de cuerpo libre para la cuerda

c) Diagrama de cuerpo libre para la gimnasta y la cuerda, considerados como un solo cuerpo compuesto



son negativas. Después de despejar $T_{\text{C sobre R}}$ y sustituir los valores $T_{\text{G sobre R}} = T_{\text{R sobre G}} = 490$ N y $w_R = 120$ N, tenemos

$$T_{\text{C sobre R}} = T_{\text{G sobre R}} + w_R = 490 \text{ N} + 120 \text{ N} = 610 \text{ N}$$

EVALUAR: Cuando incluimos el peso de la cuerda, vemos que la tensión es *diferente* en los dos extremos de la cuerda. La fuerza $T_{\text{C sobre R}}$ que el techo ejerce debe sostener tanto el peso de 490 N de la gimnasta como el peso de 120 N de la cuerda, así que $T_{\text{C sobre R}} = 610$ N.

Para ver esto de forma más explícita, dibuje un diagrama de cuerpo libre para un cuerpo compuesto que consiste en la gimnasta y la cuerda consideradas como unidad (figura 5.2c). Sólo actúan dos fuerzas externas sobre este cuerpo compuesto: la fuerza $T_{\text{C sobre R}}$ ejercida por el techo y el peso total $w_G + w_R = 490 \text{ N} + 120 \text{ N} = 610$ N. (Las fuerzas $T_{\text{G sobre R}}$ y $T_{\text{R sobre G}}$ son *internas* en lo que al cuerpo compuesto respecta. Dado que en la primera ley de Newton sólo intervienen fuerzas *externas*, las fuerzas internas no se toman en cuenta.) Por lo tanto, la primera ley de Newton aplicada al cuerpo compuesto es

$$\text{Cuerpo compuesto:} \qquad \sum F_y = T_{\text{C sobre R}} + [-(w_G + w_R)] = 0$$

así que $T_{\text{C sobre R}} = w_G + w_R = 610$ N.

Este método de tratar a la gimnasta y la cuerda como cuerpo compuesto parece mucho más sencillo, y quizá el lector se pregunte por qué no lo usamos desde el principio. La respuesta es que, con ese método, no podíamos obtener la tensión $T_{\text{G sobre R}}$ en el extremo inferior de la cuerda. La moraleja es: *si hay dos o más cuerpos en un problema en el que intervienen las leyes de Newton, lo más seguro es tratar a cada cuerpo individualmente*.

Ejemplo 5.3 Equilibrio bidimensional

En la figura 5.3a, un motor de peso w cuelga de una cadena unida mediante un anillo O a otras dos cadenas, una sujeta al techo y la otra a la pared. Calcule las tensiones en las tres cadenas en términos de w. Los pesos de las cadenas y el anillo son despreciables.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las incógnitas son las tensiones T_1, T_2 y T_3 en las tres cadenas (figura 5.3a). En este ejemplo, parecería extraño despreciar el peso de las cadenas y del anillo, si en el ejemplo 5.2 *no* despreciamos el peso de una simple cuerda. La razón es que el peso de las cadenas o del anillo es muy pequeño en comparación con el del motor. En cambio, en el ejemplo 5.2 el peso de la cuerda era una fracción apreciable del peso de la gimnasta (120 N comparados con 490 N).

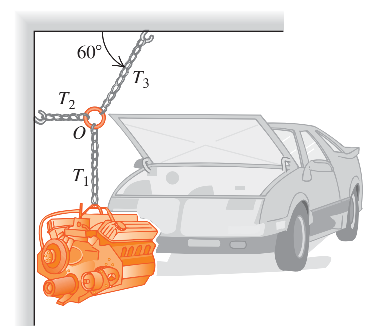
Todos los cuerpos del ejemplo están en equilibrio, así que usaremos la primera ley de Newton para determinar T_1, T_2 y T_3. Necesitamos tres ecuaciones simultáneas, una para cada incógnita. Sin embargo, la aplicación de la primera ley de Newton a un solo cuerpo sólo nos da *dos* ecuaciones, como en la ecuación (5.2). Por lo tanto, para resolver el problema, será preciso considerar más de un cuerpo en equilibrio. Examinaremos el motor (sobre el que actúa T_1) y el anillo (que está unido a las tres cadenas, así que sobre él actúan las tres tensiones).

PLANTEAR: Las figuras 5.3b y 5.3c son diagramas de cuerpo libre, incluyendo un sistema de coordenadas *x-y*, para el motor y el anillo, respectivamente.

Las dos fuerzas que actúan sobre el motor son su peso w y la fuerza hacia arriba T_1 ejercida por la cadena vertical; las tres fuerzas que actúan sobre el anillo son las tensiones de la cadena vertical (T_1), la cadena horizontal (T_2) y la cadena inclinada (T_3). Puesto que la cadena vertical tiene peso despreciable, ejerce fuerzas de la misma magnitud T_1 en ambos extremos: hacia arriba sobre el motor en la figura 5.3b y

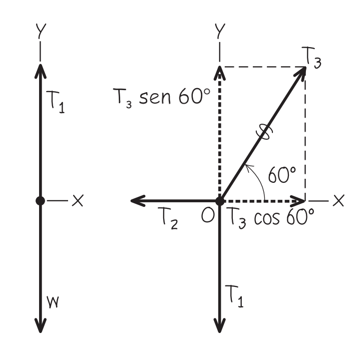
5.3 a) La situación. b) y c) son nuestros diagramas.

a) Motor, cadenas y anillo



b) Diagrama de cuerpo libre para el motor

c) Diagrama de cuerpo libre para el anillo O



continúa

hacia abajo sobre el anillo en la figura 5.3c. Si el peso no fuera despreciable, estas dos fuerzas tendrían diferente magnitud, como fue el caso de la cuerda en el ejemplo 5.2. Recuerde que también estamos despreciando el peso del anillo, así que no lo incluimos en las fuerzas de la figura 5.3c.

EJECUTAR: Las fuerzas que actúan sobre el motor están únicamente sobre el eje y; entonces, por la primera ley de Newton,

$$\text{Motor:} \quad \sum F_y = T_1 + (-w) = 0 \qquad \text{y} \qquad T_1 = w$$

Las cadenas horizontal e inclinada no ejercen fuerzas sobre el motor, porque no están unidas a él; aunque sí aparecen en la aplicación de la primera ley de Newton sobre el anillo.

En el diagrama de cuerpo libre para el anillo (figura 5.3c), recuerde que T_1, T_2 y T_3 son las *magnitudes* de las fuerzas. Primero descomponemos la fuerza con magnitud T_3 en sus componentes x y y. El anillo está en equilibrio, así que escribimos ecuaciones individuales donde se establece que las componentes x y y de la fuerza neta sobre el anillo es cero. (Recuerde que en la estrategia para resolver problemas 5.1 vimos que *nunca* deben sumarse componentes x y y en una misma ecuación.) Obtenemos

$$\text{Anillo:} \quad \sum F_x = T_3 \cos 60° + (-T_2) = 0$$
$$\text{Anillo:} \quad \sum F_y = T_3 \operatorname{sen} 60° + (-T_1) = 0$$

Puesto que $T_1 = w$ (de la ecuación para el motor), escribimos la segunda ecuación del anillo como

$$T_3 = \frac{T_1}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{w}{\operatorname{sen} 60°} = 1.155w$$

Ahora podemos usar este resultado en la primera ecuación del anillo:

$$T_2 = T_3 \cos 60° = w \frac{\cos 60°}{\operatorname{sen} 60°} = 0.577w$$

Así, podemos expresar las tres tensiones como múltiplos del peso w del motor, que supuestamente se conoce. En síntesis,

$$T_1 = w$$
$$T_2 = 0.577w$$
$$T_3 = 1.155w$$

EVALUAR: Nuestros resultados muestran que la cadena que sujeta al techo ejerce una fuerza sobre el anillo de magnitud T_3, que es *mayor* que el peso del motor. Si le parece raro, observe que la componente vertical de esta fuerza es igual a T_1, que a la vez es igual a w, pero como además la fuerza tiene una componente horizontal, su magnitud T_3 debe ser algo mayor que w. Por lo tanto, la cadena que sujeta al techo es la que está sometida a mayor tensión y es la más susceptible de romperse.

Quizás a primera vista usted haya pensado que el cuerpo más importante en este problema era el motor. Sin embargo, para tener suficientes ecuaciones, también fue necesario considerar las fuerzas que actúan sobre un segundo cuerpo (en este caso, el anillo que une las cadenas). Las situaciones de este tipo son muy comunes en problemas de equilibrio, así que tenga presente esta técnica.

Ejemplo 5.4 Un plano inclinado

Un automóvil de peso w descansa sobre los rieles inclinados de una rampa que conduce a un remolque (figura 5.4a). Sólo un cable conectado al auto y a la armazón del remolque evita que el auto baje la rampa. (Los frenos y la transmisión del auto están desactivados.) Calcule la tensión en el cable y la fuerza con que los rieles empujan los neumáticos.

SOLUCIÓN

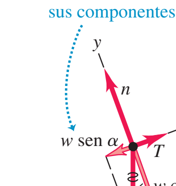
IDENTIFICAR: El automóvil está en equilibrio, así que usaremos otra vez la primera ley de Newton. La rampa ejerce cuatro fuerzas sobre el auto, una en cada neumático. Por sencillez, juntaremos todas estas fuerzas en una sola. Otra simplificación es que hay muy poca fricción sobre el auto, de manera que despreciaremos la componente de esta fuerza que actúa *paralela* a los rieles (véase la figura 4.2b). (Volveremos a la fuerza de fricción en la sección 5.3) Por lo tanto, podemos decir que la rampa sólo ejerce una fuerza sobre el auto que es *perpendicular* a los rieles. Esta fuerza aparece porque los átomos de la superficie de los rieles se resisten a que los átomos de los neumáticos penetren entre ellos. Al igual que en la sección 4.1, llamaremos a esta fuerza "fuerza normal" (véase la figura 4.2a). Las dos incógnitas son la magnitud n de la fuerza normal y la magnitud T de la tensión en el cable.

5.4 Un cable sostiene un automóvil en reposo sobre una rampa.

a) Auto sobre rampa

b) Diagrama de cuerpo libre del auto

Remplazamos el peso por sus componentes.



PLANTEAR: La figura 5.4b muestra un diagrama de cuerpo libre para el auto. Las tres fuerzas que actúan sobre el auto son su peso (magnitud w), la tensión del cable (magnitud T) y la fuerza normal (magnitud n). Esta última actúa hacia arriba y hacia la izquierda porque está evitando que el auto penetre en los rieles sólidos.

Tomamos los ejes de coordenadas x y y paralelos y perpendiculares a la rampa, como se muestra. Esto facilita el análisis del problema porque así sólo la fuerza del peso tiene componentes tanto en x como en y. Si eligiéramos ejes horizontal y vertical, nuestra tarea sería más difícil porque tendríamos que descomponer *dos* fuerzas (la normal y la tensión).

Observe que el ángulo α entre la rampa y la horizontal es igual al ángulo α entre el vector de peso $\vec{w}$ y el eje de la normal al plano de la rampa.

EJECUTAR: Para escribir las componentes x y y de la primera ley de Newton, necesitamos obtener las componentes del peso. Una complicación es que el ángulo α en la figura 5.4b *no* se mide del eje $+x$ al eje $+y$, así que *no podemos* usar las ecuaciones (1.6) directamente para obtener las componentes. (Quizás usted desee repasar la sección 1.8, pues este punto es importante.)

Una estrategia para obtener las componentes de $\vec{w}$ es considerar los triángulos rectángulos de la figura 5.4b. El seno de α es la magnitud de la componente x de $\vec{w}$ (esto es, el cateto opuesto al ángulo α del triángulo) dividida entre la magnitud w (la hipotenusa). Asimismo, el coseno de α es la magnitud de la componente y (el cateto adyacente al ángulo α del triángulo) dividida entre w. Ambas componentes son negativas, así que $w_x = -w \operatorname{sen} \alpha$ y $w_y = -w \cos \alpha$.

Otra estrategia sería reconocer que en una componente de $\vec{w}$ debe intervenir el sen α, y el cos α en la otra. Para decidir cuál es cuál, dibuje el diagrama de cuerpo libre de modo que el ángulo α sea apreciablemente mayor o menor que 45°. (Le recomendamos no ceder a la tendencia natural de dibujar tales ángulos como cercanos a 45°.) Aquí dibujamos las figuras 5.4b y 5.4c de modo que α sea menor que 45°, lo que implica que sen α es menor que cos α. La figura muestra que la componente x de $\vec{w}$ es menor que la componente y. Así que en la componente x deberá intervenir sen α; y en la componente y, cos α. Obtenemos otra vez que $w_x = -w \operatorname{sen} \alpha$ y $w_y = -w \cos \alpha$.

En la figura 5.4b marcamos con una línea ondulada el vector original que representa el peso para recordar que no debemos contarlo dos veces. Las condiciones de equilibrio nos dan

$$\sum F_x = T + (-w \operatorname{sen} \alpha) = 0$$
$$\sum F_y = n + (-w \cos \alpha) = 0$$

Asegúrese de entender la relación entre estos signos y las coordenadas elegidas. Recuerde que, por definición, T, w y n son *magnitudes* de vectores y por lo tanto positivas.

Despejando T y n, obtenemos

$$T = w \operatorname{sen} \alpha$$
$$n = w \cos \alpha$$

EVALUAR: Los valores obtenidos para T y n dependen del valor de α. Con la finalidad de verificar qué tan razonables son estas respuestas, examinaremos ciertos casos especiales. Si el ángulo α es cero, entonces $\operatorname{sen} \alpha = 0$ y $\cos \alpha = 1$. En este caso, los rieles son horizontales; nuestra respuesta nos dice que no se necesita la tensión T del cable para sostener al auto, y que la fuerza normal n es igual en magnitud al peso. Si $\alpha = 90°$, entonces sen $\alpha = 1$ y $\cos \alpha = 0$. Aquí la tensión T es igual al peso w y la fuerza normal n es cero. ¿Son éstos los resultados esperados para estos casos especiales?

CUIDADO Quizá la fuerza normal y el peso no sean lo mismo Es un error común suponer automáticamente que la magnitud n de la fuerza normal es igual al peso w. Sin embargo, nuestro resultado demuestra que, en general, eso *no* es cierto. Siempre es mejor tratar n como una variable y calcular su valor, como hicimos aquí.

Cómo cambiarían los valores de T y n si el auto no estuviera estacionario y el cable estuviera tirando de él para subirlo por la rampa con rapidez constante. Esto también es una situación de equilibrio, pues la velocidad del auto es constante. Por lo tanto, el cálculo es idéntico, y T y n tienen los mismos valores que cuando el auto está en reposo. (Es verdad que T debe ser mayor que $w \operatorname{sen} \alpha$ para *iniciar* el movimiento ascendente del auto por la rampa, pero eso no es lo que preguntamos.)

Ejemplo 5.5 Tensión en una polea sin fricción

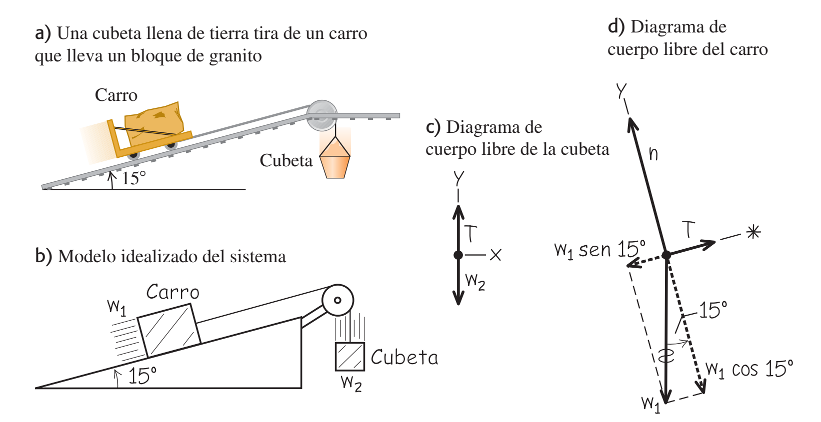
Se están sacando bloques de granito de una cantera por una pendiente de 15°. Por razones ecológicas, también se está echando tierra en la cantera para llenar los agujeros. Para simplificar el proceso, usted diseña un sistema en el que una cubeta con tierra (de peso w_2 incluida la cubeta) tira de un bloque de granito en un carro (peso w_1 incluido el carro) sobre rieles de acero, al caer verticalmente a la cantera (figura 5.5a). Determine qué relación debe haber entre w_1 y w_2 para que el sistema funcione con rapidez constante. Ignore la fricción en la polea y en las ruedas del carro, y el peso del cable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El carro y la cubeta se mueven con velocidad constante (es decir, en línea recta con rapidez constante). Por lo tanto, los dos cuerpos están en equilibrio y podemos aplicar la primera ley de Newton a cada uno.

Las dos incógnitas son los pesos w_1 y w_2. Las fuerzas que actúan sobre la cubeta son su peso w_2 y una tensión hacia arriba ejercida por el cable. Sobre el carro actúan tres fuerzas: su peso w_1, una fuerza normal

5.5 a) La situación. b) Nuesto modelo idealizado. c), d) Nuestros diagramas de cuerpo libre.



continúa

de magnitud n ejercida por los rieles y una fuerza de tensión del cable. (Estamos ignorando la fricción, así que suponemos que los rieles no ejercen ninguna fuerza paralela a la pendiente.) Esta situación es idéntica a la del automóvil en la rampa del ejemplo 5.4. Igual que en ese ejemplo, no todas las fuerzas que actúan sobre el carro tienen la misma dirección, así que necesitaremos usar ambas componentes de la primera ley de Newton de la ecuación (5.2).

Estamos suponiendo que el cable no tiene peso, así que las fuerzas de tensión que la cuerda ejerce sobre el carro y la cubeta tienen la misma magnitud T.

PLANTEAR: La figura 5.5b es nuestro modelo idealizado del sistema. Las figuras 5.5c y 5.5d son los diagramas de cuerpo libre que dibujamos. Cabe señalar que podemos orientar los ejes de forma distinta para cada cuerpo. Los ejes que se muestran son la opción que más nos conviene. Como hicimos con el auto en el ejemplo 5.4, representamos el peso del bloque de granito en términos de sus componentes x y y.

EJECUTAR: Aplicando $\sum F_y = 0$ a la cubeta llena de tierra en la figura 5.5c, tenemos

$$\sum F_y = T + (-w_2) = 0 \qquad \text{así que} \qquad T = w_2$$

Aplicando $\sum F_x = 0$ al bloque y al carro en la figura 5.5d, obtenemos

$$\sum F_x = T + (-w_1 \operatorname{sen} 15°) = 0 \qquad \text{así que} \qquad T = w_1 \operatorname{sen} 15°$$

Igualando las dos expresiones para T,

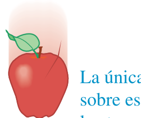
$$w_2 = w_1 \operatorname{sen} 15° = 0.26 w_1$$

EVALUAR: Nuestro análisis no depende de la dirección del movimiento, sólo de que la velocidad sea constante. Por lo tanto, el sistema puede moverse con rapidez constante en *cualquier* dirección, si el peso de la cubeta con tierra es el 26% del peso del carro y el bloque de granito. ¿Qué sucedería si w_2 fuera mayor que $0.26w_1$? ¿Y si fuera menor que $0.26w_1$?

Observe que no fue necesario aplicar la ecuación $\sum F_y = 0$ al carro y al bloque; sólo lo sería si quisiéramos calcular el valor de n. ¿Puede usted demostrar que $n = w_1 \cos 15°$?

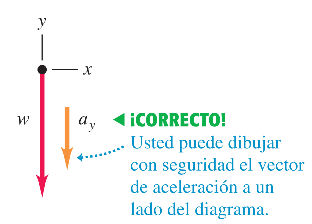
5.6 Diagramas de cuerpo libre correcto e incorrecto para un cuerpo que cae.

a)

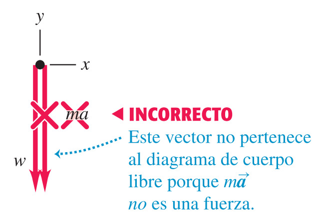


La única fuerza que actúa sobre esta fruta al caer es la atracción gravitacional.

b) Diagrama de cuerpo libre correcto



c) Diagrama de cuerpo libre incorrecto





2.1.5 Carrera de automóviles
2.2 Levantar una caja
2.3 Bajar una caja
2.4 Despegue de cohete
2.5 Máquina de Atwood modificada

Evalúe su comprensión de la sección 5.1 Un semáforo con masa m cuelga de dos cables ligeros, uno a cada lado. Los dos cables cuelgan con un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Qué tensión hay en cada cable? i) $w/2$; ii) $w/\sqrt{2}$; iii) w; iv) $w\sqrt{2}$; v) $2w$.



5.2 Empleo de la segunda ley de Newton: Dinámica de partículas

Ahora podemos analizar problemas de *dinámica,* donde aplicamos la segunda ley de Newton a cuerpos sobre los cuales la fuerza neta *no* es cero, de manera que los cuerpos *no* están en equilibrio sino que tienen aceleración. La fuerza neta es igual a la masa del cuerpo multiplicada por su aceleración:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{(segunda ley de Newton, forma vectorial)} \qquad (5.3)$$

Normalmente usaremos esta relación en su forma de componentes:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \text{(segunda ley de Newton, forma de componentes)} \qquad (5.4)$$

La estrategia que presentaremos en seguida es muy similar a la que seguimos para resolver problemas de equilibrio en la sección 5.1. Estúdiela con detenimiento, vea cómo se aplica en los ejemplos y úsela para resolver los problemas al final del capítulo. Recuerde que *todos* los problemas de dinámica pueden resolverse con esta estrategia.

CUIDADO **$m\vec{a}$ no pertenece a los diagramas de cuerpo libre** Recuerde que la cantidad $m\vec{a}$ es el *resultado* de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, *no* es una fuerza; no es un empujón ni tirón ejercido por algo del entorno. Al dibujar el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo con aceleración (como la fruta de la figura 5.6a), *nunca* incluya "la fuerza $m\vec{a}$" porque *no existe tal fuerza* (figura 5.6b). Repase la sección 4.3 si todavía no le ha quedado claro esto. A veces dibujaremos el vector de aceleración $\vec{a}$ *junto a* un diagrama de cuerpo libre, como en la figura. 5.6b; pero *nunca* lo mostraremos con su cola tocando el cuerpo (posición reservada exclusivamente para las fuerzas que actúan sobre el cuerpo).

Estrategia para resolver problemas 5.2 Segunda ley de Newton: Dinámica de partículas



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Es preciso usar la segunda ley de Newton al resolver *cualquier* problema donde intervengan fuerzas que actúan sobre un cuerpo con aceleración.

Identifique la incógnita, que suele ser una aceleración o una fuerza. Si es otra cuestión, habrá que identificar y usar otro concepto. Por ejemplo, suponga que le piden determinar con qué rapidez se está moviendo un trineo cuando llega al pie de una loma. Ello implica que la incógnita es la velocidad final del trineo. Para obtenerla, primero necesitará usar la segunda ley de Newton para calcular la aceleración del trineo. Después, tendrá que usar las relaciones para aceleración constante de la sección 2.4 y obtener la velocidad a partir de la aceleración.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Haga un dibujo sencillo de la situación. Identifique uno o más cuerpos en movimiento, a los cuales aplicará la segunda ley de Newton.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo identificado, que muestre todas las fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo. Recuerde que la aceleración de un cuerpo depende de las fuerzas que actúan sobre él, *no* de las fuerzas que él ejerce sobre otros objetos. Asegúrese de ser capaz de contestar la pregunta: "¿qué otro cuerpo está aplicando esta fuerza?" para cada fuerza de su diagrama. Además, nunca incluya la cantidad $m\vec{a}$ en su diagrama de cuerpo libre; ¡no es una fuerza!
3. Rotule cada fuerza con un símbolo algebraico para representar su *magnitud*. (Recuerde que las magnitudes siempre son positivas. Los signos menos aparecerán después cuando se obtengan las componentes de las fuerzas.) Por lo regular, una de las fuerzas será el peso del cuerpo; suele ser mejor rotularlo como $w = mg$. Si se da el valor numérico para la masa, se podrá calcular su peso.
4. Elija los ejes de coordenadas x y y para cada objeto y muéstrelos explícitamente en cada diagrama de cuerpo libre. No olvide indicar cuál es la dirección positiva de cada eje. Si conoce la dirección de la aceleración, las cosas normalmente se simplifican si se elige esa dirección como la dirección positiva de uno de los ejes. Si en el problema intervienen dos o más objetos y éstos se aceleran en direcciones distintas, se pueden usar distintos ejes para cada objeto.
5. Identifique cualesquiera otras ecuaciones que podría necesitar, además de la segunda ley de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ (se requiere una ecuación por cada incógnita). Por ejemplo, quizá necesite una o más de las ecuaciones para movimiento con aceleración constante. Si intervienen dos o más cuerpos, podrían existir relaciones entre sus movimientos; por ejemplo, cuando los cuerpos están unidos con una cuerda. Exprese todas esas relaciones en forma de ecuaciones que relacionan las aceleraciones de los distintos cuerpos.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Para cada objeto, determine las componentes de las fuerzas a lo largo de cada eje de coordenadas. Cuando represente una fuerza en términos de sus componentes, marque con una línea ondulada el vector original para recordar no incluirlo dos veces.
2. Para cada objeto, escriba una ecuación aparte para cada componente de la segunda ley de Newton, como en la ecuación (5.4).
3. Haga una lista de todas las cantidades conocidas y desconocidas, identificando las incógnitas.
4. Compruebe que tenga la misma cantidad de ecuaciones como de incógnitas. Si le faltan ecuaciones, retroceda al paso 5 de "Plantear el problema". Si le sobran ecuaciones, tal vez haya una cantidad desconocida que no se identificó como tal.
5. Haga la parte fácil: ¡los cálculos! Despeje las ecuaciones para obtener las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* ¿Su respuesta tiene las unidades correctas? (En su caso, utilice la conversión $1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$.) ¿Tiene el signo algebraico adecuado? (Si el problema se refiere a un trineo que se desliza por una loma, probablemente eligió el eje x positivo de modo que apuntara pendiente abajo. Si después obtiene una aceleración negativa —es decir, pendiente arriba— sabrá que hay algún error en los cálculos.) Si es posible, considere valores específicos o extremos, y compare los resultados con lo que esperaba intuitivamente. Pregúntese: "¿el resultado es congruente?"

Ejemplo 5.6 Movimiento rectilíneo con una fuerza constante

Un velero para hielo descansa en una superficie horizontal sin fricción (figura 5.7a). Sopla un viento constante (en la dirección de los patines del trineo), de modo que 4.0 s después de soltarse el velero adquiere una velocidad de 6.0 m/s (unos 22 km/h o 13 mi/h). ¿Qué fuerza constante F_W ejerce el viento sobre el velero? La masa total del velero más el tripulante es de 200 kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es una de las fuerzas (F_W) que actúan sobre el velero, así que necesitaremos usar la segunda ley de Newton. Esa ley implica fuerzas y aceleración; pero no nos dan la aceleración, así que habrá que calcularla. Se supone que el viento es constante, así que las fuerzas no cambian con el tiempo y la aceleración producida es constante. Esto implica que podremos usar una de las fórmulas de aceleración constante de la sección 2.4.

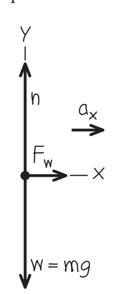
PLANTEAR: La figura 5.7b muestra el diagrama de cuerpo libre para el velero y el tripulante considerados como una unidad. Las fuerzas que actúan sobre este objeto son el peso w, la fuerza normal n ejercida

5.7 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.

a) Velero y tripulante sobre hielo sin fricción



b) Diagrama de cuerpo libre del velero y su tripulante



continúa

por la superficie y la fuerza horizontal F_W (nuestra incógnita). La fuerza neta y por lo tanto la aceleración están dirigidas a la derecha, así que elegimos el eje $+x$ en esa dirección.

Para obtener la aceleración, observe lo que se nos dice acerca del movimiento del velero. Éste parte del reposo, así que su velocidad inicial es $v_{0x} = 0$ y alcanza la velocidad $v_x = 6.0$ m/s después del tiempo transcurrido $t = 4.0$ s. Una ecuación que relaciona la aceleración a_x con esas cantidades es la ecuación (2.8), $v_x = v_{0x} + a_x t$.

EJECUTAR: Las cantidades *conocidas* son la masa $m = 200$ kg, las velocidades inicial y final $v_{0x} = 0$ y $v_x = 6.0$ m/s, y el tiempo transcurrido $t = 4.0$ s. Las tres *incógnitas* son la aceleración a_x, la fuerza normal n y la fuerza horizontal F_W (la incógnita). Por lo tanto, necesitamos tres ecuaciones.

Las primeras dos son las ecuaciones x y y para la segunda ley de Newton. La fuerza F_W tiene la dirección $+x$; en tanto que las fuerzas n y mg tienen las direcciones $+y$ y $-y$, respectivamente. Por lo tanto, tenemos

$$\sum F_x = F_W = ma_x$$
$$\sum F_y = n + (-mg) = 0$$

La tercera ecuación que necesitamos es la relación de aceleración constante

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Para obtener F_W, primero despejamos a_x de la ecuación para aceleración constante y la sustituimos en la ecuación de $\sum F_x$:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = \frac{6.0 \text{ m/s} - 0 \text{ m/s}}{4.0 \text{ s}} = 1.5 \text{ m/s}^2$$
$$F_W = ma_x = (200 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}^2) = 300 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Un kg · m/s^2 equivale a 1 newton (N), así que la respuesta final es

$$F_W = 300 \text{ N} \qquad (\text{unas 67 lb})$$

Observe que no necesitamos la ecuación $\sum F_y$ para obtener F_W. La necesitaríamos si quisiéramos obtener la fuerza normal n:

$$n - mg = 0$$
$$n = mg = (200 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)$$
$$= 2.0 \times 10^3 \text{ N} \qquad (\text{unas 450 lb})$$

EVALUAR: Los valores que obtuvimos para F_W y n tienen unidades correctas de fuerza, como debería ser. La magnitud n de la fuerza normal es igual a mg, el peso combinado del velero y el tripulante, porque la superficie es horizontal y no actúan otras fuerzas verticales. ¿Le parece razonable que la fuerza F_W sea mucho *menor* que mg?

Ejemplo 5.7 Movimiento rectilíneo con fricción

Suponga que hay una fuerza de fricción horizontal constante con magnitud de 100 N que se opone al movimiento del velero del ejemplo 5.6. En este caso, ¿qué fuerza F_W debe ejercer el viento sobre el velero para producir la misma aceleración constante $a_x = 1.5$ m/s^2?

SOLUCIÓN

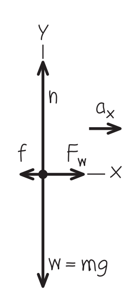
IDENTIFICAR: Una vez más, la incógnita es F_W. Nos dan la aceleración, así que sólo necesitamos la segunda ley de Newton para obtener F_W.

PLANTEAR: La figura 5.8 muestra el nuevo diagrama de cuerpo libre. La única diferencia con respecto a la figura 5.7b es la adición de la fuerza de fricción $\vec{f}$, que apunta en la dirección opuesta al movimiento. (Observe que su *magnitud*, $f = 100$ N, es positiva, pero su *componente* en la dirección x es negativa e igual a $-f$, es decir, -100 N.)

EJECUTAR: Ahora hay dos fuerzas (la del viento y la de fricción) con componente x. La componente x de la segunda ley de Newton da

$$\sum F_x = F_W + (-f) = ma_x$$
$$F_W = ma_x + f = (200 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}^2) + (100 \text{ N}) = 400 \text{ N}$$

5.8 Nuestro diagrama de cuerpo libre del velero y su tripulante con una fuerza de fricción $\vec{f}$ opuesta al movimiento.



EVALUAR: Debido a la fricción, se requiere una fuerza F_W mayor que la del ejemplo 5.6. Necesitamos 100 N para vencer la fricción y 300 N más para dar al velero la aceleración requerida.

Ejemplo 5.8 Tensión en un cable de elevador

Un elevador y su carga tienen masa total de 800 kg (figura 5.9a) y originalmente está bajando a 10.0 m/s; se le detiene con aceleración constante en una distancia de 25.0 m. Calcule la tensión T en el cable de soporte mientras el elevador se está deteniendo.

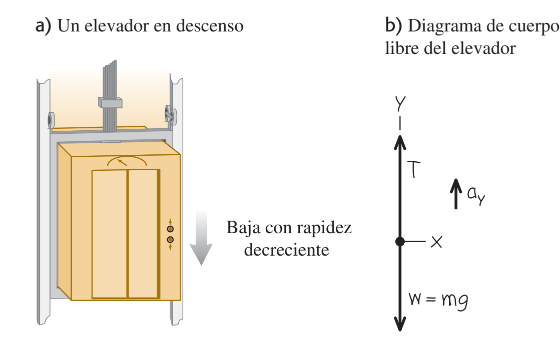
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita es la tensión T, que obtendremos con la segunda ley de Newton. Al igual que en el ejemplo 5.6, tendremos que determinar la aceleración usando las fórmulas de aceleración constante.

PLANTEAR: El diagrama de cuerpo libre de la figura 5.9b muestra las únicas fuerzas que actúan sobre el elevador: su peso w y la fuerza de tensión T del cable. El elevador está bajando con rapidez decreciente, así que su aceleración es hacia arriba; elegimos el eje $+y$ en esa dirección.

El elevador se mueve hacia abajo, en la dirección $-y$. Por lo tanto, su velocidad inicial v_{0y} y su desplazamiento $y - y_0$ son negativos: $v_{0y} = -10.0$ m/s y $y - y_0 = -25.0$ m. La velocidad final es $v_y = 0$. Para obtener la aceleración a_y a partir de esta información, utilizaremos la ecuación (2.13) en la forma $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$. Una vez

5.9 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.



que tengamos a_y, la sustituiremos en la componente y de la segunda ley de Newton, ecuación (5.4).

EJECUTAR: Escribamos primero la segunda ley de Newton. La fuerza de tensión actúa hacia arriba y el peso lo hace hacia abajo, así que

$$\sum F_y = T + (-w) = ma_y$$

Despejamos la incógnita T:

$$T = w + ma_y = mg + ma_y = m(g + a_y)$$

Para determinar a_y, reacomodamos la ecuación de aceleración constante $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$:

$$a_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2(y - y_0)} = \frac{(0)^2 - (-10.0\text{ m/s})^2}{2(-25.0\text{ m})} = +2.00\text{ m/s}^2$$

La aceleración es hacia arriba (positiva), como debería ser en el caso de un movimiento hacia abajo con rapidez decreciente.

Ahora podemos sustituir la aceleración en la ecuación de la tensión:

$$T = m(g + a_y) = (800\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2 + 2.00\text{ m/s}^2)$$
$$= 9440\text{ N}$$

EVALUAR: La tensión es 1600 N *mayor* que el peso. Esto es lógico: debe haber una fuerza neta hacia arriba que produzca la aceleración que detiene el elevador. ¿Nota usted que obtendríamos el mismo valor de T y a_y si el elevador estuviera *ascendiendo* y *aumentando* su rapidez a razón de 2.00 m/s^2?

Ejemplo 5.9 Peso aparente en un elevador con aceleración

Una mujer de 50.0 kg se para en una báscula dentro del elevador del ejemplo 5.8 (figura 5.10a). ¿Qué valor marca la báscula?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La báscula marca la magnitud de la fuerza hacia abajo ejercida *por* la mujer *sobre* la báscula; por la tercera ley de Newton, esto es igual a la magnitud de la fuerza normal hacia arriba ejercida *por* la báscula *sobre* la mujer. Por lo tanto, nuestra incógnita es la magnitud n de la fuerza normal.

Obtendremos n aplicando la segunda ley de Newton a la mujer. Y ya conocemos la aceleración de ésta; es la misma que la aceleración del elevador, que calculamos en el ejemplo 5.8.

PLANTEAR: La figura 5.10b es un diagrama de cuerpo libre para la mujer. Las fuerzas que actúan sobre ella son la fuerza normal n ejercida por la báscula y su peso $w = mg = (50.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 490\text{ N}$.

5.10 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.

a) Mujer en el elevador en descenso

b) Diagrama de cuerpo libre de la mujer

Baja con rapidez decreciente

y

n

a_y

x

w = 490 N

(La fuerza de tensión, que desempeñó un papel protagónico en el ejemplo 5.9, no aparece aquí. Ello se debe a que la tensión no actúa directamente sobre la mujer. Lo que ella siente en sus pies es la báscula que empuja hacia arriba, *no* el cable del elevador.) En el ejemplo 5.9, la aceleración del elevador y la mujer es $a_y = +2.00\text{ m/s}^2$.

EJECUTAR: La segunda ley de Newton da

$$\sum F_y = n + (-mg) = ma_y$$
$$n = mg + ma_y = m(g + a_y)$$
$$= (50.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2 + 2.00\text{ m/s}^2) = 590\text{ N}$$

EVALUAR: El valor obtenido para n implica que, mientras el elevador se está deteniendo, la báscula empuja a la mujer con una fuerza de 590 N hacia arriba. Por la tercera ley de Newton, la mujer empuja la báscula hacia abajo con la misma fuerza, así que la báscula marca 590 N, lo cual son 100 N más que su peso real. La lectura de la báscula es el **peso aparente** de la mujer; ésta *siente* que el piso empuja con mayor fuerza sus pies que cuando el elevador está parado o se mueve a velocidad constante.

¿Qué sentiría la mujer si el elevador estuviera acelerando *hacia abajo*, de modo que $a_y = -2.00\text{ m/s}^2$? Esto sucedería si el elevador estuviera subiendo con rapidez decreciente o bajando con rapidez creciente. Para obtener la respuesta a esta situación, simplemente insertamos el nuevo valor de a_y en nuestra ecuación para n:

$$n = m(g + a_y) = (50.0\text{ kg})[9.80\text{ m/s}^2 + (-2.00\text{ m/s}^2)]$$
$$= 390\text{ N}$$

Ahora la mujer siente que pesa sólo 390 N, 100 N *menos* que su peso real.

El lector puede sentir estos efectos dando unos pasos en un elevador que se está frenando después de descender (cuando su peso aparente es mayor que su verdadero peso w) o que se está frenando después de ascender (cuando su peso aparente es menor que w).

5.11 Los astronautas en órbita sienten “ingravidez” porque tienen la misma aceleración que su nave, *no* porque estén “fuera del alcance de la gravedad terrestre”. (Si la fuerza de gravedad no actuara sobre ellos, los astronautas y su nave no permanecerían en órbita, sino que se internarían en el espacio exterior.)



Peso aparente e ingravidez aparente

Generalicemos el resultado del ejemplo 5.9. Cuando un pasajero de masa m viaja en un elevador con aceleración a_y, una báscula da como peso aparente del pasajero

$$n = m(g + a_y)$$

Cuando el elevador está acelerando hacia arriba, a_y es positiva y n es mayor que el peso del pasajero $w = mg$. Si el elevador acelera hacia abajo, a_y es negativa y n es menor que el peso. Si el pasajero no sabe que el elevador está acelerando, sentirá que su peso cambia y, de hecho, la báscula lo indica.

El caso extremo sucede cuando el elevador tiene una aceleración hacia abajo $a_y = -g$, es decir, cuando está en caída libre. En este caso, $n = 0$ y el pasajero *siente* que no tiene peso. Asimismo, un astronauta en órbita alrededor de la Tierra experimenta *ingravidez aparente* (figura 5.11). En ambos casos, la persona aún tiene peso, porque actúa sobre ella una fuerza gravitacional; sin embargo, el efecto de esta condición de caída libre es el mismo que si el cuerpo estuviera en el espacio exterior sin experimentar gravedad. En ambos casos, la persona y su vehículo (elevador o nave) están cayendo juntos con la misma aceleración g, así que nada empuja a la persona contra el piso o las paredes del vehículo.

Ejemplo 5.10 Aceleración cuesta abajo

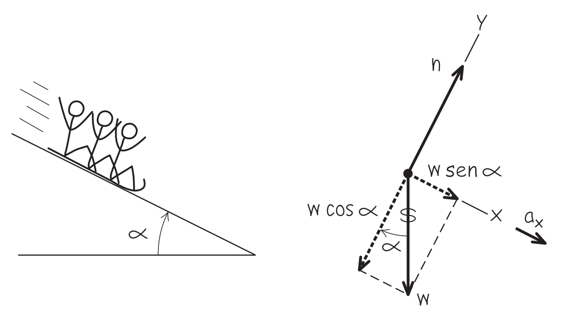
Un trineo cargado de estudiantes en vacaciones (peso total w) se desliza hacia abajo por una larga cuesta nevada. La pendiente tiene un ángulo constante α, y el trineo está tan bien encerado que la fricción es despreciable. ¿Qué aceleración tiene el trineo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es la aceleración, que obtendremos aplicando la segunda ley de Newton. No hay fricción, así que las únicas fuerzas que actúan sobre el trineo son su peso w y la fuerza normal n ejercida por la colina. Al igual que en el ejemplo 5.4 (sección 5.1), la superficie está inclinada de manera que la fuerza normal no es vertical ni es opuesta al peso. Por lo tanto, deberemos usar ambas componentes de $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ en la ecuación (5.4).

PLANTEAR: La figura 5.12 muestra el diagrama de cuerpo libre. Tomamos ejes paralelo y perpendicular a la colina, de modo que la aceleración (que es paralela a la colina) tenga la dirección $+x$.

5.12 Nuestro diagrama para este problema.



EJECUTAR: La fuerza normal sólo tiene componente y, pero el peso tiene tanto componente x como y: $w_x = w\,\text{sen}\,\alpha$ y $w_y = -w\cos\alpha$. (Compare con el ejemplo 5.4, donde la componente x del peso era $-w\,\text{sen}\,\alpha$. La diferencia es que en el ejemplo 5.4 el eje $+x$ era cuesta arriba y en la figura 5.12b es cuesta abajo.) La línea ondulada de la figura 5.12b nos recuerda que descompusimos el peso en sus componentes.

La aceleración es exclusivamente en la dirección $+x$, así que $a_y = 0$. La segunda ley de Newton en forma de componentes nos dice entonces que

$$\sum F_x = w\,\text{sen}\,\alpha = ma_x$$
$$\sum F_y = n - w\cos\alpha = ma_y = 0$$

Dado que $w = mg$, la ecuación para la componente x nos indica que $mg\,\text{sen}\,\alpha = ma_x$, es decir,

$$a_x = g\,\text{sen}\,\alpha$$

Observe que no necesitamos la ecuación de la componente y para obtener la aceleración. ¡Ésa es la ventaja de elegir el eje x en la dirección de la aceleración! Lo que nos da las componentes y es la magnitud de la fuerza normal que la superficie de la colina ejerce sobre el trineo:

$$n = w\cos\alpha = mg\cos\alpha$$

EVALUAR: Observe que la masa no aparece en el resultado de la aceleración, lo cual significa que *cualquier* trineo, sin importar su masa ni su número de pasajeros, se desliza por una colina sin fricción con aceleración g sen α. En particular, si el plano es horizontal, $\alpha = 0$ y $a_x = 0$ (el trineo no se acelera); si el plano es vertical, $\alpha = 90°$ y $a_x = g$ (el trineo está en caída libre).

Observe también que la fuerza normal n no es igual al peso del trineo (compare con el ejemplo 5.4 de la sección 5.1). No necesitamos este resultado aquí, pero será útil después.

CUIDADO **Errores comunes en un diagrama de cuerpo libre** La figura 5.13 muestra tanto una forma común correcta (figura 5.13a) como una *incorrecta* (figura 5.13b) de dibujar el diagrama de cuerpo libre del trineo. El diagrama de la figura 5.13b es incorrecto por dos razones: la fuerza normal debe ser perpendicular a la superficie, y nunca debe incluirse la "fuerza $m\vec{a}$". Si usted recuerda que "normal" significa "perpendicular" y que $m\vec{a}$ no es una fuerza, tendrá siempre buenas posibilidades de dibujar diagramas de cuerpo libre correctos.

5.13 Diagramas correcto e incorrecto para el trineo sobre una colina sin fricción.

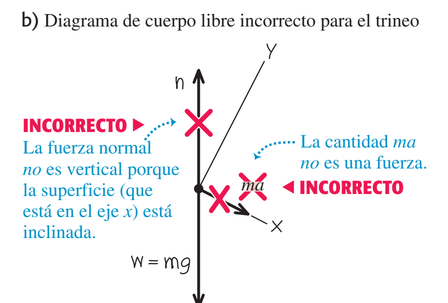
a) Diagrama de cuerpo libre correcto para el trineo

¡CORRECTO! La fuerza normal es perpendicular a la superficie.

Es adecuado dibujar el vector de aceleración adyacente al cuerpo (pero sin tocarlo). ¡CORRECTO!

y, n, a_x, x, w = mg

b) Diagrama de cuerpo libre incorrecto para el trineo



Ejemplo 5.11 Dos cuerpos con la misma aceleración

Imagine que usted empuja una bandeja de 1.00 kg sobre el mostrador del comedor con una fuerza constante de 9.0 N. Al moverse, la bandeja empuja un envase de leche de 0.50 kg (figura 5.14a). La bandeja y el envase se deslizan sobre una superficie horizontal tan grasosa que puede despreciarse la fricción. Obtenga la aceleración del sistema bandeja-envase y la fuerza horizontal que la bandeja ejerce sobre el envase de leche.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestras *dos* incógnitas son la aceleración del sistema bandeja-envase y la fuerza de la bandeja sobre el envase. Usaremos otra vez la segunda ley de Newton; sin embargo, tendremos que aplicarla a dos cuerpos distintos para obtener dos ecuaciones (una para cada incógnita).

PLANTEAR: Hay dos formas de plantear el problema.

Método 1: Podemos tratar a la bandeja (masa m_T) y al envase (masa m_C) como cuerpos individuales, cada uno con su propio diagrama de cuerpo libre (figuras 5.14b y 5.14c). Observe que la fuerza F que usted ejerce sobre la bandeja no aparece en el diagrama de cuerpo libre del envase. Más bien, lo que hace que el envase se acelere es la fuerza de magnitud $F_{T\text{ sobre }C}$ que la bandeja ejerce sobre ella. Por la tercera ley de Newton, el envase ejerce una fuerza de igual magnitud sobre la bandeja: $F_{C\text{ sobre }T} = F_{T\text{ sobre }C}$. Elegimos que la aceleración tenga la dirección $+x$; la bandeja y el envase se mueven con la misma aceleración a_x.

Método 2: Podemos tratar a la bandeja y al envase como un cuerpo compuesto con masa $m = m_T + m_C = 1.50$ kg (figura 5.14d). La única

5.14 Se empujan una bandeja y un envase de leche sobre el mostrador de un comedor.

a) Un envase de leche y una bandeja — $m_C = 0.50$ kg; $F = 9.0$ N; $m_T = 1.00$ kg

b) Diagrama de cuerpo libre para el envase de leche — a_x, y, $F_{T\text{ sobre }C}$, n_C, x, w_C

c) Diagrama de cuerpo libre para la bandeja — y, a_x, n_T, $F_{C\text{ sobre }T} = F_{T\text{ sobre }C}$, x, F, w_T

d) Diagrama de cuerpo libre para el envase y la bandeja como cuerpo compuesto — y, n, a_x, x, F, w

continúa

fuerza horizontal que actúa sobre este cuerpo compuesto es la fuerza F que usted ejerce. Las fuerzas $F_{\text{T sobre C}}$ y $F_{\text{C sobre T}}$ no intervienen porque son *internas* con respecto a este cuerpo compuesto, y la segunda ley de Newton nos dice que sólo las fuerzas *externas* afectan la aceleración de un cuerpo (véase la sección 4.3). Por lo tanto, necesitaremos una ecuación adicional para determinar la magnitud $F_{\text{T sobre C}}$ si empleamos este método; obtenemos esa ecuación aplicando la segunda ley de Newton al envase de leche, igual que en el método 1.

EJECUTAR: *Método 1:* Las ecuaciones de componente x de la segunda ley de Newton para la bandeja y el envase son

$$\text{Bandeja:} \quad \sum F_x = F - F_{\text{C sobre T}} = F - F_{\text{T sobre C}} = m_{\text{T}} a_x$$

$$\text{Envase:} \quad \sum F_x = F_{\text{T sobre C}} = m_{\text{C}} a_x$$

Así, tenemos dos ecuaciones simultáneas con las incógnitas a_x y $F_{\text{T sobre C}}$. (Sólo necesitamos dos ecuaciones, lo cual significa que las componentes y no desempeñan ningún papel en este ejemplo.) Una forma fácil de despejar a_x de las dos ecuaciones es sumarlas; esto elimina $F_{\text{T sobre C}}$ y nos da

$$F = m_{\text{T}} a_x + m_{\text{C}} a_x = (m_{\text{T}} + m_{\text{C}}) a_x$$

y

$$a_x = \frac{F}{m_{\text{T}} + m_{\text{C}}} = \frac{9.0\text{ N}}{1.00\text{ kg} + 0.50\text{ kg}} = 6.0\text{ m/s}^2$$

Sustituimos este valor en la ecuación del envase y obtenemos

$$F_{\text{T sobre C}} = m_{\text{C}} a_x = (0.50\text{ kg})(6.0\text{ m/s}^2) = 3.0\text{ N}$$

Método 2: La componente x de la segunda ley de Newton para el cuerpo compuesto con masa m es

$$\sum F_x = F = m a_x$$

y la aceleración de este cuerpo compuesto es

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{9.0\text{ N}}{1.50\text{ kg}} = 6.0\text{ m/s}^2$$

Ahora examinamos el envase de leche solo y observamos que, si queremos impartirle una aceleración de 6.0 m/s^2, la bandeja deberá ejercer sobre él una fuerza de

$$F_{\text{T sobre C}} = m_{\text{C}} a_x = (0.50\text{ kg})(6.0\text{ m/s}^2) = 3.0\text{ N}$$

EVALUAR: Obtenemos las mismas respuestas con los dos métodos, como debería ser. Para verificar las respuestas, observe que las fuerzas a cada lado de la bandeja son distintas: $F = 9.0$ N a la derecha y $F_{\text{C sobre T}} = 3.0$ N a la izquierda. Por lo tanto, la fuerza neta horizontal sobre la bandeja es $F - F_{\text{C sobre T}} = 6.0$ N, que es exactamente la que se necesita para acelerar una bandeja de 1.00 kg a 6.0 m/s^2.

El método de tratar los dos cuerpos como un solo cuerpo compuesto funciona *únicamente* si los dos cuerpos tienen la misma magnitud *y* dirección de aceleración. Si las aceleraciones son distintas, deberemos tratar los dos cuerpos individualmente, como en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 5.12 Dos cuerpos con la misma magnitud de aceleración

En la figura. 5.15a, un deslizador de masa m_1 se mueve sobre un riel de aire horizontal, sin fricción, en el laboratorio de física. El deslizador está conectado a una pesa de masa m_2 mediante un cordón ligero, flexible e inelástico que pasa por una pequeña polea sin fricción. Calcule la aceleración de cada cuerpo y la tensión en el cordón.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El cordón y la pesa se están acelerando, así que deberemos usar la segunda ley de Newton. Hay *tres* incógnitas: la tensión T en el cordón y las aceleraciones de los dos cuerpos.

PLANTEAR: Los dos cuerpos tienen diferente movimiento, uno horizontal y el otro vertical, así que no podemos considerarlos juntos como hicimos en el ejemplo 5.11. Las figuras 5.15b y 5.15c muestran los diagramas de cuerpo libre y sistemas de ejes correspondientes. Conviene hacer que ambos cuerpos aceleren en la dirección positiva de un eje, por lo que elegimos la dirección $+y$ para la pesa hacia abajo. (Es completamente válido usar diferentes ejes de coordenadas para los dos cuerpos.)

No hay fricción en la polea y consideramos que el cordón no tiene masa, así que la tensión T en el cordón es homogénea: aplica una fuerza de magnitud T a cada cuerpo. (Quizá sea conveniente repasar el ejemplo conceptual 4.10 de la sección 4.5, donde vimos la fuerza de tensión ejercida por un cordón sin masa.) Los pesos son $m_1 g$ y $m_2 g$.

Si bien las *direcciones* de las dos aceleraciones son distintas, sus *magnitudes* son iguales. Ello se debe a que el cordón no se estira; por lo tanto, los dos cuerpos deberán avanzar distancias iguales en tiempos iguales, y así sus rapideces en cualquier instante dado deberán ser iguales. Cuando las rapideces cambian, lo hacen en la misma cantidad en un tiempo dado, de manera que las aceleraciones de los dos cuerpos deben tener la misma magnitud a. Podemos expresar esta relación así

$$a_{1x} = a_{2y} = a$$

Gracias a esta relación, en realidad sólo tenemos *dos* incógnitas: a y la tensión T.

EJECUTAR: Para el deslizador en el riel, la segunda ley de Newton da

$$\text{Deslizador:} \quad \sum F_x = T = m_1 a_{1x} = m_1 a$$

$$\text{Deslizador:} \quad \sum F_y = n + (-m_1 g) = m_1 a_{1y} = 0$$

En el caso de la pesa, las únicas fuerzas que actúan están en la dirección y, así que

$$\text{Pesa:} \quad \sum F_y = m_2 g + (-T) = m_2 a_{2y} = m_2 a$$

5.15 a) La situación. b), c) Nuestro diagrama de cuerpo libre.

a) Aparato

b) Diagrama de cuerpo libre para el deslizador

c) Diagrama de cuerpo libre para la pesa

En estas ecuaciones, hemos usado las relaciones $a_{1y} = 0$ (el deslizador no se acelera verticalmente) y $a_{1x} = a_{2y} = a$ (los dos objetos tienen la misma magnitud de aceleración).

La ecuación x para el deslizador y la ecuación para la pesa nos dan dos ecuaciones simultáneas para las incógnitas T y a:

Deslizador: $T = m_1 a$

Pesa: $m_2 g - T = m_2 a$

Sumamos estas ecuaciones para eliminar T y nos da:

$$m_2 g = m_1 a + m_2 a = (m_1 + m_2)a$$

Así, la magnitud de la aceleración de cada cuerpo es

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

Sustituimos esto en la primera ecuación (la del deslizador) para obtener:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

EVALUAR: La aceleración es menor que g, como se esperaba; la pesa se acelera más lentamente porque la frena la tensión en el cordón.

La tensión T *no* es igual al peso $m_2 g$ de la pesa, sino que es *menor* según el factor $m_1/(m_1 + m_2)$. Si T *fuera igual* a $m_2 g$, la pesa estaría en equilibrio, lo cual no sucede.

CUIDADO **Quizá tensión y peso no sean lo mismo** Es un error común suponer que, si un objeto está unido a un cordón vertical, la tensión en el cordón debe ser igual al peso del objeto. Era así en el ejemplo 5.5, donde la aceleración era cero; ¡pero la situación es distinta en el presente ejemplo! La única estrategia segura consiste en tratar *siempre* la tensión como una variable, del modo como lo hicimos aquí.

Por último, revisemos algunos casos especiales. Si $m_1 = 0$, la pesa caería libremente y no habría tensión en el cordón. Las ecuaciones dan $T = 0$ y $a = g$ cuando $m_1 = 0$. Asimismo, si $m_2 = 0$, no esperamos tensión ni aceleración; en este caso, de hecho, las ecuaciones dan $T = 0$ y $a = 0$.

Evalúe su comprensión de la sección 5.2 Imagine que usted sostiene el deslizador del ejemplo 5.12, de modo que éste y la pesa están inicialmente en reposo. Le da al deslizador un empujón hacia la izquierda en la figura 5.15a y luego lo suelta. El cordón permanece tenso conforme el deslizador se mueve hacia la izquierda, queda instantáneamente en reposo y luego se mueve hacia la derecha. En el instante en que el delsizador tiene velocidad cero, ¿cuál es la tensión en el cordón? i) mayor que en el ejemplo 5.12; ii) la misma que en el ejemplo 5.12; iii) menor que en el ejemplo 5.12, pero mayor que cero; iv) cero.

5.3 Fuerzas de fricción

Hemos visto varios problemas en que un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie que ejerce fuerzas sobre el cuerpo. Siempre que dos cuerpos interactúan por contacto directo de sus superficies, llamamos a dicha interacción *fuerzas de contacto*. La fuerza normal es un ejemplo de fuerza de contacto; en esta sección, veremos con detenimiento otra fuerza de contacto: la fuerza de fricción.

Una fuerza importante en muchos aspectos de nuestra vida es la fricción. El aceite de un motor automotriz reduce la fricción entre piezas móviles; no obstante, sin fricción entre los neumáticos y el asfalto, el automóvil no podría avanzar ni dar vuelta. El arrastre del aire —la fricción ejercida por el aire sobre un cuerpo que se mueve a través de él— reduce el rendimiento del combustible en los autos, pero hace que funcionen los paracaídas. Sin fricción, los clavos se saldrían, las bombillas y tapas de frascos se desatornillarían sin esfuerzo y el hockey sobre hielo sería imposible (figura 5.16).

5.16 El hockey sobre hielo depende crucialmente de que exista justo la cantidad correcta de fricción entre los patines del jugador y el hielo. Si hubiera demasiada fricción, los jugadores se moverían muy lentamente; si la fricción fuera insuficiente, no podrían evitar caerse.

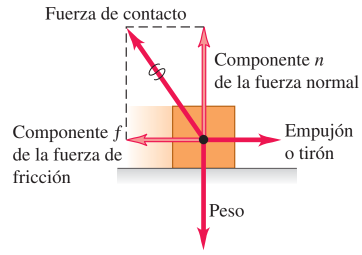


Fricción cinética y estática

Si tratamos de deslizar una caja pesada con libros por el piso, no lo lograremos si no aplicamos cierta fuerza mínima. Luego, la caja comienza a moverse y casi siempre podemos mantenerla en movimiento con menos fuerza que la que necesitamos inicialmente. Si sacamos algunos libros, necesitaremos menos fuerza que antes para poner o mantener en movimiento la caja. ¿Qué podemos afirmar en general acerca de este comportamiento?

Primero, cuando un cuerpo descansa o se desliza sobre una superficie, podemos representar la fuerza de contacto que la superficie ejerce sobre el cuerpo en términos de componentes de fuerza perpendiculares y paralelos a la superficie (figura 5.17). El vector componente perpendicular es la fuerza normal, denotada con $\vec{n}$. El vector componente paralelo a la superficie (y perpendicualr a $\vec{n}$) es la **fuerza de fricción**, denotada con $\vec{f}$. Si la superficie no tiene fricción, entonces $\vec{f}$ será cero pero habrá todavía una fuerza normal. (Las superficies sin fricción son una idealización inasequible, aunque

5.17 Cuando el bloque se empuja o se tira de él sobre una superficie, la superficie ejerce una fuerza de contacto sobre el bloque.





2.5 Camión que tira de una caja
2.6 Empujar una caja hacia arriba contra una pared
2.7 Esquiador que baja una cuesta
2.8 Esquiador y cuerda de remolque
2.10 Camión que tira de dos cajas

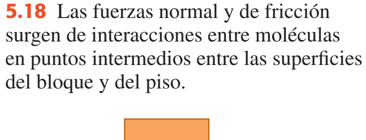
podemos aproximarla si los efectos de la fricción son insignificantes.) La dirección de la fuerza de fricción siempre es opuesta al movimiento relativo de las dos superficies.

El tipo de fricción que actúa cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie es la **fuerza de fricción cinética** $\vec{f}_k$. El adjetivo "cinética" y el subíndice "k" nos recuerdan que las dos superficies se mueven una relativa a la otra. La *magnitud* de esta fuerza suele aumentar al aumentar la fuerza normal. Por ello, se requiere más fuerza para deslizar por el piso una caja llena de libros, que la misma caja vacía. Este principio también se usa en los sistemas de frenos de automóviles; si las zapatas se aprietan con más fuerza contra los discos giratorios, mayor será el efecto de frenado. En muchos casos, la magnitud de la fuerza de fricción cinética f_k experimental es aproximadamente *proporcional* a la magnitud n de la fuerza normal. En tales casos, representamos la relación con la ecuación

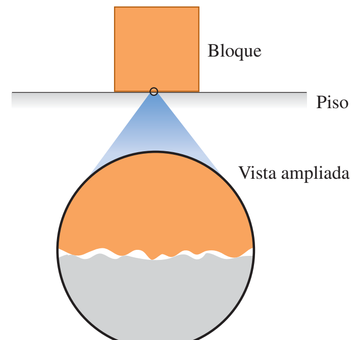
$$f_k = \mu_k n \qquad \text{(magnitud de la fuerza de fricción cinética)} \qquad (5.5)$$

donde μ_k es una constante llamada **coeficiente de fricción cinética**. Cuanto más resbalosa sea una superficie, menor será el coeficiente de fricción. Al ser un cociente de dos magnitudes de fuerza, μ_k es un número puro sin unidades.

CUIDADO **Las fuerzas de fricción y normal siempre son perpendiculares** Recuerde que la ecuación (5.5) *no* es una ecuación vectorial porque $\vec{f}_k$ y $\vec{n}$ siempre son perpendiculares. Más bien, es una relación escalar entre las magnitudes de dos fuerzas.



5.18 Las fuerzas normal y de fricción surgen de interacciones entre moléculas en puntos intermedios entre las superficies del bloque y del piso.



En un nivel microscópico, aun las superficies lisas son ásperas: tienden a "engancharse".

La ecuación (5.5) sólo es una representación aproximada de un fenómeno complejo. En el nivel microscópico, las fuerzas de fricción y la normal se deben a las fuerzas intermoleculares (fundamentalmente eléctricas) entre dos superficies ásperas en los puntos donde entran en contacto (figura 5.18). Al deslizarse una caja sobre el piso, se forman y rompen enlaces entre ambas superficies, y el número total de enlaces varía; por lo tanto, la fuerza de fricción cinética no es perfectamente constante. Si alisamos las superficies, podríamos aumentar la fricción, pues más moléculas podrían interactuar y enlazarse; juntar dos superficies lisas del mismo metal produciría una "soldadura fría". Los aceites lubricantes funcionan porque una película de aceite entre dos superficies (como entre los pistones y cilindros de un motor) evita que entren en contacto realmente.

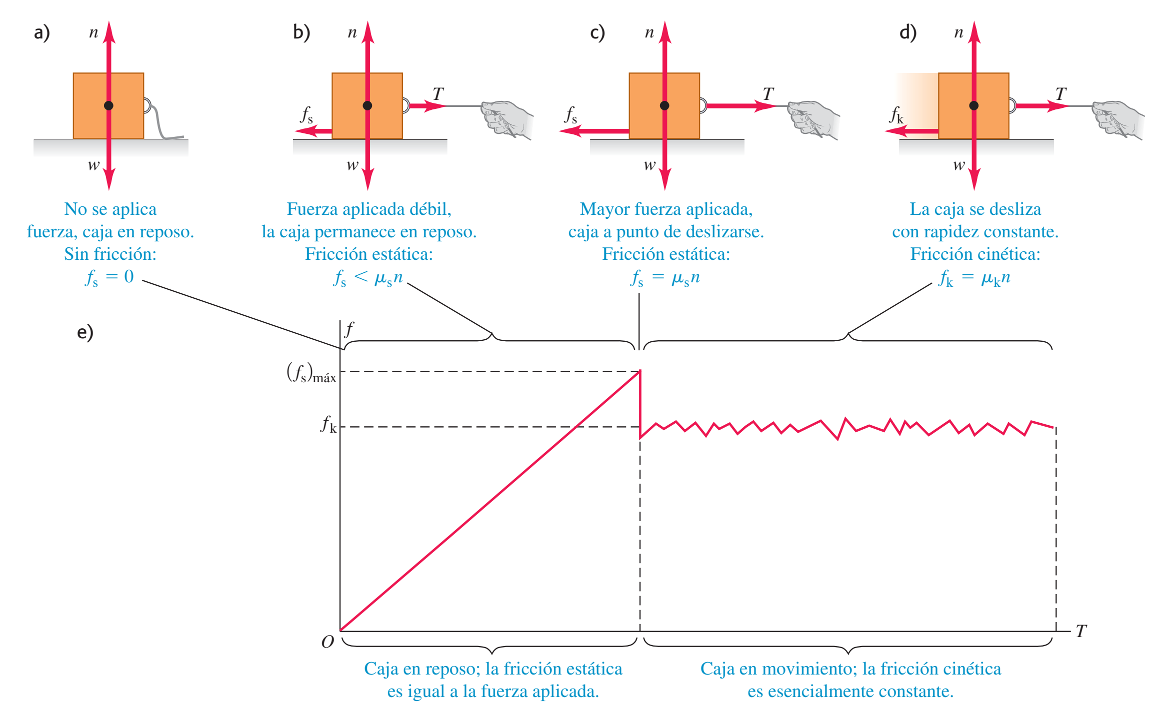
La tabla 5.1 presenta algunos valores representativos de μ_k. Aunque damos dos cifras significativas, son valores aproximados, ya que las fuerzas de fricción también

Tabla 5.1 Coeficientes de fricción aproximados

Materiales	Coeficiente de fricción estática, μ_s	Coeficiente de fricción cinética, μ_k
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Latón sobre acero	0.51	0.44
Zinc sobre hierro colado	0.85	0.21
Cobre sobre hierro colado	1.05	0.29
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.40
Cobre sobre vidrio	0.68	0.53
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Teflón sobre acero	0.04	0.04
Hule sobre concreto (seco)	1.0	0.8
Hule en concreto (húmedo)	0.30	0.25



5.19 a), b), c) Si no hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción estática f_s es igual o menor que $\mu_s n$. d) Si hay movimiento relativo, la magnitud de la fuerza de fricción cinética f_k es igual a $\mu_k n$. e) Gráfica de la magnitud de la fuerza de fricción f en función de la magnitud de la fuerza aplicada T. La fuerza de fricción cinética varía un poco conforme se forman y se rompen los enlaces intermoleculares.



dependen de la rapidez del cuerpo relativa a la superficie. Por ahora, ignoraremos este efecto y supondremos que μ_k y f_k son independientes de la rapidez, para concentrarnos en los casos más sencillos. La tabla 5.1 también da coeficientes de fricción estática, que definiremos en breve.

Las fuerzas de fricción también pueden actuar cuando *no* hay movimiento relativo. Si tratamos de deslizar por el piso la caja con libros, tal vez no se mueva porque el piso ejerce una fuerza de fricción igual y opuesta sobre la caja. Ésta se llama **fuerza de fricción estática** $\vec{f}_s$. En la figura 5.19a, la caja está en reposo, en equilibrio, bajo la acción de su peso $\vec{w}$ y la fuerza normal hacia arriba $\vec{n}$. La fuerza normal es igual en magnitud al peso ($n = w$) y ejercida por el piso sobre la caja. Ahora atamos una cuerda a la caja (figura 5.19b) y gradualmente aumentamos la tensión T en la cuerda. Al principio, la caja no se mueve porque, al aumentar T, la fuerza de fricción estática f_s también aumenta (su magnitud se mantiene igual a T).

En algún momento, T se vuelve mayor que la fuerza de fricción estática f_s máxima que la superficie puede ejercer; después, la caja "se suelta" (la tensión T puede romper las interacciones entre las moléculas de las superficies de la caja y el piso) y comienza a deslizarse. La figura 5.19c muestra las fuerzas cuando T tiene este valor crítico. Si T excede dicho valor, la caja ya no estará en equilibrio. Para un par de superficies dado, el valor máximo de f_s depende de la fuerza normal. Los experimentos han revelado que, en muchos casos, ese valor máximo, llamado $(f_s)_{\text{máx}}$, es aproximadamente *proporcional* a n; llamamos **coeficiente de fricción estática** al factor de proporcionalidad μ_s. En la tabla 5.1 se dan valores representativos de μ_s. En una situación específica, la fuerza de fricción estática real puede tener cualquier magnitud entre cero (cuando no hay otra fuerza paralela a la superficie) y un valor máximo dado por $\mu_s n$. En símbolos,

$$f_s \leq \mu_s n \qquad \text{(magnitud de la fuerza de fricción estática)} \qquad (5.6)$$

Al igual que la ecuación (5.5), ésta es una relación entre magnitudes, *no* de vectores. La igualdad sólo se cumple cuando la fuerza aplicada T alcanza el valor crítico en que el movimiento está a punto de iniciar (figura 5.19c). Si T es menor que este valor (figura 5.19b), se cumple la desigualdad y debemos usar las condiciones de equilibrio $(\sum \vec{F} = \mathbf{0})$ para obtener f_s. Si no se aplica fuerza ($T = 0$), como en la figura 5.19a, tampoco hay fuerza de fricción estática ($f_s = 0$).

Apenas inicia el deslizamiento de la caja (figura 5.19d), la fuerza de fricción suele *disminuir*; es más fácil mantener la caja en movimiento que ponerla en movimiento. Por lo tanto, el coeficiente de fricción cinética suele ser *menor* que el de fricción estática para un par de superficies dado (véase la tabla 5.1). Si comenzamos con cero fuerza aplicada ($T = 0$) y aumentamos gradualmente la fuerza, la fuerza de fricción varía un poco, como se muestra en la figura 5.19e.

En algunas situaciones, las superficies se atoran (fricción estática) y deslizan (fricción cinética) de forma alterna. Esto es lo que causa el molesto rechinamiento de la tiza aplicada con un ángulo inadecuado a una pizarra; o los fenómenos de los limpiaparabrisas cuando el vidrio está casi seco y de los neumáticos que se derrapan en el asfalto. Un ejemplo más positivo es el movimiento de un arco de violín contra una cuerda.

Cuando un cuerpo se desliza sobre una capa de gas, la fricción puede reducirse mucho. En el riel de aire empleado en los laboratorios de física, los deslizadores se apoyan en una capa de aire. La fuerza de fricción depende de la velocidad; sin embargo, a rapideces comunes el coeficiente de fricción efectivo es del orden de 0.001.

Ejemplo 5.13 Fricción en movimiento horizontal

Usted intenta mover una caja de 500 N por un piso horizontal. Para comenzar a moverla, debe tirar con una fuerza horizontal de 230 N. Una vez que la caja "se libera" y comienza a moverse, puede mantenerse a velocidad constante con sólo 200 N. ¿Cuáles son los coeficientes de fricción estática y cinética?

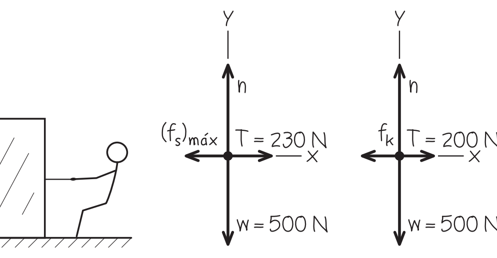
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La caja está en equilibrio si está en reposo o se mueve con velocidad constante, así que usamos la primera ley de Newton expresada por la ecuación (5.2). También necesitaremos las relaciones de las ecuaciones (5.5) y (5.6) para calcular las incógnitas μ_s y μ_k.

PLANTEAR: En ambas situaciones, cuatro fuerzas actúan sobre la caja: la fuerza hacia abajo del peso (magnitud $w = 500$ N), la fuerza normal hacia arriba (magnitud n) ejercida por el suelo, una fuerza de tensión (magnitud T) a la derecha ejercida por la cuerda, y una fuerza de fricción a la izquierda ejercida por el suelo. Las figuras 5.20a y 5.20b muestran el diagrama de cuerpo libre un instante antes de que la caja comience a moverse, cuando la fuerza de fricción estática tiene su máximo valor posible, $(f_s)_{máx} = \mu_s n$. Una vez que la caja se está moviendo hacia la derecha con velocidad constante, la fuerza de fricción cambia a su forma cinética (figura 5.20c). Dado que la cuerda de la figura 5.20a está en equilibrio, la tensión es la misma en ambos extremos. Por lo tanto, la fuerza de tensión que la cuerda ejerce sobre la caja tiene la misma magnitud que la fuerza que usted ejerce sobre la cuerda.

5.20 Nuestros esquemas para este problema.

a) Se tira de una caja
b) Diagrama de cuerpo libre de la caja justo antes de comenzar a moverse
c) Diagrama de cuerpo libre de la caja que se mueve a rapidez constante



EJECUTAR: Justo antes de que la caja comience a moverse (figura 5.20b), tenemos

$$\sum F_x = T + (-(f_s)_{máx}) = 0 \quad \text{así que} \quad (f_s)_{máx} = T = 230\text{ N}$$
$$\sum F_y = n + (-w) = 0 \quad \text{así que} \quad n = w = 500\text{ N}$$

Para obtener el valor de μ_s, entonces, usamos la ecuación (5.6), $(f_s)_{máx} = \mu_s n$. Por lo tanto,

$$\mu_s = \frac{(f_s)_{máx}}{n} = \frac{230\text{ N}}{500\text{ N}} = 0.46$$

Una vez que la caja está en movimiento, las fuerzas son las que se muestran en la figura 5.20c, y tenemos

$$\sum F_x = T + (-f_k) = 0 \quad \text{así que} \quad f_k = T = 200\text{ N}$$
$$\sum F_y = n + (-w) = 0 \quad \text{así que} \quad n = w = 500\text{ N}$$

Ahora usamos $f_k = \mu_k n$ de la ecuación (5.5):

$$\mu_k = \frac{f_k}{n} = \frac{200\text{ N}}{500\text{ N}} = 0.40$$

EVALUAR: Es más fácil mantener la caja en movimiento que comenzar a moverla, por lo que el coeficiente de fricción cinética es menor que el coeficiente de fricción estática.

Ejemplo 5.14 La fricción estática puede tener un valor menor que el máximo

En el ejemplo 5.13, ¿qué fuerza de fricción hay si la caja está en reposo sobre la superficie y se le aplica una fuerza horizontal de 50 N?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza aplicada es menor que la fuerza máxima de fricción estática, $(f_s)_{máx} = 230$ N. Por lo tanto, la caja permanece en reposo y la fuerza neta que actúa sobre ella es cero. La incógnita es la magnitud f_s de la fuerza de fricción.

PLANTEAR: El diagrama de cuerpo libre es el mismo de la figura 5.20b, pero sustituyendo $(f_s)_{máx}$ por f_s y sustituyendo $T = 230$ N por $T = 50$ N.

EJECUTAR: Por las condiciones de equilibrio, ecuación (5.2), tenemos

$$\sum F_x = T + (-f_s) = 0 \qquad \text{así que} \qquad f_s = T = 50 \text{ N}$$

EVALUAR: En este caso, f_s es menor que el valor máximo, $(f_s)_{máx} = \mu_s n$. La fuerza de fricción puede evitar el movimiento con cualquier fuerza horizontal aplicada menor de 230 N.

Ejemplo 5.15 Reducción al mínimo de la fricción cinética

En el ejemplo 5.13, suponga que usted intenta mover la caja atando una cuerda a ella y tira de la cuerda hacia arriba con un ángulo de 30° sobre la horizontal. ¿Qué fuerza debe aplicar al tirar para mantener la caja en movimiento con velocidad constante? ¿Esto es más fácil o difícil que tirar horizontalmente? Suponga que $w = 500$ N y $\mu_k = 0.40$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La caja está en equilibrio porque su velocidad es constante, así que aplicamos de nuevo la primera ley de Newton. Puesto que la caja está en movimiento, el suelo ejerce una fuerza de fricción *cinética.* La incógnita es la magnitud T de la fuerza de tensión.

PLANTEAR: La figura 5.21b es un diagrama de cuerpo libre. La fuerza de fricción cinética f_k sigue siendo igual *a* $\mu_k n$; pero ahora la fuerza normal n *no* es igual en magnitud al peso de la caja. La fuerza ejercida por la cuerda tiene una componente vertical adicional que tiende a levantar la caja del piso.

5.21 Nuestros esquemas para este problema.

a) Se tira de una caja con cierto ángulo

b) Diagrama de cuerpo libre de la caja en movimiento

EJECUTAR: Por las condiciones de equilibrio y la ecuación $f_k = \mu_k n$, tenemos

$$\sum F_x = T\cos 30° + (-f_k) = 0 \qquad \text{así que} \qquad T\cos 30° = \mu_k n$$
$$\sum F_y = T\,\text{sen}\,30° + n + (-w) = 0 \qquad \text{así que} \qquad n = w - T\,\text{sen}\,30°$$

Tenemos dos ecuaciones para las dos incógnitas, T y n. Para resolverlas, podemos eliminar una incógnita y despejar la otra. Hay muchas formas de hacerlo; una es sustituir en la primera ecuación la expresión para n obtenida de la segunda ecuación:

$$T\cos 30° = \mu_k (w - T\,\text{sen}\,30°)$$

Ahora despejamos T de esta ecuación para obtener

$$T = \frac{\mu_k w}{\cos 30° + \mu_k \,\text{sen}\,30°} = 188 \text{ N}$$

Podemos sustituir este resultado en cualquiera de las ecuaciones originales para calcular n. Si usamos la segunda ecuación, obtendremos

$$n = w - T\,\text{sen}\,30° = (500 \text{ N}) - (188 \text{ N})\,\text{sen}\,30° = 406 \text{ N}$$

EVALUAR: La fuerza normal es *menor* que el peso de la caja ($w = 500$ N) porque la componente vertical de la tensión tira de la caja hacia arriba. Aun así, la tensión requerida es un poco menor que la fuerza de 200 N que es preciso aplicar cuando se tira horizontalmente (ejemplo 5.13). Pruebe tirar a 22° y notará que necesita aún menos fuerza (véase el problema de desafío 5.123).

Ejemplo 5.16 Trineo con fricción I

Volvamos al trineo del ejemplo 5.10 (sección 5.2). La cera se desgastó y ahora hay un coeficiente de fricción cinética μ_k que no es cero. La pendiente tiene justo el ángulo necesario para que el trineo baje con rapidez constante. Deduzca una expresión para el ángulo en términos de w y μ_k.

SOLUCIÓN

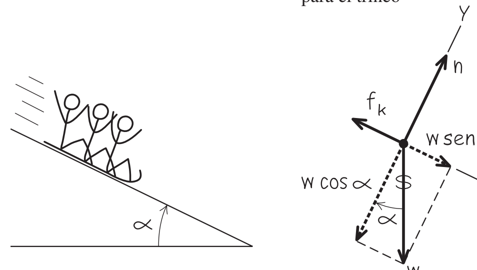
IDENTIFICAR: La incógnita es el ángulo α de la pendiente. El trineo está en equilibrio porque su velocidad es constante, así que usamos la primera ley de Newton. Tres fuerzas actúan sobre el trineo: su peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción cinética. Puesto que el movimiento es cuesta abajo, la fuerza de fricción cinética (que se opone a dicho movimiento) está dirigida cuesta arriba.

PLANTEAR: La figura 5.22 muestra el diagrama de cuerpo libre. Tomamos ejes perpendicular y paralelo a la superficie y descomponemos el peso en sus componentes en estas dos direcciones, como se indica. (Compare con la figura 5.12b del ejemplo 5.10.) La magnitud de la fuerza de fricción está dada por la ecuación (5.5), $f_k = \mu_k n$.

continúa

5.22 Nuestros esquemas para este problema.

a) La situación b) Diagrama de cuerpo libre para el trineo



EJECUTAR: Las condiciones de equilibrio son

$$\sum F_x = w\,\text{sen}\,\alpha + (-f_k) = w\,\text{sen}\,\alpha - \mu_k n = 0$$
$$\sum F_y = n + (-w\cos\alpha) = 0$$

(Usamos la relación $f_k = \mu_k n$ en la ecuación para las componentes x.) Reordenando, obtenemos

$$\mu_k n = w\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{y} \qquad n = w\cos\alpha$$

Al igual que en el ejemplo 5.10, la fuerza normal *n no* es igual al peso *w*. Si dividimos la primera ecuación entre la segunda, obtenemos

$$\mu_k = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \qquad \text{así que} \qquad \alpha = \arctan\mu_k$$

EVALUAR: El peso w no aparece en esta expresión. *Cualquier* trineo, sin importar su peso, bajará una pendiente con rapidez constante, si el coeficiente de fricción cinética es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la pendiente. Cuanto mayor sea el coeficiente de fricción, más empinada deberá ser la pendiente para que el trineo se deslice con velocidad constante.

Ejemplo 5.17 Trineo con fricción II

El mismo trineo con el mismo coeficiente de fricción que en el ejemplo 5.16 *se acelera* hacia abajo por una pendiente más empinada. Deduzca una expresión para la aceleración en términos de g, α, μ_k y w.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El trineo ya no está en equilibrio, pues tiene una aceleración. Por lo tanto, es preciso usar la segunda ley de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, en su forma de componentes, como en la ecuación (5.4). La incógnita es la aceleración cuesta abajo.

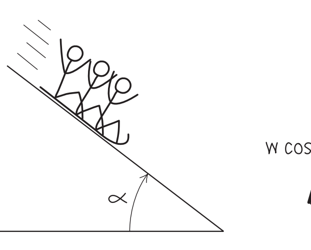
PLANTEAR: La figura 5.23 muestra nuestros esquemas. El diagrama de cuerpo libre (figura 5.23b) es casi el mismo que para el ejemplo 5.16. La componente y de la aceleración del trineo, a_y, sigue siendo cero, pero la componente x, a_x, no lo es.

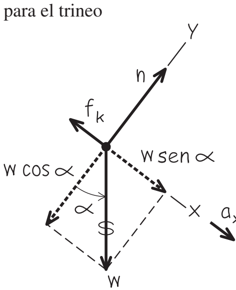
EJECUTAR: Nos conviene expresar el peso como $w = mg$. Entonces, utilizando la segunda ley de Newton en forma de componentes,

$$\sum F_x = mg\,\text{sen}\,\alpha + (-f_k) = ma_x$$
$$\sum F_y = n + (-mg\cos\alpha) = 0$$

5.23 Nuestros esquemas para este problema.

a) La situación b) Diagrama de cuerpo libre para el trineo





De la segunda ecuación y la ecuación (5.5), obtenemos una expresión para f_k:

$$n = mg\cos\alpha$$
$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg\cos\alpha$$

Sustituimos esto en la ecuación de la componente x:

$$mg\,\text{sen}\,\alpha + (-\mu_k mg\cos\alpha) = ma_x$$
$$a_x = g(\text{sen}\,\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

EVALUAR: ¿Es lógico este resultado? Podemos verificar algunos casos especiales. Primero, si la ladera es vertical, $\alpha = 90°$; entonces, $\text{sen}\,\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$ y $a_x = g$. Esto es caída libre, tal como esperaríamos. Segundo, en una ladera con ángulo α sin fricción, $\mu_k = 0$ y $a_x = g\,\text{sen}\,\alpha$. Ésta es la situación del ejemplo 5.10 y felizmente obtenemos el mismo resultado. Ahora supongamos que hay la fricción suficiente para que el trineo se mueva con velocidad constante. En tal caso, $a_x = 0$ y nuestro resultado da

$$\text{sen}\,\alpha = \mu_k\cos\alpha \qquad \text{y} \qquad \mu_k = \tan\alpha$$

Esto concuerda con nuestro resultado del ejemplo 5.16. Por último, observe que podría haber tanta fricción que $\mu_k\cos\alpha$ fuera realmente mayor que $\text{sen}\,\alpha$. En tal caso, a_x sería negativa. Si damos al trineo un empujón cuesta abajo para ponerlo en movimiento, se frenará y finalmente se detendrá.

Prácticamente hemos agotado el problema del trineo, y ello nos da una lección importante. Partimos de un problema sencillo y lo extendimos a situaciones cada vez más generales. Nuestro resultado más general, el de este ejemplo, incluye *todos* los anteriores como casos especiales. No memorice este resultado; sólo sirve para este tipo de problemas. Simplemente trate de entender cómo se obtuvo y qué significa.

Una última variación que el lector podría probar es el caso en que se da al trineo un empujón inicial colina arriba. Ahora se invierte la dirección de la fuerza de fricción cinética, así que la aceleración es distinta del valor cuesta abajo. Resulta que la expresión para a_x es la misma que para la bajada, sólo que el signo menos cambia a más. ¿Puede demostrarlo?

Fricción de rodamiento

Es mucho más fácil mover un archivero lleno de documentos sobre un piso horizontal usando un carrito con ruedas que deslizándolo. ¿Qué tanto más fácil es? Podemos definir un **coeficiente de fricción de rodamiento** μ_r, que es la fuerza horizontal necesaria para lograr rapidez constante en una superficie plana, dividida entre la fuerza normal hacia arriba ejercida por la superficie. Los ingenieros de transporte llaman a μ_r *resistencia a la tracción*, cuyo valor suele ser de 0.002 a 0.003 para ruedas de acero sobre rieles de acero, y de 0.01 a 0.02 para ruedas de caucho sobre concreto. Estos valores explican en parte por qué en general el combustible rinde más en los ferrocarriles que en los camiones.

Ejemplo 5.18 Movimiento con fricción de rodamiento

Un automóvil común pesa unos 12,000 N (aproximadamente 2700 lb). Si el coeficiente de fricción de rodamiento es $\mu_r = 0.015$, ¿qué fuerza horizontal hay que aplicar para impulsar el auto con rapidez constante en un camino horizontal? Ignore la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El automóvil se mueve con velocidad constante, así que tenemos un problema de equilibrio y usaremos la primera ley de Newton. Las cuatro fuerzas que actúan sobre el auto son el peso, la fuerza normal hacia arriba, la fuerza hacia atrás de la fricción de rodamiento y la fuerza desconocida hacia adelante F (la incógnita).

PLANTEAR: El diagrama de cuerpo libre se parece mucho al de la figura 5.20c del ejemplo 5.13; sólo hay que sustituir la fuerza de fricción cinética por la fuerza de fricción de rodamiento f_r; y la fuerza de tensión por la fuerza desconocida F.

EJECUTAR: Al igual que en el ejemplo 5.13, la primera ley de Newton para las componentes *verticales* nos indica que la fuerza normal tiene la misma magnitud que el peso del auto. Entonces, por la definición de μ_r, la fuerza de fricción de rodamiento f_r es

$$f_r = \mu_r n = (0.015)(12{,}000\ \text{N}) = 180\ \text{N} \qquad \text{(unas 40 lb)}$$

La primera ley de Newton para las componentes *horizontales* nos dice que se requiere una fuerza hacia adelante de esta magnitud, para que el auto avance con rapidez constante.

EVALUAR: La fuerza requerida es muy pequeña y, por ello, es posible que uno mismo pueda empujar un automóvil averiado. (Al igual que en el caso del deslizamiento, es más fácil mantener rodando un auto que iniciar su movimiento.) Hemos despreciado los efectos de la resistencia del aire, lo cual es una buena aproximación si el vehículo se mueve lentamente. Sin embargo, a rapideces de autopista, la resistencia del aire tiene un efecto más importante que la fricción de rodamiento.

Intente aplicar este análisis a la caja del ejemplo 5.13. Si la caja se lleva sobre una plataforma con ruedas de hule ($\mu_r = 0.02$), sólo necesitará una fuerza de 10 N para mantenerla en movimiento a velocidad constante. ¿Puede verificarlo?

Resistencia de fluidos y rapidez terminal



2.1.2 Paracaidista

Si usted saca la mano por la ventanilla de un automóvil que viaja con gran rapidez, comprobará la existencia de la **resistencia de un fluido**, que es la fuerza que un fluido (gas o líquido) ejerce sobre un cuerpo que se mueve a través de él. El cuerpo en movimiento ejerce una fuerza sobre el fluido para hacerlo a un lado. Por la tercera ley de Newton, el fluido responde sobre el cuerpo con una fuerza igual y opuesta.

La *dirección* de la fuerza de resistencia de un fluido que actúa sobre un cuerpo siempre es opuesta a la dirección de la velocidad del cuerpo. La *magnitud* de la fuerza de resistencia de un fluido suele aumentar al incrementarse la rapidez del cuerpo en el fluido. Esto es muy diferente de la fuerza de fricción cinética entre dos superficies en contacto, que casi siempre podemos considerar independiente de la rapidez. A rapidez baja, la magnitud f de la fuerza de resistencia del fluido es aproximadamente proporcional a la rapidez v del cuerpo:

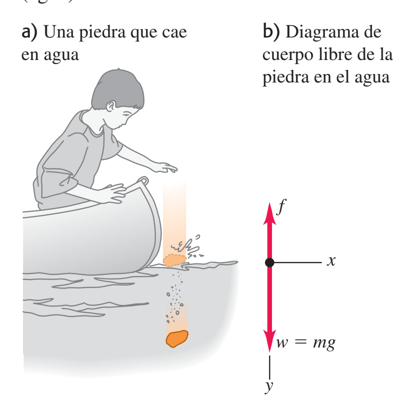
$$f = kv \qquad \text{(resistencia del fluido a baja rapidez)} \tag{5.7}$$

donde k es una constante de proporcionalidad que depende de la forma y el tamaño del cuerpo, y las propiedades del fluido. La fuerza de resistencia es aproximadamente proporcional a v^2, no a v, para la rapidez de una pelota de tenis o una rapidez mayor y se denomina **arrastre del aire** o sólo *arrastre*. Los aviones, las gotas de lluvia y ciclistas experimentan arrastre del aire. En este caso, sustituimos la ecuación (5.7) por

$$f = Dv^2 \qquad \text{(resistencia de fluidos a alta rapidez)} \tag{5.8}$$

Por la dependencia de v^2, el arrastre aumenta rápidamente conforme se incrementa la rapidez. El arrastre sobre un automóvil común es insignificante, pero comparable con la resistencia a la tracción, o mayor que ésta, a velocidades de autopista. El valor de D depende de la forma y el tamaño del cuerpo, y de la densidad del aire. Verifique que las unidades de la constante k en la ecuación (5.7) son $\mathrm{N \cdot s/m}$ o kg/s, y que las unidades de la constante D en la ecuación (5.8) son $\mathrm{N \cdot s^2/m^2}$ o kg/m.

Por los efectos de la resistencia de fluidos, un objeto que cae en un fluido *no* tiene aceleración constante. Para describir su movimiento, no podemos usar las relaciones de aceleración constante del capítulo 2; más bien, debemos partir de la segunda ley de Newton. Consideremos esta situación: suponga que usted suelta una roca en la superficie de un estanque profundo, y cae hasta el fondo (figura 5.24a). En este caso, la fuerza de resistencia del fluido está dada por la ecuación (5.7). ¿Cómo cambian la aceleración, velocidad y posición de la roca con el tiempo?



5.24 Una piedra cae a través de un fluido (agua).

El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5.24b. Tomamos la dirección y positiva hacia abajo e ignoramos cualquier fuerza asociada con la flotabilidad en el agua. Puesto que la piedra se mueve hacia abajo, la rapidez v es igual a la componente y de la velocidad v_y y la fuerza de resistencia del fluido tiene la dirección $-y$. No hay componentes x, así que la segunda ley de Newton da

$$\sum F_y = mg + (-kv_y) = ma_y$$

Al principio, cuando la roca empieza a moverse, $v_y = 0$, la fuerza de resistencia es cero y la aceleración inicial es $a_y = g$. Al aumentar la rapidez, también se incrementa la fuerza de resistencia hasta ser igual en magnitud al peso. Ahora, $mg - kv_y = 0$, la aceleración se vuelve cero y ya no aumenta la rapidez. La rapidez final v_t, llamada **rapidez terminal**, está dada por $mg - kv_t = 0$, es decir,

$$v_t = \frac{mg}{k} \qquad \text{(rapidez terminal, resistencia del fluido } f = kv) \qquad (5.9)$$

La figura 5.25 muestra cómo varían la aceleración, la velocidad y la posición con el tiempo. Al pasar el tiempo, la aceleración se acerca a cero y la velocidad se acerca a v_t (recuerde que elegimos la dirección $+y$ hacia abajo). La pendiente de la gráfica de y contra t se hace constante al hacerse constante la velocidad.

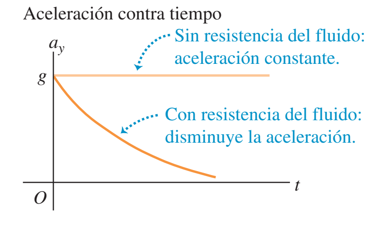
Para saber de dónde salen las curvas de la figura 5.25, debemos obtener la relación entre rapidez y tiempo en el intervalo antes de alcanzarse la rapidez terminal. Volvemos a la segunda ley de Newton, que rescribimos usando $a_y = dv_y/dt$:

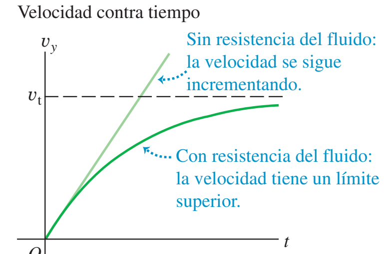
$$m\frac{dv_y}{dt} = mg - kv_y$$

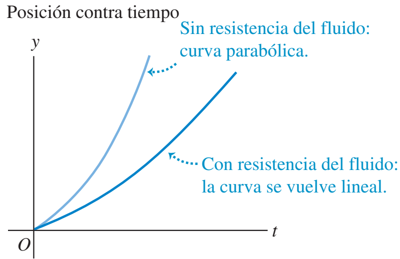
Después de reordenar términos y sustituir mg/k por v_t, integramos ambos miembros, recordando que $v_y = 0$ cuando $t = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv_y}{v_y - v_t} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

5.25 Gráficas de movimiento para un cuerpo que cae sin resistencia del fluido y con resistencia del fluido proporcional a la rapidez.







Que ya integrada da

$$\ln\frac{v_t - v_y}{v_t} = -\frac{k}{m}t \qquad \text{o} \qquad 1 - \frac{v_y}{v_t} = e^{-(k/m)t}$$

y, por último,

$$v_y = v_t\left[1 - e^{-(k/m)t}\right] \tag{5.10}$$

Observe que v_y se hace igual a la rapidez terminal v_t sólo en el límite donde $t \to \infty$; la roca no puede alcanzar la rapidez terminal en un intervalo de tiempo finito.

La derivada de v_y con respecto al tiempo es a_y, y la integral de v_y en el tiempo es y. Dejamos la derivación al lector (véase el ejercicio 5.46); los resultados son

$$a_y = ge^{-(k/m)t} \tag{5.11}$$

$$y = v_t\left[t - \frac{m}{k}\left(1 - e^{-(k/m)t}\right)\right] \tag{5.12}$$

Examine otra vez la figura 5.25, que muestra las gráficas de estas tres relaciones.

Al deducir la rapidez terminal en la ecuación (5.9) supusimos que la fuerza de resistencia del fluido era proporcional a la rapidez. En el caso de un objeto que cae con gran rapidez en el aire, de modo que la resistencia del fluido sea igual a Dv^2 como en la ecuación (5.8), la rapidez terminal se alcanza cuando Dv^2 es igual al peso mg (figura 5.26a). Usted puede demostrar que la rapidez terminal v_t está dada por

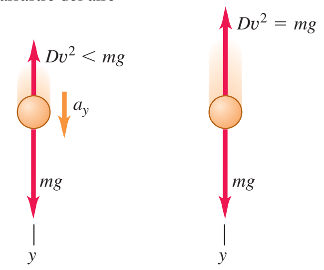
$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}} \qquad \text{(rapidez terminal, resistencia del fluido } f = Dv^2\text{)} \tag{5.13}$$

Esta expresión para la rapidez terminal explica el porqué los objetos pesados tienden a caer en el aire con mayor rapidez que los ligeros. Dos objetos con el mismo tamaño pero con diferente masa (digamos, una pelota de ping-pong y una esfera de acero del mismo radio) tienen la misma D pero diferente valor de m. El objeto con mayor masa tiene mayor rapidez terminal y cae más rápidamente. La misma idea explica por qué una hoja de papel cae más rápidamente si primero la hacemos esfera: la masa es la misma, pero el tamaño más pequeño reduce D (menos arrastre para una rapidez dada) y aumenta v_t. Los paracaidistas usan el mismo principio para controlar su descenso (figura 5.26b).

La figura 5.27 muestra la trayectoria de una pelota de béisbol con y sin arrastre del aire, suponiendo un coeficiente $D = 1.3 \times 10^{-3}$ kg/m (adecuado para una pelota bateada al nivel del mar). Puede verse que tanto el alcance de la pelota como la altura máxima alcanzada son considerablemente menores que los resultados obtenidos cuando se desprecia el arrastre. Así, la trayectoria que calculamos en el ejemplo 3.8 (sección 3.3), ignorando la resistencia del aire, es muy poco realista. ¡El arrastre del aire es un factor importante en el juego de béisbol!

5.26 a) Arrastre del aire y rapidez terminal. b) Al cambiar de posición sus brazos y piernas mientras caen, los paracaidistas pueden alterar el valor de la constante D de la ecuación (5.8) y así ajustar la rapidez terminal de su caída [ecuación (5.13)].

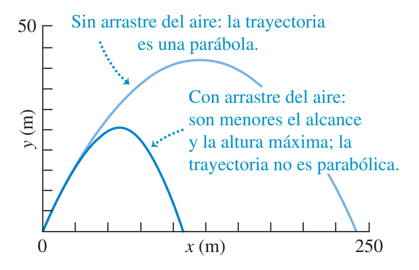
a) Diagramas de cuerpo libre para caída con arrastre del aire



b) Un paracaidista que cae con rapidez terminal



5.27 Trayectorias generadas por computadora de una pelota de béisbol lanzada con un ángulo de 35° sobre la horizontal con una rapidez de 50 m/s. Observe que las escalas de los ejes horizontal y vertical son distintas.



Ejemplo 5.19 Rapidez terminal de un paracaidista

Para un cuerpo humano que cae en el aire con brazos y piernas estirados (figura 5.26b), el valor numérico de la constante D de la ecuación (5.8) es de aproximadamente de 0.25 kg/m. Obtenga la rapidez terminal de un paracaidista ligero de 50 kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo se requiere la relación entre rapidez terminal, masa y coeficiente de arrastre.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (5.13) para obtener la incógnita v_t.

EJECUTAR: Obtenemos $m = 50$ kg:

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{D}} = \sqrt{\frac{(50\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{0.25\text{ kg/m}}}$$
$$= 44\text{ m/s} \qquad (\text{unos } 160\text{ km/h o } 99\text{ mi/h})$$

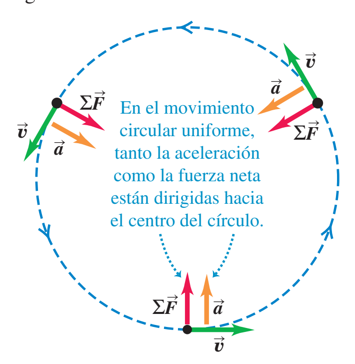
continúa

EVALUAR: La rapidez terminal es proporcional a la raíz cuadrada de la masa del paracaidista, de manera que un paracaidista más robusto, con el mismo coeficiente de arrastre D, pero el doble de masa, tendría una rapidez terminal $\sqrt{2} = 1.41$ veces mayor, o bien, 63 m/s. (Un paracaidista con mayor masa también tendría mayor área frontal y, por lo tanto, un coeficiente de arrastre más grande, por lo que su rapidez terminal sería un poco menor que 63 m/s.) Incluso la rapidez terminal de un paracaidista ligero es bastante alta y su fase de caída no dura mucho. Una caída de 2800 m (9200 ft) hasta la superficie a rapidez terminal sólo tarda (2800 m)/(44 m/s) = 64 s.

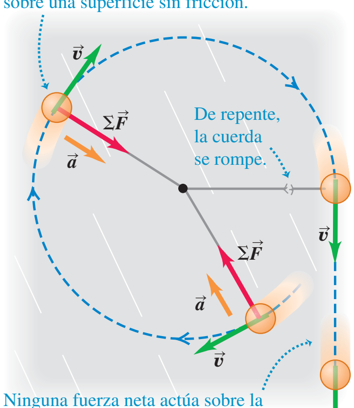
Cuando el paracaidista abre su paracaídas, el valor de D aumenta considerablemente y la rapidez terminal del hombre y el paracaídas se reduce drásticamente, a un valor mucho menor.

Evalúe su comprensión de la sección 5.3 Considere una caja que se coloca sobre superficies distintas. *a*) ¿En qué situación(es) no hay fuerza de fricción actuando sobre la caja? *b*) ¿En qué situación(es) hay una fuerza de fricción *estática* actuando sobre la caja? *c*) ¿En qué situación(es) hay una fuerza de fricción *cinética* sobre la caja? i) La caja está en reposo sobre una superficie horizontal áspera. ii) La caja está en reposo en una superficie inclinada áspera. iii) La caja está sobre la plataforma horizontal y áspera de un camión, el cual se mueve a velocidad constante en una carretera recta y horizontal, en tanto que la caja permanece en el mismo lugar a la mitad de la plataforma. iv) La caja está sobre la plataforma horizontal y áspera de un camión, el cual acelera en una carretera recta y horizontal, en tanto que la caja permanece en el mismo lugar a la mitad de la plataforma. v) La caja está sobre la plataforma horizontal y áspera de un camión, el cual sube una pendiente y la caja se desliza hacia la parte trasera del camión.

5.28 En el movimiento circular uniforme, la aceleración y la fuerza neta están dirigidas hacia el centro del círculo.



5.29 ¿Qué sucede si la fuerza radial hacia adentro repentinamente deja de actuar sobre un cuerpo en movimiento circular?



5.4 Dinámica del movimiento circular

Vimos el movimiento circular uniforme en la sección 3.4, mostrando que, cuando una partícula se mueve en un círculo con rapidez constante, su aceleración siempre es hacia el centro del círculo (perpendicular a la velocidad instantánea). La magnitud a_{rad} de la aceleración es constante y está dada en términos de la rapidez v y el radio R del círculo por

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{5.14}$$

El subíndice "rad" nos recuerda que en cada punto la aceleración siempre es radial hacia el centro del círculo, perpendicular a la velocidad instantánea. En la sección 3.4 explicamos por qué se le denomina *aceleración centrípeta*.

También podemos expresar la aceleración centrípeta a_{rad} en términos del *periodo* T, el tiempo que tarda una revolución:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \tag{5.15}$$

En términos del periodo, a_{rad} es

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{5.16}$$

El movimiento circular uniforme, como todos los movimientos de una partícula, se rige por la segunda ley de Newton. Para hacer que la partícula acelere hacia el centro del círculo, la fuerza neta $\sum\vec{F}$ sobre la partícula debe estar dirigida siempre hacia el centro (figura 5.28). La magnitud de la aceleración es constante, así que la magnitud F_{net} de la fuerza neta también debe ser constante. Si deja de actuar la fuerza neta hacia adentro, la partícula saldrá disparada en una línea recta tangente al círculo (figura 5.29).

La magnitud de la aceleración radial está dada por $a_{rad} = v^2/R$, así que la magnitud F_{net} de la fuerza neta sobre una partícula de masa m, en movimiento circular uniforme, debe ser

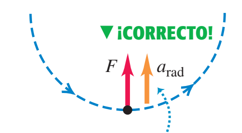
$$F_{net} = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{5.17}$$

El movimiento circular uniforme puede ser resultado de *cualquier* combinación de fuerzas que produzca una fuerza neta $\sum \vec{F}$ de magnitud constante y siempre dirigida hacia el centro del círculo. Observe que el cuerpo necesita moverse alrededor de un círculo completo: la ecuación (5.17) es válida para *cualquier* trayectoria que se considere parte de un arco circular.

CUIDADO **Evite usar "fuerza centrífuga"** La figura 5.30 muestra tanto un diagrama de cuerpo libre correcto para el movimiento circular uniforme (figura 5.30a) como un diagrama común *incorrecto* (figura 5.30b). La figura 5.30b es incorrecta porque incluye una fuerza adicional hacia afuera de magnitud $m(v^2/R)$ para "mantener el cuerpo en equilibrio". Hay tres razones para no incluir tal fuerza hacia fuera, que solemos llamar *fuerza centrífuga* ("centrífuga" significa "que se aleja del centro"). En primer lugar, el cuerpo *no* está en equilibrio; está en movimiento constante con trayectoria circular. Puesto que su velocidad está cambiando constantemente de dirección, el cuerpo está acelerado. En segundo lugar, si *hubiera* una fuerza adicional hacia afuera para equilibrar la fuerza hacia adentro, no habría fuerza neta y el cuerpo se movería en línea recta, no en un círculo (figura 5.29). Y, en tercer lugar, la cantidad $m(v^2/R)$ *no* es una fuerza; corresponde al lado $m\vec{a}$ de $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, y no aparece en $\sum \vec{F}$ (figura 5.30a). Es cierto que un pasajero en un automóvil que sigue una curva en un camino horizontal tiende a deslizarse hacia fuera de la curva, como si respondiera a una "fuerza centrífuga" pero, como vimos en la sección 4.2, lo que realmente sucede es que el pasajero tiende a seguir moviéndose en línea recta, y el costado del auto "choca" contra el pasajero cuando el auto da vuelta (figura 4.11c). *En un marco de referencia inercial no existe ninguna "fuerza centrífuga"*. No volveremos a mencionar este término, y le recomendamos no usarlo nunca.

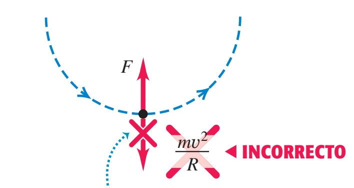
5.30 Diagramas de cuerpo libre a) correcto y b) incorrecto para un cuerpo en movimiento circular uniforme.

a) Diagrama de cuerpo libre correcto



Si incluye la aceleración, dibújela a un lado del cuerpo para indicar que no es una fuerza.

b) Diagrama de cuerpo libre incorrecto



La cantidad mv^2/R *no* es una fuerza; no debe incluirse en un diagrama de cuerpo libre.

Ejemplo 5.20 Fuerza en movimiento circular uniforme

Un trineo con masa de 25.0 kg descansa en una plataforma horizontal de hielo prácticamente sin fricción. Está unido con una cuerda de 5.00 m a un poste clavado en el hielo. Una vez que se le da un empujón, el trineo da vueltas uniformemente alrededor del poste (figura 5.31a). Si el trineo efectúa cinco revoluciones completas cada minuto, calcule la fuerza F que la cuerda ejerce sobre él.

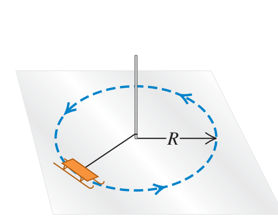
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El trineo está en movimiento circular uniforme, así que tiene una aceleración radial. Aplicaremos al trineo la segunda ley de Newton para determinar la magnitud F de la fuerza que la cuerda ejerce (nuestra incógnita).

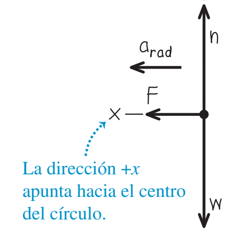
PLANTEAR: La figura 5.31b muestra el diagrama de cuerpo libre del trineo. La aceleración sólo tiene componente x: hacia el centro del círculo; por lo tanto, la denotamos con a_{rad}. No nos dan la aceleración, así que tendremos que determinar su valor con la ecuación (5.14) o con la ecuación (5.16).

5.31 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.

a) Trineo en movimiento circular uniforme



b) Diagrama de cuerpo libre del trineo



La dirección $+x$ apunta hacia el centro del círculo.

EJECUTAR: No hay aceleración en la dirección y, así que la fuerza neta en esa dirección es cero y la fuerza normal y el peso tienen la misma magnitud. Para la dirección x, la segunda ley de Newton da

$$\sum F_x = F = ma_{rad}$$

Podemos obtener la aceleración centrípeta a_{rad} con la ecuación (5.16). El trineo se mueve en un círculo de radio $R = 5.00$ m, con un periodo $T = (60.0\text{ s})/(5\text{ rev}) = 12.0$ s, así que

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2(5.00\text{ m})}{(12.0\text{ s})^2} = 1.37\text{ m/s}^2$$

O bien, podemos usar primero la ecuación (5.15) para calcular la rapidez v:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5.00\text{ m})}{12.0\text{ s}} = 2.62\text{ m/s}$$

Luego, usando la ecuación (5.14),

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{(2.62\text{ m/s})^2}{5.00\text{ m}} = 1.37\text{ m/s}^2$$

Por lo tanto, la magnitud F de la fuerza ejercida por la cuerda es

$$F = ma_{rad} = (25.0\text{ kg})(1.37\text{ m/s}^2)$$
$$= 34.3\text{ kg}\cdot\text{m/s}^2 = 34.3\text{ N}$$

EVALUAR: Se necesitaría una fuerza mayor si el trineo diera vueltas al círculo con mayor rapidez. De hecho, si v aumentara al doble sin cambiar R, F sería cuatro veces mayor. ¿Puede usted demostrarlo? ¿Cómo cambiaría F si v no cambiara pero el radio R aumentara al doble?

Ejemplo 5.21 El péndulo cónico

Un inventor propone fabricar un reloj de péndulo usando una lenteja de masa m en el extremo de un alambre delgado de longitud L. En vez de oscilar, la lenteja se mueve en un círculo horizontal con rapidez constante v, con el alambre formando un ángulo constante β con la vertical (figura 5.32a). Este sistema se llama *péndulo cónico* porque el alambre suspendido forma un cono. Calcule la tensión F_T en el alambre y el periodo T (el tiempo de una revolución de la lenteja) en términos de β.

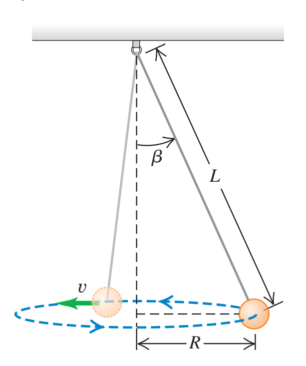
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para obtener las dos incógnitas —la tensión F y el periodo T— necesitamos dos ecuaciones, que serán las componentes horizontal y vertical de la segunda ley de Newton aplicada a la lenteja. Obtendremos la aceleración de la lenteja hacia el centro del círculo utilizando una de las ecuaciones para movimiento circular.

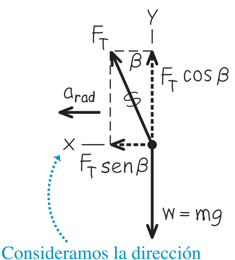
PLANTEAR: La figura. 5.32b muestra el diagrama de cuerpo libre de la lenteja como un sistema de coordenadas. Las fuerzas sobre la lenteja en la posición que se muestra son el peso mg y la tensión F en el alambre. Observe que el centro de la trayectoria circular está en el mismo plano horizontal que la lenteja, *no* el extremo superior del alambre. La componente horizontal de la tensión es la fuerza que produce la aceleración horizontal a_{rad} hacia el centro del círculo.

5.32 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.

a) La situación



b) Diagrama de cuerpo libre de la lenteja



EJECUTAR: La lenteja no tiene aceleración vertical; la aceleración horizontal está dirigida al centro del círculo, así que usamos el símbolo a_{rad}. Las ecuaciones $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ son

$$\sum F_x = F\,\text{sen}\,\beta = ma_{rad}$$
$$\sum F_y = F\cos\beta + (-mg) = 0$$

Tenemos dos ecuaciones simultáneas para las incógnitas F y β. La ecuación para $\sum F_y$ da $F = mg/\cos\beta$; si sustituimos esto en la ecuación de $\sum F_x$ y usando $\text{sen}\,\beta/\cos\beta = \tan\beta$, tendremos

$$\tan\beta = \frac{a_{rad}}{g}$$

Para relacionar β con el periodo T, usamos la ecuación (5.16) para a_{rad}. El radio del círculo es $R = L\,\text{sen}\,\beta$, así que

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 L\,\text{sen}\,\beta}{T^2}$$

Sustituyendo esto en $\tan\beta = a_{rad}/g$, tenemos

$$\tan\beta = \frac{4\pi^2 L\,\text{sen}\,\beta}{gT^2}$$

que podemos reescribir así:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\beta}{g}}$$

EVALUAR: Para una longitud L dada, al aumentar el ángulo β, $\cos\beta$ disminuye, el periodo T se vuelve más pequeño y la tensión $F = mg/\cos\beta$ aumenta. Sin embargo, el ángulo nunca puede ser 90°; pues ello requeriría $T = 0$, $F = \infty$ y $v = \infty$. Un péndulo cónico no sería muy buen reloj porque el periodo depende de forma demasiado directa de β.

Ejemplo 5.22 Vuelta a una curva plana

El automóvil deportivo del ejemplo 3.11 (sección 3.4) va por una curva sin peralte de radio R (figura 5.33a). Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la carretera es μ_s, ¿cuál es la rapidez máxima $v_{máx}$ con que el conductor puede tomarse la curva sin derrapar?

SOLUCIÓN

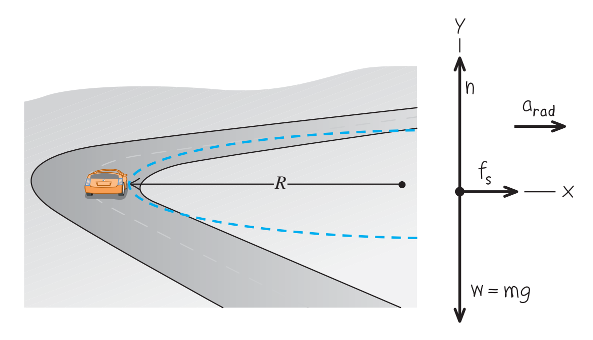
IDENTIFICAR: La aceleración del automóvil al tomar la curva tiene magnitud $a_{rad} = v^2/R$, así que la rapidez máxima $v_{máx}$ (nuestra incógnita) corresponde a la aceleración máxima a_{rad}, y a la fuerza horizontal máxima sobre el auto hacia el centro del camino circular. La única fuerza horizontal que actúa sobre el auto es la fuerza de fricción ejercida por la carretera. Por lo tanto, tendremos que usar la segunda ley de Newton y lo que aprendimos acerca de la fuerza de fricción en la sección 5.3.

PLANTEAR: El diagrama de cuerpo libre de la figura. 5.33b incluye el peso del auto, $w = mg$ y dos fuerzas ejercidas por la carretera: la fuerza normal n y la fuerza de fricción horizontal f. La fuerza de fricción

5.33 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.

a) El auto toma una curva de un camino plano

b) Diagrama de cuerpo libre del auto



debe apuntar hacia el centro de la trayectoria circular para causar la aceleración radial. Puesto que el auto no se mueve en la dirección radial (es decir, no se desliza hacia el centro del círculo ni en la dirección opuesta), la fuerza de fricción es *estática* con una magnitud máxima $f_{máx} = \mu_s n$ [véase la ecuación (5.6)].

EJECUTAR: La aceleración hacia el centro de la trayectoria circular es $a_{rad} = v^2/R$ y no hay aceleración vertical. Entonces,

$$\sum F_x = f = ma_{rad} = m\frac{v^2}{R}$$
$$\sum F_y = n + (-mg) = 0$$

La segunda ecuación muestra que $n = mg$. La primera ecuación muestra que la fuerza de fricción *necesaria* para mantener el auto en su trayectoria circular aumenta con la rapidez del auto. No obstante, la fuerza máxima de fricción *disponible* es $f_{máx} = \mu_s n = \mu_s mg$, y esto determina la rapidez máxima del auto. Si sustituimos $f_{máx}$ por f y $v_{máx}$ por v en la ecuación $\sum F_x$ tenemos

$$\mu_s mg = m\frac{{v_{máx}}^2}{R}$$

así que la rapidez máxima es

$$v_{máx} = \sqrt{\mu_s gR}$$

Por ejemplo, si $\mu_s = 0.96$ y $R = 230$ m, entonces

$$v_{máx} = \sqrt{(0.96)(9.8\ \text{m/s}^2)(230\ \text{m})} = 47\ \text{m/s}$$

lo que equivale a casi 170 km/h (100 mi/h). Ésta es la rapidez máxima para el radio.

EVALUAR: Si la rapidez del auto es menor que $\sqrt{\mu_s gR}$, la fuerza de fricción requerida es menor que el valor máximo $f_{máx} = \mu_s mg$ y el auto puede tomar la curva fácilmente. Si tratamos de tomar la curva con una rapidez *mayor* que la máxima, el auto aún podrá describir un círculo sin derrapar, pero el radio será mayor y el auto se saldrá de la carretera.

Cabe señalar que la aceleración centrípeta máxima (la "aceleración lateral" del ejemplo 3.11) es $\mu_s g$. Si se reduce el coeficiente de fricción, la aceleración centrípeta máxima y $v_{máx}$ también se reducen. Por ello, es mejor tomar las curvas a menor rapidez si el camino está mojado o cubierto de hielo (pues ambas cuestiones reducen el valor de μ_s).

Ejemplo 5.23 Tomar una curva peraltada

Para un automóvil que viaja a cierta rapidez, es posible peraltar una curva con un ángulo tal que los autos que viajan con cierta rapidez no necesiten fricción para mantener el radio con que dan vuelta. El auto podría tomar la curva aun sobre hielo húmedo. (Las carreras de trineos se basan en la misma idea.) Un ingeniero propone reconstruir la curva del ejemplo 5.22 de modo que un auto con rapidez v pueda dar la vuelta sin peligro aunque no haya fricción (figura 5.34a). ¿Qué ángulo de peralte β debería tener la curva?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al no haber fricción, las únicas dos fuerzas que actúan sobre el auto son su peso y la fuerza normal. Puesto que el camino tiene peralte, la fuerza normal (que actúa perpendicular a la superficie del camino) tiene una componente horizontal. Esta componente es la que produce la aceleración horizontal hacia el centro de la trayectoria circular que el auto sigue). Puesto que intervienen fuerzas y aceleración, usaremos la segunda ley de Newton para obtener la incógnita β.

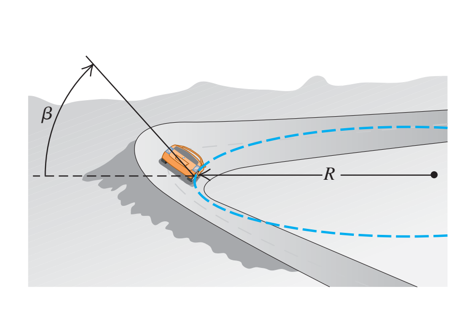
PLANTEAR: Nuestro diagrama de cuerpo libre (figura 5.34b) es muy similar al diagrama del péndulo cónico del ejemplo 5.21 (figura 5.32b). La fuerza normal que actúa sobre el auto desempeña el papel de la tensión que actúa sobre la lenteja del péndulo.

EJECUTAR: La fuerza normal $\vec{n}$ es perpendicular a la carretera y forma un ángulo β con respecto a la vertical; por lo tanto, tiene una componente vertical $n \cos \beta$ y una componente horizontal $n\,\text{sen}\,\beta$, como se indica en la figura 5.34b. La aceleración en la dirección x es la aceleración centrípeta, $a_{rad} = v^2/R$; no hay aceleración en la dirección y. Entonces, las ecuaciones de la segunda ley de Newton

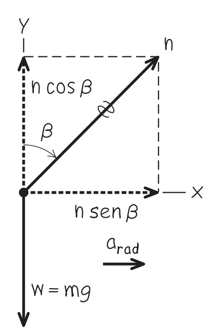
$$\sum F_x = n\,\text{sen}\,\beta = ma_{rad}$$
$$\sum F_y = n\cos\beta + (-mg) = 0$$

5.34 a) La situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre.

a) Un auto toma una curva peraltada



b) Diagrama de cuerpo libre del auto



continúa

De la ecuación $\sum F_y$, $n = mg/\cos\beta$. Si sustituimos esto en la ecuación $\sum F_x$, obtenemos una expresión para el ángulo de peralte:

$$\tan\beta = \frac{a_{rad}}{g}$$

que es la misma expresión que obtuvimos en el ejemplo 5.21. Por último, si sustituimos la expresión $a_{rad} = v^2/R$, obtenemos

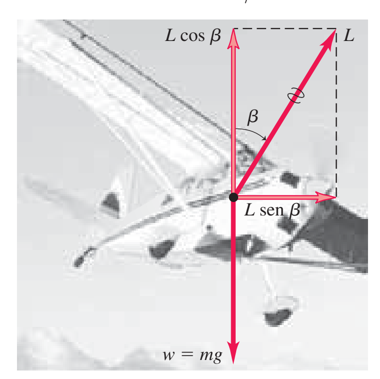
$$\tan\beta = \frac{v^2}{gR}$$

EVALUAR: El ángulo de peralte depende de la rapidez y el radio. Para un radio dado, no hay un ángulo correcto para todas las rapideces. Al diseñar autopistas y ferrocarriles, lo usual es peraltar las curvas para la rapidez media del tráfico. Si $R = 230$ m y $v = 25$ m/s (correspondiente a una rapidez de autopista de 90 km/h o 56 mi/h), entonces,

$$\beta = \arctan\frac{(25\ \text{m/s})^2}{(9.8\ \text{m/s}^2)(230\ \text{m})} = 15°$$

Este resultado está dentro del intervalo de ángulos de peralte usados en autopistas reales. Con el mismo radio y $v = 47$ m/s, como en el ejemplo 5.22, $\beta = 44°$; hay curvas con tanto peralte en las pistas de carreras.

5.35 Un avión se inclina hacia un lado para dar un giro en esa dirección. La componente vertical de la fuerza de sustentación $\vec{L}$ equilibra la fuerza de gravedad; la componente horizontal de $\vec{L}$ causa la aceleración v^2/R.



Activ Online Physics

4.2 Resolución de problemas de movimiento circular

4.3 Carrito que viaja en una trayectoria circular

4.4 Pelota que se balancea en una cuerda

4.5 Automóvil que describe círculos en una pista

Curvas peraltadas y el vuelo de aviones

Los resultados del ejemplo 5.23 también son válidos para un avión cuando da vuelta mientras vuela horizontalmente (figura 5.35). Cuando un avión vuela en línea recta con rapidez constante y sin variar su altitud, su peso se equilibra exactamente con la fuerza de sustentación $\vec{L}$ ejercida por el aire. (La fuerza de sustentación hacia arriba que el aire ejerce sobre las alas es una reacción al empuje hacia abajo que las alas ejercen sobre el aire, al moverse las alas a través de éste.) Para hacer que el avión dé vuelta, el piloto lo inclina hacia un lado para que la fuerza de sustentación tenga una componente horizontal, como en la figura 5.35. (El piloto también altera el ángulo con que las alas "muerden" el aire, de modo que la componente vertical de la sustentación siga equilibrando el peso.) El ángulo de ladeo está relacionado con la rapidez v del avión y con el radio R de la vuelta por la misma expresión que vimos en el ejemplo 5.23: $\tan\beta = v^2/gR$. Si se quiere que el avión dé una vuelta cerrada (R pequeño) con gran rapidez (v grande), $\tan\beta$ deberá ser grande, así que el ángulo de ladeo requerido β se acercará a 90°.

También podemos aplicar los resultados del ejemplo 5.23 al *piloto* de un avión. El diagrama de cuerpo libre del piloto es idéntico al de la figura 5.34b; el asiento ejerce la fuerza normal $n = mg/\cos\beta$ sobre el piloto. Al igual que en el ejemplo 5.9, n es igual al peso aparente del piloto, que es mucho mayor que su peso real mg. En una vuelta cerrada con ángulo de ladeo β grande, el peso aparente del piloto puede ser enorme: $n = 5.8mg$ con $\beta = 80°$ y $n = 9.6mg$ con $\beta = 84°$. Los pilotos llegan a desmayarse en tales vueltas porque el peso aparente de su sangre aumenta en la misma proporción, y el corazón no es lo bastante fuerte como para bombear al cerebro una sangre aparentemente tan "pesada".

Movimiento en un círculo vertical

En los ejemplos 5.20, 5.21, 5.22 y 5.23 el cuerpo se movía en un círculo horizontal. El movimiento en un círculo *vertical* no es diferente en principio; no obstante, hay que tratar con cuidado el peso del cuerpo. El ejemplo que sigue ilustra esa necesidad.

Ejemplo 5.24 Movimiento circular uniforme en un círculo vertical

Un pasajero en una rueda de la fortuna se mueve en un círculo vertical de radio R con rapidez constante v. El asiento permanece vertical durante su movimiento. Deduzca expresiones para la fuerza que el asiento ejerce sobre el pasajero en la parte superior e inferior del círculo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Tanto en la parte superior como inferior del círculo, la incógnita es la magnitud n de la fuerza normal que el asiento ejerce sobre el pasajero. Obtendremos dicha fuerza en cada posición aplicando la segunda ley de Newton y las ecuaciones del movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: La figura 5.36a muestra la velocidad y aceleración del pasajero en las dos posiciones. Observe que la aceleración está dirigida *hacia abajo* cuando se encuentra en la parte superior del círculo; y *hacia arriba* cuando está en la parte inferior. En ambas posiciones, las únicas fuerzas que actúan son verticales: la fuerza normal hacia arriba y la fuerza de gravedad hacia abajo. Por lo tanto, sólo necesitamos la componente vertical de la segunda ley de Newton.

EJECUTAR: Las figuras 5.36b y 5.36c son los diagramas de cuerpo libre para las dos posiciones. Tomamos la dirección $+y$ hacia arriba en ambos casos. Sea n_T la fuerza normal hacia arriba que el asiento

aplica al pasajero en la parte superior del círculo, y n_B la fuerza normal en la parte inferior. En la parte superior, la aceleración tiene magnitud v^2/R, pero su componente vertical es negativa porque su dirección es hacia abajo. Por lo tanto, $a_y = -v^2/R$ y la segunda ley de Newton nos indica que

$$\text{Superior:} \qquad \sum F_y = n_T + (-mg) = -m\frac{v^2}{R}, \qquad \text{es decir,}$$

$$n_T = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

En la parte inferior, la aceleración es hacia arriba, así que $a_y = +v^2/R$ y la segunda ley de Newton es

$$\text{Inferior:} \qquad \sum F_y = n_B + (-mg) = +m\frac{v^2}{R}, \qquad \text{es decir,}$$

$$n_B = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right)$$

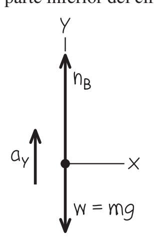
EVALUAR: El resultado obtenido para n_T nos dice que, en la parte superior de la rueda de la fortuna, la fuerza hacia arriba que el asiento aplica al pasajero es *menor* en magnitud que el peso de éste, $w = mg$. Si la rueda gira con tal rapidez que $g - v^2/R = 0$, el asiento *no* aplica fuerza, y el pasajero está a punto de salir disparado. Si v aumenta aún más, n_T se hará negativa, y se requerirá una fuerza *hacia abajo* (como la de un cinturón de seguridad) para mantener al pasajero en el asiento. En cambio, en la parte inferior, la fuerza normal n_B siempre es *mayor que* el peso del pasajero. Se siente que el asiento empuja más firmemente que en reposo. Se observa que n_T y n_B son los valores del *peso aparente* del pasajero en la parte superior e inferior del círculo (véase la sección 5.2).

5.36 Nuestros esquemas para este problema.

a) Esquema de las dos posiciones

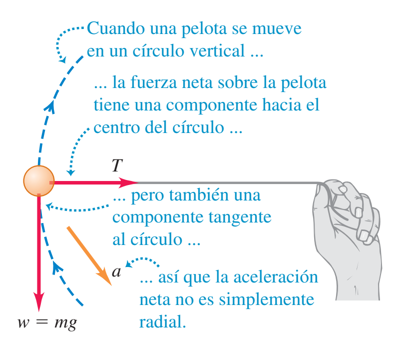
b) Diagrama de cuerpo libre del pasajero en la parte superior del círculo

c) Diagrama de cuerpo libre del pasajero en la parte inferior del círculo



Si atamos un cordón a un objeto y lo hacemos girar en un círculo vertical, no podremos aplicar directamente el análisis del ejemplo 5.24, porque en este caso v *no* es constante; en todos los puntos del círculo salvo en la parte superior e inferior, la fuerza neta (y por ende la aceleración) *no* apunta al centro del círculo (figura 5.37). Así, $\sum\vec{F}$ y $\vec{a}$ tienen una componente tangente al círculo, lo cual significa que la velocidad cambia. Por ello, tenemos un caso de movimiento circular *no uniforme* (véase la sección 3.4). Es más, no podemos usar las fórmulas de aceleración constante para relacionar las rapideces en distintos puntos porque *ni* la magnitud *ni* la dirección de la aceleración son constantes. La mejor forma de obtener dichas relaciones consiste en usar el concepto de energía.

5.37 Pelota que se mueve en un círculo vertical.



Evalúe su comprensión de la sección 5.4 La atracción gravitacional de nuestro planeta mantiene los satélites en órbita. Un satélite en una órbita de radio pequeño se mueve con mayor rapidez que uno en una órbita amplia. Con base en esta información, ¿qué puede usted concluir acerca de la atracción gravitacional de la Tierra sobre el satélite? i) Se incrementa al aumentar la distancia hacia la Tierra. ii) Es la misma en todos los puntos desde la Tierra. iii) Disminuye al aumentar la distancia con respecto al planeta. iv) Por sí misma, esta información no es suficiente para contestar la pregunta.

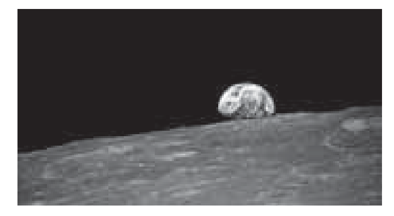
*5.5 Fuerzas fundamentales de la naturaleza

Hemos visto fuerzas de varios tipos —peso, tensión, fricción, resistencia de fluidos y la fuerza normal— y veremos otras más al seguir estudiando física. Pero, ¿cuántas clases distintas de fuerzas hay? Actualmente, se considera que todas las fuerzas son expresiones de tan sólo cuatro clases de fuerzas o interacciones *fundamentales* entre las partículas (figura 5.38). Dos de ellas las conocemos por la experiencia cotidiana; las otras dos implican interacciones entre partículas subatómicas que no podemos observar directamente con nuestros sentidos.

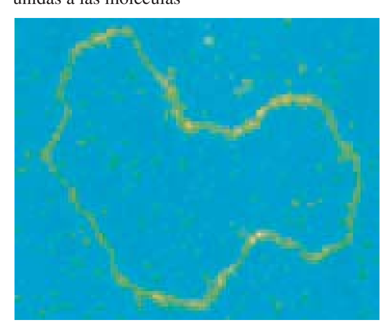
Las **interacciones gravitacionales** incluyen la fuerza familiar del *peso*, que se debe a la acción de la atracción gravitacional terrestre sobre un cuerpo. La mutua atracción gravitacional entre las diferentes partes de la Tierra mantienen a nuestro planeta

5.38 Ejemplos de las interacciones fundamentales en la naturaleza. **a)** La Luna y la Tierra se mantienen unidas y en órbita por las fuerzas gravitacionales. **b)** Esta molécula de DNA de plásmido bacterial se mantiene unida por las fuerzas electromagnéticas entre los átomos. **c)** El Sol brilla porque enormes fuerzas entre partículas en su núcleo hacen que se libere energía. **d)** Cuando una estrella masiva explota en una supernova, una avalancha de energía se libera debido a las interacciones débiles entre las partículas nucleares de la estrella.

a) Las fuerzas gravitacionales mantienen unidos a los planetas



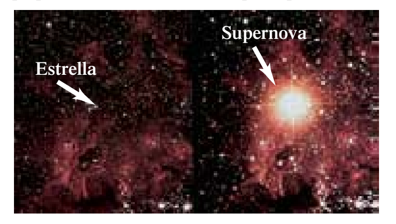
b) Las fuerzas electromagnéticas mantienen unidas a las moléculas



c) Enormes fuerzas liberan energía del Sol



d) Las fuerzas débiles juegan un papel preponderante en las estrellas que explotan



unido (figura 5.38a). Newton reconoció que la atracción gravitacional del Sol mantiene a la Tierra en su órbita casi circular en torno al Sol. En el capítulo 12 estudiaremos las interacciones gravitacionales con mayor detalle y analizaremos su papel crucial en los movimientos de planetas y satélites.

La otra clase cotidiana de fuerzas, las **interacciones electromagnéticas**, incluye las fuerzas eléctricas y magnéticas. Si nos frotamos un peine por el cabello, al final el peine tendrá una carga eléctrica; es posible usar la fuerza eléctrica para atraer trocitos de papel. Todos los átomos contienen carga eléctrica positiva y negativa, así que átomos y moléculas pueden ejercer fuerzas eléctricas unos sobre otros (figura 5.38b). Las fuerzas de contacto, incluidas la normal, la de fricción y la de resistencia de fluidos, son la combinación de todas estas fuerzas ejercidas sobre los átomos de un cuerpo por los átomos de su entorno. Las fuerzas *magnéticas*, como las que se dan entre imanes o entre un imán y un trozo de hierro, son realmente el resultado de cargas eléctricas en movimiento. Por ejemplo, un electroimán causa interacciones magnéticas porque las cargas eléctricas se mueven por sus alambres. Estudiaremos las interacciones eléctricas y magnéticas con detalle en la segunda mitad del libro.

En el nivel atómico o molecular, las fuerzas gravitacionales no son importantes porque las fuerzas eléctricas son muchísimo más intensas: la repulsión eléctrica entre dos protones a cierta distancia es 10^{35} veces más fuerte que su atracción gravitacional. Sin embargo, en cuerpos de tamaño astronómico las cargas positivas y negativas suelen estar presentes en cantidades casi idénticas, y las interacciones eléctricas resultantes casi se anulan. Por ello, las interacciones gravitacionales son la influencia dominante en el movimiento de los planetas y en la estructura interna de las estrellas.

Las otras dos clases de interacciones son menos conocidas. La **interacción fuerte** mantiene unido el núcleo de un átomo. Los núcleos contienen neutrones (eléctricamente neutros) y protones (con carga positiva). La fuerza eléctrica entre protones hace que se repelan mutuamente; la enorme fuerza de atracción entre las partículas nucleares contrarresta esta repulsión y mantiene el núcleo estable. En este contexto, la interacción fuerte también se denomina *fuerza nuclear fuerte*; tiene un alcance mucho menor que las interacciones eléctricas, pero es mucho más fuerte dentro de ese alcance. La interacción fuerte juega un papel fundamental en las reacciones termonucleares que ocurren en el núcleo del Sol, y que generan el calor y su luz (figura 5.38c).

Por último, tenemos la **interacción débil** cuyo alcance es tan pequeño que es relevante sólo a una escala de núcleo o menor. La interacción débil causa una forma común de radioactividad, llamada desintegración beta, en la que un neutrón de un núcleo radioactivo se transforma en protón al tiempo que expulsa un electrón y una partícula casi sin masa llamada antineutrino electrónico. La interacción débil entre un antineutrino y la materia ordinaria es tan tenue que el antineutrino fácilmente podría atravesar una pared de plomo ¡de un millón de kilómetros de espesor! Incluso cuando una estrella gigante sufrió una explosión cataclísmica llamada supernova, la mayoría de la energía fue liberada mediante la interacción débil (figura 5.38d).

En la década de 1960 los físicos elaboraron una teoría que describe las interacciones electromagnética y débil, como aspectos de una sola interacción *electrodébil*. Esta teoría ha superado todas las pruebas experimentales a las que se ha sometido, lo cual motivó a los físicos a realizar intentos similares que describan las interacciones fuerte, electromagnética y débil dentro de una sola *gran teoría unificada* (GUT), y se han dado ciertos pasos hacia una posible unificación de todas las interacciones en una *teoría de todo* (TOE). Tales teorías aún son especulativas, y hay muchas preguntas sin respuesta en este campo de investigación tan activo.

CAPÍTULO 5 RESUMEN

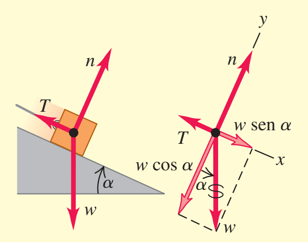
Aplicación de la primera ley de Newton: Cuando un cuerpo está en equilibrio en un marco de referencia inercial, es decir, en reposo o en movimiento con velocidad constante, la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre él debe ser cero (primera ley de Newton). Los diagramas de cuerpo libre son indispensables para identificar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo considerado.

La tercera ley de Newton (acción y reacción) también suele necesitarse en problemas de equilibrio. Las dos fuerzas de un par acción-reacción *nunca* actúan sobre el mismo cuerpo. (Véanse los ejemplos 5.1 a 5.5.)

La fuerza normal ejercida por una superficie sobre un cuerpo *no* siempre es igual al peso del cuerpo. (Véase el ejemplo 5.3.)

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0} \quad \text{(forma vectorial)} \tag{5.1}$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \quad \text{(forma de componentes)} \tag{5.2}$$



Aplicación de la segunda ley de Newton: Si la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo *no* es cero, el cuerpo tiene una aceleración determinada por la segunda ley de Newton.

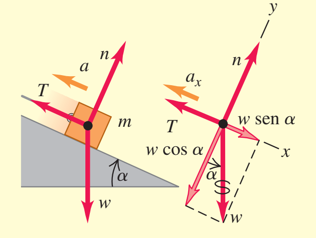
Al igual que en los problemas de equilibrio, los diagramas de cuerpo libre son indispensables para resolver problemas donde interviene la segunda ley de Newton, y la fuerza normal ejercida sobre un cuerpo no siempre es igual a su peso. (Véanse los ejemplos 5.6 a 5.12.)

Forma vectorial:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{5.3}$$

Forma de componentes:

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \tag{5.4}$$



Fricción y resistencia de fluidos: La fuerza de contacto entre dos cuerpos siempre puede representarse en términos de una fuerza normal $\vec{n}$ perpendicular a la superficie de contacto y una fuerza de fricción $\vec{f}$ paralela a la superficie.

Cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie, la fuerza de fricción se denomina fricción *cinética*. Su magnitud f_k es aproximadamente igual a la magnitud de la fuerza normal n multiplicada por μ_k, el coeficiente de fricción cinética. Si un cuerpo *no* se mueve con respecto a la superficie, la fuerza de fricción se denomina fricción *estática*. La *máxima* fuerza de fricción estática posible es aproximadamente igual a la magnitud n de la fuerza normal multiplicada por μ_s, el coeficiente de fricción estática. La fuerza de fricción estática *real* puede variar entre cero y ese valor máximo, según la situación. μ_s suele ser mayor que μ_k para un par de superficies en contacto dado. (Véanse los ejemplos 5.13 a 5.17.)

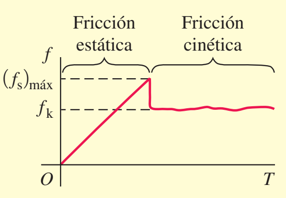
La fricción de rodamiento es similar a la fricción cinética; pero la fuerza de resistencia de fluidos depende de la rapidez de un objeto a través de un fluido. (Véanse los ejemplos 5.18 y 5.19.)

Magnitud de la fuerza de fricción cinética:

$$f_k = \mu_k n \tag{5.5}$$

Magnitud de la fuerza de fricción estática:

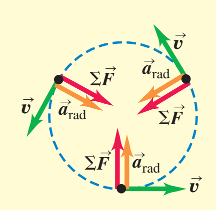
$$f_s \leq \mu_s n \tag{5.6}$$



Fuerzas en el movimiento circular: En el movimiento circular uniforme, el vector aceleración apunta al centro del círculo. El movimiento se rige por la segunda ley de Newton $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. (Véanse los ejemplos 5.20 a 5.24.)

Aceleración en movimiento circular uniforme:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{5.14), (5.16}$$



Términos clave

peso aparente, *145*
fuerza de fricción, *149*
fuerza de fricción cinética, *150*
coeficiente de fricción cinética, *150*
fuerza de fricción estática, *151*
coeficiente de fricción estática, *151*
coeficiente de fricción de rodamiento, *155*
resistencia de un fluido, *155*
arrastre del aire, *155*
rapidez terminal, *156*
interacción gravitacional, *163*
interacción electromagnética, *164*
interacción fuerte, *164*
interacción débil, *164*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Ninguna ya que la fuerza hacia arriba del aire tiene la *misma* magnitud que la fuerza de gravedad. Aunque el ave asciende, su velocidad vertical es constante, así que su aceleración vertical es cero. Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre el ave también debe ser cero, en tanto que las fuerzas verticales individuales deben equilibrarse.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

5.1 Respuesta: ii) Los dos cables están dispuestos de forma simétrica, así que la tensión en cada uno tiene la misma magnitud T. La componente vertical de la tensión de cada cable es T sen 45° (o, de manera equivalente, $T\cos 45°$), así que la primera ley de Newton aplicada a las fuerzas verticales nos dice que $2T \text{ sen } 45° - w = 0$. Por lo tanto, $T = w/(2 \text{ sen } 45°) = w/\sqrt{2} = 0.71w$. Cada cable soporta la mitad del peso del semáforo, pero la tensión es mayor que $w/2$ porque sólo la componente vertical de la tensión contrarresta el peso.

5.2 Respuesta: ii) No importa cuál sea la velocidad instantánea del deslizador, su aceleración es constante y tiene el valor que se calculó en el ejemplo 5.12. De la misma forma, la aceleración de un cuerpo en caída libre es la misma si asciende o desciende, o en el punto máximo de su movimiento (véase la sección 2.5).

5.3 Respuestas a *a*): i), iii); respuestas a *b*): ii), iv); respuesta a c): v) En las situaciones i) y iii) La caja no acelera (así que la fuerza neta sobre ella debe ser cero) y no hay otra fuerza que actúe paralela a la superficie horizontal; por lo tanto, no se requiere fuerza de fricción para evitar el deslizamiento. En las situaciones ii) y iv) la caja comenzaría a deslizarse sobre la superficie si no hubiera fricción, así que la fuerza de fricción estática debe actuar para evitarlo. En la situación v), la caja se desliza sobre una superficie áspera, por lo que la fuerza de fricción cinética actúa sobre ella.

5.4 Respuesta: iii) Un satélite con masa m que da vuelta a la Tierra con rapidez v en una órbita de radio r tiene una aceleración de magnitud v^2/r, así que la fuerza neta de la gravedad terrestre que actúa sobre él tiene magnitud $F = mv^2/r$. Cuanto más lejos está el satélite de la Tierra, mayor será el valor de r, menor será el valor de v y, por ende, menores serán los valores de v^2/r y de F. En otras palabras, la fuerza gravitacional de la Tierra disminuye al aumentar la distancia.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P5.1. Un hombre se sienta en una silla suspendida de una cuerda, la cual pasa por una polea suspendida del techo, y el hombre sujeta con su mano el otro extremo de la cuerda. ¿Qué tensión hay en la cuerda y qué fuerza ejerce la silla sobre el hombre? Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el hombre.

P5.2. "En general, la fuerza normal no es igual al peso." Dé un ejemplo en que ambas fuerzas tengan la misma magnitud y al menos dos ejemplos donde no sea así.

P5.3. Se tiende un cordón entre dos palos. Por más que se estira el cordón, siempre cuelga un poco en el centro. Explique por qué.

P5.4. Se conduce un automóvil cuesta arriba con rapidez constante. Analice las fuerzas que actúan sobre el auto. ¿Qué lo empuja cuesta arriba?

P5.5. Por razones médicas, es importante que los astronautas en el espacio exterior determinen su masa corporal a intervalos regulares. Invente una forma de medir la masa en un entorno de aparente ingravidez.

P5.6. Al empujar una caja rampa arriba, ¿se requiere menos fuerza si se empuja horizontalmente o si se empuja paralelo a la rampa? ¿Por qué?

P5.7. Una mujer en un elevador suelta su maletín pero éste no cae al piso. ¿Cómo se está moviendo el elevador?

P5.8. Las básculas pueden dividirse en las que usan resortes y las que usan masas estándar para equilibrar masas desconocidas. ¿Cuál grupo sería más exacto en una nave espacial en aceleración? ¿Y en la Luna?

P5.9. Al apretar una tuerca en un perno, ¿cómo aumentamos la fuerza de fricción? ¿Cómo funciona una rondana (arandela) de presión?

P5.10. Un bloque descansa sobre un plano inclinado con suficiente fricción para que no resbale. Para empezar a mover el bloque, ¿es más fácil empujarlo plano arriba o plano abajo? ¿Por qué?

P5.11. Una caja con libros descansa en un piso horizontal. Para deslizarla sobre el piso con velocidad constante, ¿por qué se ejerce una fuerza menor si se tira de ella con un ángulo θ sobre la horizontal, que si se empuja con el mismo ángulo bajo la horizontal?

P5.12. En un mundo sin fricción, ¿cuál de las siguientes actividades podría usted hacer (o no hacer)? Explique su razonamiento. *a*) Manejar por una curva de autopista sin peralte; *b*) saltar en el aire; *c*) empezar a caminar en una acera horizontal; *d*) subir por una escalera vertical; *e*) cambiar de carril en una carretera.

P5.13. Caminar sobre una superficie resbalosa cubierta de hielo puede ser más cansado que caminar sobre pavimento común. ¿Por qué?

P5.14. Al pararnos descalzos en una tina húmeda, nos sentimos firmes, pero es muy posible que resbalemos peligrosamente. Analice la situación en términos de los dos coeficientes de fricción.

P5.15. Imagine que empuja una caja grande desde la parte trasera de un elevador de carga hacia el frente, mientras el elevador viaja al siguiente piso. ¿En qué situación la fuerza que debe aplicar para mover la caja es mínima y en qué situación es máxima: cuando el elevador está acelerando hacia arriba, cuando está acelerando hacia abajo o cuando viaja con rapidez constante? Explique su respuesta.

P5.16. La Luna acelera hacia la Tierra. ¿Por qué no se acerca más hacia nosotros?

P5.17. Una revista de automóviles llama a las curvas de radio decreciente “la maldición del conductor dominguero”. Explique por qué.

P5.18. A menudo se escucha a la gente decir “la fricción siempre se opone al movimiento”. Mencione al menos un ejemplo donde *a*) la fricción estática *provoque* movimiento y *b*) la fricción cinética *provoque* movimiento.

P5.19. Si hay una fuerza neta sobre una partícula en movimiento circular uniforme, ¿por qué no cambia la rapidez de la partícula?

P5.20. Una curva de un camino tiene un peralte calculado para 80 km/h. Sin embargo, el camino tiene hielo, y usted cuidadosamente planea conducir más despacio que ese límite. ¿Qué puede sucederle a su automóvil? ¿Por qué?

P5.21. Usted hace girar una pelota en el extremo de un cordón ligero en un círculo horizontal con rapidez constante. ¿Puede el cordón estar realmente horizontal? Si acaso, ¿el cordón estaría arriba o abajo de la horizontal? ¿Por qué?

P5.22. No se incluyó la fuerza centrífuga en los diagramas de cuerpo libre de las figuras 5.34b y 5.35. Explique por qué.

P5.23. Frente a su grupo, un profesor gira un tapón de hule en un círculo horizontal en el extremo de un cordón y le dice a Carolina, quien está sentada en la primera fila del aula, que soltará el cordón cuando el tapón esté directamente frente al rostro de ella. ¿Debería preocuparse Carolina?

P5.24. Para que las fuerzas sobre los pasajeros no sean excesivas, los juegos de feria que describen un lazo vertical se diseñan de manera que el lazo, en vez de ser un círculo perfecto, tenga un radio de curvatura mayor abajo que arriba. Explique por qué.

P5.25. Se deja caer una pelota de tenis, desde el reposo, de la parte superior de un cilindro alto de vidrio, primero con el cilindro evacuado de modo que no haya resistencia del aire y, luego, con el cilindro lleno de aire. Se toman fotografías con destello múltiple de ambas caídas. Por las fotografías, ¿cómo puede usted saber cuál es cuál? ¿O no es posible saberlo?

P5.26. Si usted lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba con rapidez v_0, ¿cómo será su rapidez, cuando regrese al punto de lanzamiento, en comparación con v_0 *a*) en ausencia de resistencia del aire? *b*) ¿Y en presencia de resistencia del aire? Explique su respuesta.

P5.27. Usted lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba. Si *no* se desprecia la resistencia del aire, compare el tiempo que tarda la pelota en alcanzar su altura máxima con el tiempo que tarda en volver al punto de lanzamiento. Explique su respuesta.

P5.28. Imagine que toma dos pelotas de tenis idénticas y llena una de agua. Deja caer las dos pelotas simultáneamente desde la azotea de un edificio alto. Si la resistencia del aire es insignificante, ¿cuál pelota llegará primero al piso? Explique. ¿Y si la resistencia del aire *no* es insignificante?

P5.29. Se suelta una pelota desde el reposo y experimenta la resistencia del aire mientras cae. ¿Cuál de las gráficas de la figura 5.39 representa mejor su aceleración en función del tiempo?

P5.30. Se suelta una pelota desde el reposo y experimenta la resistencia del aire mientras cae. ¿Cuál de las gráficas de la figura 5.40 representa mejor su componente de velocidad vertical en función del tiempo?

P5.31. ¿Cuándo puede una pelota de béisbol en vuelo tener una aceleración con una componente positiva hacia arriba? Explique en términos de las fuerzas sobre la pelota y también de las componentes de velocidad comparadas con la rapidez terminal. *No* desprecie la resistencia del aire.

P5.32. Cuando una pelota bateada se mueve con arrastre del aire, ¿recorre una distancia horizontal mayor mientras sube a su altura máxima o mientras baja al suelo? ¿O es igual la distancia horizontal en ambas partes de la trayectoria? Explique en términos de las fuerzas que actúan sobre la pelota.

Figura 5.39 Pregunta P5.29.

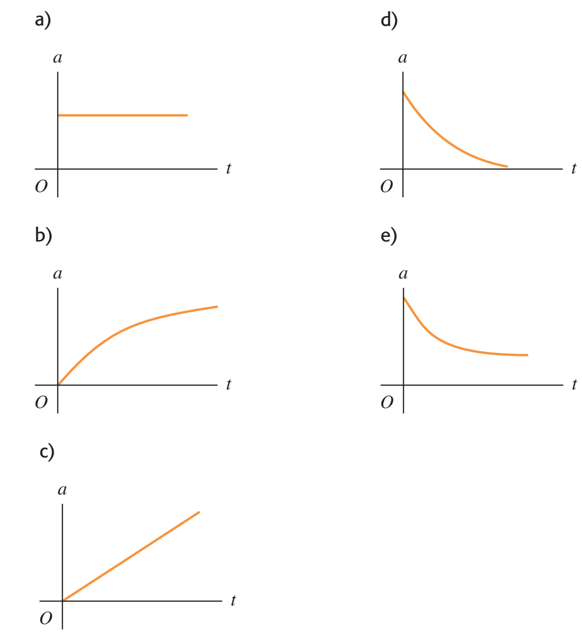
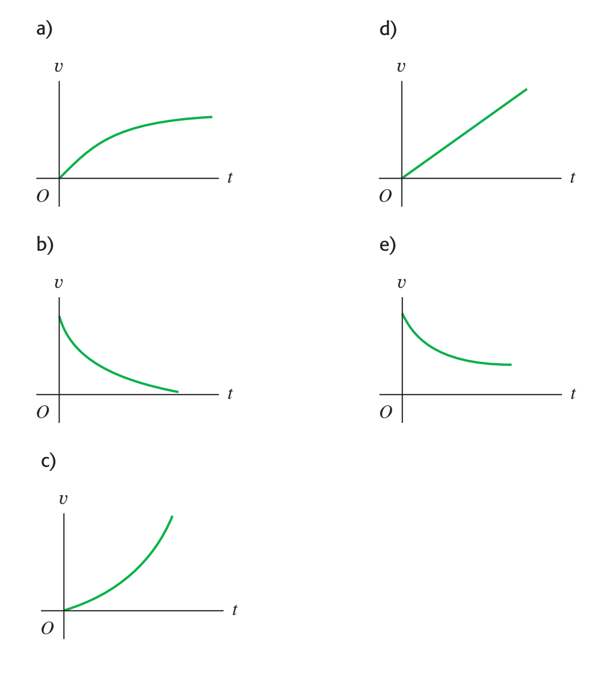


Figura 5.40 Pregunta P5.30.



P5.33. “Se lanza una pelota del borde de un risco alto. Sea cual fuere el ángulo con que se lance, la resistencia del aire hará que llegue un momento en que la pelota caiga verticalmente.” Justifique esta afirmación.

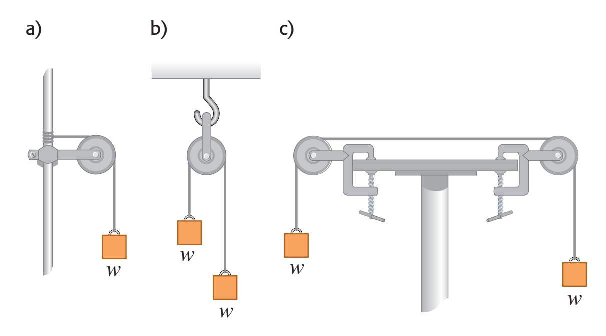
Ejercicios

Sección 5.1 Aplicación de la primera ley de Newton: partículas en equilibrio

5.1. Dos pesos de 25.0 N cuelgan de los extremos opuestos de una cuerda que pasa por una polea ligera sin fricción. La polea está sujeta a una cadena fijada en el techo. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda? *b*) ¿Qué tensión hay en la cadena?

5.2. En la figura 5.41, los bloques suspendidos de la cuerda tienen ambos peso w. Las poleas no tienen fricción y el peso de las cuerdas es despreciable. En cada caso, calcule la tensión T en la cuerda en términos del peso w. En cada caso, incluya el(los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener la respuesta.

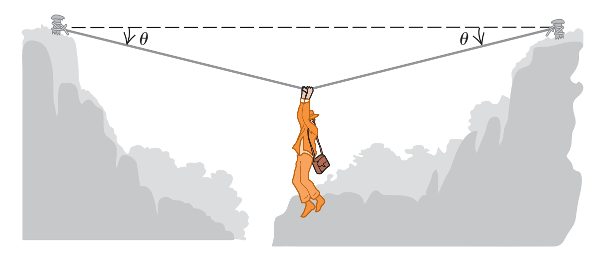
Figura **5.41** Ejercicio 5.2.



5.3. Una bola para demolición de 75.0 kg cuelga de una cadena uniforme de uso pesado, cuya masa es de 26.0 kg. *a*) Calcule las tensiones máxima y mínima en la cadena. *b*) ¿Cuál es la tensión en un punto a tres cuartos de distancia hacia arriba desde la parte inferior de la cadena?

5.4. Un arqueólogo audaz cruza, mano sobre mano, de un risco a otro colgado de una cuerda estirada entre los riscos. Se detiene a la mitad para descansar (figura 5.42). La cuerda se romperá si su tensión excede 2.50×10^4 N, y la masa de nuestro héroe es de 90.0 kg. *a*) Si el ángulo θ es 10.0°, calcule la tensión en la cuerda. *b*) ¿Qué valor mínimo puede tener θ sin que se rompa la cuerda?

Figura **5.42** Ejercicio 5.4.



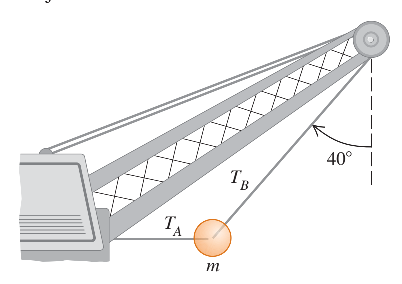
5.5. Un cuadro colgado en una pared pende de dos alambres sujetos a sus esquinas superiores. Si los alambres forman el mismo ángulo con la vertical, ¿cuánto medirá el ángulo si la tensión en los alambres es igual a 0.75 del peso del cuadro? (Ignore la fricción entre la pared y el cuadro.)

5.6. Resuelva el problema del ejemplo 5.5 tomando el eje y vertical, y el x horizontal. ¿Obtiene las mismas respuestas con estos ejes?

5.7. En San Francisco hay calles que forman un ángulo de 17.5° con la horizontal. ¿Qué fuerza paralela a la calle se requiere para impedir que un Corvette 1967 con masa de 1390 kg ruede cuesta abajo en una calle así?

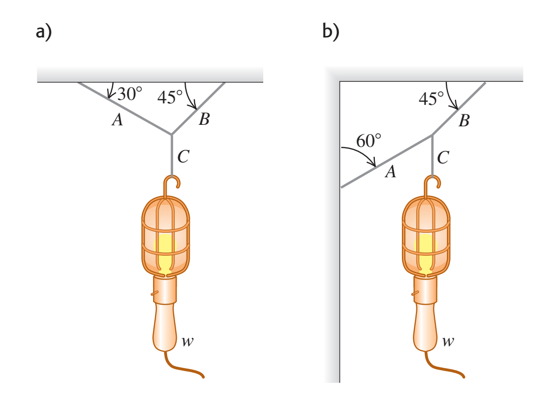
5.8. Una gran bola para demolición está sujeta por dos cables de acero ligeros (figura 5.43). Si su masa m es de 4090 kg, calcule *a*) la tensión T_B en el cable que forma un ángulo de 40° con la vertical. *b*) Calcule la tensión T_A en el cable horizontal.

Figura **5.43** Ejercicio 5.8.



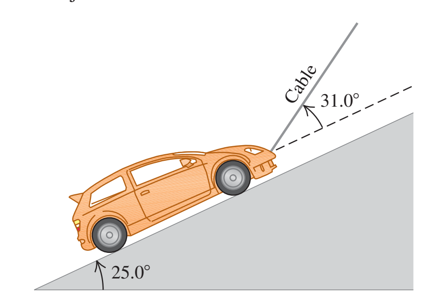
5.9. Calcule la tensión en cada cordón de la figura 5.44 si el peso del objeto suspendido es w.

Figura **5.44** Ejercicio 5.9.



5.10. Sobre una rampa muy lisa (sin fricción), un automóvil de 1130 kg se mantiene en su lugar con un cable ligero, como se muestra en la figura 5.45. El cable forma un ángulo de 31.0° por arriba de la superficie de la rampa, y la rampa misma se eleva a 25.0° por arriba de la horizontal. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el auto. *b*) Obtenga la tensión en el cable. *c*) ¿Qué tan fuerte empuja la superficie de la rampa al auto?

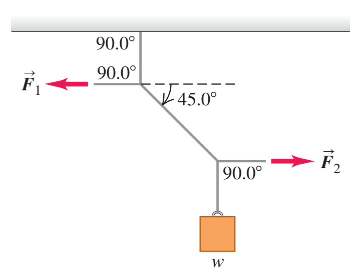
Figura **5.45** Ejercicio 5.10.



5.11. Un hombre empuja un piano de 180 kg de masa para que baje deslizándose con velocidad constante, por una rampa inclinada 11.0° sobre la horizontal. Ignore la fricción que actúa sobre el piano. Calcule la magnitud de la fuerza aplicada por el hombre si él empuja *a*) paralelo a la rampa y *b*) paralelo al piso.

5.12. En la figura 5.46 el peso w es de 60.0 N. *a*) Calcule la tensión en el cordón diagonal. *b*) Calcule la magnitud de las fuerzas horizontales $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ que deben aplicarse para mantener el sistema en la posición indicada.

Figura **5.46** Ejercicio 5.12.

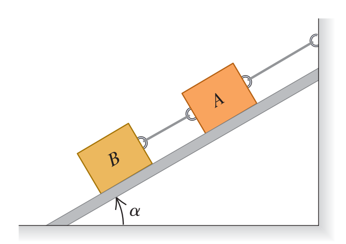


5.13. Una esfera uniforme sólida de 45.0 kg, cuyo diámetro es de 32.0 cm, se apoya contra una pared vertical sin fricción, usando un alambre delgado de 30.0 cm con masa despreciable, como se indica en la figura 5.47. *a*) Elabore el diagrama de cuerpo libre para la esfera y úselo para determinar la tensión en el alambre. *b*) ¿Qué tan fuerte empuja la esfera a la pared?

Figura **5.47** Ejercicio 5.13.

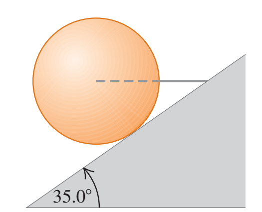
5.14. Dos bloques, ambos con peso w, están sostenidos en un plano inclinado sin fricción (figura 5.48). En términos de w y del ángulo α del plano inclinado, calcule la tensión en *a*) la cuerda que conecta los bloques y *b*) la cuerda que conecta el bloque A con la pared. *c*) Calcule la magnitud de la fuerza que el plano inclinado ejerce sobre cada bloque. *d*) Interprete sus respuestas para los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = 90°$.

Figura **5.48** Ejercicio 5.14.



5.15. Un alambre horizontal sostiene una esfera uniforme sólida de masa m, sobre una rampa inclinada que se eleva 35.0° por arriba de la horizontal. La superficie de la rampa es perfectamente lisa, y el alambre se coloca en el centro de la esfera, como se indica en la figura 5.49. *a*) Elabore el diagrama de cuerpo libre para la esfera. *b*) ¿Qué tan fuerte la superficie de la rampa empuja a la esfera? ¿Cuál es la tensión en el alambre?

Figura **5.49** Ejercicio 5.15.



Sección 5.2 Aplicación de la segunda ley de Newton: dinámica de partículas

5.16. Un cohete de 125 kg (incluyendo todo su contenido) tiene un motor que produce una fuerza vertical constante (el *empuje*) de 1720 N. Dentro de este cohete, una fuente de energía eléctrica de 15.5 N descansa sobre el piso. *a*) Obtenga la aceleración del cohete. *b*) Cuando éste ha alcanzado una altitud de 120 m, ¿con qué fuerza el piso empuja la fuente de energía? (*Sugerencia*: empiece con un diagrama de cuerpo libre para la fuente de energía eléctrica.)

5.17. Choque del *Génesis*. El 8 de septiembre de 2004, la nave espacial *Génesis* se estrelló en el desierto de Utah porque su paracaídas no se abrió. La cápsula de 210 kg golpeó el suelo a 311 km/h y penetró en él hasta una profundidad de 81.0 cm. *a*) Suponiendo que es constante, ¿cuál fue su aceleración (en unidades de m/s^2 y en g) durante el choque? *b*) ¿Qué fuerza ejerció el suelo sobre la cápsula durante el choque? Exprese la fuerza en newtons y como múltiplo del peso de la cápsula. *c*) ¿Cuánto tiempo duró esta fuerza?

5.18. Se tira horizontalmente de tres trineos sobre hielo horizontal sin fricción, usando cuerdas horizontales (figura 5.50). El tirón es horizontal y de 125 N de magnitud. Obtenga *a*) la aceleración del sistema, y *b*) la tensión en las cuerdas A y B.

Figura **5.50** Ejercicio 5.18.



5.19. Máquina de Atwood. Una carga de 15.0 kg de ladrillos pende del extremo de una cuerda que pasa por una polea pequeña sin fricción y tiene un contrapeso de 28.0 kg en el otro extremo (figura 5.51). El sistema se libera del reposo. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la carga de ladrillos y otro para el contrapeso. *b*) ¿Qué magnitud tiene la aceleración hacia arriba de la carga de ladrillos? *c*) ¿Qué tensión hay en la cuerda mientras la carga se mueve? Compare esa tensión con el peso de la carga de ladillos y con el del contrapeso.

Figura **5.51** Ejercicio 5.19.

5.20. Un bloque de hielo de 8.00 kg, liberado del reposo en la parte superior de una rampa sin fricción de 1.50 m de longitud, se desliza hacia abajo y alcanza una rapidez de 2.50 m/s en la base de la rampa. *a*) ¿Qué ángulo forma la rampa con la horizontal? *b*) ¿Cuál sería la rapidez del hielo en la base de la rampa, si al movimiento se opusiera una fuerza de fricción constante de 10.0 N paralela a la superficie de la rampa?

5.21. Una cuerda ligera está atada a un bloque con masa de 4.00 kg que descansa en una superficie horizontal sin fricción. La cuerda horizontal pasa por una polea sin masa ni fricción, y un bloque de masa m pende del otro extremo. Al soltarse los bloques, la tensión en la cuerda es de 10.0 N. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el bloque de 4.00 kg y otro para el bloque de masa m. Calcule *b*) la aceleración

de cada bloque y *c*) la masa m del bloque colgante. *d*) Compare la tensión con el peso del bloque colgante.

5.22. Diseño de pistas de aterrizaje. Un avión de carga despega de un campo horizontal remolcando dos planeadores de 700 kg cada uno. Podemos suponer que la resistencia total (arrastre del aire más fricción con la pista) que actúa sobre cada uno es constante e igual a 2500 N. La tensión en la cuerda de remolque entre el avión y el primer planeador no debe exceder de 12,000 N. *a*) Si se requiere una rapidez de 40 m/s para despegar, ¿qué longitud mínima debe tener la pista? *b*) ¿Qué tensión hay en la cuerda de remolque entre los dos planeadores durante la aceleración para el despegue?

5.23. Una enorme roca de 750 kg se levanta desde una cantera de 125 m de profundidad usando una cadena larga y uniforme cuya masa es de 575 kg. Esta cadena tiene resistencia uniforme, pero en cualquier punto puede soportar una tensión máxima no mayor que 2.50 veces su peso sin romperse. *a*) ¿Cuál es la aceleración máxima que la roca puede tener para lograr salir de la cantera, y *b*) ¿cuánto tiempo le toma al ser levantada a aceleración máxima partiendo del reposo?

5.24. Peso aparente. Un estudiante de física cuyo peso es de 550 N se para en una báscula de baño dentro de un elevador de 850 kg (incluyendo al estudiante), el cual es soportado por un cable. Al comenzar a moverse el elevador, la báscula marca 450 N. *a*) Determine la aceleración del elevador (magnitud y dirección). *b*) ¿Cuál será la aceleración si la báscula marca 670 N. *c*) Si la lectura es 0, ¿debería preocuparse el joven? Explique. *d*) En los incisos *a*) y *c*), ¿cuál es la tensión en el cable?

5.25. Una estudiante de física que juega con una mesa de hockey de aire (sin fricción) observa que, si imparte al disco una velocidad de 3.80 m/s a lo largo de la mesa, de 1.75 m, al llegar el disco al otro lado se ha desviado 2.50 cm a la derecha, pero aún con una componente de velocidad longitudinal de 3.80 m/s. Ella concluye, atinadamente, que la mesa no está nivelada y calcula correctamente su inclinación a partir de la información mencionada. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?

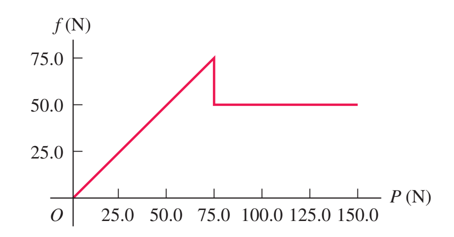
5.26. Un cohete de prueba de 2540 kg se lanza verticalmente desde la plataforma de lanzamiento. Su combustible (de masa despreciable) brinda una fuerza de propulsión, de manera que su velocidad vertical en función del tiempo está dada por $v(t) = At + Bt^2$, donde A y B son constantes, y el tiempo se mide desde el instante en que se quema el combustible. En el instante de la ignición, el cohete tiene una aceleración ascendente de 1.50 m/s^2 y 1.00 s después una velocidad ascendente de 2.00 m/s. *a*) Determine A y B, incluyendo sus unidades en el SI. *b*) A los 4.00 s después de la ignición del combustible, ¿cuál será la aceleración del cohete; y *c*) que fuerza de propulsión ejerce el combustible consumido sobre él, despreciando la resistencia del aire? Exprese la propulsión en newtons y como múltiplo del peso del cohete? *d*) ¿Cuál era la propulsión inicial debida al combustible?

Sección 5.3 Fuerzas de fricción

5.27. Diagramas de cuerpo libre. Los primeros dos pasos para resolver problemas de la segunda ley de Newton consisten en elegir un objeto para su análisis y luego dibujar su diagrama de cuerpo libre. Haga esto en cada una de las siguientes situaciones: *a*) una masa M se desliza hacia abajo por un plano inclinado sin fricción con ángulo α; y *b*) una masa M se desliza hacia arriba por un plano inclinado sin fricción con ángulo α; *c*) una masa M se desliza hacia arriba por un plano inclinado con fricción cinética con ángulo α.

5.28. En un experimento de laboratorio acerca de la fricción, un bloque de 135 N que descansa sobre una mesa horizontal áspera se jala con un cable horizontal. El tirón aumenta gradualmente hasta que el bloque empieza a moverse y continúa aumentando a partir de entonces. La figura 5.52 muestra una gráfica de la fuerza de fricción sobre

Figura 5.52 Ejercicio 5.28.



este bloque en función del tirón. *a*) Identifique las regiones de la gráfica donde hay fricción estática y fricción cinética. *b*) Calcule los coeficientes de fricción estática y cinética entre el bloque y la mesa. *c*) ¿Por qué la gráfica se inclina hacia arriba en la primera parte pero luego se nivela? *d*) ¿Cómo se vería la gráfica si se colocara un ladrillo de 135 N sobre el bloque, y cuáles serían los coeficientes de fricción en ese caso?

5.29. Un trabajador de bodega empuja una caja de 11.2 kg de masa sobre una superficie horizontal con rapidez constante de 3.50 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es de 0.20. *a*) ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar el trabajador para mantener el movimiento? *b*) Si se elimina esta fuerza, ¿qué distancia se deslizaría la caja antes de parar?

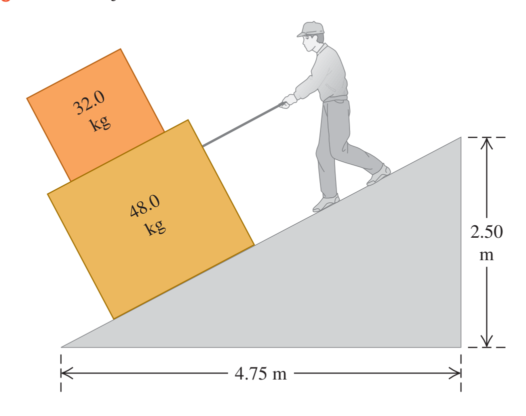
5.30. Una caja de bananas que pesa 40.0 N descansa en una superficie horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la superficie es de 0.40, y el coeficiente de fricción cinética es de 0.20. *a*) Si no se aplica alguna fuerza horizontal a la caja en reposo, ¿qué tan grande es la fuerza de fricción ejercida sobre la caja? *b*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza de fricción si un mono aplica una fuerza horizontal de 6.0 N a la caja en reposo? *c*) ¿Qué fuerza horizontal mínima debe aplicar el mono para poner en movimiento la caja? *d*) ¿Qué fuerza horizontal mínima debe aplicar el mono para que la caja siga moviéndose con velocidad constante, una vez que haya comenzado a moverse? *e*) Si el mono aplica una fuerza horizontal de 18.0 N, ¿qué magnitud tiene la fuerza de fricción y qué aceleración tiene la caja?

5.31. Una caja de herramientas de 45.0 kg descansa sobre un piso horizontal. Usted ejerce sobre ella un empuje horizontal cada vez mayor sobre ella, y observa que la caja empieza a moverse justo cuando su fuerza excede 313 N. Después de lo cual, debe reducir el empuje a 208 N para mantener la caja en movimiento a 25.0 cm/s constantes. *a*) ¿Cuáles son los coeficientes de fricción estática y cinética entre la caja y el piso? *b*) ¿Qué empuje debe ejercer para darle una aceleración de 1.10 m/s^2? *c*) Suponga que usted está realizando el mismo experimento sobre esta caja, pero ahora lo hace en la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es de 1.62 m/s^2. i) ¿Cuál sería la magnitud del empuje para que la caja se moviera? ii) ¿Cuál sería su aceleración si mantuviera el empuje del inciso *b*)?

5.32. Una caja de 85 N con naranjas se empuja por un piso horizontal, y va frenándose a una razón constante de 0.90 m/s cada segundo. La fuerza de empuje tiene una componente horizontal de 20 N y una vertical de 25 N hacia abajo. Calcule el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso.

5.33. Usted está bajando dos cajas, una encima de la otra, por la rampa que se muestra en la figura 5.53, tirando de una cuerda paralela a la superficie de la rampa. Ambas cajas se mueven juntas a rapidez constante de 15.0 cm/s. El coeficiente de fricción cinética entre la rampa y la caja inferior es 0.444, en tanto que el coeficiente de fricción estática entre ambas cajas es de 0.800. *a*) ¿Qué fuerza deberá ejercer para

Figura 5.53 Ejercicio 5.33.



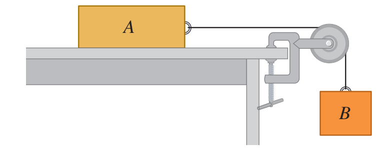
lograr esto? *b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la fuerza de fricción sobre la caja superior?

5.34. Distancia de frenado. *a*) Si el coeficiente de fricción cinética entre neumáticos y pavimento seco es de 0.80, ¿cuál es la distancia mínima para detenerse un automóvil que viaja a 28.7 m/s (unas 65 mi/h) bloqueando los frenos? *b*) En pavimento húmedo, el coeficiente de fricción cinética podría bajar a 0.25. ¿Con qué rapidez debemos conducir en pavimento húmedo para poder parar en la misma distancia que en el inciso *a*)? (*Nota:* bloquear los frenos *no* es la forma más segura de parar.)

5.35. Coeficiente de fricción. Una rondana de latón limpia se desliza por una superficie de acero horizontal limpia hasta detenerse. Usando los valores de la tabla 5.1, ¿qué tanto más lejos habría llegado la pieza con la misma rapidez inicial, si la rondana estuviera recubierta con teflón?

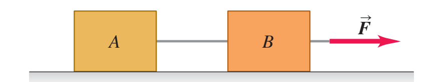
5.36. Considere el sistema de la figura 5.54. El bloque *A* pesa 45.0 N y el bloque *B* pesa 25.0 N. Una vez que el bloque *B* se pone en movimiento hacia abajo, desciende con rapidez constante. *a*) Calcule el coeficiente de fricción cinética entre el bloque *A* y la superficie de la mesa. *b*) Un gato, que también pesa 45.0 N, se queda dormido sobre el bloque *A*. Si ahora el bloque *B* se pone en movimiento hacia abajo, ¿qué aceleración (magnitud y dirección) tendrá?

Figura 5.54 Ejercicios 5.36, 5.41 y problema 5.77.



5.37. Dos cajas conectadas por una cuerda están en una superficie horizontal (figura 5.55). La caja *A* tiene masa m_A; y la *B*, m_B. El coeficiente de fricción cinética entre las cajas y la superficie es μ_k. Una fuerza horizontal $\vec{F}$ tira de las cajas hacia la derecha con velocidad constante. En términos de m_A, m_B y μ_k, calcule *a*) la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ y *b*) la tensión en la cuerda que une los bloques. Incluya el (los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener cada respuesta.

Figura 5.55 Ejercicio 5.37.



5.38. Fricción de rodamiento. Dos neumáticos de bicicleta se ponen a rodar con la misma rapidez inicial de 3.50 m/s en un camino largo y recto, y se mide la distancia que viaja cada una antes de que su rapidez se reduzca a la mitad. Un neumático se infló a una presión de 40 psi y avanzó 18.1 m; el otro tiene 105 psi y avanzó 92.9 m. ¿Cuánto vale el coeficiente de fricción de rodamiento μ_r para cada uno? Suponga que la fuerza horizontal neta sólo se debe a la fricción de rodamiento.

5.39. Ruedas. Suponga que determina que se requiere una fuerza horizontal de 160 N, para deslizar una caja con rapidez constante por la superficie de un piso nivelado. El coeficiente de fricción estática es de 0.52 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.47. Si coloca la caja en una plataforma rodante con masa de 5.3 kg y coeficiente de fricción de rodamiento de 0.018, ¿qué aceleración horizontal imprimirá esa fuerza de 160 N?

5.40. Suponga que determina que se requiere una fuerza horizontal de 200 N, para mover una camioneta vacía por un camino horizontal con una rapidez de 2.4 m/s. Después, usted carga la camioneta e infla más los neumáticos, de modo que su peso total aumente en un 42% y su coeficiente de fricción de rodamiento disminuya en un 19%. ¿Qué fuerza horizontal necesitará ahora para mover la camioneta por el mismo camino con la misma rapidez? La rapidez es lo bastante baja como para ignorar la resistencia del aire.

5.41. Como se muestra en la figura 5.54, el bloque *A* (masa 2.25 kg) descansa sobre una mesa y está conectado, mediante un cordón horizontal que pasa por una polea ligera sin fricción, a un bloque colgante *B* (masa 1.30 kg). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque *A* y la superficie es de 0.450. Luego los bloques se sueltan del reposo. Calcule *a*) la rapidez de cada bloque después de moverse 3.00 cm y *b*) la tensión en el cordón. Incluya el (los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener las respuestas.

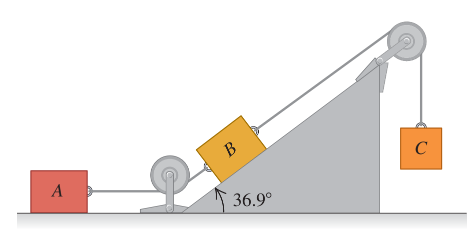
5.42. Una caja de 25.0 kg con libros de texto está en una rampa de carga que forma un ángulo α con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es de 0.25; y el coeficiente de fricción estática, de 0.35. *a*) Al aumentar α, determine el ángulo mínimo con que la caja comienza a resbalar. Con este ángulo, *b*) calcule la aceleración una vez que la caja está en movimiento, y *c*) la rapidez con que se moverá la caja una vez que se haya resbalado 5.0 m por la rampa.

5.43. Una caja grande de masa *m* descansa en un piso horizontal. Los coeficientes de fricción entre la caja y el piso son μ_s y μ_k. Una mujer empuja la caja con fuerza $\vec{F}$ y un ángulo θ bajo la horizontal. *a*) ¿Qué magnitud debe tener $\vec{F}$ para que la caja se mueva con velocidad constante? *b*) Si μ_s es mayor que cierto valor crítico, la mujer no podrá poner en movimiento la caja por más fuerte que empuje. Calcule dicho valor crítico de μ_s.

5.44. Una caja de masa *m* se arrastra por un piso horizontal, cuyo coeficiente de fricción cinética es μ_k, mediante una cuerda de la cual se tira con una fuerza de magnitud *F* y ángulo θ sobre la horizontal. *a*) Obtenga una expresión en términos de *m*, μ_k, θ y *g* para la magnitud de la fuerza necesaria para mover la caja con rapidez constante. *b*) Un instructor de primeros auxilios, que sabe que usted estudia física, le pide averiguar qué fuerza necesitaría para deslizar con rapidez constante a un paciente de 90 kg por un piso, tirando de él con un ángulo de 25° sobre la horizontal. Arrastrando algunos pesos envueltos en unos pantalones viejos y con la ayuda de una balanza de resorte, usted determina que $\mu_k = 0.35$. Utilice el resultado del inciso *a*) para contestar la pregunta del instructor.

5.45. Los bloques A, B y C se colocan como en la figura 5.56 y se conectan con cuerdas de masa despreciable. Tanto A como B pesan 25.0 N cada uno, y el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es de 0.35. El bloque C desciende con velocidad constante. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre las fuerzas que actúan sobre A, y otro para B. *b*) Calcule la tensión en la cuerda que une los bloques A y B. *c*) ¿Cuánto pesa el bloque C? *d*) Si se cortara la cuerda que une A y B, ¿qué aceleración tendría C?

Figura 5.56 Ejercicio 5.45.



5.46. Deduzca las ecuaciones (5.11) y (5.12) a partir de la ecuación (5.10).

5.47. *a*) En el ejemplo 5.19 (sección 5.3), ¿qué valor de D se requiere para que $v_t = 42$ m/s para el paracaidista? *b*) Si la hija del paracaidista, con masa de 45 kg, cae en el aire y tiene la misma D (0.25 kg/m) que su padre, ¿cuál será su rapidez terminal?

5.48. Usted lanza una pelota verticalmentre hacia arriba. La fuerza de arrastre es proporcional a v^2. En términos de g, ¿cuál es la componente y de la aceleración que tiene la pelota cuando su rapidez es la mitad de la rapidez terminal *a*) mientras sube? *b*) ¿Y al bajar?

Sección 5.4 Dinámica del movimiento circular

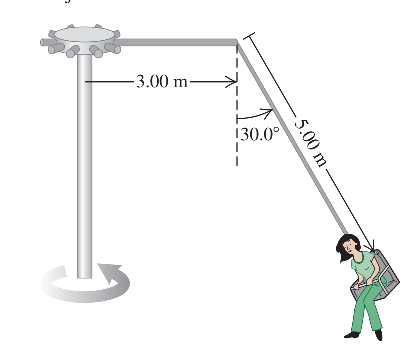
5.49. Una pieza de maquinaria consta de una barra delgada de 40.0 cm de longitud, con masas pequeñas de 1.15 kg sujetas por tornillos en sus extremos. Los tornillos pueden soportar una fuerza máxima de 75.0 N sin safarse. Esta barra gira en torno a un eje perpendicular a su centro. *a*) Cuando la barra gira a tasa constante sobre una superficie horizontal sin fricción, ¿cuál es la rapidez máxima que la masa puede tener sin que se safen los tornillos? *b*) Suponga que la máquina se volvió a rediseñar de manera que la barra gira a tasa constante en un círculo vertical. ¿Será más probable que uno de los tornillos se safe cuando la masa esté en la parte superior del círculo o en la parte inferior? Utilice un diagrama de cuerpo libre para saber por qué. *c*) Usando el resultado del inciso *b*), ¿cuál es la mayor rapidez que la masa puede tener sin que se safe un tronillo?

5.50. Una curva plana (sin peralte) en una carretera tiene un radio de 220.0 m. Un automóvil toma la curva a una rapidez de 25.0 m/s. *a*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo que evitaría que derrape? *b*) Suponga que la carretera está cubierta de hielo y el coeficiente de fricción entre los neumáticos y el pavimento es de sólo un tercio del resultado del inciso *a*). ¿Cuál debería ser la rapidez máxima del auto, de manera que pueda tomar la curva con seguridad?

5.51. En la autopista un automóvil de 1125 kg y una camioneta de 2250 kg se acercan a una curva que tiene un radio de 225 m. *a*) ¿Con qué ángulo el ingeniero reponsable debería peraltar esta curva, de modo que los vehículos que viajen a 65.0 mi/h puedan tomarla con seguridad, sin que importe la condición de sus neumáticos? ¿Un camión pesado debería ir más lento que un auto más ligero? *b*) ¿Cuándo el auto y la camioneta toman la curva a 65.0 mi/h, encuentre la fuerza normal sobre cada uno debida a la superficie de la autopista.

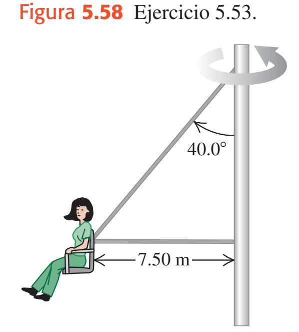
5.52. El "columpio gigante" de una feria local consiste en un eje vertical central con varios brazos horizontales unidos a su extremo superior (figura 5.57). Cada brazo sostiene un asiento suspendido de un cable de 5.00 m, sujeto al brazo en un punto a 3.00 m del eje central. *a*) Calcule el tiempo de una revolución del columpio, si el cable forma un ángulo de 30.0° con la vertical. *b*) ¿El ángulo depende del peso del pasajero para una rapidez de giro dada?

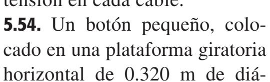
Figura 5.57 Ejercicio 5.52.



5.53. En otra versión del "columpio gigante" (véase el ejercicio 5.52), el asiento está conectado a dos cables, como se indica en la figura 5.58, uno de los cuales es horizontal. El asiento gira en un círculo horizontal a una tasa de 32.0 rpm (rev/min). Si el asiento pesa 255 N y una persona de 825 N está sentada en él, obtenga la tensión en cada cable.

Figura 5.58 Ejercicio 5.53.





5.54. Un botón pequeño, colocado en una plataforma giratoria horizontal de 0.320 m de diámetro, gira junto con la plataforma cuando ésta gira a 40.0 rpm, siempre que el botón no esté a más de 0.150 m del eje. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción estática hay entre el botón y la plataforma? *b*) ¿A qué distancia del eje puede estar el botón, sin resbalar, si la plataforma gira a 60.0 rpm?

5.55. Estaciones espaciales giratorias. Para los seres humanos, uno de los problemas de vivir en el espacio exterior es la aparente falta de peso. Una solución es diseñar estaciones espaciales que giren sobre su centro con rapidez constante, creando "gravedad artificial" en el borde exterior de la estación. *a*) Si el diámetro de la estación es de 800 m, ¿cuántas revoluciones por minuto se necesitarán para que la aceleración de la "gravedad artificial" sea de 9.8 m/s^2? *b*) Si la estación es un área de espera para pasajeros que van a Marte, sería deseable simular la aceleración debida a la gravedad en la superficie marciana (3.70 m/s^2). ¿Cuántas revoluciones por minuto se necesitan en este caso?

5.56. La rueda de la fortuna Cosmoclock 21 de la ciudad de Yokohama, Japón, tiene 100 m de diámetro. Su nombre proviene de sus 60 brazos, cada uno de los cuales puede funcionar como segundero (dando una vuelta cada 60.0 s). *a*) Determine la rapidez de los pasajeros con esta rotación. *b*) Un pasajero pesa 882 N en la caseta de "adivine el peso" en tierra. ¿Qué peso aparente tendrá en el punto más alto y el más bajo de la rueda? *c*) ¿Cuánto tardaría una revolución, si el peso aparente del pasajero en el punto más alto fuera cero? *d*) ¿Cuál sería entonces su peso aparente en el punto más bajo?

5.57. Un avión describe un rizo (una trayectoria circular en un plano vertical) de 150 m de radio. La cabeza del piloto apunta siempre al centro del rizo. La rapidez del avión no es constante; es mínima en el punto más alto del rizo y máxima en el punto más bajo. *a*) En la

parte superior, el piloto experimenta ingravidez. ¿Qué rapidez tiene el avión en este punto? *b*) En la parte inferior, la rapidez del avión es de 280 km/h. ¿Qué peso aparente tiene el piloto aquí? Su peso real es de 700 N.

5.58. Una piloto de acrobacias de 50.0 kg va en picada vertical y sale de ella cambiando su curso a un círculo en un plano vertical. *a*) Si la rapidez del avión en el punto más bajo del círculo es de 95.0 m/s, ¿qué radio mínimo debe tener el círculo para que la aceleración en ese punto no exceda 4.00*g*? *b*) ¿Qué peso aparente tendría la piloto en ese punto más bajo?

5.59. ¡No se moje! Se ata un cordón a una cubeta con agua, la cual se gira en un círculo vertical de radio 0.600 m. ¿Qué rapidez máxima debe tener la cubeta en el punto más alto del círculo para no derramar agua?

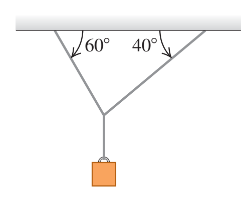
5.60. Una bola de boliche que pesa 71.2 N (16.0 lb) cuelga del techo atada a una cuerda de 3.80 m. Se tira de la bola hacia un lado y luego se suelta; la bola oscila como péndulo. Al pasar la cuerda por la vertical, la rapidez de la bola es de 4.20 m/s. *a*) ¿Qué aceleración (dirección y magnitud) tiene la bola en ese instante? *b*) ¿Qué tensión hay en la cuerda en ese instante?

Problemas

5.61. Dos cuerdas están unidas a un cable de acero que sostiene un peso colgante, como se muestra en la figura 5.59. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las cuerdas que actúan sobre el nudo que une las dos cuerdas al cable de acero. Con base en su diagrama de fuerzas, ¿cuál cuerda estará sometida a mayor tensión? *b*) Si la tensión máxima que una cuerda resiste sin romperse es de 5000 N, determine el valor máximo del peso colgante que las cuerdas pueden sostener sin riesgo. Puede despreciarse el peso de las cuerdas y del cable de acero.

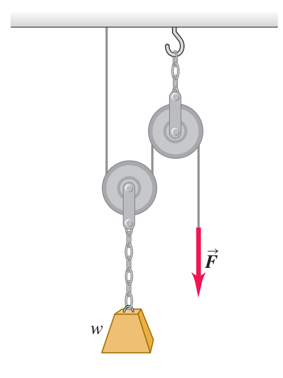
Figura 5.59 Problema 5.61.





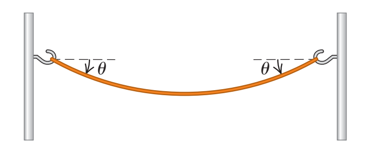
5.62. En la figura 5.60 un obrero levanta un peso w tirando hacia abajo de una cuerda con una fuerza $\vec{F}$. La polea superior está unida al techo con una cadena; en tanto que la polea inferior está unida al peso con otra cadena. En términos de w, determine la tensión en cada cadena y la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ si el peso sube con rapidez constante. Incluya el (los) diagrama(s) de cuerpo libre que usó para obtener sus respuestas. Suponga que los pesos de la cuerda, las poleas y las cadenas son insignificantes.

Figura 5.60 Problema 5.62.



5.63. Cuerda con masa. En casi todos los problemas de este libro, las cuerdas, los cordones o los cables tienen una masa tan pequeña en comparación con la de los demás objetos del problema, que puede despreciarse. Sin embargo, cuando la cuerda es el *único* objeto del problema, es evidente que no podemos ignorar su masa. Suponga, por ejemplo, que tenemos una cuerda para atar a dos postes (figura 5.61). La cuerda tiene masa M y cada extremo forma un ángulo θ con la horizontal. Determine *a*) la tensión en los extremos de la cuerda y *b*) la tensión en el punto más bajo. *c*) ¿Por qué no podemos tener $\theta = 0°$? (Véase la pregunta para análisis P5.3.) *d*) Analice sus resultados de los incisos *a*) y *b*) en el límite en que $\theta \rightarrow 90°$. La curva de la cuerda, o de cualquier cable flexible que cuelga bajo su propio peso, se denomina *catenaria*. [Si desea consultar un texto más avanzado acerca de esta curva, véase K. R. Symon, *Mechanics,* 3a. ed. (Reading, MA: Addison-Wesley, 1971), pp. 237-241.]

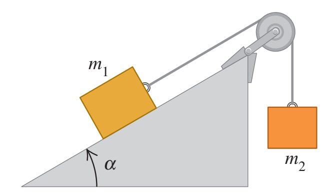
Figura 5.61 Problema 5.63.



5.64. Otra cuerda con masa. Un bloque con masa M está unido al extremo inferior de una cuerda vertical uniforme con masa m y longitud L. Se aplica una fuerza constante $\vec{F}$ hacia arriba al extremo superior de la cuerda; esto hace que la cuerda y el bloque se aceleren hacia arriba. Calcule la tensión en la cuerda a una distancia x del extremo superior de la cuerda, donde x puede tener cualquier valor entre 0 y L.

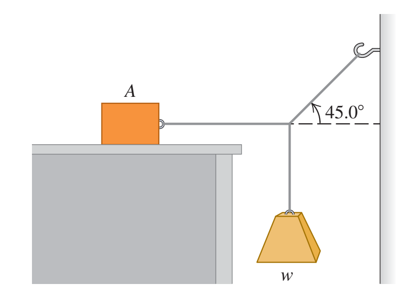
5.65. Un bloque de masa m_1 se coloca en un plano inclinado con ángulo α, conectado a un segundo bloque colgante de masa m_2 mediante un cordón que pasa por una polea pequeña sin fricción (figura 5.62). Los coeficientes de fricción estática y cinética son μ_s y μ_k, respectivamente. *a*) Determine la masa m_2 tal que el bloque m_1 sube por el plano con rapidez constante una vez puesto en movimiento. *a*) Determine la masa m_2 tal que el bloque m_1 baje por el plano con rapidez constante una vez puesto en movimiento. *c*) ¿En qué intervalo de valores de m_2 los bloques permanecen en reposo, si se sueltan del reposo?

Figura 5.62 Problema 5.65.



5.66. *a*) El bloque A de la figura 5.63 pesa 60.0 N. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie donde descansa es

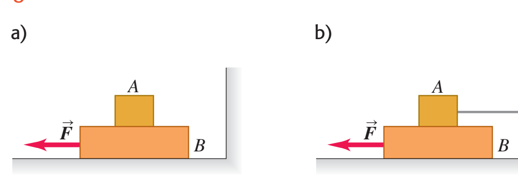
Figura 5.63 Problema 5.66.



de 0.25. El peso w es de 12.0 N y el sistema está en equilibrio. Calcule la fuerza de fricción ejercida sobre el bloque A. *b*) Determine el peso máximo w con el cual el sistema permanecerá en equilibrio.

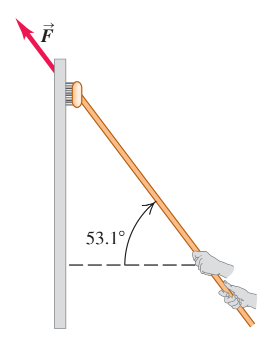
5.67. El bloque A de la figura 5.64 pesa 1.20 N, y el bloque B pesa 3.60 N. El coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es de 0.300. Determine la magnitud de la fuerza horizontal $\vec{F}$ necesaria para arrastrar el bloque B hacia la izquierda con rapidez constante, *a*) si A descansa sobre B y se mueve con él (figura 5.64a); y *b*) si A no se mueve (figura 5.64b).

Figura 5.64 Problema 5.67.



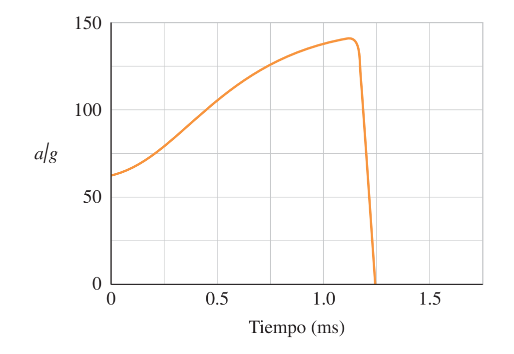
5.68. Un lavaventanas empuja hacia arriba su cepillo sobre una ventana vertical, con rapidez constante, aplicando una fuerza $\vec{F}$ (figura 5.65). El cepillo pesa 12.0 N y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.150$. Calcule *a*) la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ y *b*) la fuerza normal ejercida por la ventana sobre el cepillo.

Figura 5.65 Problema 5.68.



5.69. Salto volador de una pulga. Una película de alta velocidad (3500 cuadros/segundo) produjo ciertos datos del salto de una pulga de 210 μg, que permitieron trazar la gráfica de aceleración del insecto en función del tiempo de la figura 5.66. (Véase "The Flying Leap of the Flea", por M. Rothschild *et al.* En *Scientific American* de noviembre de 1973.) La pulga tenía unos 2 mm de longitud y saltó con un ángulo de despegue casi vertical. Haga mediciones en la gráfica que le permitan contestar las siguientes preguntas. *a*) ¿Qué fuerza externa neta *inicial* actúa sobre la pulga? Compárela con el peso de la pulga. *b*) ¿Qué fuerza externa neta *máxima* actúa sobre la pulga que salta? ¿Cuándo se presenta esa fuerza máxima? *c*) Según la gráfica, ¿qué rapidez máxima alcanzó la pulga?

Figura 5.66 Problema 5.69.



5.70. Un cohete de 25,000 kg despega verticalmente de la superficie terrestre con aceleración constante. Durante el movimiento considerado en este problema, suponga que g se mantiene constante (véase el capítulo 12). Dentro del cohete, un instrumento de 15.0 N cuelga de un alambre que resiste una tensión máxima de 35.0 N. *a*) Determine el tiempo mínimo en que el cohete puede alcanzar la barrera del sonido (330 m/s) sin romper el alambre, y el empuje vertical máximo de los motores del cohete en tales condiciones. *b*) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre está el cohete cuando rompe la barrera del sonido?

5.71. Una persona de 72 kg está parada sobre una báscula de baño en el elevador de un rascacielos. El elevador parte del reposo y asciende con una rapidez que varía con el tiempo según $v(t) = (3.0\ \text{m/s}^2)t + (0.20\ \text{m/s}^3)t^2$. En $t = 4.0$ s, ¿qué valor marca la báscula?

5.72. Diseño de elevadores. Imagine que usted está diseñando un elevador para un hospital. La fuerza que el piso del elevador ejercerá sobre un pasajero no debe exceder 1.60 veces el peso del pasajero. El elevador acelera hacia arriba con aceleración constante una distancia de 3.0 m, y luego comienza a frenarse. ¿Qué rapidez máxima alcanza el elevador?

5.73. Imagine que usted trabaja para una empresa transportista. Su trabajo consiste en pararse junto a la base de una rampa de 8.0 m de longitud, inclinada 37° arriba de la horizontal, tomar paquetes de una banda transportadora y empujarlos rampa arriba. El coeficiente de fricción cinética entre los paquetes y la rampa es $\mu_k = 0.30$. *a*) ¿Qué rapidez necesitará usted imprimir a los paquetes en la base de la rampa, para que tengan rapidez cero en el tope de la rampa? *b*) Se supone que una compañera de trabajo toma los paquetes cuando llegan al tope de la rampa, pero no logra sujetar uno y ese paquete se desliza rampa abajo. ¿Qué rapidez tiene el paquete cuando llega a donde está usted?

5.74. Un martillo cuelga del techo de un autobús atado con una cuerda ligera. El techo es paralelo a la carretera. El autobús viaja en línea recta por un camino horizontal. Se observa que el martillo cuelga en reposo con respecto al autobús cuando el ángulo entre la cuerda y el techo es de 74°. ¿Qué aceleración tiene el autobús?

5.75. Una rondana de acero está suspendida dentro de una caja vacía por un cordón ligero unido a la tapa de la caja. La caja baja resbalando por una rampa larga que tiene una inclinación de 37° sobre la horizontal. La masa de la caja es de 180 kg. Una persona de 55 kg está sentada dentro de la caja (con una linterna). Mientras la caja resbala por la rampa, la persona ve que la rondana está en reposo con respecto a la caja, cuando el cordón forma un ángulo de 68° con la tapa de la caja. Determine el coeficiente de fricción cinética entre la rampa y la caja.

5.76. ¡Hora de comer! Imagine que va bajando en motocicleta por una calle húmeda que tiene una pendiente de 20° bajo la horizontal. Al iniciar la bajada, se da cuenta de que una cuadrilla de obreros ha cavado un hoyo profundo en la calle en la base de la pendiente. Un tigre siberiano, escapado del zoológico, adoptó el hoyo como cubil. *a*) Usted aplica los frenos y bloquea sus ruedas en la cima de la pendiente, donde tiene una rapidez de 20 m/s. La calle inclinada frente a usted tiene 40 m de longitud. ¿Caerá en el agujero y se convertirá en el almuerzo del tigre o logrará detenerse antes? (Los coeficientes de fricción entre los neumáticos de la motocicleta y el pavimento mojado son $\mu_s = 0.90$ y $\mu_k = 0.70$.) *b*) ¿Qué rapidez inicial deberá tener para detenerse justo antes de llegar al hoyo?

5.77. En el sistema de la figura 5.54, el bloque A tiene masa m_A, el bloque B tiene masa m_B y la cuerda que los une tiene una masa *distinta de cero* m_{cuerda}. La longitud total de la cuerda es L y la polea tiene radio muy pequeño. Considere que la cuerda no cuelga en su tramo horizontal. *a*) Si no hay fricción entre el bloque A y la mesa, ¿qué aceleración tienen los bloques en el instante en que un tramo d de cuerda cuelga verticalmente entre la polea y el bloque B? Al caer B, ¿la magnitud de

la aceleración del sistema aumentará, disminuirá o se mantendrá constante? Explique. *b*) Sea $m_A = 2.00$ kg, $m_B = 0.400$ kg, $m_{cuerda} = 0.160$ kg y $L = 1.00$ m. Suponga que hay fricción entre el bloque A y la mesa ($\mu_k = 0.200$ y $\mu_s = 0.250$). Calcule la distancia d mínima tal que los bloques comiencen a moverse si inicialmente estaban en reposo. *c*) Repita el inciso *b*) para el caso en que $m_{cuerda} = 0.040$ kg. ¿Se moverán los bloques en este caso?

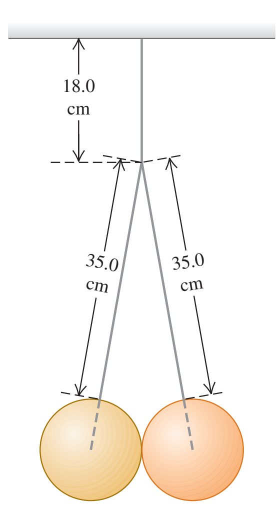
5.78. Si el coeficiente de fricción estática entre una mesa y una cuerda gruesa uniforme es μ_s, ¿qué fracción de la cuerda puede colgar por el borde de la mesa sin que la cuerda resbale?

5.79. Una caja de 30.0 kg está inicialmente en reposo en la plataforma de una camioneta de 1500 kg. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la plataforma es de 0.30; y el de fricción cinética, de 0.20. Antes de cada una de las aceleraciones que se dan en seguida, la camioneta viaja hacia el norte con rapidez constante. Obtenga la magnitud y dirección de la fuerza de fricción que actúa sobre la caja, cuando la camioneta adquiere una aceleración de *a*) 2.20 m/s^2 al norte y de *b*) 3.40 m/s^2 al sur.

5.80. Tribunal del tránsito. Imagine que a usted se le cita a comparecer como testigo experto, en el juicio sobre una infracción de tránsito. Los hechos son los siguientes. Un conductor frenó violentamente y se detuvo con aceleración constante. Las mediciones de sus neumáticos y de las marcas de derrapamiento sobre el pavimento indican que el auto recorrió 192 ft antes de detenerse y que el coeficiente de fricción cinética entre el camino y sus neumáticos era de 0.750. El cargo es que el conductor iba a exceso de velocidad en una zona de 45 mi/h. Él se declara inocente. ¿Cuál es su conclusión, culpable o inocente? ¿Qué tan rápido iba en el momento de aplicar los frenos?

5.81. Dos esferas idénticas de 15.0 kg y de 25.0 cm de diámetro están suspendidas de dos cables de 35.0 cm, como se indica en la figura 5.67. El sistema completo está unido a un solo cable de 18.0 cm y las superficies de las esferas son perfectamente lisas. *a*) Obtenga la tensión en cada uno de tres los cables. *b*) ¿Qué tanto empuja cada esfera sobre la otra?

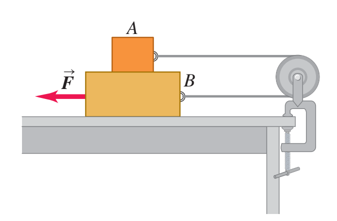
Figura 5.67 Problema 5.81.



5.82. Pérdida de carga. Una caja de 12.0 kg descansa en el piso plano de un camión. Los coeficientes de fricción entre la caja y el piso son $\mu_s = 0.19$ y $\mu_k = 0.15$. El camión se detiene ante un letrero de alto y luego arranca con aceleración de 2.20 m/s^2. Si la caja está a 1.80 m del borde trasero del camión cuando éste arranca, ¿cuánto tardará la caja en caerse por atrás del camión? ¿Qué distancia recorrerá el camión en ese tiempo?

5.83. El bloque A de la figura 5.68 pesa 1.40 N, y el bloque B pesa 4.20 N. El coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es de 0.30. Calcule la magnitud de la fuerza horizontal $\vec{F}$ necesaria para arrastrar B a la izquierda con rapidez constante, si A y B están conectados por un cordón ligero y flexible que pasa por una polea fija sin fricción.

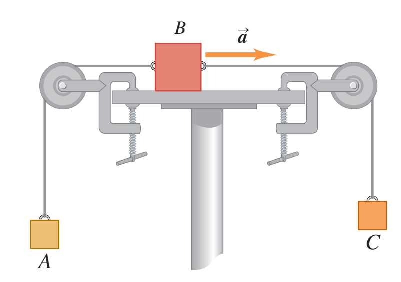
Figura 5.68 Problema 5.83.



5.84. Imagine que forma parte de un grupo de diseñadores para una exploración futura del planeta Marte, donde $g = 3.7$ m/s^2. Una exploradora saldrá de un vehículo que viaja horizontalmente a 33 m/s, cuando esté a una altura de 1200 m sobre la superficie, y luego caerá libremente durante 20 s. En ese momento, un sistema portátil avanzado de propulsión (PAPS, por las siglas de *portable advanced propulsion system*) ejercerá una fuerza constante que reducirá la rapidez de la exploradora a cero en el instante en que toque la superficie. La masa total (exploradora, traje, equipo y PAPS) es de 150 kg. Suponga que el cambio de masa del PAPS es insignificante. Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el PAPS deberá ejercer, y durante cuánto tiempo deberá ejercerla. Desprecie la resistencia del aire.

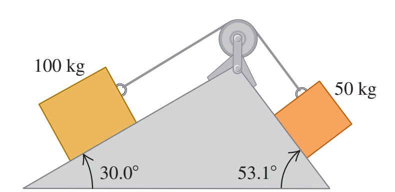
5.85. El bloque A de la figura 5.69 tiene masa de 4.00 kg, y el bloque B, de 12.0 kg. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque B y la superficie horizontal es de 0.25. *a*) ¿Qué masa tiene el bloque C si B se mueve a la derecha con aceleración de 2.00 m/s^2? *b*) ¿Qué tensión hay en cada cuerda en tal situación?

Figura 5.69 Problema 5.85.



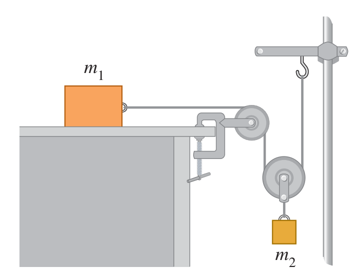
5.86. Dos bloques conectados por un cordón que pasa por una polea pequeña sin fricción descansan en planos sin fricción (figura 5.70). *a*) ¿Hacia dónde se moverá el sistema cuando los bloques se suelten del reposo? *b*) ¿Qué aceleración tendrán los bloques? *c*) ¿Qué tensión hay en el cordón?

Figura 5.70 Problema 5.86.



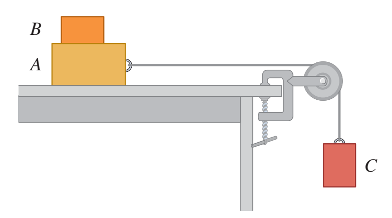
5.87. Determine la aceleración de cada bloque de la figura 5.71, en términos de m_1, m_2 y g. No hay fricción en ninguna parte del sistema.

Figura 5.71 Problema 5.87.



5.88. El bloque *B* con masa de 5.00 kg descansa sobre el bloque *A*, cuya masa es de 8.00 kg que, a la vez, está sobre una mesa horizontal (figura 5.72). No hay fricción entre el bloque *A* y la mesa, pero el coeficiente de fricción estática entre el bloque *A* y el *B* es de 0.750. Un cordón ligero atado al bloque *A* pasa por una polea sin masa ni fricción, con el bloque *C* colgando en el otro extremo. ¿Qué masa máxima que puede tener el bloque *C*, de modo que *A* y *B* aún se deslicen juntos cuando el sistema se suelte del reposo?

Figura 5.72 Problema 5.88.

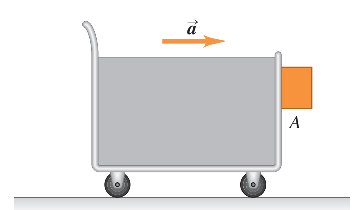


5.89. Dos objetos con masas de 5.00 kg y 2.00 kg cuelgan a 0.600 m sobre el piso, atados a los extremos de un cordón de 6.00 m que pasa por una polea sin fricción. Los objetos parten del reposo. Calcule la altura máxima que alcanza el objeto de 2.00 kg.

5.90. Fricción en un elevador. Imagine que viaja en un elevador hacia el piso 18 de su edificio. El elevador acelera hacia arriba con $a = 1.90 \text{ m/s}^2$. Junto a usted está una caja que contiene su nueva computadora; la caja y su contenido tienen una masa total de 28.0 kg. Mientras el elevador está acelerando hacia arriba, usted empuja la caja horizontalmente para deslizarla con rapidez constante hacia la puerta del elevador. Si el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso del elevador es $\mu_k = 0.32$, ¿qué magnitud de fuerza debe aplicar?

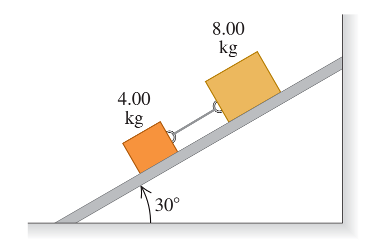
5.91. Un bloque se coloca contra el frente vertical de un carrito, como se muestra en la figura 5.73. ¿Qué aceleración debe tener el carrito para que el bloque *A* no caiga? El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el carrito es μ_s. ¿Cómo describiría un observador en el carrito el comportamiento del bloque?

Figura 5.73 Problema 5.91.



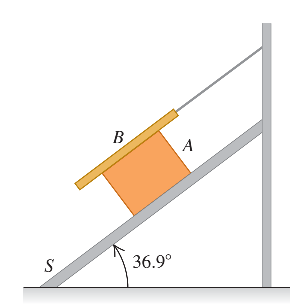
5.92. Dos bloques de masas de 4.00 kg y 8.00 kg están conectados por un cordón y bajan deslizándose por un plano inclinado a 30° (figura 5.74). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 4.00 kg y el plano es de 0.25; y entre el bloque de 8.00 kg y el plano es de 0.35. *a*) Calcule la aceleración de cada bloque. *b*) Calcule la tensión en el cordón. *c*) ¿Qué sucede si se invierten las posiciones de los bloques, de manera que el bloque de 4.00 kg esté arriba del de 8.00 kg?

Figura 5.74 Problema 5.92.



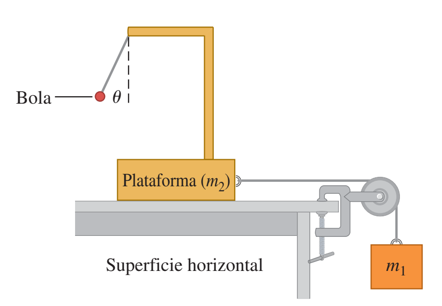
5.93. El bloque *A*, de peso $3w$, resbala con rapidez constante, bajando por un plano *S* inclinado 36.9°, mientras la tabla *B*, de peso w, descansa sobre *A*, estando sujeta con un cordón a la pared (figura 5.75). *a*) Dibuje un diagrama de todas las fuerzas que actúan sobre el bloque *A*. *b*) Si el coeficiente de fricción cinética es igual entre *A* y *B*, y entre *S* y *A*, determine su valor.

Figura 5.75 Problema 5.93.



5.94. Acelerómetro. El sistema que se muestra en la figura 5.76 puede usarse para medir la aceleración del mismo. Un observador que va sobre la plataforma mide el ángulo θ, que el cordón que sostiene la bola ligera forma con la vertical. No hay fricción en ningún lado. *a*) ¿Cómo se relaciona θ con la aceleración del sistema? *b*) Si $m_1 = 250$ kg y $m_2 = 1250$ kg, ¿cuál es el valor de θ? *c*) Si usted puede modificar m_1 y m_2, ¿cuál es el ángulo θ máximo que usted puede alcanzar? Explique cómo necesita ajustar m_1 y m_2 para lograrlo.

Figura 5.76 Problema 5.94.



5.95. Curva peraltada I. En un camino horizontal, una curva de 120 m de radio tiene el peralte adecuado para una rapidez de 20 m/s. Si un automóvil toma dicha curva a 30 m/s, ¿qué coeficiente mínimo de fricción estática debe haber entre los neumáticos y la carretera para no derrapar?

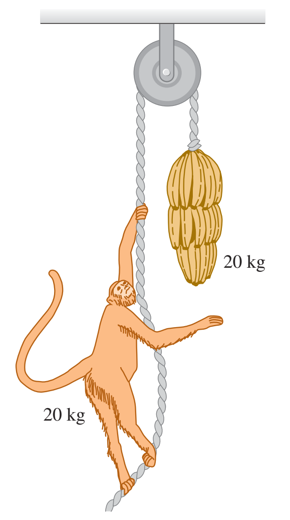
5.96. Curva peraltada II. Considere un camino húmedo peraltado como el del ejemplo 5.23 (sección 5.4), donde hay un coeficiente de fricción estática de 0.30 y un coeficiente de fricción cinética de 0.25 entre los neumáticos y la carretera. El radio de la curva es $R = 50$ m. *a*) Si el ángulo de peralte es $\beta = 25°$, ¿qué rapidez *máxima* puede tener el auto antes de derrapar peralte *arriba*? *b*) ¿Qué rapidez *mínima* debe tener para no derrapar peralte *abajo*?

5.97. Máxima rapidez segura. Imagine que, en su ruta diaria a la universidad, el camino describe una curva grande que es aproximadamente un arco de un círculo. Usted ve el letrero de advertencia al principio de la curva, que indica una rapidez máxima de 55 mi/h. También nota que la curva no tiene peralte alguno. En un día seco con escaso tránsito, usted ingresa en la curva con una rapidez constante de 80 mi/h y siente que el auto derrapará si no reduce pronto su rapidez. Esto lo lleva a concluir que su rapidez está en el límite de seguridad para la curva y frena. No obstante, recuerda haber leído que, en pavimento seco, los neumáticos nuevos tienen un coeficiente medio de fricción estática de aproximadamente 0.76; mientras que, en las peores condiciones invernales para conducir, tal vez la carretera esté cubierta de hielo húmedo, cuyo coeficiente de fricción estática llega a ser hasta de 0.20. No es raro que haya hielo húmedo en esta carretera, así que usted se pregunta si el límite de rapidez para la curva, indicado en el letrero, se refiere al peor de los casos. *a*) Estime el radio de la curva a partir de su experiencia a 80 mi/h en condiciones secas. *b*) Use esa estimación para determinar el límite máximo de rapidez en la curva en las peores condiciones de hielo húmedo. Compárelo con el límite del letrero. ¿El letrero está confundiendo a los conductores? *c*) En un día lluvioso, el coeficiente de fricción estática sería aproximadamente de 0.37. Determine la rapidez máxima segura en la curva en tales condiciones. ¿Su respuesta le ayuda a entender el letrero de límite de rapidez?

5.98. Imagine que va en un autobús escolar. Cuando éste toma una curva plana con rapidez constante, una lonchera con 0.500 kg de masa, colgada del techo del autobús con un cordón de 1.80 m, pende en reposo relativo al vehículo, en tanto que el cordón forma un ángulo de 30.0° con la vertical. En esta posición, la lonchera está a 50.0 m del centro de curvatura de la curva. ¿Qué rapidez v tiene el autobús?

5.99. Problema del mono y los plátanos. Un mono de 20 kg sujeta firmemente una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción y está atada a un racimo de plátanos de 20 kg (figura 5.77). El mono ve los plátanos y comienza a trepar por la cuerda para alcanzarlos. *a*) Al subir el mono, ¿los plátanos suben, bajan o no se mueven? *b*) Al subir el mono, ¿la distancia entre él y los plátanos disminuye, aumenta o no cambia? *c*) El mono suelta la cuerda. ¿Qué pasa con la distancia entre él y los plátanos mientras él cae? *d*) Antes de tocar el suelo, el mono sujeta la cuerda para detener su caída. ¿Qué sucede con los plátanos?

Figura 5.77 Problema 5.99.



5.100. Se lanza una piedra hacia abajo en agua con rapidez de $3mg/k$, donde k es el coeficiente de la ecuación (5.7). Suponga que la relación entre resistencia del fluido y rapidez es la ecuación (5.7) y calcule la rapidez de la piedra en función del tiempo.

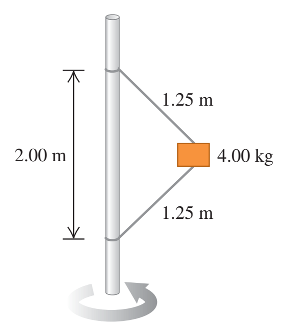
5.101. Una piedra de masa $m = 3.00$ kg cae desde el reposo en un medio viscoso. Sobre ella actúan una fuerza neta constante hacia abajo de 18.0 N (combinación de la gravedad y la fuerza de flotabilidad ejercida por el medio) y una fuerza de resistencia del fluido $f = kv$, donde v es la rapidez en m/s y $k = 2.20$ N · s/m (véase la sección 5.3). *a*) Calcule la aceleración inicial a_0. *b*) Calcule la aceleración cuando la rapidez es de 3.00 m/s. *c*) Calcule la rapidez cuando la aceleración es $0.1a_0$. *d*) Calcule la rapidez terminal v_t. *e*) Obtenga la coordenada, rapidez y aceleración 2.00 s después de iniciado el movimiento. *f*) Calcule el tiempo necesario para alcanzar una rapidez de $0.9v_t$.

5.102. Una piedra con masa m se desliza con velocidad inicial v_0 sobre una superficie horizontal. La fuerza retardante F_R que la superficie ejerce sobre la piedra es proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad instantánea de la piedra $\left(F_R = -kv^{1/2}\right)$. *a*) Obtenga expresiones para la velocidad y posición de la piedra en función del tiempo. *b*) En términos de m, k y v_0, ¿en qué tiempo se detendrá la piedra? *c*) ¿A qué distancia estará la piedra de su punto de partida cuando se detenga?

5.103. Un fluido ejerce una fuerza de flotabilidad hacia arriba sobre un objeto sumergido en él. En la deducción de la ecuación (5.9), se despreció la fuerza de flotabilidad ejercida sobre un objeto por el fluido. No obstante, hay situaciones en que la densidad del objeto no es mucho mayor que la densidad del fluido, y no es posible ignorar la fuerza de flotabilidad. Para una esfera de plástico que cae en agua, usted calcula una rapidez terminal de 0.36 m/s despreciando la flotabilidad, pero la rapidez terminal medida es de 0.24 m/s. ¿Qué fracción del peso es la fuerza de flotabilidad?

5.104. El bloque de 4.00 kg de la figura 5.78 está unido a una varilla vertical con dos cordones. Cuando el sistema gira en torno al eje de la varilla, los cordones se extienden como se indica en el diagrama, y la tensión en el cordón superior es de 80.0 N. *a*) ¿Qué tensión hay en el cordón inferior? *b*) ¿Cuántas revoluciones por minuto (rpm) da el sistema? *c*) Calcule las rpm con las que el cordón inferior pierde toda tensión. *d*) Explique qué sucede si el número de rpm es menor que en el inciso *c*).

Figura 5.78 Problema 5.104.



5.105. La ecuación (5.10) es válida para el caso en que la velocidad inicial es cero. *a*) Deduzca la ecuación correspondiente para $v_y(t)$ cuando el objeto que cae tiene una velocidad inicial hacia abajo de magnitud v_0. *b*) Para el caso en que $v_0 < v_t$, dibuje una gráfica de v_y en función de t y marque v_t en ella. *c*) Repita el inciso *b*) para el caso en que $v_0 > v_t$. *d*) Comente lo que su resultado le dice acerca de $v_y(t)$ cuando $v_0 = v_t$.

5.106. Una piedra pequeña se mueve en agua y la fuerza que el agua ejerce sobre ella está dada por la ecuación (5.7). Antes, se midió la rapidez terminal de la piedra, que es de 2.0 m/s. La piedra se proyecta *hacia arriba* con una rapidez inicial de 6.0 m/s. Puede despreciarse la fuerza de flotabilidad sobre la piedra. *a*) En ausencia de resistencia del fluido, ¿qué altura alcanzaría la piedra y cuánto tardaría en alcanzar

esa altura máxima? *b*) ¿Cómo cambian las respuestas del inciso *a*), si se incluyen los efectos de la resistencia del fluido?

5.107. Usted observa un automóvil deportivo de 1350 kg que rueda en línea recta por un pavimento horizontal. Las únicas fuerzas horizontales que actúan sobre él son una fricción constante de rodamiento y la resistencia del aire (proporcional al cuadrado de la rapidez). Toma los siguientes datos durante un intervalo de 25 s: cuando la rapidez del auto es de 32 m/s, se frena a razón de $-0.42\ \text{m/s}^2$; cuando su rapidez disminuye a 24 m/s, se frena a razón de $-0.30\ \text{m/s}^2$. *a*) Calcule el coeficiente de fricción de rodamiento y la constante de arrastre del aire D. *b*) ¿Con qué rapidez constante bajará este auto por una pendiente de 2.2° con respecto a la horizontal? *c*) ¿Qué relación hay entre la rapidez constante en una pendiente de ángulo β y la rapidez terminal de este auto al caer desde un acantilado? Suponga que, en ambos casos, la fuerza de arrastre del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez y la constante de arrastre del aire no cambia.

5.108. Una persona de 70 kg viaja en un carrito de 30 kg que se mueve a 12 m/s en la cima de una colina, cuya forma es un arco de círculo con radio de 40 m. *a*) ¿Qué peso aparente tiene la persona cuando el carrito pasa por la cima? *b*) Determine la rapidez máxima con que el carrito podría llegar a la cima sin perder contacto con la superficie. ¿Su respuesta depende de la masa del carrito o de la persona? Explique su respuesta.

5.109. Carrusel. Cierto diciembre, dos gemelas idénticas, Juana y Jacqueline, juegan en un carrusel (tiovivo, un disco grande montado paralelo al piso sobre un eje vertical central) en el patio de su escuela en el norte de Minnesota. Las gemelas tienen masas idénticas de 30.0 kg. La superficie del carrusel está cubierta de hielo y por lo tanto no tiene fricción. El carrusel gira con rapidez constante con las gemelas encima. Juana, sentada a 1.80 m del centro del carrusel, debe sujetar uno de los postes metálicos del carrusel con una fuerza horizontal de 60.0 N para no salir despedida. Jacqueline está sentada en el borde, a 3.60 m del centro. *a*) ¿Con qué fuerza horizontal debe sujetarse Jacqueline para no salir despedida? *b*) Si Jacqueline sale despedida, ¿qué velocidad horizontal tendrá en ese momento?

5.110. Un pasajero con masa de 85 kg se subió a una rueda de la fortuna, como la del ejemplo 5.24. Los asientos viajan en un círculo de 35 m de radio. La rueda gira con rapidez constante y efectúa una revolución cada 25 s. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre el pasajero por el asiento cuando él está *a*) un cuarto de revolución más allá de su punto más bajo y *b*) un cuarto de revolución más allá de su punto más alto.

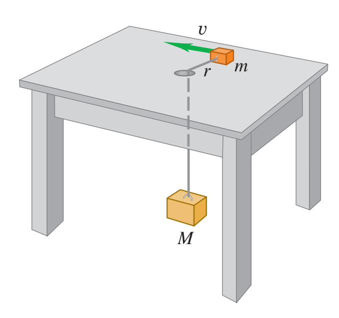
5.111. En el juego "Rotor" del parque de diversiones Six Flags Over Texas, la gente se paraba contra la pared interior de un cilindro vertical hueco de 2.5 m de radio. El cilindro comenzaba a girar y, al alcanzar una tasa de rotación constante de 0.60 rev/s, el piso en que estaba parada la gente bajaba 0.5 m. La gente quedaba pegada a la pared. *a*) Dibuje un diagrama de fuerzas para un pasajero, una vez que haya bajado el piso. *b*) ¿Qué coeficiente de fricción estática mínimo se requiere para que un pasajero no resbale hacia abajo a la nueva posición del piso? *c*) ¿La respuesta al inciso *b*) depende de la masa del pasajero? (*Nota:* al final, el cilindro se detenía gradualmente y las personas resbalaban por las paredes hacia el piso.)

5.112. Un estudiante universitario de física se paga su colegiatura actuando en un carnaval errante. Él conduce una motocicleta dentro de una esfera de plástico hueca transparente. Una vez que adquiere suficiente rapidez, describe un círculo vertical de radio 13.0 m. El estudiante tiene masa de 70.0 kg, y su motocicleta tiene una masa de 40.0 kg. *a*) ¿Qué rapidez mínima debe tener en el punto más alto del círculo para no perder contacto con la esfera? *b*) En el punto más bajo del círculo, su rapidez es el doble de la calculada en el inciso *a*). ¿Qué magnitud tiene la fuerza normal ejercida por la esfera sobre la motocicleta en este punto?

5.113. Segunda intención. Un joven conduce un automóvil Nash Ambassador 1954 clásico con una amiga sentada a su derecha en el lado del copiloto del asiento delantero. El Ambassador tiene asientos corridos planos. Al joven le gustaría estar más cerca de su amiga, y decide usar la física para lograr su objetivo romántico dando una vuelta rápida. *a*) ¿Deberá dar vuelta al auto a la derecha o a la izquierda, para que su amiga se deslice hacia él? *b*) Si el coeficiente de fricción estática entre la amiga y el asiento es de 0.35 y el auto viaja a una rapidez constante de 20 m/s, ¿con qué radio máximo de la vuelta la amiga aún se desliza hacia el joven?

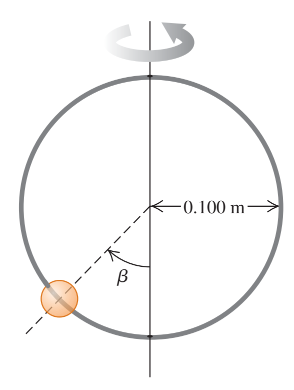
5.114. Un bloque pequeño de masa m descansa sobre una mesa horizontal sin fricción, a una distancia r de un agujero en el centro de la mesa (figura 5.79). Un cordón atado al bloque pequeño pasa por el agujero y está atado por el otro extremo a un bloque suspendido de masa M. Se imprime al bloque pequeño un movimiento circular uniforme con radio r y rapidez v. ¿Qué v se necesita para que el bloque grande quede inmóvil una vez que se le suelta?

Figura 5.79 Problema 5.114.



5.115. Una cuenta pequeña puede deslizarse sin fricción por un aro circular de 0.100 m de radio, que está en un plano vertical. El aro gira con rapidez constante de 4.00 rev/s en torno a un diámetro vertical (figura 5.80). *a*) Calcule el ángulo β en que la cuenta está en equilibrio vertical. (Desde luego, tiene aceleración radial hacia el eje.) *b*) ¿Podría la cuenta mantenerse a la misma altura que el centro del aro? *c*) ¿Qué sucede si el aro gira a 1.00 rev/s?

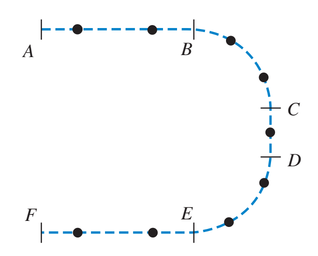
Figura 5.80 Problema 5.115.



5.116. Un avión a escala con masa de 2.20 kg se mueve en el plano xy, de manera que sus coordenadas x y y varían con el tiempo, según $x(t) = \alpha - \beta t^3$ y $y(t) = \gamma t - \delta t^2$, donde $\alpha = 1.50$ m, $\beta = 0.120$ m/s^3, $\gamma = 3.00$ m/s y $\delta = 1.00$ m/s^2. *a*) Calcule las componentes x y y de la fuerza neta en el plano en función del tiempo. *b*) Dibuje la trayectoria del avión entre $t = 0$ y $t = 3.00$ s, incluyendo en su dibujo vectores que muestren la fuerza neta que actúa sobre el avión en $t = 0$, $t = 1.00$ s, $t = 2.00$ s y $t = 3.00$ s. Para cada uno de estos instantes, relacione la dirección de la fuerza neta con la dirección de giro del avión y diga si la rapidez del avión está aumentando, disminuyendo o no cambia. *c*) Determine la magnitud y dirección de la fuerza neta en $t = 3.00$ s.

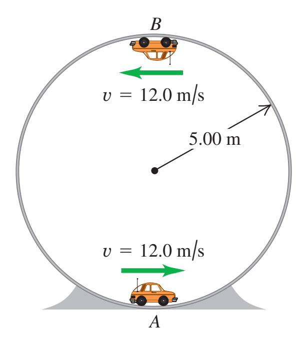
5.117. Una partícula se mueve en una superficie sin fricción con la trayectoria de la figura 5.81 (vista superior). La partícula está inicialmente en reposo en el punto A y comienza a moverse hacia B, aumentando su rapidez a razón constante. De B a C, la partícula sigue una trayectoria circular con rapidez constante. La rapidez sigue constante en la recta de C a D. De D a E, la partícula sigue una trayectoria circular, pero ahora su rapidez disminuye a razón constante. La rapidez sigue disminuyendo a razón constante entre E y F, donde se detiene la partícula. (Los intervalos de tiempo entre los puntos marcados no son iguales.) En cada punto negro de la figura, dibuje flechas para representar la velocidad, la aceleración y la fuerza neta que actúa sobre la partícula. Haga la longitud de las flechas proporcional a la magnitud del vector.

Figura **5.81** Problema 5.117.



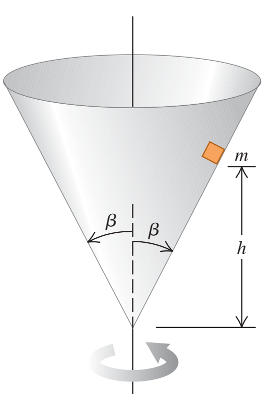
5.118. Un carrito de control remoto con masa de 1.60 kg se mueve a una rapidez constante de $v = 12.0$ m/s, en un círculo vertical dentro de un cilindro hueco metálico de 5.00 m de radio (figura 5.82). ¿Qué magnitud tiene la fuerza normal ejercida sobre el coche por las paredes del cilindro *a*) en el punto A (parte inferior del círculo vertical)? *b*) ¿Y en el punto B (parte superior del círculo vertical)?

Figura **5.82** Problema 5.118.



5.119. Un bloque pequeño de masa m se coloca dentro de un cono invertido que gira sobre un eje vertical, de modo que la duración de una revolución del cono es T (figura 5.83). Las paredes del cono forman un ángulo β con la vertical. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el cono es μ_s. Si el bloque debe mantenerse a una altura constante h sobre el vértice del cono, ¿qué valores máximo y mínimo puede tener T?

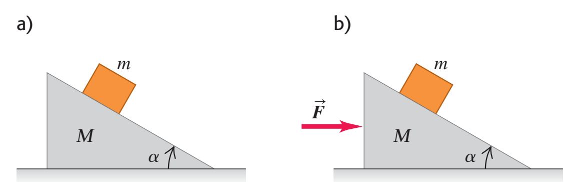
Figura **5.83** Problema 5.119.



Problemas de desafío

5.120. Cuña móvil. Una cuña de masa M descansa en una mesa horizontal sin fricción. Un bloque de masa m se coloca sobre la cuña (figura 5.84a). No hay fricción entre el bloque y la cuña. El sistema se suelta del reposo. *a*) Calcule la aceleración de la cuña, así como las componentes horizontal y vertical de la aceleración del bloque. *b*) ¿Sus respuestas al inciso *a*) se reducen a los resultados correctos cuando M es muy grande? *c*) ¿Qué forma tiene la trayectoria del bloque, vista por un observador estacionario?

Figura **5.84** Problemas de desafío 5.120 y 5.121.



5.121. Una cuña de masa M descansa en una mesa horizontal sin fricción. Un bloque de masa m se coloca sobre la cuña y se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ a la cuña (figura 5.84b). ¿Qué magnitud debe tener $\vec{F}$ para que el bloque permanezca a una altura constante sobre la mesa?

5.122. Una caja de peso w se acelera rampa arriba mediante una cuerda que ejerce una tensión T. La rampa forma un ángulo α con la horizontal, y la cuerda tiene un ángulo θ sobre la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la rampa es μ_k. Demuestre que la aceleración máxima se da con $\theta = \arctan \mu_k$, sea cual fuere el valor de α (en tanto la caja siga en contacto con la rampa).

5.123. Ángulo de fuerza mínima. Se tira de una caja de peso w con rapidez constante sobre un piso horizontal aplicando una fuerza $\vec{F}$ con un ángulo θ sobre la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y la caja es μ_k. *a*) Calcule F en términos de θ, μ_k y w. *b*) Si $w = 400$ N y $\mu_k = 0.25$, calcule F para θ desde 0 a 90° en incrementos de 10°. Grafique F contra θ. *c*) Con la expresión general del inciso *a*), calcule el valor de θ para el que la F necesaria para mantener una rapidez constante es mínima. (*Sugerencia:* en un punto donde una función es mínima, ¿qué valor tienen la primera y segunda derivadas de la función? Aquí, F es función de θ.) Para el caso especial de $w = 400$ N y $\mu_k = 0.25$, evalúe este θ óptimo y compare su resultado con la gráfica que elaboró en el inciso *b*).

5.124. Pelota de béisbol que cae. Se deja caer una pelota de béisbol desde la azotea de un edificio alto. Conforme la pelota cae, el aire ejerce una fuerza de arrastre proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota ($f = Dv^2$). *a*) Dibuje un diagrama que muestre la dirección del movimiento, e indique con vectores todas las fuerzas que actúan sobre la pelota. *b*) Aplique la segunda ley de Newton e infiera de la ecuación resultante las propiedades generales del movimiento. *c*) Demuestre que la bola adquiere una rapidez terminal dada por la ecuación (5.13). *d*) Deduzca la ecuación de la rapidez en cualquier instante. (*Nota:*

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctanh}\left(\frac{x}{a}\right)$$

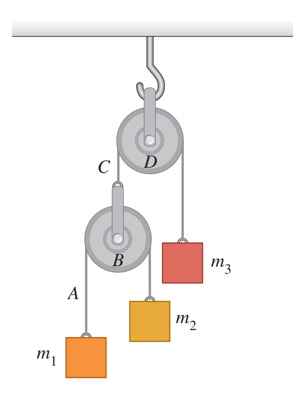
donde

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

define la tangente hiperbólica.)

5.125. Máquina de Atwood doble. En la figura 5.85, las masas m_1 y m_2 están conectadas por un cordón ligero *A* que pasa por una polea ligera sin fricción *B*. El eje de la polea *B* está conectado por otro cordón ligero *C* a una masa m_3 pasando por una segunda polea ligera sin fricción *D*. La polea *D* está suspendida del techo por su eje. El sistema se suelta del reposo. En términos de m_1, m_2, m_3 y *g*, *a*) ¿qué aceleración tiene el bloque m_3? *b*) ¿Y la polea *B*? *c*) ¿Y el bloque m_1? *d*) ¿Y el bloque m_2? *e*) ¿Qué tensión tiene el cordón *A*? *f*) ¿Y el cordón *C*?

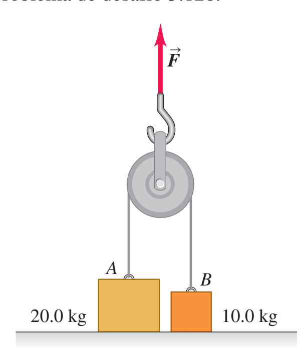
Figura 5.85 Problema de desafío 5.125.



g) ¿Qué dan sus expresiones para el caso especial en que $m_1 = m_2$ y $m_3 = m_1 + m_2$? ¿Es lógico esto?

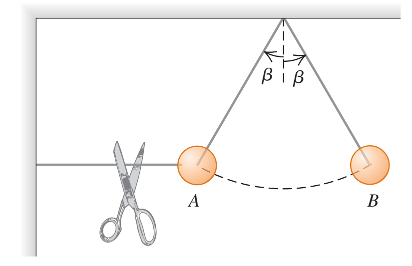
5.126. Las masas de los bloques *A* y *B* de la figura 5.86 son 20.0 kg y 10.0 kg, respectivamente. Inicialmente, los bloques están en reposo sobre el piso y están conectados por un cordón sin masa que pasa por una polea sin masa ni fricción. Se aplica una fuerza $\vec{F}$ hacia arriba a la polea. Calcule las aceleraciones $\vec{a}_A$ del bloque *A* y $\vec{a}_B$ del bloque *B* cuando *F* es *a*) 124 N; *b*) 294 N; *c*) 424 N.

Figura 5.86 Problema de desafío 5.126.



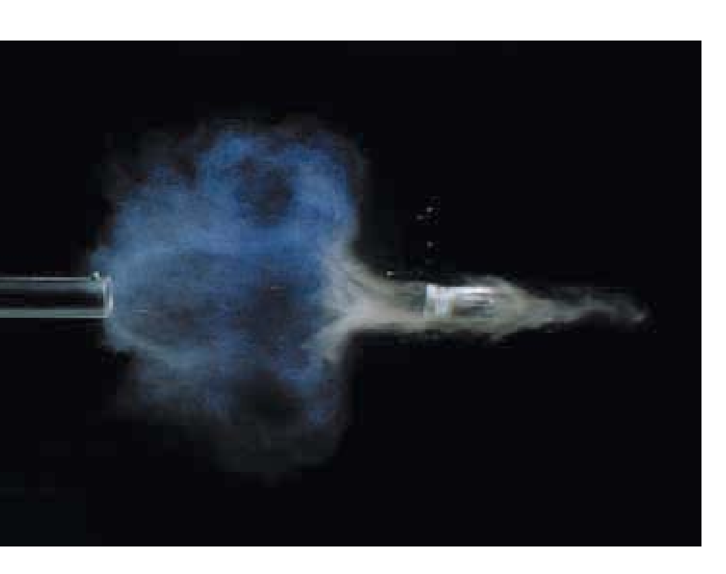
5.127. Una esfera se sostiene en reposo en la posición *A* de la figura 5.87 con dos cordones ligeros. Se corta el cordón horizontal y la esfera comienza a oscilar como péndulo. *B* es el punto más a la derecha que la esfera alcanza al oscilar. ¿Qué relación hay entre la tensión del cordón de soporte en la posición *B* y su valor en *A* antes de que se corte el cordón horizontal?

Figura 5.87 Problema de desafío 5.127.



TRABAJO Y ENERGÍA CINÉTICA

6



?Cuando una arma de fuego se dispara, los gases que se expanden en el cañón empujan el proyectil hacia afuera, de acuerdo con la tercera ley de Newton, el proyectil ejerce tanta fuerza sobre los gases, como éstos ejercen sobre aquél. ¿Sería correcto decir que el *proyectil* efectúa trabajo sobre los *gases*?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza efectúe trabajo sobre un cuerpo, y cómo calcular la cantidad de trabajo realizada.
- La definición de energía cinética (energía de movimiento) de un cuerpo, y lo que significa físicamente.
- Cómo el trabajo total efectuado sobre un cuerpo cambia la energía cinética del cuerpo, y cómo utilizar este principio para resolver problemas de mecánica.
- Cómo usar la relación entre trabajo total y cambio de energía cinética, cuando las fuerzas no son constantes y el cuerpo sigue una trayectoria curva, o ambas situaciones.
- Cómo resolver problemas que implican potencia (tasa para efectuar trabajo).

Suponga que trata de calcular la rapidez de una flecha disparada con un arco. Aplica las leyes de Newton y todas las técnicas de resolución de problemas que hemos aprendido, pero se encuentra un obstáculo importante: después de que el arquero suelta la flecha, la cuerda del arco ejerce una fuerza *variable* que depende de la posición de la flecha. Por ello, los métodos sencillos que aprendimos no bastan para calcular la rapidez. No debe temer; nos falta mucho para acabar con la mecánica, y hay otros métodos para manejar esta clase de problemas.

El nuevo método que vamos a presentar usa las ideas de *trabajo* y *energía*. La importancia del concepto de energía surge del *principio de conservación de la energía*: la energía es una cantidad que se puede convertir de una forma a otra, pero no puede crearse ni destruirse. En un motor de automóvil, la energía química almacenada en el combustible se convierte parcialmente en la energía del movimiento del auto, y parcialmente en energía térmica. En un horno de microondas, la energía electromagnética obtenida de la compañía de electricidad se convierte en energía térmica en el alimento cocido. En éstos y todos los demás procesos, la energía *total* —es la suma de toda la energía presente en diferentes formas— no cambia. Todavía no se ha hallado ninguna excepción.

Usaremos el concepto de energía en el resto del libro para estudiar una amplísima gama de fenómenos físicos. La energía nos ayudará a entender por qué un abrigo nos mantiene calientes, cómo el flash de una cámara produce un destello de luz, y el significado de la famosa ecuación de Einstein $E = mc^2$.

En este capítulo, no obstante, nos concentraremos en la mecánica. Conoceremos una importante forma de energía, la *energía cinética* o la energía de movimiento, y su relación con el concepto de *trabajo*. También consideraremos la *potencia*, que es la rapidez con que se realiza trabajo. En el capítulo 7 ampliaremos las ideas de trabajo y energía cinética, para comprender más a fondo los conceptos de energía y conservación de la energía.

6.1 Trabajo

6.1 Estos hombres realizan trabajo conforme empujan sobre el vehículo averiado, porque ejercen una fuerza sobre el auto al moverlo.



Seguramente usted estará de acuerdo en que cuesta trabajo mover un sofá pesado, levantar una pila de libros del piso hasta colocarla en un estante alto, o empujar un automóvil averiado para retirarlo de la carretera. Todos estos ejemplos concuerdan con el significado cotidiano de *trabajo*: cualquier actividad que requiere esfuerzo muscular o mental.

En física el trabajo tiene una definición mucho más precisa. Al utilizar esa definición, descubriremos que, en cualquier movimiento, por complicado que sea, el trabajo total realizado sobre una partícula por todas las fuerzas que actúan sobre ella es igual al cambio en su *energía cinética*: una cantidad relacionada con la rapidez de la partícula. Esta relación se cumple aún cuando dichas fuerzas no sean constantes, que es una situación que puede ser difícil o imposible de manejar con las técnicas que estudiamos en los capítulos 4 y 5. Los conceptos de trabajo y energía cinética nos permitirán resolver problemas de mecánica que no podríamos haber abordado antes.

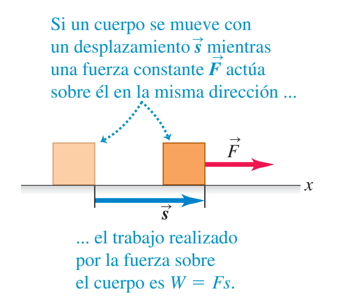
En esta sección aprenderemos cómo se define el trabajo y cómo se calcula en diversas situaciones que implican fuerzas *constantes*. Aunque ya sabemos cómo resolver problemas donde las fuerzas son constantes, el concepto de trabajo nos resultará útil. Más adelante en este capítulo deduciremos la relación entre trabajo y energía cinética, y la aplicaremos después en problemas donde las fuerzas *no* son constantes.

Los tres ejemplos de trabajo antes mencionados —mover un sofá, levantar una pila libros y empujar un automóvil— tienen algo en común. En ellos realizamos trabajo ejerciendo una *fuerza* sobre un cuerpo mientras éste se *mueve* de un lugar a otro, es decir, sufre un *desplazamiento* (figura 6.1). Efectuamos más trabajo si la fuerza es mayor (empujamos más fuerte el auto) o si el desplazamiento es mayor (lo empujamos una mayor distancia).

El físico define el trabajo con base en estas observaciones. Considere un cuerpo que sufre un desplazamiento de magnitud s en línea recta. (Por ahora, supondremos que todo cuerpo puede tratarse como partícula y despreciaremos cualquier rotación o cambio en la forma del cuerpo.) Mientras el cuerpo se mueve, una fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre él en la dirección del desplazamiento $\vec{s}$ (figura 6.2). Definimos el **trabajo** W realizado por esta fuerza constante en dichas condiciones como el producto de la magnitud F de la fuerza y la magnitud s del desplazamiento:

$$W = Fs \quad \text{(fuerza constante en dirección del desplazamiento rectilíneo)} \tag{6.1}$$

6.2 El trabajo realizado por una fuerza constante que actúa en la misma dirección que el desplazamiento.



El trabajo efectuado sobre el cuerpo es mayor si la fuerza F o el desplazamiento s son mayores, lo que coincide con nuestras observaciones anteriores.

CUIDADO **Trabajo = W, peso = w** No confunda W (trabajo) con w (peso). Si bien los símbolos son casi iguales, se trata de cantidades distintas.

La unidad de trabajo en el SI es el **joule** (que se abrevia J y se pronuncia "yul", nombrada así en honor del físico inglés del siglo XIX James Prescott Joule). Por la ecuación (6.1), vemos que, en cualquier sistema de unidades, la unidad de trabajo es la unidad de fuerza multiplicada por la unidad de distancia. En el SI la unidad de fuerza es el newton y la unidad de distancia es el metro, así que 1 joule equivale a un *newton-metro* $(\text{N} \cdot \text{m})$:

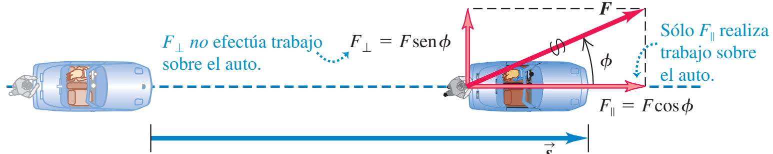
$$1 \text{ joule} = (1 \text{ newton})(1 \text{ metro}) \quad \text{o bien} \quad 1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m}$$

En el sistema británico, la unidad de fuerza es la libra (Ib), la unidad de distancia es el pie (ft), y la unidad de trabajo es el *pie-libra* $(\text{ft} \cdot \text{lb})$. Estas conversiones son útiles:

$$1\ \text{J} = 0.7376\ \text{ft} \cdot \text{lb} \qquad 1\ \text{ft} \cdot \text{lb} = 1.356\ \text{J}$$

Como ilustración de la ecuación (6.1), pensemos en una persona que empuja un automóvil averiado. Si lo empuja a lo largo de un desplazamiento $\vec{s}$ con una fuerza constante $\vec{F}$ en la dirección del movimiento, la cantidad de trabajo que efectúa sobre el auto está dada por la ecuación (6.1): $W = Fs$. Sin embargo, ¿y si la persona hubiera empujado con un ángulo ϕ con respecto al desplazamiento del auto (figura 6.3)? Entonces $\vec{F}$ tiene una componente $F_{\parallel} = F\cos\phi$ en la dirección del desplazamiento y una componente $F_{\perp} = F\,\text{sen}\,\phi$ que actúa perpendicular al desplazamiento. (Otras fuerzas deben actuar sobre el automóvil para que se mueva en la dirección de $\vec{s}$, no

6.3 El trabajo realizado por una fuerza constante que actúa con un ángulo relativo al desplazamiento.



en la dirección de $\vec{F}$; sin embargo, sólo nos interesa el trabajo realizado por la persona, así que sólo consideraremos la fuerza que ésta ejerce.) En este caso, sólo la componente paralela $F_{\parallel}$ es eficaz para mover el auto, por lo que definimos el trabajo como el producto de esta componente de fuerza y la magnitud del desplazamiento. Por lo tanto, $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$, o bien,

ActivPhysics ONLINE 5.1 Cálculos de trabajo

$$W = Fs\cos\phi \quad \text{(fuerza constante, desplazamiento rectilíneo)} \tag{6.2}$$

Estamos suponiendo que F y ϕ son constantes durante el desplazamiento. Si $\phi = 0$ y $\vec{F}$ y $\vec{s}$ tienen la misma dirección, entonces $\cos\phi = 1$ y volvemos a la ecuación (6.1).

La ecuación (6.2) tiene la forma del *producto escalar* de dos vectores (presentado en la sección 1 .10): $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$. Quizá usted desee repasar esa definición. Ello nos permite escribir la ecuación (6.2) de forma más compacta:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{s} \quad \text{(fuerza constante, desplazamiento rectilíneo)} \tag{6.3}$$

CUIDADO **El trabajo es un escalar** Veamos un punto fundamental: el trabajo es una cantidad *escalar*, aunque se calcule usando dos cantidades vectoriales (fuerza y desplazamiento). Una fuerza de 5 N al este que actúa sobre un cuerpo que se mueve 6 m al este realiza exactamente el mismo trabajo, que una fuerza de 5 N al norte que actúa sobre un cuerpo que se mueve 6 m al norte.

Ejemplo 6.1 Trabajo efectuado por una fuerza constante

a) Esteban ejerce una fuerza constante de magnitud 210 N (aproximadamente 47 lb) sobre el automóvil averiado de la figura 6.3, mientras lo empuja una distancia de 18 m. Además, un neumático se desinfló, así que, para lograr que el auto avance al frente, Esteban debe empujarlo con un ángulo de 30° con respecto a la dirección del movimiento. ¿Cuánto trabajo efectúa Esteban? *b*) Con ánimo de ayudar, Esteban empuja un segundo automóvil averiado con una fuerza constante $\vec{F} = (160\text{ N})\hat{\imath} - (40\text{ N})\hat{\jmath}$. El desplazamiento del automóvil es $\vec{s} = (14\text{ m})\hat{\imath} + (11\text{ m})\hat{\jmath}$. ¿Cuánto trabajo efectúa Esteban en este caso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En ambos incisos, *a*) y *b*), la incógnita es el trabajo W efectuado por Esteban. En ambos casos, la fuerza es constante y el desplazamiento es rectilíneo, así que podemos usar la ecuación (6.2) o la ecuación (6.3).

PLANTEAR: El ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{s}$ se da explícitamente en el inciso *a*), de manera que podemos aplicar directamente la ecuación (6.2). En el inciso *b*), no se da el ángulo, así que nos conviene más calcular el producto escalar de la ecuación (6.3), a partir de las componentes de $\vec{F}$ y $\vec{s}$, como en la ecuación (1.21): $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

EJECUTAR: *a*) Por la ecuación (6.2),

$$W = Fs\cos\phi = (210\text{ N})(18\text{ m})\cos 30° = 3.3 \times 10^3\text{ J}$$

b) Las componentes de $\vec{F}$ son $F_x = 160$ N y $F_y = -40$ N, en tanto que las componentes de $\vec{s}$ son $x = 14$ m y $y = 11$ m. (No hay componentes z para ningún vector.) Así, utilizando las ecuaciones (1.21) y (6.3),

$$\begin{aligned} W &= \vec{F}\cdot\vec{s} = F_x x + F_y y \\ &= (160\text{ N})(14\text{ m}) + (-40\text{ N})(11\text{ m}) \\ &= 1.8 \times 10^3\text{ J} \end{aligned}$$

EVALUAR: En cada caso, el trabajo que efectúa Esteban es mayor que 1000 J. Nuestros resultados muestran que 1 joule es relativamente poco trabajo.

Trabajo: Positivo, negativo o cero

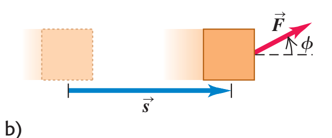
En el ejemplo 6.1, el trabajo efectuado al empujar los autos fue positivo. No obstante, es importante entender que el trabajo también puede ser negativo o cero. Ésta es la diferencia esencial entre la definición de trabajo en física y la definición "cotidiana" del mismo.

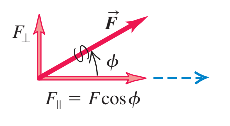
6.4 Una fuerza constante $\vec{F}$ puede efectuar trabajo positivo, negativo o cero, dependiendo del ángulo entre $\vec{F}$ y el desplazamiento $\vec{s}$.





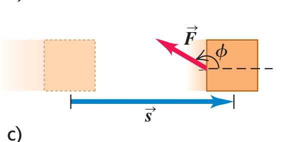
a)

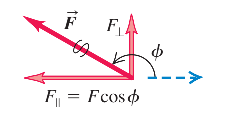




La fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento:
- El trabajo sobre el objeto es positivo.
- $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$

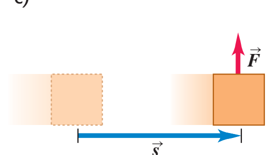
b)

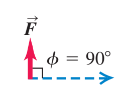




La fuerza tiene una componente opuesta a la dirección del desplazamiento:
- El trabajo sobre el objeto es negativo.
- $W = F_{\parallel}s = (F\cos\phi)s$
- Matemáticamente, $W < 0$ porque $F\cos\phi$ es negativo para $90° < \phi < 270°$.

c)

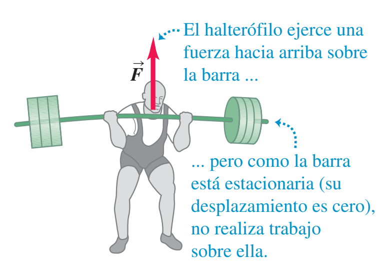




La fuerza es perpendicular a la dirección del desplazamiento:
- La fuerza *no* realiza trabajo sobre el objeto.
- De forma más general, cuando una fuerza que actúa sobre un objeto tiene una componente $F_{\perp}$ perpendicular al desplazamiento del objeto, dicha componente no efectúa trabajo sobre el objeto.

Si la fuerza tiene una componente *en la misma dirección* que el desplazamiento (ϕ entre 0 y 90°), cos ϕ en la ecuación (6.2) es positivo y el trabajo W es *positivo* (figura 6.4a). Si la fuerza tiene una componente *opuesta* al desplazamiento (ϕ entre 90 y 180°), cos ϕ es negativo y el trabajo es *negativo* (figura 6.4b). Si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, $\phi = 90°$ y el trabajo realizado por la fuerza es *cero* (figura 6.4c). Los casos de trabajo cero y negativo ameritan mayor estudio; veamos algunos ejemplos.

6.5 Un halterófilo no realiza trabajo sobre una barra si la mantiene estacionaria.



Hay muchas situaciones donde actúan fuerzas pero no realizan trabajo. Quizás usted piense que “cuesta trabajo” sostener una barra de halterofilia inmóvil en el aire durante cinco minutos (figura 6.5); pero en realidad no se está realizando trabajo sobre la barra porque no hay desplazamiento. Nos cansamos porque las componentes de las fibras musculares de los brazos realizan trabajo al contraerse y relajarse continuamente. Sin embargo, se trata de trabajo efectuado por una parte del brazo que ejerce fuerza sobre otra, *no* sobre la barra. (En la sección 6.2 hablaremos más del trabajo realizado por una parte de un cuerpo sobre otra.) Aun si usted camina con velocidad constante por un piso horizontal llevando un libro, no realiza trabajo sobre éste. El libro tiene un desplazamiento, pero la fuerza de soporte (vertical) que usted ejerce sobre el libro no tiene componente en la dirección (horizontal) del movimiento: $\phi = 90°$ en la ecuación (6.2) y cos $\phi = 0$. Si un cuerpo se desliza por una superficie, el trabajo realizado sobre él por la fuerza normal es cero; y cuando una pelota atada a un cordón se pone en movimiento circular uniforme, el trabajo realizado sobre ella por la tensión en el cordón es cero. En ambos casos, el trabajo es cero porque la fuerza no tiene componente en la dirección del movimiento.

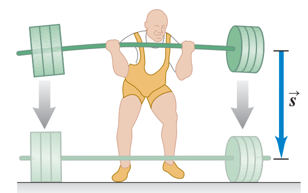
¿Qué significa realmente realizar trabajo *negativo*? La respuesta está en la tercera ley de Newton del movimiento. Cuando un halterófilo (levantador de pesas) baja una barra como en la figura 6.6a, sus manos y la barra se mueven juntas con el mismo desplazamiento $\vec{s}$. La barra ejerce una fuerza $\vec{F}_{\text{barra sobre manos}}$ sobre sus manos en la misma dirección que el desplazamiento de éstas, así que el trabajo realizado por la *barra* sobre sus *manos* es positivo (figura 6.6b). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, las manos del halterófilo ejerce una fuerza igual y opuesta $\vec{F}_{\text{manos sobre barra}} = -\vec{F}_{\text{barra sobre manos}}$ sobre la barra (figura 6.6c). Esta fuerza, que evita que la barra se estrelle contra el piso, actúa opuesta al desplazamiento de la barra. Por lo tanto, el trabajo realizado por sus *manos* sobre la *barra* es negativo. Puesto que las manos del halterófilo y la barra tienen el mismo desplazamiento, el trabajo realizado por sus manos sobre la barra es justo el negativo del realizado por la barra sobre sus manos. En general, cuando un cuerpo realiza trabajo negativo sobre otro cuerpo, éste realiza una cantidad igual de trabajo *positivo* sobre el primero.

?

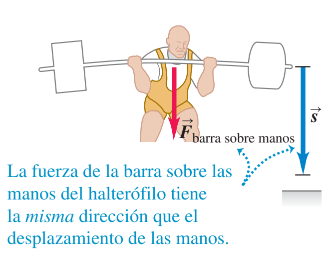
CUIDADO **Tenga presente quién hace el trabajo** Siempre hablamos de trabajo realizado *sobre* un cuerpo específico *por* una fuerza determinada. Nunca olvide especificar exactamen-

6.6 Las manos de este halterófilo efectúan trabajo negativo sobre la barra, mientras que la barra realiza trabajo positivo sobre sus manos.

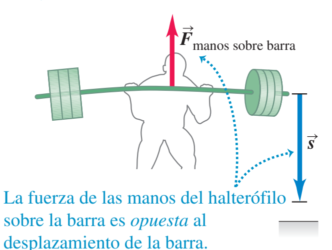
a) Un halterófilo baja una barra al piso.



b) La barra efectúa trabajo *positivo* sobre las manos del halterófilo.



c) Las manos del halterófilo realizan trabajo *negativo* sobre la barra.



te qué fuerza realiza el trabajo en cuestión. Si levantamos un libro, ejercemos una fuerza hacia arriba sobre el libro y el desplazamiento de éste es hacia arriba, así que el trabajo realizado por la fuerza de levantamiento sobre el libro es positivo. En cambio, el trabajo realizado por la fuerza *gravitacional* (peso) sobre el libro que se levanta es *negativo*, porque tal fuerza es opuesta al desplazamiento hacia arriba.

Trabajo total

¿Cómo calculamos el trabajo cuando *varias* fuerzas actúan sobre un cuerpo? Podemos usar las ecuaciones (6.2) o (6.3) para calcular el trabajo realizado por cada fuerza individual. Puesto que el trabajo es una cantidad escalar, el trabajo *total* W_{tot} realizado por todas las fuerzas sobre el cuerpo es la suma algebraica de los trabajos realizados por las fuerzas individuales. Otra forma de calcular W_{tot} es calcular la suma vectorial de las fuerzas (es decir, la fuerza neta) y usarla en vez de $\vec{F}$ en la ecuación (6.2) o en la (6.3). El siguiente ejemplo ilustra ambas técnicas.

Ejemplo 6.2 Trabajo realizado por varias fuerzas

Un granjero engancha su tractor a un trineo cargado con leña y lo arrastra 20 m sobre el suelo horizontal (figura 6.7a). El peso total del trineo y la carga es de 14,700 N. El tractor ejerce una fuerza constante de 5000 N a 36.9° sobre la horizontal, como se indica en la figura 6.7b. Una fuerza de fricción de 3500 N se opone al movimiento del trineo. Calcule el trabajo realizado por cada fuerza que actúa sobre el trineo y el trabajo total de todas las fuerzas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Todas las fuerzas son constantes y el desplazamiento es rectilíneo, de manera que podemos calcular el trabajo empleando los conceptos usados en esta sección. Obtendremos el trabajo total de dos maneras: 1. sumando los trabajos efectuados por cada fuerza sobre el trineo, y 2. calculando el trabajo efectuado por la fuerza neta que actúa sobre el trineo.

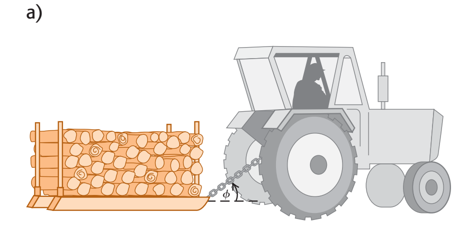
PLANTEAR: Puesto que estamos trabajando con fuerzas, los primeros pasos son dibujar un diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan sobre el trineo, y elegir un sistema de coordenadas (figura 6.7b). Conocemos el ángulo entre el desplazamiento (en la dirección $+x$) y cada una de las cuatro fuerzas: peso, fuerza normal, fuerza del tractor y fuerza de fricción. Por lo tanto, con la ecuación (6.2) calculamos el trabajo realizado por cada fuerza.

Como vimos en el capítulo 5, para obtener la fuerza neta sumamos las componentes de las cuatro fuerzas. La segunda ley de Newton nos dice que, como el movimiento del trineo es exclusivamente horizontal, la fuerza neta sólo tiene una componente horizontal.

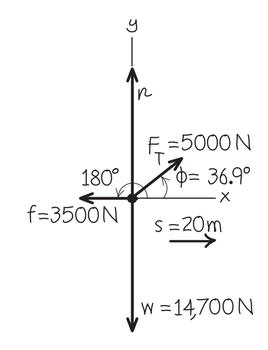
EJECUTAR: El trabajo W_w realizado por el peso es cero, porque su dirección es perpendicular al desplazamiento. (compare esto con la figura 6.4c) Lo mismo sucede con la fuerza normal, el trabajo W_n

6.7 Cálculo del trabajo realizado sobre un trineo de leña que es arrastrado por un tractor.

a)



b) Diagrama de cuerpo libre para el trineo



continúa

realizado por la fuerza normal es cero. Entonces, $W_w = W_n = 0$. (Por cierto, la magnitud de la fuerza normal es menor que el peso; véase el ejemplo 5.15 de la sección 5.3, donde el diagrama de cuerpo libre es muy similar.)

Nos queda la fuerza F_T ejercida por el tractor y la fuerza de fricción f. Por la ecuación (6.2), el trabajo W_T efectuado por el tractor es

$$W_T = F_T s \cos\phi = (5000\text{ N})(20\text{ m})(0.800) = 80{,}000\text{ N}\cdot\text{m}$$
$$= 80\text{ kJ}$$

La fuerza de fricción $\vec{f}$ es opuesta al desplazamiento, así que $\phi = 180°$ y $\cos\phi = -1$. El trabajo W_f realizado por la fuerza de fricción es

$$W_f = fs\cos 180° = (3500\text{ N})(20\text{ m})(-1) = -70{,}000\text{ N}\cdot\text{m}$$
$$= -70\text{ kJ}$$

El trabajo total W_{tot} realizado por todas las fuerzas sobre el trineo es la suma *algebraica* del trabajo realizado por cada fuerza individual:

$$W_{tot} = W_w + W_n + W_T + W_f = 0 + 0 + 80\text{ kJ} + (-70\text{ kJ})$$
$$= 10\text{ kJ}$$

Usando la otra estrategia, primero obtenemos la suma *vectorial* de todas las fuerzas (la fuerza neta) y la usamos para calcular el trabajo total. La mejor forma de hacerlo es usando componentes. De la figura 6.7b,

$$\sum F_x = F_T\cos\phi + (-f) = (5000\text{ N})\cos 36.9° - 3500\text{ N}$$
$$= 500\text{ N}$$
$$\sum F_y = F_T\,\text{sen}\,\phi + n + (-w)$$
$$= (5000\text{ N})\,\text{sen}\,36.9° + n - 14{,}700\text{ N}$$

No necesitamos la segunda ecuación; sabemos que la componente y de fuerza es perpendicular al desplazamiento, así que no realiza trabajo. Además, no hay componente y de aceleración, así que de cualquier forma $\sum F_y$ debe ser cero. Por lo tanto, el trabajo total es el realizado por la componente x total:

$$W_{tot} = \left(\sum\vec{F}\right)\cdot\vec{s} = \left(\sum F_x\right)s = (500\text{ N})(20\text{ m}) = 10{,}000\text{ J}$$
$$= 10\text{ kJ}$$

EVALUAR: Obtenemos el mismo valor de W_{tot} con los dos métodos, como debería ser.

Observe que la fuerza neta en la dirección x *no* es cero, así que el trineo se está acelerando. En la sección 6.2 volveremos a este ejemplo y veremos cómo usar el concepto de trabajo para explorar el movimiento del trineo.

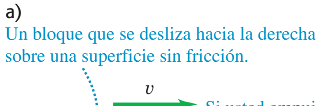
Evalúe su comprensión de la sección 6.1 Un electrón se mueve en línea recta hacia el este con una rapidez constante de 8×10^7 m/s. Tiene fuerzas eléctrica, magnética y gravitacional que actúan sobre él. Durante un desplazamiento de 1 metro, el trabajo total efectuado sobre el electrón es i) positivo, ii) negativo, iii) cero, iv) no hay suficiente información para decidir.

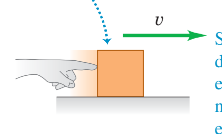
6.2 Energía cinética y el teorema trabajo-energía

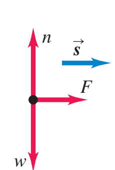
El trabajo total realizado por fuerzas externas sobre un cuerpo se relaciona con el desplazamiento de éste (los cambios en su posición), pero también está relacionado con los cambios en la *rapidez* del cuerpo. Para comprobarlo, considere la figura 6.8, que

6.8 La relación entre el trabajo total efectuado sobre un cuerpo y la manera en que cambia la rapidez del cuerpo.

a)

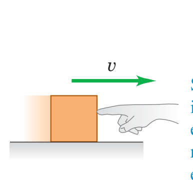


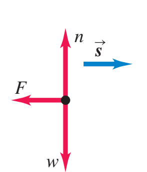




- El trabajo total efectuado sobre el bloque durante un desplazamiento $\vec{s}$ es positivo: $W_{tot} > 0$.
- El bloque aumenta de rapidez.

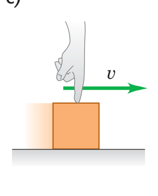
b)

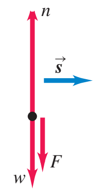




- El trabajo total efectuado sobre el bloque durante un desplazamiento $\vec{s}$ es negativo: $W_{tot} < 0$.
- El bloque se frena.

c)





- El trabajo total realizado sobre el bloque durante un desplazamiento $\vec{s}$ es cero: $W_{tot} = 0$.
- La rapidez del bloque permanece igual.

muestra tres ejemplos de un bloque que se desliza sobre una mesa sin fricción. Las fuerzas que actúan sobre el bloque son su peso $\vec{w}$, 1a fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza $\vec{F}$ ejercida por la mano.

En la figura 6.8a, la fuerza neta sobre el bloque es en la dirección de su movimiento. Por la segunda ley de Newton, ello significa que el bloque se acelera; la ecuación (6.1) nos indica también que el trabajo total W_{tot} efectuado sobre el bloque es positivo. El trabajo total es *negativo* en la figura 6.8b porque la fuerza neta se opone al desplazamiento; aquí el bloque se frena. La fuerza neta es cero en la figura 6.8c, así que la rapidez del bloque no cambia y el trabajo total efectuado sobre él es cero. Podemos concluir que, *si una partícula se desplaza, se acelera si* $W_{tot} > 0$, *se frena si* $W_{tot} < 0$ *y mantiene su rapidez si* $W_{tot} = 0$.

Hagamos más cuantitativas tales observaciones. Considere una partícula con masa m que se mueve en el eje x bajo la acción de una fuerza neta constante de magnitud F dirigida hacia el eje $+x$ (figura 6.9). La aceleración de la partícula es constante y está dada por la segunda ley de Newton, $F = ma_x$. Suponga que la rapidez cambia de v_1 a v_2 mientras la partícula sufre un desplazamiento $s = x_2 - x_1$ del punto x_1 al x_2. Usando una ecuación de aceleración constante, ecuación (2.13), y sustituyendo v_{0x} por v_1, v_x por v_2 y $(x - x_0)$ por s, tenemos

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_x s$$

$$a_x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s}$$

Al multiplicar esta ecuación por m y sustituir ma_x por la fuerza neta F, obtenemos

$$F = ma_x = m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} \quad \text{y}$$

$$Fs = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{6.4}$$

El producto Fs es el trabajo efectuado por la fuerza neta F y, por lo tanto, es igual al trabajo total W_{tot} efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Llamamos a la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ la **energía cinética** K de la partícula (definición de energía cinética):

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(definición de energía cinética)} \tag{6.5}$$

Igual que el trabajo, la energía cinética de una partícula es una cantidad escalar; sólo depende de la masa y la rapidez de la partícula, no de su dirección de movimiento. Un automóvil (visto como partícula) tiene la misma energía cinética yendo al norte a 10 m/s que yendo al este a 10 m/s. La energía cinética nunca puede ser negativa, y es cero sólo si la partícula está en reposo.

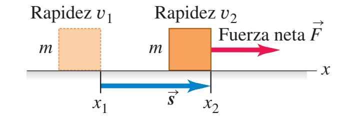
Ahora podemos interpretar la ecuación (6.4) en términos de trabajo y energía cinética. El primer término del miembro derecho de la ecuación (6.4) es $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$, la energía cinética final de la partícula (es decir, después del desplazamiento). El segundo término es la energía cinética inicial, $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$, y la diferencia entre estos términos es el *cambio* de energía cinética. Así, la ecuación (6.4) dice:

El trabajo efectuado por la fuerza neta sobre una partícula es igual al cambio de energía cinética de la partícula:

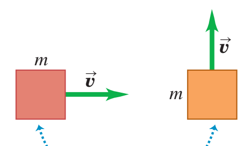
$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K \qquad \text{(teorema trabajo-energía)} \tag{6.6}$$

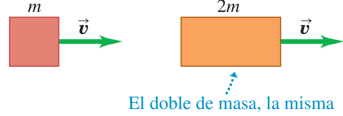
Éste es el resultado del **teorema trabajo-energía**.

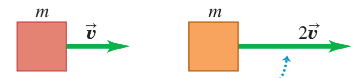
6.9 Una fuerza neta constante $\vec{F}$ efectúa trabajo sobre un cuerpo en movimiento.



6.10 Comparación entre la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ de cuerpos distintos.







El teorema trabajo-energía concuerda con nuestras observaciones acerca del bloque de la figura 6.8. Si W_{tot} es *positivo*, la energía cinética *aumenta* (la energía cinética final K_2 es mayor que la energía cinética inicial K_1) y la partícula tiene mayor rapidez al final del desplazamiento que al principio. Si W_{tot} es *negativa*, la energía cinética *disminuye* (K_2 es menor que K_1) y la rapidez es menor después del desplazamiento. Si $W_{tot} = 0$, la energía cinética permanece igual ($K_1 = K_2$) y la rapidez no cambia. Observe que el teorema trabajo-energía sólo indica cambios en la *rapidez*, no en la velocidad, pues la energía cinética no depende de la dirección del movimiento.

Por la ecuación (6.4) o la (6.6), la energía cinética y el trabajo deben tener las mismas unidades. Por lo tanto, el joule es la unidad del SI tanto del trabajo como de la energía cinética (y, como veremos, de todos los tipos de energía). Para verificarlo, observe que la cantidad $K = \frac{1}{2}mv^2$ tiene unidades de $\text{kg} \cdot (\text{m/s})^2$ o $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$; recordamos que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, así que

$$1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m} = 1\ (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{m} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$$

En el sistema británico, la unidad de energía cinética y trabajo es

$$1\ \text{ft} \cdot \text{lb} = 1\ \text{ft} \cdot \text{slug} \cdot \text{ft/s}^2 = 1\ \text{slug} \cdot \text{ft}^2/\text{s}^2$$

Puesto que usamos las leyes de Newton para deducir el teorema trabajo-energía, sólo podemos usarlo en un marco de referencia inercial. Además, observe que el teorema es válido en *cualquier* marco inercial; sin embargo, los valores de W_{tot} y $K_2 - K_1$ podrían diferir de un marco inercial a otro (porque el desplazamiento y la rapidez de un cuerpo pueden ser diferentes en diferentes marcos).

Dedujimos el teorema trabajo-energía para el caso especial de movimiento rectilíneo con fuerzas constantes, y en los siguientes ejemplos sólo lo aplicaremos a ese caso especial. En la siguiente sección veremos que el teorema es válido en general, aun si las fuerzas no son constantes y la trayectoria de la partícula es curva.

Estrategia para resolver problemas 6.1 Trabajo y energía cinética



IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* El teorema trabajo-energía es extremadamente útil en situaciones donde se desea relacionar la rapidez v_1 de un cuerpo en un punto de su movimiento, con su rapidez v_2 en otro punto. (El enfoque es menos útil en problemas donde interviene el *tiempo*, como determinar cuánto tarda un cuerpo en ir del punto 1 al punto 2. Ello se debe a que en el teorema trabajo-energía no interviene el tiempo. Si es preciso calcular tiempos, suele ser mejor utilizar las relaciones entre tiempo, posición, velocidad y aceleración que describimos en los capítulos 2 y 3.)

PLANTEAR *el problema* con los pasos siguientes:

1. Elija las posiciones inicial y final del cuerpo, y dibuje un diagrama de cuerpo libre con todas las fuerzas que actúan sobre él.
2. Elija un sistema de coordenadas. (Si el movimiento es rectilíneo, lo más fácil suele ser que las posiciones tanto inicial como final estén sobre el eje x.)
3. Elabore una lista de las cantidades conocidas y desconocidas, y decida cuáles son las incógnitas. En algunos casos, la incógnita será la rapidez inicial o final del cuerpo; en otros, será la magnitud de una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, o sobre el desplazamiento de éste.

EJECUTAR *la solución:* Calcule el trabajo W efectuado por cada fuerza. Si la fuerza es constante y el desplazamiento es en línea recta, se puede usar la ecuación (6.2) o la (6.3). (Más adelante en este capítulo veremos cómo manejar fuerzas variables y trayectorias curvas.) Revise el signo del trabajo; W debe ser positivo si la fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento, negativo si la fuerza tiene una componente opuesta al desplazamiento, y cero si la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares.

Sume los trabajos realizados por cada fuerza para obtener el trabajo total W_{tot}. A veces es más fácil obtener primero la suma vectorial de las fuerzas (la fuerza neta) y luego calcular el trabajo efectuado por la fuerza neta; este valor también es W_{tot}.

Escriba expresiones para la energía cinética inicial y final (K_1 y K_2). Tenga presente que en la energía cinética interviene la *masa*, no el *peso*; si le dan el peso del cuerpo, tendrá que usar la relación $w = mg$ para calcular la masa.

Por último, use $W_{tot} = K_2 - K_1$ para despejar la incógnita. Recuerde que el miembro derecho de esta ecuación es la energía cinética *final* menos la energía cinética *inicial*, nunca al revés.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que su respuesta sea lógica físicamente. Recuerde sobre todo que la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ nunca puede ser negativa. Si obtiene una K negativa, quizás intercambió las energías inicial y final en $W_{tot} = K_2 - K_1$ o tuvo un error de signo en uno de los cálculos de trabajo.

Ejemplo 6.3 Uso de trabajo y energía para calcular rapidez

Veamos otra vez el trineo de la figura 6.7 y las cifras finales del ejemplo 6.2. Suponga que la rapidez inicial v_1 es 2.0 m/s. ¿Cuál es la rapidez final del trineo después de avanzar 20 m?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos el teorema trabajo-energía, ecuación (6.6) ($W_{tot} = K_2 - K_1$), pues nos dan la rapidez inicial $v_1 = 2.0$ m/s y nos piden calcular la rapidez final.

PLANTEAR: La figura 6.11 muestra nuestro esquema de la situación. El movimiento es en la dirección $+x$.

EJECUTAR: Ya calculamos que trabajo total de todas las fuerzas en el ejemplo 6.2: $W_{tot} = 10$ kJ. Por lo tanto, la energía cinética del trineo y su carga debe aumentar en 10 kJ.

Si queremos escribir expresiones para las energías cinéticas inicial y final, necesitamos la masa del trineo y la carga. Nos dicen que el *peso* es de 14,700 N, así que la masa es

$$m = \frac{w}{g} = \frac{14{,}700\ \text{N}}{9.8\ \text{m/s}^2} = 1500\ \text{kg}$$

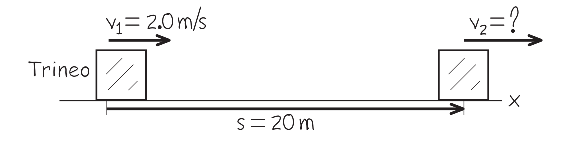
Entonces, la energía cinética inicial K_1 es

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(1500\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s})^2 = 3000\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$$
$$= 3000\ \text{J}$$

La energía cinética final K_2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(1500\ \text{kg})v_2^2$$

6.11 Nuestro esquema para este problema.



donde v_2 es la rapidez que nos interesa. La ecuación (6.6) da

$$K_2 = K_1 + W_{tot} = 3000\ \text{J} + 10{,}000\ \text{J} = 13{,}000\ \text{J}$$

Igualamos estas dos expresiones de K_2, sustituimos 1 J = 1 kg · m^2/s^2, y despejamos v_2:

$$v_2 = 4.2\ \text{m/s}$$

EVALUAR: El trabajo total es positivo, de manera que la energía cinética aumenta ($K_2 > K_1$) y la rapidez aumenta ($v_2 > v_1$).

Este problema también puede resolverse sin el teorema trabajo-energía. Podemos obtener la aceleración de $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ y usar después las ecuaciones de movimiento con aceleración constante para obtener v_2. Como la aceleración es en el eje x,

$$a = a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{(5000\ \text{N})\cos 36.9° - 3500\ \text{N}}{1500\ \text{kg}}$$
$$= 0.333\ \text{m/s}^2$$

Entonces, con la ecuación (2.13),

$$v_2^2 = v_1^2 + 2as = (2.0\ \text{m/s})^2 + 2(0.333\ \text{m/s}^2)(20\ \text{m})$$
$$= 17.3\ \text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v_2 = 4.2\ \text{m/s}$$

Obtuvimos el mismo resultado con el enfoque de trabajo-energía; no obstante, ahí evitamos el paso intermedio de calcular la aceleración. Veremos varios ejemplos más en este capítulo y en el siguiente que *pueden* resolverse sin considerar la energía, aunque son más fáciles si lo hacemos. Si un problema puede resolverse con dos métodos distintos, resolverlo con ambos (como hicimos aquí) es una buena forma de comprobar los resultados.

Ejemplo 6.4 Fuerzas sobre un martillo

En un martinete, un martillo de acero con masa de 200 kg se levanta 3.00 m sobre el tope de una viga en forma de I vertical, que se está clavando en el suelo (figura 6.12a). El martillo se suelta, metiendo la viga-I otros 7.4 cm en el suelo. Los rieles verticales que guían el martillo ejercen una fuerza de fricción constante de 60 N sobre éste. Use el teorema trabajo-energía para determinar *a*) la rapidez del martillo justo antes de golpear la viga-I y *b*) la fuerza media que el martillo ejerce sobre la viga-I. Ignore los efectos del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos el teorema trabajo-energía para relacionar la rapidez del martillo en distintos lugares con las fuerzas que actúan sobre él. Aquí nos interesan *tres* posiciones: el punto 1, donde el martillo parte del reposo; el punto 2, donde hace contacto primero con la viga-I; y el punto 3, donde el martillo se detiene (véase la figura 6.12a). Las dos incógnitas son la rapidez del martillo en el punto 2 y la fuerza que el martillo ejerce entre los puntos 2 y 3. Entonces, aplicaremos el teorema trabajo-energía dos veces: una al movimiento del punto 1 al 2, y otra al movimiento de 2 a 3.

PLANTEAR: La figura 6.12b muestra las fuerzas verticales que actúan sobre el martillo en caída del punto 1 al punto 2. (Podemos ignorar cualesquiera fuerzas horizontales que pudieran estar presentes, pues no efectúan trabajo cuando el martillo se desplaza verticalmente.) En esta parte del movimiento, la incógnita es la rapidez del martillo v_2.

La figura 6. 12c muestra las fuerzas verticales que actúan sobre el martillo durante el movimiento del punto 2 al punto 3. Además de las fuerzas mostradas en la figura 6.12b, la viga-I ejerce una fuerza normal hacia arriba de magnitud n sobre el martillo. En realidad, esta fuerza varía conforme el martillo se va deteniendo; pero por sencillez

continúa

consideraremos n constante. Así n representa el valor *medio* de esta fuerza hacia arriba durante el movimiento. La incógnita en esta parte del movimiento es la fuerza que el *martillo* ejerce sobre la viga-I; es la fuerza de reacción a la fuerza normal ejercida por la viga-I, así que por la tercera ley de Newton su magnitud también es n.

EJECUTAR: *a*) Del punto 1 al punto 2, las fuerzas verticales son el peso hacia abajo $w = mg = (200\ \text{kg})(9.8\ \text{m/s}^2) = 1960\ \text{N}$ hacia abajo, y la fuerza de fricción $f = 60\ \text{N}$ hacia arriba. La fuerza neta es entonces $w - f = 1900\ \text{N}$. El desplazamiento del martillo del punto 1 al punto 2 es de $s_{12} = 3.00\ \text{m}$ hacia abajo. El trabajo total sobre el martillo al bajar del punto 1 al 2 es, entonces,

$$W_{\text{tot}} = (w - f)s_{12} = (1900\ \text{N})(3.00\ \text{m}) = 5700\ \text{J}$$

En el punto 1, el martillo está en reposo, así que su energía cinética K_1 es cero. De manera que la energía cinética K_2 en el punto 2 es igual al trabajo total realizado sobre el martillo entre los puntos 1 y 2:

$$W_{\text{tot}} = K_2 - K_1 = K_2 - 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2W_{\text{tot}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(5700\ \text{J})}{200\ \text{kg}}} = 7.55\ \text{m/s}$$

Ésta es la rapidez del martillo en el punto 2, justo antes de golpear la viga-I.

b) Mientras el martillo se mueve hacia abajo entre los puntos 2 y 3, la fuerza neta hacia abajo que actúa sobre él es $w - f - n$ (véase la figura 6.12c). El trabajo total realizado sobre el martillo durante el desplazamiento es

$$W_{\text{tot}} = (w - f - n)s_{23}$$

La energía cinética inicial en esta parte del movimiento es K_2 que, del inciso *a*), es igual a 5700 J. La energía cinética final es $K_3 = 0$, porque el martillo se detiene. Entonces, por el teorema trabajo-energía,

$$W_{\text{tot}} = (w - f - n)s_{23} = K_3 - K_2$$

$$n = w - f - \frac{K_3 - K_2}{s_{23}}$$

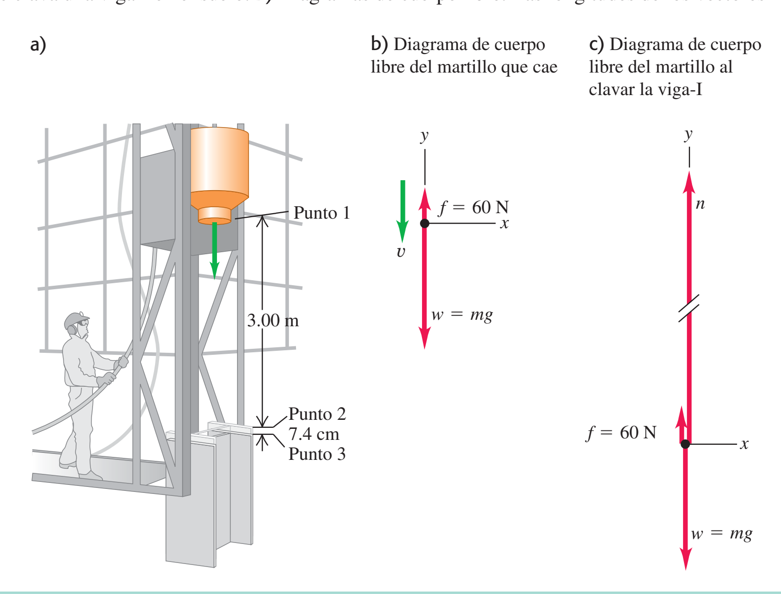
$$= 1960\ \text{N} - 60\ \text{N} - \frac{0\ \text{J} - 5700\ \text{J}}{0.074\ \text{m}}$$

$$= 79{,}000\ \text{N}$$

La fuerza hacia abajo que el martillo ejerce sobre la viga-I tiene esta misma magnitud, 79,000 N (unas 9 toneladas): más de 40 veces el peso del martillo.

EVALUAR: El cambio neto en la energía cinética del martillo del punto 1 al punto 3 es cero; una fuerza neta relativamente pequeña efectúa trabajo positivo durante una distancia grande, y luego una fuerza neta mucho mayor realiza trabajo negativo en una distancia mucho más corta. Lo mismo sucede si usted acelera un automóvil gradualmente y choca contra una pared. La fuerza tan grande necesaria para reducir la energía cinética a cero en una distancia corta es lo que daña el auto (y quizás a usted).

6.12 a) Un martinete clava una viga-I en el suelo. b) Diagramas de cuerpo libre. Las longitudes de los vectores no están a escala.



Significado de la energía cinética

El ejemplo 6.4 ilustra el significado físico de la energía cinética. El martillo se deja caer del reposo y, al golpear la viga-I, su energía cinética es igual al trabajo total realizado hasta ese punto por la fuerza neta. Esto se cumple en general: para acelerar una partícula de masa m desde el reposo (cero energía cinética) hasta una rapidez v,

el trabajo total efectuado sobre ella debe ser igual al cambio de energía cinética desde 0 hasta $K = \frac{1}{2}mv^2$:

$$W_{tot} = K - 0 = K$$

Así, *la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total que se efectuó para acelerarla desde el reposo hasta su rapidez actual* (figura 6.13). La definición $K = \frac{1}{2}mv^2$, no se eligió al azar: es la *única* definición que concuerda con esta interpretación de la energía cinética.

En la segunda parte del ejemplo 6.4, se usó la energía cinética del martillo para efectuar trabajo sobre la viga-I y clavarla en el suelo. Esto nos brinda otra interpretación: *la energía cinética de una partícula es igual al trabajo que puede efectuar una partícula mientras se detiene*. Por ello, hacemos hacia atrás la mano y el brazo cuando atrapamos una pelota. Al detenerse la pelota, realiza una cantidad de trabajo (fuerza por distancia) sobre la mano igual a la energía cinética inicial de la pelota. Al hacer la mano hacia atrás, aumentamos la distancia donde actúa la fuerza y así reducimos la fuerza ejercida sobre nuestra mano.

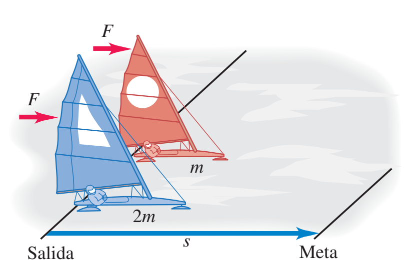
6.13 Cuando un jugador de billar golpea una bola blanca en reposo, la energía cinética de la bola después de ser golpeada es igual al trabajo que el taco efectuó sobre ella. Cuanto mayor sea la fuerza ejercida por el taco y mayor sea la distancia que la bola se mueve mientras está en contacto con el taco, mayor será la energía cinética de la bola.



Ejemplo conceptual 6.5 Comparación de energías cinéticas

Dos veleros para hielo como el del ejemplo 5.6 (sección 5.2) compiten en un lago horizontal sin fricción (figura 6.14). Los veleros tienen masas m y $2m$, respectivamente; pero sus velas son idénticas, así que el viento ejerce la misma fuerza constante $\vec{F}$ sobre cada velero. Los 2 veleros parten del reposo y la meta está a una distancia s. ¿Cuál velero cruza la meta con mayor energía cinética?

6.14 Carrera entre veleros en el hielo.



SOLUCIÓN

Si usamos la definición matemática de energía cinética, $K = \frac{1}{2}mv^2$, [ecuación (6.5)] la respuesta a este problema no es tan evidente. El velero con masa $2m$ tiene mayor masa, y podríamos suponer que alcanza mayor energía cinética en la línea de meta; no obstante, el velero más pequeño de masa m cruza la meta con mayor rapidez, y podríamos suponer que *este* velero tiene mayor energía cinética. ¿Cómo decidimos?

La forma correcta de enfocar el problema es recordar que *la energía cinética de una partícula es igual al trabajo total realizado para acelerarla desde el reposo*. Ambos veleros recorren la misma distancia s, y sólo la fuerza F en la dirección del movimiento realiza trabajo sobre ellos. Por lo tanto, el trabajo total efectuado entre la salida y la meta es el *mismo* para los dos veleros, $W_{tot} = Fs$. En la meta, cada velero tiene una energía cinética igual al trabajo W_{tot} efectuado sobre él, ya que cada velero partió del reposo. Así, ¡ambos veleros tienen la *misma* energía cinética en la meta!

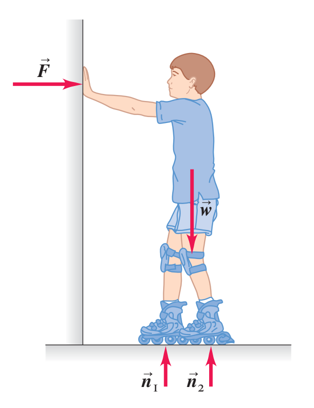
Quizás el lector piense que se trata de una pregunta "capciosa", pero no es así. Si usted entiende realmente el significado físico de cantidades como la energía cinética, será capaz de resolver problemas de física con mayor rapidez y comprensión.

Observe que no necesitamos mencionar el tiempo que cada velero tardó en llegar a la meta. La razón es que el teorema trabajo-energía no hace referencia directa al tiempo, sólo al desplazamiento. De hecho, el velero de masa m tarda menos tiempo en llegar a la meta, que el velero más grande de masa $2m$, porque aquél tiene mayor aceleración.

Trabajo y energía cinética en sistemas compuestos

En esta sección nos hemos cuidado de aplicar el teorema trabajo-energía sólo a cuerpos que podemos representar como *partículas*, esto es, como masas puntuales en movimiento. En los sistemas complejos que deben representarse en términos de muchas partículas con diferentes movimientos, surgen aspectos más sutiles que no podemos ver con detalle en este capítulo. Sólo veremos un ejemplo.

6.15 Las fuerzas externas que actúan sobre un patinador que se empuja de una pared. El trabajo realizado por estas fuerzas es cero, pero aun así su energía cinética cambia.



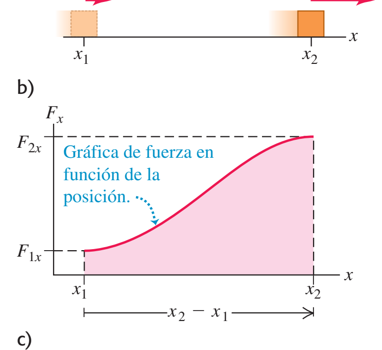
Considere a un niño parado en patines, sin fricción, sobre una superficie horizontal viendo hacia una pared rígida (figura 6.15). Él empuja la pared, poniéndose en movimiento hacia la derecha. Sobre el niño actúan su peso $\vec{w}$, las fuerzas normales $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ hacia arriba ejercidas por el suelo sobre sus patines, y la fuerza horizontal $\vec{F}$ ejercida sobre el niño por la pared. No hay desplazamiento vertical, así que $\vec{w}, \vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ no efectúan trabajo. $\vec{F}$ es la fuerza que lo acelera a la derecha, pero el punto donde se aplica (las manos del niño) no se mueve, así que $\vec{F}$ tampoco efectúa trabajo. ¿De dónde proviene entonces la energía cinética del niño?

El asunto es que simplemente no es correcto representar al niño como una masa puntual. Para que el movimiento se dé como se describió, diferentes partes del cuerpo deben tener diferentes movimientos; las manos están estacionarias contra la pared y el torso se aleja de ésta. Las diversas partes del cuerpo interactúan y una puede ejercer fuerzas y realizar trabajo sobre otra. Por lo tanto, la energía cinética *total* de este sistema de partes corporales *compuesto* puede cambiar, aunque no realicen trabajo las fuerzas aplicadas por cuerpos (como la pared) externos al sistema. En el capítulo 8 veremos más a fondo el movimiento de un conjunto de partículas que interactúan. Descubriremos que, al igual que en el niño del ejemplo, la energía cinética total del sistema puede cambiar aun cuando el exterior no realice trabajo sobre alguna parte del sistema.

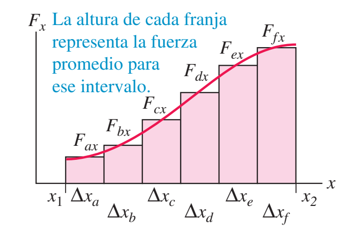
Evalúe su comprensión de la sección 6.2 Clasifique los siguientes cuerpos de acuerdo con su energía cinética, de menor a mayor. i) un cuerpo de 2.0 kg que se mueve a 5.0 m/s; ii) Un cuerpo de 1.0 kg que inicialmente estaba en reposo y que luego tiene 30 J de trabajo realizado sobre él; iii) un cuerpo de 1.0 kg que inicialmente estaba moviéndose a 4.0 m/s y luego tiene 20 J de trabajo efectuado sobre él; iv) un cuerpo de 2.0 kg que inicialmente estaba moviéndose a 10 m/s y luego hizo 80 J de trabajo sobre otro cuerpo.

6.16 Cálculo del trabajo efectuado por una fuerza variable F_x en la dirección x cuando una partícula se mueve de x_1 a x_2.

a) La partícula se mueve de x_1 a x_2 en respuesta a una fuerza cambiante en la dirección x.



c)



6.3 Trabajo y energía con fuerza variable

Hasta ahora hemos considerado sólo trabajo efectuado por *fuerzas constantes*. Pero, ¿qué sucede cuando estiramos un resorte? Cuanto más lo estiramos, con más fuerza debemos tirar, así que la fuerza ejercida *no* es constante al estirarlo. También analizamos únicamente movimiento *rectilíneo*. Podemos imaginar muchas situaciones en las que una fuerza que varía en magnitud, dirección o ambas cosas actúa sobre un cuerpo que sigue una trayectoria curva. Necesitamos poder calcular el trabajo realizado por la fuerza en estos casos más generales. Por fortuna, veremos que el teorema trabajo-energía se cumple aun cuando las fuerzas varían y la trayectoria del cuerpo no es recta.

Trabajo efectuado por una fuerza variable, movimiento rectilíneo

Agreguemos sólo una complicación a la vez. Consideremos un movimiento rectilíneo en el eje x con una fuerza cuya componente x F_x varía conforme se mueve el cuerpo. (Un ejemplo de la vida cotidiana es conducir un automóvil en una carretera recta, pero el conductor está acelerando y frenando constantemente.) Suponga que una partícula se mueve sobre el eje x de x_1 a x_2 (figura 6.16a). La figura 6.16b es una gráfica de la componente x de la fuerza en función de la coordenada x de la partícula. Para determinar el trabajo realizado por esta fuerza, dividimos el desplazamiento total en segmentos pequeños, Δx_a, Δx_b, etcétera (figura 6.16c). Aproximamos el trabajo realizado por la fuerza en el segmento Δx_a como la componente x media de fuerza F_{ax} en ese segmento multiplicada por el desplazamiento Δx_a. Hacemos esto para cada segmento y después sumamos los resultados. El trabajo realizado por la fuerza en el desplazamiento total de x_1 a x_2 es aproximadamente

$$W = F_{ax}\Delta x_a + F_{bx}\Delta x_b + \cdots$$

En el límite donde el número de segmentos se hace muy grande y su anchura muy pequeña, la suma se convierte en la *integral* de F_x de x_1 a x_2:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx \qquad \text{(componente } x \text{ de fuerza variable, desplazamiento rectilíneo)} \tag{6.7}$$

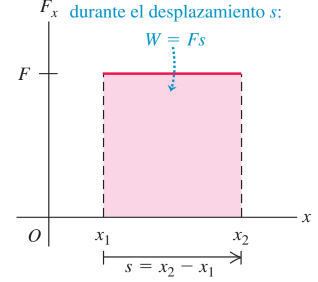
Observe que $F_{ax}\Delta x_a$ es el *área* de la primera franja vertical de la figura 6.16c y que la integral de la ecuación (6.7) representa el área bajo la curva de la figura 6.16b entre x_1 y x_2. *En una gráfica de fuerza en función de posición, el trabajo total realizado por la fuerza está representado por el área bajo la curva entre las posiciones inicial y final*. Otra interpretación de la ecuación (6.7) es que el trabajo W es igual a la fuerza media que actúa en todo el desplazamiento, multiplicada por el desplazamiento.

Si F_x, la componente x de la fuerza, es constante puede sacarse de la integral de la ecuación (6.7):

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx = F_x \int_{x_1}^{x_2} dx = F_x(x_2 - x_1) \qquad \text{(fuerza constante)}$$

Pero $x_2 - x_1 = s$, el desplazamiento total de la partícula. Así, en el caso de una fuerza constante F, la ecuación (6.7) indica que $W = Fs$, lo cual coincide con la ecuación (6.1). La interpretación del trabajo como el área bajo la curva de F_x en función de x también es válida para una fuerza constante; $W = Fs$ es el área de un rectángulo de altura F y anchura s (figura 6.17).

6.17 El trabajo realizado por una fuerza constante F en la dirección x conforme una partícula se mueve de x_1 a x_2.

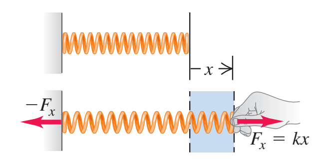


Apliquemos ahora lo aprendido al resorte estirado. Para mantener un resorte estirado una distancia x más allá de su longitud sin estiramiento, debemos aplicar una fuerza de igual magnitud en cada extremo (figura 6.18). Si el alargamiento x no es excesivo, vemos que la fuerza aplicada al extremo derecho tiene una componente x directamente proporcional a x:

$$F_x = kx \qquad \text{(fuerza requerida para estirar un resorte)} \tag{6.8}$$

donde k es una constante llamada **constante de fuerza** (o constante de resorte) del resorte. Las unidades de k son fuerza dividida entre distancia, N/m en el SI y lb/ft en unidades británicas. Un resorte blando de juguete (como Slinky™) tiene una constante de fuerza de cerca de 1 N/m; para los resortes mucho más rígidos de la suspensión de un automóvil, k es del orden de 10^5 N/m. La observación de que el alargamiento (no excesivo) es proporcional a la fuerza fue hecha por Robert Hooke en 1678 y se conoce como **ley de Hooke**; sin embargo, no debería llamarse "ley", pues es una afirmación acerca de un dispositivo específico y no una ley fundamental de la naturaleza. Los resortes reales no siempre obedecen la ecuación (6.8) con precisión, aunque se trata de un modelo idealizado útil. Veremos esta ley más a fondo en el capítulo 11.

6.18 La fuerza necesaria para estirar un resorte ideal es proporcional a su alargamiento: $F_x = kx$.



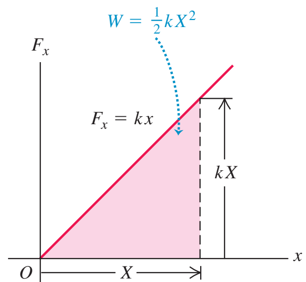
Para estirar un resorte, debemos efectuar trabajo. Aplicamos fuerzas iguales y opuestas a los extremos del resorte y las aumentamos gradualmente. Mantenemos fijo el extremo izquierdo, así que la fuerza aplicada en este punto no efectúa trabajo. La fuerza en el extremo móvil *sí* efectúa trabajo. La figura 6.19 es una gráfica de F_x contra x, el alargamiento del resorte. El trabajo realizado por F_x cuando el alargamiento va de cero a un valor máximo X es

$$W = \int_0^X F_x \, dx = \int_0^X kx \, dx = \frac{1}{2}kX^2 \tag{6.9}$$

También podemos obtener este resultado gráficamente. El área del triángulo sombreado de la figura 6.19, que representa el trabajo total realizado por la fuerza, es igual a la mitad del producto de la base y la altura:

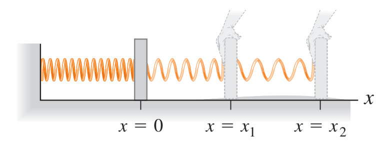
$$W = \frac{1}{2}(X)(kX) = \frac{1}{2}kX^2$$

6.19 Cálculo del trabajo efectuado para estirar un resorte una longitud X.



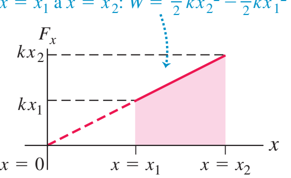
6.20 Cálculo del trabajo efectuado para estirar un resorte desde cierta extensión hasta una extensión mayor.

a) Estiramiento de un resorte de un alargamiento x_1 a un alargamiento x_2



b) Gráfica de fuerza contra distancia

El área trapezoidal bajo la línea representa el trabajo efectuado sobre el resorte para estirarlo de $x = x_1$ a $x = x_2$: $W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$



Esta ecuación también indica que el trabajo es la fuerza *media* $kx/2$ multiplicada por el desplazamiento total X. Vemos que el trabajo total es proporcional al *cuadrado* del alargamiento final X. Para estirar un resorte ideal 2 cm, necesitamos efectuar cuatro veces más trabajo que para estirarlo 1 cm.

La ecuación (6.9) supone que el resorte no estaba estirado originalmente. Si el resorte ya está estirado una distancia x_1, el trabajo necesario para estirarlo a una distancia mayor x_2 (figura 6.20) es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \tag{6.10}$$

El lector debería utilizar lo que sabe de geometría para convencerse de que el área trapezoidal bajo la línea en la figura 6.20b está dada por la expresión de la ecuación (6.10).

Si el resorte tiene espacios entre las espiras cuando no está estirado, también puede comprimirse. La ley de Hooke se cumple también para la compresión. En este caso, la fuerza y el desplazamiento tienen direcciones opuestas a las de la figura 6.18, así que F_x y x en la ecuación (6.8) son ambas negativas. Puesto que tanto F_x como x se invierten, de nuevo la fuerza tiene la dirección del desplazamiento y el trabajo realizado por F_x otra vez es positivo. El trabajo total sigue siendo el dado por la ecuación (6.9) o por la (6.10), aun si X es negativo o x_1 o x_2, o ambos, son negativos.

CUIDADO **Trabajo efectuado sobre un resorte contra trabajo efectuado *por* un resorte** Observe que el trabajo dado por la ecuación (6.10) es el que *usted* debe efectuar *sobre* un resorte para alterar su longitud. Por ejemplo, si estira un resorte que originalmente está relajado, $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ y $W > 0$. Ello se debe a que la fuerza aplicada por usted a un extremo del resorte tiene la misma dirección que el desplazamiento y a que el trabajo efectuado es positivo. En contraste, el trabajo que el *resorte* efectúa sobre el objeto al que se une está dado por el *negativo* de la ecuación (6.10). Por lo tanto, cuando estiramos un resorte, éste efectúa trabajo negativo sobre nosotros. ¡Fíjese bien en el signo del trabajo para evitar confusiones más adelante!

Ejemplo 6.6 Trabajo sobre una balanza de resorte

Una mujer que pesa 600 N se sube a una báscula que contiene un resorte rígido (figura 6.21). En equilibrio, el resorte se comprime 1.0 cm bajo su peso. Calcule la constante de fuerza del resorte y el trabajo total efectuado sobre él durante la compresión.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En equilibrio, la fuerza hacia arriba ejercida por el resorte equilibra la fuerza hacia abajo del peso de la mujer. Usaremos este principio y la ecuación (6.8) para determinar la constante de fuerza k, y emplearemos la ecuación (6.10) para calcular el trabajo W que la mujer efectúa sobre el resorte para comprimirlo.

PLANTEAR: Hacemos que los valores positivos de x correspondan al alargamiento (hacia arriba en la figura 6.21), de modo que tanto el desplazamiento del resorte (x) como la componente x de la fuerza que la mujer ejerce sobre él (F_x) son negativos.

EJECUTAR: La parte superior del resorte se desplaza $x = -1.0\text{ cm} = -0.010\text{ m}$ y la fuerza que la mujer aplica al resorte es $F_x = -600\text{ N}$. Por la ecuación (6.8), la constante de fuerza es

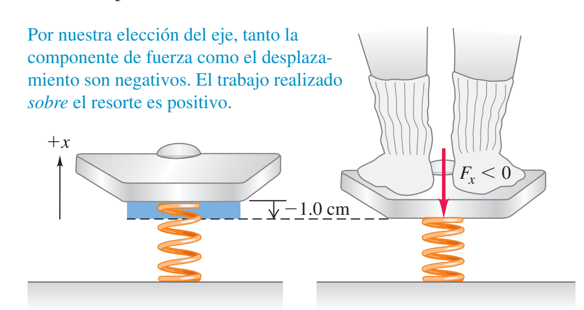
$$k = \frac{F_x}{x} = \frac{-600\text{ N}}{-0.010\text{ m}} = 6.0 \times 10^4\text{ N/m}$$

Entonces, usando $x_1 = 0$ y $x_2 = -0.010$ m en la ecuación (6.10),

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \\ &= \frac{1}{2}(6.0 \times 10^4\text{ N/m})(-0.010\text{ m})^2 - 0 = 3.0\text{ J} \end{aligned}$$

EVALUAR: La fuerza aplicada y el desplazamiento del extremo del resorte tuvieron la misma dirección, así que el trabajo efectuado debe haber sido positivo, tal como lo calculamos. Nuestra selección arbitraria de la dirección positiva no afecta el valor de W obtenido. (Compruébelo haciendo que la dirección $+x$ corresponda a una compresión (hacia abajo). Obtendrá los mismos valores de k y W.)

6.21 Compresión de un resorte en una báscula de baño.



Teorema trabajo-energía para movimiento rectilíneo, con fuerzas variables

En la sección 6.2 dedujimos el teorema trabajo-energía, $W_{tot} = K_2 - K_1$, para el caso específico de movimiento rectilíneo con fuerza neta constante. Ahora podemos demostrar que dicho teorema se cumple aun si la fuerza varía con la posición. Al igual que en la sección 6.2, consideremos una partícula que sufre un desplazamiento x bajo la acción de una fuerza neta F con componente x, que ahora permitimos variar. Como en la figura 6.16, dividimos el desplazamiento total en muchos segmentos pequeños Δx. Podemos aplicar el teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), a cada segmento porque el valor de F_x es aproximadamente constante en cada uno. El cambio de energía cinética en el segmento Δx_a es igual al trabajo $F_a \Delta x_a$, y así sucesivamente. El cambio total de la energía cinética es la suma de los cambios en los segmentos individuales y, por lo tanto, igual al trabajo total efectuado sobre la partícula en todo el desplazamiento. Así, $W_{tot} - \Delta K$ se cumple para fuerzas variables y también para fuerzas constantes.

Veamos una deducción alternativa del teorema trabajo-energía para una fuerza que varía con la posición, la cual implica hacer un cambio de variable usando v_x en vez de x en la integral de trabajo. Para ello, recordamos que la aceleración a de una partícula puede expresarse de varias formas. Usando $a_x = dv_x/dt$, $v_x = dx/dt$ y la regla de la cadena para derivadas:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = v_x\frac{dv_x}{dx} \qquad (6.11)$$

Con este resultado, la ecuación (6.7) nos dice que el trabajo total efectuado por la fuerza *neta* F_x es

$$W_{tot} = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} ma_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} mv_x\frac{dv_x}{dx}\,dx \qquad (6.12)$$

Ahora, $(dv_x/dx)\,dx$ es el cambio de velocidad dv_x durante el desplazamiento dx, así que podemos sustituir dv_x por $(dv_x/dx)\,dx$ en la ecuación (6.12). Esto cambia la variable de integración de x a v_x, así que cambiamos los límites de x_1 y x_2 a las velocidades correspondientes v_1 y v_2 en esos puntos. Esto nos da

$$W_{tot} = \int_{v_1}^{v_2} mv_x\,dv_x$$

La integral de $v_x dv_x$ es $v_x^2/2$. Sustituyendo los límites, tenemos finalmente

$$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (6.13)$$

Ésta es la ecuación (6.6). Por lo tanto, el teorema trabajo-energía es válido aun sin el supuesto de que la fuerza neta es constante.

Ejemplo 6.7 Movimiento con fuerza variable

Un deslizador de riel de aire con masa de 0.100 kg se conecta al extremo del riel horizontal con un resorte cuya constante de fuerza es 20.0 N/m (figura 6.22a). Inicialmente, el resorte no está estirado y el deslizador se mueve con rapidez de 1.50 m/s a la derecha. Calcule la distancia máxima d que el deslizador se mueve a la derecha, *a*) si el riel está activado, de modo que no hay fricción; y *b*) si se corta el suministro de aire al riel, de modo que hay fricción cinética con coeficiente $\mu_k = 0.47$.

SOLUCIÓN

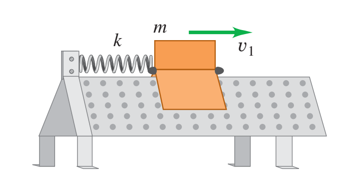
IDENTIFICAR: La fuerza ejercida por el resorte no es constante, así que *no podemos* usar las fórmulas de aceleración constante del capítulo 2 al resolver este problema. En cambio, emplearemos el teorema trabajo-energía, en el que interviene la distancia recorrida (nuestra incógnita) a través de la ecuación para el trabajo.

PLANTEAR: En las figuras 6.22b y 6.22c, elegimos la dirección $+x$ a la derecha (la dirección del movimiento del deslizador), con $x = 0$ en la posición inicial del deslizador (donde el resorte está relajado) y $x = d$ (la incógnita) en la posición donde se detiene el deslizador. En ambos casos, el movimiento es exclusivamente horizontal, así que sólo las fuerzas horizontales realizan trabajo. Cabe señalar que la ecuación (6.10) da el trabajo efectuado *sobre* el resorte al estirarse; no obstante, si queremos usar el teorema trabajo-energía necesitaremos el trabajo

continúa

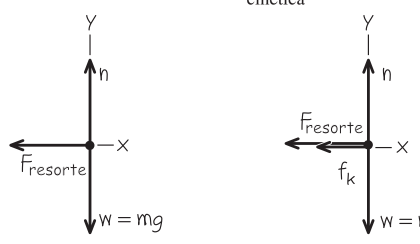
6.22 a) Deslizador sujeto a un riel de aire con un resorte. b) y c) Diagrama de cuerpo libre.

a)



b) Diagrama de cuerpo libre para el deslizador sin fricción

c) Diagrama de cuerpo libre para el deslizador con fricción cinética



efectuado *por* el resorte *sobre* el deslizador, es decir, el negativo de la ecuación (6.10).

EJECUTAR: *a*) Al moverse de $x_1 = 0$ a $x_2 = d$, el deslizador efectúa sobre el resorte un trabajo dado por la ecuación (6.10): $W = \frac{1}{2}kd^2 - \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}kd^2$. El resorte efectúa sobre el deslizador un trabajo igual pero negativo: $-\frac{1}{2}kd^2$. El resorte se estira hasta que el deslizador se detiene momentáneamente, así que la energía cinética final del deslizador es $K_2 = 0$. Su energía cinética inicial es $\frac{1}{2}mv_1^2$, donde $v_1 = 1.50$ m/s es la rapidez inicial del deslizador. Usando el teorema trabajo-energía, tenemos

$$-\frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Despejamos la distancia d que recorre el deslizador:

$$d = v_1\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.50\text{ m/s})\sqrt{\frac{0.100\text{ kg}}{20.0\text{ N/m}}}$$
$$= 0.106\text{ m} = 10.6\text{ cm}$$

Después, el resorte estirado tira del deslizador hacia la izquierda, así que éste sólo está en reposo momentáneamente.

b) Si se apaga el aire, debemos incluir el trabajo efectuado por la fuerza de fricción cinética constante. La fuerza normal n es igual en magnitud al peso del deslizador, ya que el riel es horizontal y no hay otras fuerzas verticales. La magnitud de la fuerza de fricción cinética es, entonces, $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$ dirigida opuesta al desplazamiento, y el trabajo que efectúa es

$$W_{fric} = f_k d\cos 180° = -f_k d = -\mu_k mgd$$

El trabajo total es la suma de W_{fric} y el trabajo realizado por el resorte, $-\frac{1}{2}kd^2$. Por lo tanto, el teorema trabajo energía indica que

$$-\mu_k mgd - \frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$-(0.47)(0.100\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)d - \frac{1}{2}(20.0\text{ N/m})d^2$$
$$= -\frac{1}{2}(0.100\text{ kg})(1.50\text{ m/s})^2$$
$$(10.0\text{ N/m})d^2 + (0.461\text{ N})d - (0.113\text{ N}\cdot\text{m}) = 0$$

Ésta es una ecuación cuadrática en d. Las soluciones son

$$d = \frac{-(0.461\text{ N}) \pm \sqrt{(0.461\text{ N})^2 - 4(10.0\text{ N/m})(-0.113\text{ N}\cdot\text{m})}}{2(10.0\text{ N/m})}$$
$$= 0.086\text{ m} \quad \text{o} \quad -0.132\text{ m}$$

Usamos d para representar un desplazamiento positivo, así que sólo tiene sentido el valor positivo de d. Así, con fricción, el deslizador se mueve una distancia

$$d = 0.086\text{ m} = 8.6\text{ cm}$$

EVALUAR: Con fricción, son menores el desplazamiento del deslizador y el estiramiento del resorte, como esperábamos. Una vez más, el deslizador se detiene momentáneamente y de nuevo el resorte tira de él hacia la izquierda; que se mueva o no dependerá de la magnitud de la fuerza de fricción *estática*. ¿Qué valor debería tener el coeficiente de fricción estática μ_s para evitar que el deslizador regrese a la izquierda?

Teorema trabajo-energía para movimientos en una curva

Podemos generalizar nuestra definición de trabajo para incluir una fuerza que varía en dirección, no sólo en magnitud, con un desplazamiento curvo. Suponga que una partícula se mueve de P_1 a P_2 siguiendo una curva, como se muestra en la figura 6.23a. Dividimos la curva entre esos puntos en muchos desplazamientos vectoriales infinitesimales, siendo $d\vec{l}$ uno representativo. Cada $d\vec{l}$ es tangente a la trayectoria en su posición. Sea $\vec{F}$ la fuerza en un punto representativo de la trayectoria, y sea ϕ el ángulo entre $\vec{F}$ y $d\vec{l}$ en ese punto. De manera que el elemento pequeño de trabajo dW realizado sobre la partícula durante el desplazamiento $d\vec{l}$ puede escribirse como

$$dW = F\cos\phi\, dl = F_{\parallel}\, dl = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

donde $F_{\parallel} = F\cos\phi$ es la componente de $\vec{F}$ en la dirección paralela a $d\vec{l}$ (figura 6.23b). El trabajo total realizado por $\vec{F}$ sobre la partícula al moverse de P_1 a P_2 es, entonces,

$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi\, dl = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel}\, dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} \quad \text{(trabajo en una trayectoria curva)} \tag{6.14}$$

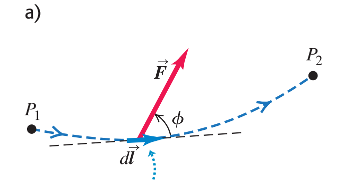
Ahora podemos demostrar que el teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), cumple aún con fuerzas variables y desplazamiento en una trayectoria curva. La fuerza $\vec{F}$ es prácticamente constante en cualquier segmento infinitesimal $d\vec{l}$ de la trayectoria, así que podemos aplicar el teorema trabajo-energía para movimiento rectilíneo a ese segmento. Entonces, el cambio de energía cinética de la partícula en ese segmento, K, es igual al trabajo $dW = F_{\parallel}\, dl = \vec{F}\cdot d\vec{l}$ realizado sobre la partícula. La suma de estos trabajos infinitesimales de todos los segmentos de la trayectoria nos da el trabajo total realizado, ecuación (6.14), que es igual al cambio total de energía cinética en toda la trayectoria. Por lo tanto, $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$ se cumple *en general*, sea cual fuere la trayectoria y el carácter de las fuerzas. Esto puede demostrarse con mayor rigor usando pasos como los de las ecuaciones (6.11) a (6.13) (véase el problema de desafío 6.104).

Observe que sólo la componente de la fuerza neta paralela a la trayectoria, $F_{\parallel}$, realiza trabajo sobre la partícula, así que sólo dicha componente puede cambiar la rapidez y la energía cinética de la partícula. La componente perpendicular a la trayectoria, $F_{\perp} = F\,\text{sen}\,\phi$, no afecta la rapidez de la partícula; sólo cambia su dirección.

La integral de la ecuación (6.14) es una *integral de línea*. Para evaluar la integral en un problema específico, necesitamos una descripción detallada de la trayectoria y de cómo $\vec{F}$ varía a lo largo de ésta. Normalmente expresamos la integral de línea en términos de alguna variable escalar, como en el ejemplo que sigue.

6.23 Una partícula sigue una trayectoria curva de P_1 a P_2 bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$ que varía en magnitud y dirección.

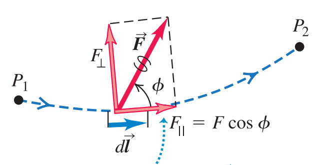
a)



En un desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$, la fuerza $\vec{F}$ realiza trabajo dW sobre la partícula:

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = F\cos\phi\, dl$

b)



Tan sólo la componente de $\vec{F}$ paralela al desplazamiento, $F_{\parallel} = F\cos\phi$, contribuye al trabajo efectuado por $\vec{F}$.

Ejemplo 6.8 Movimiento en una trayectoria curva I

En un día de campo familiar, le piden a usted empujar a su odioso primo Morton en un columpio (figura 6.24a). El peso de Morton es w, la longitud de las cadenas es R, y usted lo empuja hasta que las cadenas forman un ángulo θ_0 con la vertical. Para ello, usted ejerce una fuerza horizontal variable $\vec{F}$ que comienza en cero y aumenta gradualmente apenas lo suficiente para que Morton y el columpio se muevan lentamente y permanezcan casi en equilibrio. ¿Qué trabajo total realizan todas las fuerzas sobre Morton? ¿Qué trabajo realiza la tensión T en las cadenas? ¿Qué trabajo efectúa usted aplicando la fuerza $\vec{F}$? (Ignore el peso de las cadenas y el asiento.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El movimiento sigue una curva, así que usaremos la ecuación (6.14) para calcular el trabajo efectuado por la fuerza neta, por la fuerza de tensión y por la fuerza $\vec{F}$.

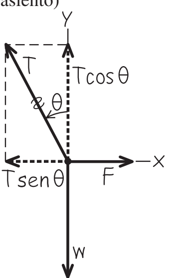
PLANTEAR: La figura 6.24b muestra el diagrama de cuerpo libre y el sistema de coordenadas. Sustituimos las dos tensiones de las cadenas por una sola tensión, T.

EJECUTAR: Hay dos formas de obtener el trabajo total efectuado durante el movimiento: 1. calculando el trabajo efectuado por cada fuerza y sumando después las cantidades de esos trabajos, y 2. calculando el trabajo efectuado por la fuerza neta. La segunda estrategia es mucho más fácil. Puesto que en esta situación Morton está siempre en equilibrio, la fuerza neta sobre él es cero, la integral de la fuerza neta de la ecuación (6.14) es cero y el trabajo total realizado sobre él por todas las fuerzas es cero.

6.24 a) Empujando al primo Morton en un columpio. b) Diagrama de cuerpo libre.

a)

b) Diagrama de cuerpo libre de Morton (se desprecia el peso de las cadenas y del asiento)



También es fácil calcular el trabajo efectuado sobre Morton por la tensión de las cadenas, porque esta fuerza es perpendicular a la dirección del movimiento en todos los puntos de la trayectoria. Por lo tanto, en todos los puntos, el ángulo entre la tensión de la cadena y el vector de desplazamiento $d\vec{l}$ es 90°, en tanto que el producto escalar de la ecuación (6.14) es cero. De esta manera, el trabajo realizado por la tensión de la cadena es cero.

continúa

Para calcular el trabajo realizado por $\vec{F}$, debemos averiguar cómo esta fuerza varía con el ángulo θ. La fuerza neta sobre Morton es cero, así que $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. De la figura 6.24b obtenemos

$$\sum F_x = F + (-T\text{sen}\,\theta) = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\theta + (-w) = 0$$

Eliminando T de estas dos ecuaciones:

$$F = w\tan\theta$$

El punto donde se aplica $\vec{F}$ describe el arco s, cuya longitud s es igual al radio R de la trayectoria circular multiplicado por su longitud θ (en radianes): $s = R\theta$. Por lo tanto, el desplazamiento $d\vec{l}$ que corresponde al pequeño cambio de ángulo $d\theta$ tiene magnitud $dl = ds = R\,d\theta$. El trabajo efectuado por $\vec{F}$ es

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\,ds$$

Expresando ahora todo en términos del ángulo θ, cuyo valor se incrementa de 0 a θ_0:

$$W = \int_0^{\theta_0} (w\tan\theta)\cos\theta\,(R\,d\theta) = wR\int_0^{\theta_0} \text{sen}\,\theta\,d\theta$$
$$= wR(1 - \cos\theta_0)$$

EVALUAR: Si $\theta_0 = 0$, no hay desplazamiento; en tal caso, $\cos\theta_0 = 1$ y $W = 0$, como esperábamos. Si $\theta_0 = 90°$, entonces, $\cos\theta_0 = 0$ y $W = wR$. Aquí el trabajo que usted realiza es el mismo que efectuaría si levantara a Morton verticalmente una distancia R con una fuerza igual a su peso w. De hecho, la cantidad $R(1 - \cos\theta_0)$ es el aumento en su altura sobre el suelo durante el desplazamiento, por lo que, para cualquier valor de θ_0, el trabajo efectuado por $\vec{F}$ es el cambio de altura multiplicado por el peso. Éste es un ejemplo de un resultado más general que demostraremos en la sección 7.1.

Ejemplo 6.9 Movimiento en una trayectoria curva II

En el ejemplo 6.8, el desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ (figura 6.24a) tiene magnitud ds, su componente x es $ds\cos\theta$ y su componente y es $ds\,\text{sen}\,\theta$. Por lo tanto, $d\vec{l} = \hat{\imath}\,ds\cos\theta + \hat{\jmath}\,ds\,\text{sen}\,\theta$. Use esta expresión y la ecuación (6.14) para calcular el trabajo efectuado durante el movimiento por la tensión de la cadena, por la fuerza de gravedad y por la fuerza $\vec{F}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: De nuevo utilizamos la ecuación (6.14), utilizando la ecuación (1.21) para obtener el producto escalar en términos de componentes.

PLANTEAR: Usamos el mismo diagrama de cuerpo libre del ejemplo 6.8 (figura 6.24b).

EJECUTAR: La figura 6.24b nos indica que podemos escribir las tres fuerzas en términos de vectores unitarios:

$$\vec{T} = \hat{\imath}(-T\text{sen}\,\theta) + \hat{\jmath}T\cos\theta$$
$$\vec{w} = \hat{\jmath}(-w)$$
$$\vec{F} = \hat{\imath}F$$

Para utilizar la ecuación (6.14), tenemos que calcular el producto escalar de cada una de estas fuerzas con $d\vec{l}$. Usando la ecuación (1.21),

$$\vec{T}\cdot d\vec{l} = (-T\text{sen}\,\theta)(ds\cos\theta) + (T\cos\theta)(ds\,\text{sen}\,\theta) = 0$$
$$\vec{w}\cdot d\vec{l} = (-w)(ds\,\text{sen}\,\theta) = -w\,\text{sen}\,\theta\,ds$$
$$\vec{F}\cdot d\vec{l} = F(ds\cos\theta) = F\cos\theta\,ds$$

Puesto que $\vec{T}\cdot d\vec{l} = 0$, la integral de esta cantidad es cero y el trabajo efectuado por la tensión de la cadena es cero (tal como vimos en el ejemplo 6.8). Utilizando $ds = Rd\theta$ como en el ejemplo 6.8, el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad es

$$\int \vec{w}\cdot d\vec{l} = \int (-w\,\text{sen}\,\theta)\,R\,d\theta = -wR\int_0^{\theta_0} \text{sen}\,\theta\,d\theta$$
$$= -wR(1 - \cos\theta_0)$$

El trabajo efectuado por la gravedad es negativo porque la gravedad tira hacia abajo mientras Morton se mueve hacia arriba. Por último, el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ es la integral $\int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int F\cos\theta\,ds$, que calculamos en el ejemplo 6.8; la respuesta es $+wR(1 - \cos\theta_0)$.

EVALUAR: Como comprobación de las respuestas, vemos que la suma de las tres cantidades de trabajo es cero. Esto es lo que concluimos en el ejemplo 6.8 empleando el teorema trabajo-energía.

El método de componentes suele ser la forma más cómoda de calcular productos escalares. ¡Úselo cuando facilite las cosas!

Evalúe su comprensión de la sección 6.3 En el ejemplo 5.21 (sección 5.4), analizamos un péndulo cónico. La rapidez de la lenteja del péndulo permanece constante mientras viaja por el círculo que se muestra en la figura 5.32a. *a*) En un círculo completo, ¿cuánto trabajo ejerce la fuerza de tensión F sobre la lenteja? i) una cantidad positiva; ii) una cantidad negativa; iii) cero. *b*) En un círculo completo, ¿cuánto trabajo ejerce el peso sobre la lenteja? i) una cantidad positiva; ii) una cantidad negativa; iii) cero.

MP

6.4 Potencia

La definición de trabajo no menciona el paso del tiempo. Si usted levanta una barra que pesa 100 N a una distancia vertical de 1.0 m con velocidad constante, realiza (100 N) (1.0 m) = 100 J de trabajo, ya sea que tarde 1 segundo, 1 hora o 1 año. No obstante, muchas veces necesitamos saber con qué rapidez se efectúa trabajo. Describimos esto en términos de *potencia*. En el habla cotidiana, "potencia" suele emplearse como sinónimo de "energía" o "fuerza". En física usamos una definición mucho más precisa: **potencia** es la *rapidez* con que se efectúa trabajo; al igual que el trabajo y la energía, la potencia es una cantidad escalar.

Si se realiza un trabajo ΔW en un intervalo Δt, el trabajo medio efectuado por unidad de tiempo o **potencia media** P_{med} se define como

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \text{(potencia media)} \qquad (6.15)$$

La rapidez con que se efectúa trabajo quizá no sea constante. Podemos definir la **potencia instantánea** P como el cociente de la ecuación (6.15) cuando Δt se aproxima a cero:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad \text{(potencia instantánea)} \qquad (6.16)$$

En el SI la unidad de potencia es el **watt** (W), llamada así por el inventor inglés James Watt. Un watt es igual a un joule por segundo: 1 W = 1 J/s (figura 6.25). También son de uso común el kilowatt (1 kW = 10^3 W) y el megawatt (1 MW = 10^6 W). En el sistema británico, el trabajo se expresa en pie-libras, y la unidad de potencia es el pie-libra por segundo. También se usa una unidad mayor, el *caballo de potencia* (hp) (figura 6.26):

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 33{,}000 \text{ ft} \cdot \text{lb/min}$$

Es decir, un motor de 1 hp que trabaja con carga completa realiza 33,000 ft · lb de trabajo cada minuto. Un factor de conversión útil es

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W} = 0.746 \text{ kW}$$

El watt es una unidad común de potencia *eléctrica*; una bombilla eléctrica de 100 W convierte 100 J de energía eléctrica en luz y calor cada segundo. Sin embargo, los watts no son inherentemente eléctricos. Una bombilla podría especificarse en términos de caballos de potencia; mientras que algunos fabricantes de automóviles especifican sus motores en términos de kilowatts.

El *kilowatt-hora* $(\text{kW} \cdot \text{h})$ es la unidad comercial usual de energía eléctrica. Un kilowatt-hora es el trabajo total realizado en 1 hora (3600 s) cuando la potencia es 1 kilowatt (10^3 J/s), así que

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ J/s})(3600 \text{ s}) = 3.6 \times 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}$$

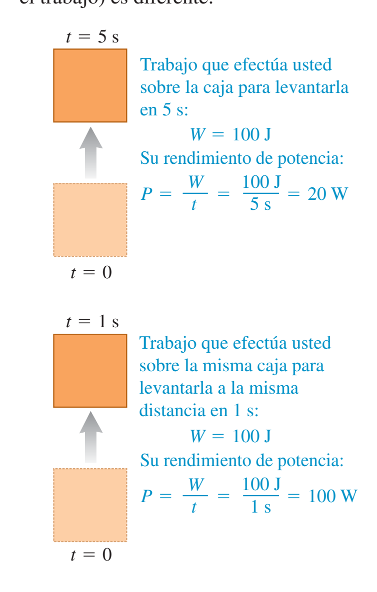
El kilowatt-hora es una unidad de *trabajo* o *energía*, no de potencia.

En mecánica, también podemos expresar la potencia en términos de fuerza y velocidad. Suponga que una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo que tiene un desplazamiento $\Delta\vec{s}$. Si $F_\parallel$ es la componente de $\vec{F}$ tangente a la trayectoria (paralela a $\Delta\vec{s}$), el trabajo realizado por la fuerza es $\Delta W = F_\parallel \Delta s$, y la potencia media es

$$P_{med} = \frac{F_\parallel \Delta s}{\Delta t} = F_\parallel \frac{\Delta s}{\Delta t} = F_\parallel v_{med} \qquad (6.17)$$

La potencia instantánea P es el límite de esta expresión cuando $\Delta t \to 0$:

$$P = F_\parallel v \qquad (6.18)$$



6.25 La misma cantidad de trabajo se efectúa en ambas situaciones, pero la potencia (la rapidez a la que se realiza el trabajo) es diferente.



6.26 El valor del caballo de potencia se dedujo de los experimentos de James Watt, quien midió que un caballo podría hacer 33,000 pies-libra de trabajo por minuto, al levantar carbón de una mina abierta.

donde v es la magnitud de la velocidad instantánea. También podemos expresar la ecuación (6.18) en términos del producto escalar:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{(rapidez instantánea con que la fuerza } \vec{F} \text{ realiza trabajo sobre una partícula)} \tag{6.19}$$

Ejemplo 6.10 Fuerza y potencia

Cada uno de los dos motores a reacción de un avión Boeing 767 desarrolla un empuje (fuerza hacia adelante sobre el avión) de 197,000 N (44,300 lb). Cuando el avión está volando a 250 m/s (900 km/h o aproximadamente 560 mi7h), ¿cuántos caballos de potencia desarrolla cada motor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita es la potencia instantánea P, que es la rapidez con que el empuje efectúa trabajo.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (6.18). El empuje tiene la dirección del movimiento, así que $F_{\parallel}$ es simplemente igual al empuje.

EJECUTAR: Con $v = 250$ m/s, cada motor desarrolla una potencia:

$$P = F_{\parallel}v = (1.97 \times 10^5 \text{ N})(250 \text{ m/s}) = 4.93 \times 10^7 \text{ W}$$
$$= (4.93 \times 10^7 \text{ W})\frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ W}} = 66{,}000 \text{ hp}$$

EVALUAR: La rapidez de los aviones comerciales modernos depende directamente de la potencia de los motores (figura 6.27). Los motores más grandes de los aviones de hélice de la década de 1950 desarrollaban aproximadamente 3400 hp (2.5×10^6 W) y tenían rapideces máximas del orden de 600 km/h (370 mi/h). La potencia de cada motor de un Boeing 767 es casi 20 veces mayor, y permite al avión volar a cerca de 900 km/h (560 mi/h) y llevar una carga mucho más pesada.

Si los motores están produciendo el empuje máximo mientras el avión está en reposo en tierra, de manera que $v = 0$, la potencia desarrollada por los motores es *cero*. ¡Fuerza y potencia no son lo mismo!

6.27 a) Avión impulsado por hélice y b) avión con motor a reacción.

a)





b)



Ejemplo 6.11 Un "potente ascenso"

Una maratonista de 50.0 kg sube corriendo las escaleras de la Torre Sears de Chicago de 443 m de altura, el edificio más alto de Estados Unidos (figura 6.28). ¿Qué potencia media en watts desarrolla si llega a la azotea en 15.0 minutos? ¿En kilowatts? ¿Y en caballos de potencia?

SOLUCIÓN

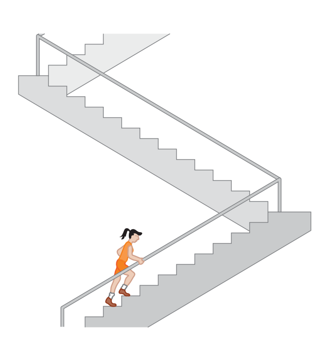
IDENTIFICAR: Trataremos a la corredora como una partícula de masa m. La potencia media que desarrolla P_{med} debe ser suficiente para subirla a una rapidez constante contra la gravedad.

PLANTEAR: Podemos calcular P_{med} que desarrolla de dos maneras: 1. determinando primero cuánto trabajo debe efectuar y dividiendo luego ese trabajo entre el tiempo transcurrido, como en la ecuación (6.15); o bien, 2. calculando la fuerza media hacia arriba que la corredora debe ejercer (en la dirección del ascenso) y multiplicándola después por su velocidad hacia arriba, como en la ecuación (6.17).

EJECUTAR: Como en el ejemplo 6.8, para levantar una masa m contra la gravedad se requiere una cantidad de trabajo igual al peso mg multiplicado por la altura h que se levanta. Por lo tanto, el trabajo que la corredora debe efectuar es

$$W = mgh = (50.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(443 \text{ m})$$
$$= 2.17 \times 10^5 \text{ J}$$

6.28 ¿Cuánta potencia se necesita para subir corriendo las escaleras de la Torre Sears de Chicago en 15 minutos?





El tiempo es 15.0 min = 900 s, así que, por la ecuación (6.15), la potencia media es

$$P_{\text{med}} = \frac{2.17 \times 10^5\,\text{J}}{900\ \text{s}} = 241\ \text{W} = 0.241\ \text{kW} = 0.323\ \text{hp}$$

Intentemos ahora los cálculos empleando la ecuación (6.17). La fuerza ejercida es vertical, y la componente vertical media de la velocidad es (443 m)/(900 s) = 0.492 m/s, así que la potencia media es

$$P_{\text{med}} = F_{\parallel}v_{\text{med}} = (mg)v_{\text{med}}$$
$$= (50.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.492\ \text{m/s}) = 241\ \text{W}$$

que es el mismo resultado de antes.

EVALUAR: La potencia *total* desarrollada por la corredora será muchas veces más que 241 W, porque ella no es una partícula, sino un conjunto de partes que ejercen fuerzas unas sobre otras y realizan trabajo, como el necesario para inhalar y exhalar y oscilar piernas y brazos. Lo que calculamos es sólo la parte de su gasto de potencia que se invierte en subirla a la azotea del edificio.

Evalúe su comprensión de la sección 6.4 El aire que circunda un avión en pleno vuelo ejerce una fuerza de arrastre que actúa de manera opuesta al movimiento del avión. Cuando el Boeing 767 del ejemplo 6.10 vuela en línea recta a una altura constante a 250 m/s constantes, ¿cuál es la tasa con que la fuerza de arrastre efectúa trabajo sobre él? i) 132,000 hp; ii) 66,000 hp; iii) 0; iv) −66,000 hp; v) −132,000 hp.

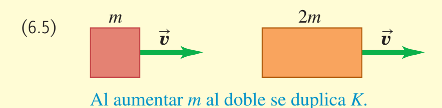
CAPÍTULO 6 RESUMEN

Trabajo efectuado por una fuerza: Cuando una fuerza constante $\vec{F}$ actúa sobre una partícula que sufre un desplazamiento rectilíneo $\vec{s}$, el trabajo realizado por la fuerza sobre la partícula se define como el producto escalar de $\vec{F}$ y $\vec{s}$. La unidad de trabajo en el SI es 1 joule = 1 newton-metro (1 J = 1 N · m). El trabajo es una cantidad escalar, ya que puede ser positivo o negativo, pero no tiene dirección en el espacio. (Véanse los ejemplos 6.1 y 6.2.)

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\phi \qquad (6.2), (6.3)$$
$$\phi = \text{ángulo entre } \vec{F} \text{ y } \vec{s}$$

Energía cinética: La energía cinética K de una partícula es igual a la cantidad de trabajo necesario para acelerarla desde el reposo hasta la rapidez v. También es igual al trabajo que la partícula puede efectuar en el proceso de detenerse. La energía cinética es una cantidad escalar sin dirección en el espacio; siempre es positiva o cero, y sus unidades son las mismas que las del trabajo: $1\ \text{J} = 1\ \text{N} \cdot \text{m} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$.

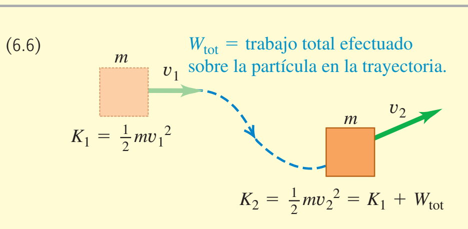
$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (6.5)$$





El teorema trabajo-energía: Cuando actúan fuerzas sobre una partícula mientras sufre un desplazamiento, la energía cinética de la partícula cambia en una cantidad igual al trabajo total realizado sobre ella por todas las fuerzas. Esta relación, llamada teorema trabajo-energía, es válida para fuerzas tanto constantes como variables, y para trayectorias tanto rectas como curvas de la partícula; sin embargo, sólo es aplicable a cuerpos que pueden tratarse como partículas. (Véanse los ejemplos 6.3 a 6.5.)

$$W_{tot} = K_2 - K_1 = \Delta K \qquad (6.6)$$



Trabajo efectuado por una fuerza variable o en una trayectoria curva: Si la fuerza varía durante un desplazamiento rectilíneo, el trabajo que realiza está dado por una integral [ecuación (6.7)]. (Véanse los ejemplos 6.6 y 6.7.) Si la partícula tiene una trayectoria curva, el trabajo efectuado por una fuerza $\vec{F}$ está dado por una integral en la que interviene el ángulo ϕ entre la fuerza y el desplazamiento. Esta expresión es válida aun cuando la magnitud de la fuerza y el ángulo ϕ varían durante el desplazamiento. (Véanse los ejemplos 6.8 y 6.9.)

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx \qquad (6.7)$$

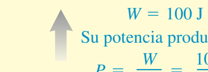
$$W = \int_{P_1}^{P_2} F\cos\phi\, dl = \int_{P_1}^{P_2} F_{\parallel}\, dl = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad (6.14)$$

Potencia: La potencia es la rapidez con que se efectúa trabajo. La potencia media P_{med} es la cantidad de trabajo ΔW realizada en un tiempo Δt dividida entre ese tiempo. La potencia instantánea es el límite de la potencia media cuando Δt se acerca a cero. Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre una partícula que se mueve con velocidad $\vec{v}$, la potencia instantánea (rapidez con que la fuerza efectúa trabajo) es el producto escalar de $\vec{F}$ y $\vec{v}$. Al igual que el trabajo y la energía cinética, la potencia es una cantidad escalar. Su unidad en el SI es 1 watt = 1 joule/segundo (1 W = 1 J/s). (Véanse los ejemplos 6.10 y 6.11.)

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (6.15)$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad (6.16)$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (6.19)$$



t = 5 s

t = 0

$P = \frac{W}{t} = \frac{100\ \text{J}}{5\ \text{s}} = 20\ \text{W}$

Términos clave

trabajo, *182*
joule, *182*
energía cinética, *187*
teorema trabajo-energía, *187*
constante de fuerza, *193*
ley de Hooke, *193*
potencia, *199*
potencia media, *199*
potencia instantánea, *199*
watt, *199*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Es verdad que el proyectil efectúa trabajo sobre los gases. Sin embargo, dado que el proyectil ejerce una fuerza hacia atrás sobre los gases, mientras los gases y el proyectil se mueven hacia delante por el cañón, el trabajo efectuado por el proyectil es *negativo*. (Véase la sección 6.1.)

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

6.1 Respuesta: iii) El electrón tiene velocidad constante, por lo que su aceleración es cero y (por la segunda ley de Newton), la fuerza neta sobre el electrón también es cero. De esta manera, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas (igual al trabajo realizado por la fuerza neta) también debe ser cero. Las fuerzas individuales pueden efectuar trabajo diferente de cero, pero ésa no es la cuestión que se pregunta.

6.2 Respuesta: iv), i), iii), ii) El cuerpo i) tiene energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2.0\text{ kg})(5.0\text{ m/s})^2 = 25\text{ J}$. El cuerpo ii) tiene inicialmente energía cinética cero y después tiene 30 J de trabajo realizado sobre él, de manera que su energía cinética final es $K_2 = K_1 + W = 0 + 30\text{ J} = 30\text{ J}$. El cuerpo iii) tenía energía cinética inicial $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(1.0\text{ kg})(4.0\text{ m/s})^2 = 8.0\text{ J}$ y luego tenía 20 J de trabajo realizado sobre él, por lo que su energía cinética es $K_2 = K_1 + W = 8.0\text{ J} + 20\text{ J} = 28\text{ J}$. El cuerpo iv) tenía inicialmente energía cinética $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2.0\text{ kg})(10\text{ m/s})^2 = 100\text{ J}$; cuando efectuó 80 J de trabajo sobre otro cuerpo, éste realizó -80 J de trabajo sobre el cuerpo iv), así que la energía cinética final del cuerpo iv) es $K_2 = K_1 + W = 100\text{ J} + (-80\text{ J}) = 20\text{ J}$.

6.3 Respuestas: *a*) iii), *b*) iii) En cualquier instante del movimiento de la lenteja del péndulo, tanto la fuerza de tensión como el peso actúan de forma perpendicular al movimiento, es decir, perpendicular a un desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$ de la lenteja. (En la figura 5.32b, el desplazamiento $d\vec{l}$ estaría dirigido hacia fuera del plano del diagrama de cuerpo libre.) Por lo tanto, para cualquier fuerza el producto escalar dentro de la integral de la ecuación (6.14) es $\vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$, y el trabajo realizado en cualquier parte de la trayectoria circular (incluyendo un círculo completo) es $W = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$.

6.4 Respuesta: v) El avión tiene una velocidad horizontal constante, así que la fuerza horizontal neta sobre él debe ser cero. Entonces, la fuerza de arrastre hacia atrás debe tener la misma magnitud que la fuerza hacia delante debida al empuje combinado de los dos motores. Esto significa que la fuerza de arrastre debe efectuar trabajo *negativo* sobre el avión con la misma tasa con que la fuerza de empuje combinada realiza trabajo *positivo*. El empuje combinado efectúa trabajo a una tasa de 2(66,000 hp) = 132,000 hp, por lo que la fuerza de arrastre debe realizar trabajo a una tasa de $-132{,}000$ hp.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P6.1. El signo de muchas cantidades físicas depende de la elección de las coordenadas. Por ejemplo, el valor de g puede ser negativo o positivo, según si elegimos como positiva la dirección hacia arriba o hacia abajo. ¿Lo mismo es válido para el trabajo? En otras palabras, ¿podemos hacer negativo el trabajo positivo con una elección diferente de las coordenadas? Explique su respuesta.

P6.2. Un elevador es subido por sus cables con rapidez constante. ¿El trabajo realizado sobre él es positivo, negativo o cero? Explique.

P6.3. Se tira de una cuerda atada a un cuerpo y éste se acelera. Según la tercera ley de Newton, el cuerpo tira de la cuerda con una fuerza igual y opuesta. Entonces, ¿el trabajo total realizado es cero? Si así es, ¿cómo puede cambiar la energía cinética del cuerpo? Explique su respuesta.

P6.4. Si se requiere un trabajo total W para darle a un objeto una rapidez v y una energía cinética K, partiendo del reposo, ¿cuáles serán la rapidez (en términos de v) y la energía cinética (en términos de K) del objeto, si efectuamos el doble de trabajo sobre él partiendo del reposo de nuevo?

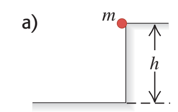
P6.5. Si hubiera una fuerza neta distinta de cero sobre un objeto en movimiento, ¿el trabajo total realizado sobre él podría ser cero? Explique, ilustrando su respuesta con un ejemplo.

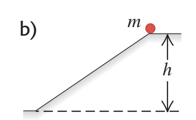
P6.6. En el ejemplo 5.5 (sección 5.1), compare el trabajo realizado sobre la cubeta por la tensión del cable y el trabajo realizado sobre el carro por dicha tensión.

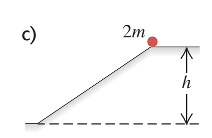
P6.7. En el péndulo cónico del ejemplo 5.21 (sección 5.4), ¿qué fuerza realiza trabajo sobre la lenteja conforme ésta gira?

P6.8. En los casos que se muestran en la figura 6.29, el objeto se suelta desde el reposo en la parte superior y no sufre fricción ni resistencia del aire. ¿En cuál situación, si acaso, la masa tendrá i) la mayor rapidez en la parte de inferior y ii) el mayor trabajo efectuado sobre ella en el tiempo que tarda en llegar a la parte inferior?

Figura 6.29 Pregunta P6.8.







P6.9. Una fuerza $\vec{F}$ sobre el eje x tiene magnitud que depende de x. Dibuje una posible gráfica de F contra x tal que la fuerza no realice trabajo sobre un objeto que se mueve de x_1 a x_2, aunque la magnitud de la fuerza nunca sea cero en este intervalo.

P6.10. ¿La energía cinética de un automóvil cambia más al acelerar de 10 a 15 m/s o de 15 a 20 m/s? Explique su respuesta.

P6.11. Un ladrillo con masa de 1.5 kg cae verticalmente a 5.0 m/s. Un libro de física de 1.5 kg se desliza sobre el piso a 5.0 m/s. Un melón de 1.5 kg viaja con una componente de velocidad de 3.0 m/s a la derecha y una componente vertical de 4.0 m/s hacia arriba. ¿Todos estos objetos tienen la misma velocidad? ¿Tienen la misma energía cinética? Para cada pregunta, justifique su respuesta.

P6.12. ¿El trabajo *total* efectuado sobre un objeto durante un desplazamiento puede ser negativo? Explique su respuesta. Si el trabajo total es negativo, ¿su magnitud puede ser mayor que la energía cinética inicial del objeto? Explique su respuesta.

P6.13. Una fuerza neta actúa sobre un objeto y lo acelera desde el reposo hasta una rapidez v_1, efectuando un trabajo W_1. ¿En qué factor debe aumentarse ese trabajo para lograr una rapidez final tres veces mayor, si el objeto parte del reposo?

P6.14. Un camión que va por una autopista tiene mucha energía cinética relativa a una patrulla detenida, pero ninguna relativa al conductor del camión. En estos dos marcos de referencia, ¿se requiere el mismo trabajo para detener el camión? Explique su respuesta.

P6.15. Imagine que usted sostiene un portafolios por el asa, con el brazo recto a su costado. ¿La fuerza que la mano ejerce efectúa trabajo sobre el portafolios *a*) cuando usted camina con rapidez constante por un pasillo horizontal y *b*) cuando usa una escalera eléctrica para subir del primer al segundo piso de un edificio? Justifique su respuesta en cada caso.

P6.16. Si un libro se desliza sobre una mesa, la fuerza de fricción realiza trabajo negativo sobre él. ¿Existe algún caso en que la fricción realice trabajo *positivo*? Explique su respuesta. (*Sugerencia*: piense en una caja dentro de un camión que acelera.)

P6.17. Tómese el tiempo al subir corriendo una escalera y calcule la tasa media con que efectúa trabajo contra la fuerza de gravedad. Exprese su respuesta en watts y en caballos de potencia.

P6.18. Física fracturada. Muchos términos de la física se utilizan de manera inadecuada en el lenguaje cotidiano. En cada caso, explique los errores que hay. *a*) A una persona *fuerte* se llama *llena de potencia*. ¿Qué error implica este uso de *potencia*? *b*) Cuando un trabajador carga una bolsa de hormigón por una obra en construcción horizontal, la gente dice que él realizó mucho *trabajo*. ¿Es verdad?

P6.19. Un anuncio de un generador eléctrico portátil asegura que el motor a diesel produce 28,000 hp para impulsar un generador eléctrico que produce 30 MW de potencia eléctrica. ¿Es esto posible? Explique su respuesta.

P6.20. Un automóvil aumenta su rapidez mientras el motor produce potencia constante. ¿La aceleración es mayor al inicio de este proceso o al final? Explique su respuesta.

P6.21. Considere una gráfica de potencia instantánea contra tiempo, cuyo eje P vertical comienza en $P = 0$. ¿Qué significado físico tiene el área bajo la curva P contra t entre dos líneas verticales en t_1 y t_2? ¿Cómo podría calcular la potencia media a partir de la gráfica? Dibuje una curva de P contra t que conste de dos secciones rectas y dónde la potencia máxima sea igual al doble de la potencia media.

P6.22. Una fuerza neta distinta de cero actúa sobre un objeto. ¿Alguna de las cantidades siguientes puede ser constante? *a*) La rapidez del objeto; *b*) la velocidad del objeto; *c*) la energía cinética del objeto.

P6.23. Cuando se aplica cierta fuerza a un resorte ideal, éste se estira una distancia x desde su longitud relajada (sin estirar) y efectúa trabajo W. Si ahora se aplica el doble de fuerza, ¿qué distancia (en términos de x) se estira el resorte desde su longitud relajada y cuánto trabajo (en términos de W) se requiere para estirarlo esta distancia?

P6.24. Si se requiere un trabajo W para estirar un resorte una distancia x desde su longitud relajada, ¿qué trabajo (en términos de W) se requiere para estirar el resorte una distancia x adicional?

Ejercicios

Sección 6.1 Trabajo

6.1. Un viejo cubo de roble con masa de 6.75 kg cuelga en un pozo del extremo de una cuerda, que pasa sobre una polea sin fricción en la parte superior del pozo, y usted tira de la cuerda horizontalmente del extremo de la cuerda para levantar el cubo lentamente 4.00 m. *a*) ¿Cuánto trabajo efectúa usted sobre el cubo al subirlo? *b*) ¿Cuánta fuerza gravitacional actúa sobre el cubo? *c*) ¿Qué trabajo total se realiza sobre el cubo?

6.2. Un camión de remolque tira de un automóvil 5.00 km por una carretera horizontal, usando un cable cuya tensión es de 850 N. *a*) ¿Cuánto trabajo ejerce el cable sobre el auto si tira de él horizontalmente? ¿Y si tira a 35.0° sobre la horizontal? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el cable sobre el camión de remolque en ambos casos del inciso *a*)? *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa la gravedad sobre el auto en el inciso *a*)?

6.3. Un obrero empuja horizontalmente una caja de 30.0 kg una distancia de 4.5 m en un piso plano, con velocidad constante. El coeficiente de fricción cinética entre el piso y la caja es de 0.25. *a*) ¿Qué magnitud de fuerza debe aplicar el obrero? *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa dicha fuerza sobre la caja? *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa la fricción sobre la caja? *d*) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza normal sobre la caja? ¿Y la gravedad? *e*) ¿Qué trabajo total se efectúa sobre la caja?

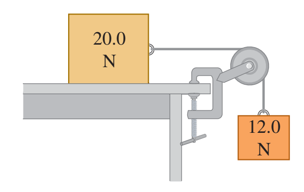
6.4. Suponga que el obrero del ejercicio 6.3 empuja hacia abajo con un ángulo de 30° bajo la horizontal. *a*) ¿Qué magnitud de fuerza debe aplicar el obrero para mover la caja con velocidad constante? *b*) ¿Qué trabajo realiza esta fuerza sobre la caja si se empuja 4.5 m? *c*) ¿Qué trabajo realiza la fricción sobre la caja en este desplazamiento? *d*) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza normal sobre la caja? ¿Y la gravedad? *e*) ¿Qué trabajo total se efectúa sobre la caja?

6.5. Un pintor de 75.0 kg sube por una escalera de 2.75 m que está inclinada contra una pared vertical. La escalera forma un ángulo de 30.0° con la pared. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza la gravedad sobre el pintor? *b*) ¿La respuesta al inciso *a*) depende de si el pintor sube a rapidez constante o de si acelera hacia arriba de la escalera?

6.6. Dos botes remolcadores tiran de un buque tanque averiado. Cada uno ejerce una fuerza constante de 1.80×10^6 N, uno 14° al oeste del norte y el otro 14° al este del norte, tirando del buque tanque 0.75 km al norte. ¿Qué trabajo total efectúan sobre el buque tanque?

6.7. Dos bloques están conectados por un cordón muy ligero que pasa por una polea sin masa y sin fricción (figura 6.30). Al viajar a rapidez constante, el bloque de 20.0 N se mueve 75.0 cm a la derecha y el bloque de 12.0 N se mueve 75.0 cm hacia abajo. Durante este proceso, ¿cuánto trabajo efectúa *a*) sobre el bloque de 12.0 N, i) la gravedad y ii) la tensión en el cordón? *b*) sobre el bloque de 20.0 N, i) la gravedad, ii) la tensión en el cordón, iii) la fricción y iv) la fuerza normal? *c*) Obtenga el trabajo total efectuado sobre cada bloque.

Figura 6.30 Ejercicio 6.7.



6.8. Un carrito de supermercado cargado rueda por un estacionamiento por el que sopla un viento fuerte. Usted aplica una fuerza constante $\vec{F} = (30\text{ N})\hat{\imath} - (40\text{ N})\hat{\jmath}$ al carrito mientras éste sufre un desplazamiento $\vec{s} = (-9.0\text{ m})\hat{\imath} - (3.0\text{ m})\hat{\jmath}$. ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza que usted aplica al carrito?

6.9. Una pelota de 0.800 kg se ata al extremo de un cordón de 1.60 m de longitud y se hace girar en un circulo vertical. *a*) Durante un círculo completo, contando a partir de cualquier punto, calcule el trabajo total efectuado sobre la pelota por: i) la tensión en el cordón; ii) la gravedad. *b*) Repita el inciso *a*) para el movimiento a lo largo del semicírculo que va del cénit al nadir de la trayectoria.

Sección 6.2 Energía cinética y teorema trabajo-energía

6.10. *a*) ¿Cuántos joules de energía cinética tiene un automóvil de 750 kg que viaja por una autopista común con rapidez de 65 mi/h? *b*) ¿En qué factor diminuiría su energía cinética si el auto viajara a la mitad de esa rapidez? *c*) ¿A qué rapidez (en mi/h) tendría que viajar el auto para tener la mitad de la energía cinética del inciso *a*)?

6.11. Cráter de meteorito. Hace aproximadamente 50,000 años, un meteorito se estrelló contra la Tierra cerca de lo que actualmente es la ciudad de Flagstaff, en Arizona. Mediciones recientes (2005) estiman que dicho meteorito tenía una masa aproximada de 1.4×10^8 kg (unas 150,000 toneladas) y se impactó contra el suelo a 12 km/s. *a*) ¿Cuánta energía cinética pasó este meteorito al suelo? *b*) ¿Cómo se compara esta energía con la energía liberada por una bomba nuclear de 1.0 megatones? (Una bomba de un megatón libera la misma energía que un millón de toneladas de TNT, y 1.0 ton de TNT libera 4.184×10^9 J de energía.)

6.12. Algunas energías cinéticas familiares. *a*) ¿Cuántos joules de energía cinética tiene una persona de 75 kg al caminar y al correr? *b*) ¿En el modelo atómico de Bohr, el electrón del hidrógeno en estado fundamental tiene una rapidez orbital de 2190 km/s. ¿Cuál es su energía cinética? (Consulte el Apéndice F) *c*) Si usted deja caer un peso de de 1.0 kg (aproximadamente 2 lb) desde la altura del hombro, ¿cuántos joules de energía cinética tendrá cuando llegue al suelo? *d*) ¿Es razonable que un niño de 30 kg pueda correr lo suficientemente rápido para tener 100 J de energía cinética?

6.13. La masa de un protón es 1836 veces la masa de un electrón. *a*) Un protón viaja con rapidez V. ¿Con qué rapidez (en términos de V) un electrón tendría la misma energía cinética que un protón? *b*) Un electrón tiene energía cinética K. Si un protón tiene la misma rapidez que el electrón, ¿cuál es su energía cinética (en términos de K)?

6.14. Una sandía de 4.80 kg se deja caer (rapidez inicial cero) desde la azotea de un edificio de 25.0 m y no sufre resistencia del aire apreciable. *a*) Calcule el trabajo realizado por la gravedad sobre la sandía durante su desplazamiento desde la azotea hasta el suelo. *b*) Justo antes de estrellarse contra el suelo, ¿cuáles son i) la energía cinética y ii) la rapidez de la sandía? *c*) ¿Cuál de las respuestas en los incisos *a*) y *b*) sería *diferente* si hubiera resistencia del aire considerable?

6.15. Use el teorema trabajo-energía para resolver los siguientes problemas. Usted puede utilizar las leyes de Newton para comprobar sus respuestas. Ignore la resistencia del aire en todos los casos. *a*) Una rama cae desde la parte superior de una secuoya de 95.0 m de altura, partiendo del reposo. ¿Con qué rapidez se mueve cuando llega al suelo? *b*) Un volcán expulsa una roca directamente hacia arriba 525 m en el aire. ¿Con qué rapidez se movía la roca justo al salir del volcán? *c*) Una esquiadora que se mueve a 5.00 m/s llega a una zona de nieve horizontal áspera grande, cuyo coeficiente de fricción cinética con los esquís es de 0.220. ¿Qué tan lejos viaja ella sobre esta zona antes de detenerse? *d*) Suponga que la zona áspera del inciso *c*) sólo tiene 2.90 m de longitud. ¿Con qué rapidez se movería la esquiadora al llegar al extremo de dicha zona? *e*) En la base de una colina congelada sin fricción que se eleva a 25.0° sobre la horizontal, un trineo tiene una rapidez de 12.0 m/s hacia la colina. ¿A qué altura vertical sobre la base llegará antes de detenerse?

6.16. Se lanza una piedra de 20 N verticalmente hacia arriba desde el suelo. Se observa que, cuando está 15.0 m sobre el suelo, viaja a 25.0 m/s hacia arriba. Use el teorema trabajo-energía para determinar *a*) su rapidez en el momento de ser lanzada y *b*) su altura máxima.

6.17. Imagine que pertenece a la Cuadrilla de Rescate Alpino y debe proyectar hacia arriba una caja de suministros por una pendiente de ángulo constante α, de modo que llegue a un esquiador varado que está una distancia vertical h sobre la base de la pendiente. La pendiente es resbalosa, pero hay cierta fricción presente, con coeficiente de fricción cinética μ_k. Use el teorema trabajo-energía para calcular la rapidez mínima que debe impartir a la caja en la base de la pendiente para que llegue al esquiador. Exprese su respuesta en términos de g, h, μ_k y α.

6.18. Una masa m baja deslizándose por un plano inclinado liso que forma un ángulo α con la horizontal, desde una altura vertical inicial h. *a*) El trabajo efectuado por una fuerza es la sumatoria del trabajo efectuado por las componentes de la fuerza. Considere las componentes de la gravedad paralela y perpendicular al plano. Calcule el trabajo efectuado sobre la masa por cada componente y use estos resultados para demostrar que el trabajo efectuado por la gravedad es exactamente el mismo que efectuaría si la masa cayera verticalmente por el aire desde una altura h. *b*) Use el teorema trabajo-energía para demostrar que la rapidez de la masa en la base del plano inclinado es la misma que tendría si se hubiera dejado caer desde la altura h, sea cual fuere el ángulo α del plano. Explique cómo esta rapidez puede ser independiente del ángulo del plano. *c*) Use los resultados del inciso *b*) para obtener la rapidez de una piedra que baja deslizándose por una colina congelada sin fricción, partiendo del reposo 15.0 m arriba del pie de la colina.

6.19. Un automóvil es detenido en una distancia D por una fuerza de fricción constante independiente de la rapidez del auto. ¿Cuál es la distancia en que se detiene (en términos de D) *a*) si el auto triplica su rapidez inicial; y *b*) si la rapidez es la misma que tenía originalmente, pero se triplica la fuerza de fricción? (Utilice métodos de trabajo-energía.)

6.20. Un electrón en movimiento tiene energía cinética K_1. Después de realizarse sobre él una cantidad neta de trabajo W, se mueve con una cuarta parte de su rapidez anterior y en la dirección opuesta. *a*) Calcule W términos de K_1. *b*) ¿Su respuesta depende de la dirección final del movimiento del electrón?

6.21. Un trineo con masa de 8.00 kg se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción. En cierto punto, su rapidez es de 4.00 m/s; 2.50 m más adelante, su rapidez es de 6.00 m/s. Use el teorema trabajo-energía para determinar la fuerza que actúa sobre el trineo, suponiendo que tal fuerza es constante y actúa en la dirección del movimiento del trineo.

6.22. Un balón de fútbol sóquer de 0.420 kg se mueve inicialmente con rapidez de 2.00 m/s. Un jugador lo patea, ejerciendo una fuerza constante de 40.0 N en la dirección del movimiento del balón. ¿Durante qué distancia debe estar su pie en contacto con el balón para aumentar la rapidez de éste a 6.00 m/s?

6.23. Un "12-pack" de Omni-Cola (masa de 4.30 kg) está en reposo en un piso horizontal. Luego, un perro entrenado que ejerce una fuerza horizontal con magnitud de 36.0 N lo empuja 1.20 m en línea recta. Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez final si *a*) no hay fricción entre el 12-pack y el piso; *b*) el coeficiente de fricción cinética entre el 12-pack y el piso es de 0.30.

6.24. Un bateador golpea una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg y la lanza hacia arriba con rapidez inicial de 25.0 m/s. *a*) ¿Cuánto trabajo habrá realizado la gravedad sobre la pelota cuando ésta alcanza una altura de 20.0 m sobre el bate? *b*) Use el teorema trabajo-energía para calcular la rapidez de la pelota a esa altura. Ignore la resistencia del aire. *c*) ¿La respuesta al inciso *b*) depende de si la pelota se mueve hacia arriba o hacia abajo cuando está a la altura de 20.0 m? Explique su respuesta.

6.25. Un vagón de juguete con masa de 7.00 kg se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción. Tiene rapidez inicial de 4.00 m/s y luego es empujado 3.0 m, en la dirección de la velocidad inicial, por una fuerza cuya magnitud es de 10.0 N. *a*) Use el teorema trabajo-energía para calcular la rapidez final del vagón. *b*) Calcule la aceleración producida por la fuerza y úsela en las relaciones de cinemática del capítulo 2 para calcular la rapidez final del vagón. Compare este resultado con el calculado en el inciso *a*).

6.26. Un bloque de hielo con masa de 2.00 kg se desliza 0.750 m hacia abajo por un plano inclinado a un ángulo de 36.9° bajo la horizontal. Si el bloque parte del reposo, ¿cuál será su rapidez final? Puede despreciarse la fricción.

6.27. Distancia de paro. Un automóvil viaja por un camino horizontal con rapidez v_0 en el instante en que los frenos se bloquean, de modo que las llantas se deslizan en vez de rodar. *a*) Use el teorema trabajo-energía para calcular la distancia mínima en que puede detenerse el auto en términos de v_0, g y el coeficiente de fricción cinética μ_k entre los neumáticos y el camino. *b*) ¿En qué factor cambiaría la distancia mínima de frenado, si i) se duplicara el coeficiente de fricción cinética, ii) se duplicara la rapidez inicial, o iii) se duplicaran tanto el coeficiente de fricción cinética como la rapidez inicial?

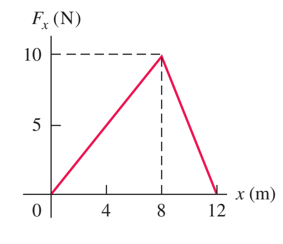
Sección 6.3 Trabajo y energía con fuerzas variables

6.28. Se requiere un trabajo de 12.0 J para estirar un resorte 3.00 cm respecto a su longitud no estirada. *a*) ¿Cuál es la constante de fuerza de este resorte? *b*) ¿Qué fuerza se necesita para estirar 3.00 cm el resorte desde su longitud sin estirar? *c*) ¿Cuánto trabajo debe efectuarse para comprimir ese resorte 4.00 cm respecto a su longitud no estirada, y qué fuerza se necesita para estirarlo esta distancia?

6.29. Una fuerza de 160 N estira un resorte 0.050 m más allá de su longitud no estirada. *a*) ¿Qué fuerza se requiere para un estiramiento de 0.015 m de este resorte? ¿Y para comprimirlo 0.020 m? *b*) ¿Cuánto trabajo debe efectuarse para estirar el resorte 0.015 m más allá de su longitud no estirada? ¿Y para comprimirlo 0.20 m desde su longitud sin estirar?

6.30. Una niña aplica una fuerza $\vec{F}$ paralela al eje x a un trineo de 10.0 kg que se mueve sobre la superficie congelada de un estanque pequeño. La niña controla la rapidez del trineo, y la componente x de la fuerza que aplica varía con la coordenada x del trineo, como se muestra en la figura 6.31. Calcule el trabajo efectuado por $\vec{F}$ cuando el trineo se mueve *a*) de $x = 0$ a $x = 8.0$ m; *b*) de $x = 8.0$ m a $x = 12.0$ m; *c*) de $x = 0$ a $x = 12.0$ m.

Figura 6.31 Ejercicios 6.30 y 6.31.



6.31. Suponga que el trineo del ejercicio 6.30 está inicialmente en reposo en $x = 0$. Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez del trineo en *a*) $x = 8.0$ m, y *b*) $x = 12.0$ m. Puede despreciarse la fricción entre el trineo y la superficie del estanque.

6.32. Una vaca terca intenta salirse del establo mientras usted la empuja cada vez con más fuerza para impedirlo. En coordenadas cuyo origen es la puerta del establo, la vaca camina de $x = 0$ a $x = 6.9$ m, mientras usted aplica una fuerza con componente x $F_x = -[20.0\text{ N} + (3.0\text{ N/m})x]$. ¿Cuánto trabajo efectúa sobre la vaca la fuerza que usted aplica durante este desplazamiento?

6.33. Una caja de 6.0 kg que se mueve a 3.0 m/s, sobre una superficie horizontal sin fricción, choca con un resorte ligero cuya constante de fuerza es de 75 N/cm. Use el teorema trabajo-energía para determinar la compresión máxima del resorte.

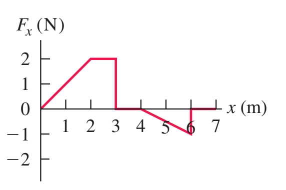
6.34. "Press" de piernas. Como parte de su ejercicio diario, usted se acuesta boca arriba y empuja con los pies una plataforma conectada a dos resortes rígidos paralelos entre sí. Al empujar la plataforma, usted comprime los resortes. Realiza 80.0 J de trabajo al comprimir los resortes 0.200 m con respecto a su longitud no comprimida. *a*) ¿Qué fuerza debe aplicar para mantener la plataforma en esta posición? *b*) ¿Cuánto trabajo *adicional* debe realizar para mover la plataforma *otros* 0.200 m, y qué fuerza máxima debe aplicar?

6.35. *a*) En el ejemplo 6.7 (sección 6.3), se calcula que, con el riel de aire apagado, el deslizador viaja 8.6 cm antes de parar instantáneamente. ¿Qué tan grande debe ser el coeficiente de fricción estática μ_s para evitar que el deslizador regrese a la izquierda? *b*) Si el coeficiente de fricción estática entre el deslizador y el riel es $\mu_s = 0.60$, ¿qué rapidez inicial máxima v_1 puede imprimirse al deslizador sin que regrese a la izquierda luego de detenerse momentáneamente? Con el riel de aire apagado, el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.47$.

6.36. Un bloque de hielo de 4.00 kg se coloca contra un resorte horizontal que tiene fuerza constante $k = 200$ N/m, y está comprimido 0.025 m. El resorte se suelta y acelera al bloque sobre una superficie horizontal. Pueden despreciarse la fricción y la masa del resorte. *a*) Calcule el trabajo efectuado por el resorte sobre el bloque, durante el movimiento del bloque desde su posición inicial hasta que el resorte recupera su longitud no comprimida. *b*) ¿Qué rapidez tiene el bloque al perder contacto con el resorte?

6.37. A un automóvil a escala de 2.0 kg, controlado por radio, se aplica una fuerza $\vec{F}$ paralela al eje x; mientras el auto se mueve por una pista recta. La componente x de la fuerza varía con la coordenada x del auto, como se indica en la figura 6.32. Calcule el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ cuando el auto se mueve de *a*) $x = 0$ a $x = 3.0$ m; *b*) $x = 3.0$ m a $x = 4.0$ m; *c*) $x = 4$ a $x = 7.0$ m; *d*) $x = 0$ a $x = 7.0$ m; *e*) $x = 7.0$ m a $x = 2.0$ m.

Figura 6.32 Ejercicios 6.37 y 6.38.



6.38. Suponga que el auto a escala de 2.0 kg del ejercicio 6.37 está inicialmente en reposo en $x = 0$ y que $\vec{F}$ es la fuerza neta que actúa sobre él. Use el teorema trabajo-energía para determinar la rapidez del auto en *a*) $x = 3.0$ m; *b*) $x = 4.0$ m; *c*) $x = 7.0$ m.

6.39. En un parque acuático, trineos con pasajeros se impulsan por una superficie horizontal resbaladiza liberando un resorte grande comprimido. El resorte, con constante de fuerza $k = 40.0$ N/cm y masa despreciable, descansa sobre la superficie horizontal sin fricción. Un extremo está en contacto con una pared fija; un trineo con pasajero (cuya masa total es de 70.0 kg) se empuja contra el otro extremo, comprimiendo el resorte 0.375 m. Luego se libera el trineo con velocidad inicial cero. ¿Qué rapidez tiene el trineo cuando el resorte *a*) regresa a su longitud no comprimida? y *b*) ¿está aún comprimido 0.200 m?

6.40. La mitad de un resorte. *a*) Suponga que usted corta a la mitad un resorte ideal sin masa. Si el resorte completo tiene una constante de fuerza k, ¿cuál es la constante de fuerza de cada mitad, en términos de k? (*Sugerencia*: piense en el resorte original como dos mitades iguales, y que cada mitad produce la misma fuerza que el resorte completo. ¿Nota usted por qué las fuerzas deben ser iguales?) *b*) Si ahora corta el resorte en tres segmentos iguales, ¿cuál será la constate de fuerza de cada uno en términos de k?

6.41. Un deslizador pequeño con masa de 0.0900 kg se coloca contra un resorte comprimido en la base de un riel de aire inclinado 40.0° hacia arriba sobre la horizontal. El resorte tiene $k = 640$ N/m y masa despreciable. Al soltarse el resorte, el deslizador viaja una distancia máxima de 1.80 m sobre el riel antes de deslizarse hacia abajo. Antes de alcanzar esta distancia máxima, el deslizador pierde contacto con

el resorte. *a*) ¿Qué distancia se comprimió originalmente el resorte? *b*) Cuando el deslizador haya recorrido 0.80 m por el riel de aire desde su posición inicial contra el resorte comprimido, ¿estará todavía en contacto con el resorte? ¿Qué energía cinética tiene el deslizador en ese punto?

6.42. Un albañil ingenioso construye un dispositivo para lanzar ladrillos hasta arriba de la pared donde está trabajando. Se coloca un ladrillo sobre un resorte vertical comprimido con fuerza constante $k = 450$ N/m y masa despreciable. Al soltarse el resorte, el ladrillo es empujado hacia arriba. Si un ladrillo con masa de 1.80 kg debe alcanzar una altura máxima de 3.6 m sobre su posición inicial, ¿qué distancia deberá comprimirse el resorte? (El ladrillo pierde contacto con el resorte cuando éste recupera su longitud no comprimida. ¿Por qué?)

Sección 6.4 Potencia

6.43. ¿Cuántos joules de energía consume una bombilla eléctrica de 100 watts cada hora? ¿Con qué rapidez tendría que correr una persona de 70 kg para tener esa cantidad de energía cinética?

6.44. El consumo total de energía eléctrica en Estados Unidos es del orden de 1.0×10^{19} J por año. *a*) ¿Cuál es la tasa media de consumo de energía eléctrica en watts? *b*) Si la población de ese país es de 300 millones de personas, determine la tasa media de consumo de energía eléctrica por persona. *c*) El Sol transfiere energía a la Tierra por radiación a razón de 1.0 kW por m^2 de superficie, aproximadamente. Si esta energía pudiera recolectarse y convertirse en energía eléctrica con eficiencia del 40%, ¿qué área (en km^2) se requeriría para recolectar la energía eléctrica gastada por Estados Unidos?

6.45. Magnetoestrella. El 27 de diciembre de 2004 los astrónomos observaron el destello de luz más grande jamás registrado, proveniente de afuera del Sistema Solar. Provenía de la estrella de neutrones altamente magnética SGR 1806-20 (una *magnetoestrella*). Durante 0.20 s, dicha estrella liberó tanta energía como nuestro Sol liberó durante 250,000 años. Si P es la salida de potencia media de nuestro Sol, ¿cuál era la salida de potencia media (en términos de P) de esta magnetoestrella?

6.46. Una piedra de 20.0 kg se desliza por una superficie horizontal áspera a 8.0 m/s y finalmente se para debido a la fricción. El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y la superficie es de 0.200. ¿Cuánta potencia térmica media se produce al detenerse la piedra?

6.47. Un equipo de dos personas en una bicicleta tándem debe vencer una fuerza de 165 N para mantener una rapidez de 9.00 m/s. Calcule la potencia requerida por ciclista, suponiendo contribuciones iguales. Exprese su respuesta en watts y en caballos de potencia.

6.48. Cuando el motor de 75 kW (100 hp) está desarrollando su potencia máxima, un pequeño avión monomotor con masa de 700 kg gana altitud a razón de 2.5 m/s (150 m/min, o 500 ft/min). ¿Qué fracción de la potencia del motor se está invirtiendo en hacer que el avión ascienda? (El resto se usa para vencer la resistencia del aire o se pierde por ineficiencias en la hélice y el motor.)

6.49. Trabajar como caballo. Imagine que usted trabaja levantando cajas de 30 kg una distancia vertical de 0.90 m del suelo a un camión. *a*) ¿Cuántas cajas tendría que cargar en el camión en 1 min, para que su gasto medio de potencia invertido en levantar las cajas fuera de 0.50 hp? *b*) ¿Y para que fuera de 100 W?

6.50. Un elevador vacío tiene masa de 600 kg y está diseñado para subir con rapidez constante una distancia vertical de 20.0 m (5 pisos) en 16.0 s. Es impulsado por un motor capaz de suministrar 40 hp al elevador. ¿Cuántos pasajeros como máximo pueden subir en el elevador? Suponga una masa de 65.0 kg por pasajero.

6.51. Potencia automotriz. Es frecuente que un automóvil de 1000 kg rinda 30 mi/gal cuando viaja a 60 mi/h en una carretera horizontal. Si este auto realiza un viaje de 200 km, *a*) ¿cuántos joules de energía consume, y *b*) cuál es la tasa media del consumo de energía durante el viaje? Observe que 1.0 gal de gasolina rinde 1.3×10^9 J (aunque esto puede variar). Consulte el Apéndice E.

6.52. El portaaviones *John F. Kennedy* tiene una masa de 7.4×10^7 kg. Cuando sus motores desarrollan su potencia máxima de 280,000 hp, la nave viaja con su rapidez máxima de 35 nudos (65 km/h). Si el 70% de esa potencia se dedica a impulsar la nave por el agua, ¿qué magnitud tiene la fuerza de resistencia del agua que se opone al movimiento del portaviones a esta rapidez?

6.53. Un remolcador de esquiadores opera en una ladera a 15.0° con longitud de 300 m. La cuerda se mueve a 12.0 km/h y se suministra potencia para remolcar 50 pasajeros (de 70.0 kg en promedio) a la vez. Estime la potencia requerida para operar el remolcador.

6.54. Un insecto volador común aplica una fuerza media igual al doble de su peso durante cada aleteo hacia abajo cuando está suspendido en el aire. Suponga que la masa del insecto es de 10 g y que las alas recorren una distancia media vertical de 1.0 cm en cada aleteo. Suponiendo 100 aleteos por segundo, estime el gasto medio de potencia del insecto.

Problemas

6.55. Barra giratoria. Una barra delgada y uniforme de 12.0 kg y longitud de 2.00 m gira uniformemente alrededor de un pivote en un extremo, describiendo 5.00 revoluciones completas cada 3.00 segundos. ¿Qué energía cinética tiene esta barra? (*Sugerencia*: los diferentes puntos de la barra tienen diferente rapidez. Divida la barra en segmentos infinitesimales de masa dm e integre para obtener la energía cinética total de todos estos segmentos.)

6.56. Un asteroide cercano a la Tierra. El 13 de abril de 2029 (¡un viernes 13!), el asteroide 99942 Apophis pasará a 18,600 millas de la Tierra, ¡aproximadamente 1/13 de la distancia a la Luna! Tiene una densidad de 2600 kg/m^3, puede moldearse como una esfera de 320 m de diámetro y viajará a 12.6 km/s. *a*) Si debido a una pequeña perturbación en su órbita, el asteroide fuera a chocar contra la Tierra, ¿cuánta energía cinética produciría? *b*) El arma nuclear más grande probada por Estados Unidos fue la bomba "Castle-Bravo", que produjo 15 megatones de TNT. (Un megatón de TNT libera 4.184×10^{15} J de energía.) ¿Cuántas bombas Castle-Bravo serían equivalentes a la energía del Apophis?

6.57. Un transportador de equipaje tira de una maleta de 20.0 kg, para subirla por una rampa inclinada 25.0° sobre la horizontal, con una fuerza $\vec{F}$ de magnitud 140 N que actúa paralela a la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre la rampa y la maleta es $\mu_k = 0.300$. Si la maleta viaja 3.80 m en la rampa, calcule el trabajo realizado sobre la maleta por *a*) $\vec{F}$; *b*) la fuerza gravitacional, *c*) la fuerza normal, *d*) la fuerza de fricción, *e*) todas las fuerzas (el trabajo total hecho sobre la maleta). *f*) Si la rapidez de la maleta es cero en la base de la rampa, ¿qué rapidez tiene después de haber subido 3.80 m por la rampa?

6.58. Dominadas. Al hacer una "dominada", un hombre levanta su cuerpo 0.40 m. *a*) ¿Cuánto trabajo efectúa por kilogramo de masa corporal? *b*) Los músculos que intervienen en el movimiento pueden generar aproximadamente 70 J de trabajo por kilogramo de masa muscular. Si el hombre apenas logra hacer una dominada de 0.40 m, ¿qué porcentaje de la masa de su cuerpo corresponde a esos músculos? (Como comparación, el porcentaje *total* de músculo en un hombre común de 70 kg con el 14% de grasa corporal es cercano al 43%.) *c*) Repita el inciso *b*) para el pequeño hijo de tal hombre, cuyos brazos tienen la mitad de la longitud pero cuyos músculos también pueden

generar 70 J de trabajo por kilogramo de masa muscular. *d*) Los adultos y niños tienen aproximadamente el mismo porcentaje de músculo en su cuerpo. Explique por qué para los niños suele ser más fácil hacer dominadas que para sus padres.

6.59. Máquinas simples. Se instalan rampas para discapacitados porque un gran peso w puede levantarse con una fuerza relativamente pequeña igual a w sen α más la pequeña fuerza de fricción. Estos planos inclinados son un ejemplo de una clase de dispositivos llamados *máquinas simples*. Se aplica una fuerza de entrada F_{en} al sistema y produce una fuerza de salida F_{sal} aplicada al objeto que se mueve. En una máquina simple, el cociente F_{sal}/F_{ent} se llama ventaja mecánica real (VMR). La razón inversa de las distancias que los puntos de aplicación de estas fuerzas se desplazan durante el movimiento del objeto, s_{ent}/s_{sal}, es la ventaja mecánica ideal (VMI). *a*) Calcule la VMI de un plano inclinado. *b*) ¿Qué puede decir de la relación entre el trabajo suministrado a la máquina, W_{ent}, y el producido por ella, W_{sal}, si VMR = VMI? *c*) Dibuje una polea dispuesta para producir VMI = 2. *d*) Definimos la eficiencia e de una máquina simple como el cociente del trabajo de salida y el de entrada, $e = W_{sal}/W_{ent}$. Demuestre que e = VMR/VMI.

6.60. Considere el bloque del ejercicio 6.7 conforme se mueve 75.0 cm. Calcule el trabajo total realizado sobre cada uno *a*) si no hay fricción entre la mesa y el bloque de 20.0 N, y *b*) si $\mu_s = 0.500$ y $\mu_k = 0.325$ entre la mesa y el bloque de 20.0 N.

6.61. El transbordador espacial *Endeavour*, con masa de 86,400 kg, está en una órbita circular con radio de 6.66×10^6 m alrededor de la Tierra, y tarda 90.1 min en completar una órbita. En una misión de reparación, la nave se acerca cuidadosamente 1.00 m cada 3.00 s a un satélite averiado. Calcule la energía cinética del *Endeavour* *a*) relativa a la Tierra, y *b*) relativa al satélite.

6.62. Un paquete de 5.00 kg baja 1.50 m deslizándose por una larga rampa inclinada 12.0° bajo la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la rampa es $\mu_k = 0.310$. Calcule el trabajo realizado sobre el paquete por *a*) la fricción, *b*) la gravedad, *c*) la fuerza normal, *d*) todas las fuerzas (el trabajo total sobre el paquete). *e*) Si el paquete tiene una rapidez de 2.20 m/s en la parte superior de la rampa, ¿qué rapidez tiene después de bajar deslizándose 1.50 m?

6.63. Resortes en paralelo. Dos resortes están en *paralelo* si son paralelos entre sí y están conectados en sus extremos (figura 6.33). Es posible pensar en esta combinación como equivalente a un solo resorte. La constante de fuerza del resorte individual equivalente se denomina constante de fuerza *efectiva*, k_{efe}, de la combinación. *a*) Demuestre que la constante de fuerza efectiva de esta combinación es $k_{efe} = k_1 + k_2$. *b*) Generalice este resultado para N resortes en paralelo.

Figura 6.33 Problema 6.63.

6.64. Resortes en serie. Dos resortes sin masa están conectados en serie cuando se unen uno después del otro, punta con cola. *a*) Demuestre que la constante de fuerza efectiva (véase el problema 6.63) de una combinación en serie está dada por $\frac{1}{k_{efe}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (*Sugerencia*: para una fuerza dada, la distancia total de estiramiento por el resorte individual equivalente es la suma de las distancias estiradas por los resortes en combinación. Además, cada resorte debe ejercer la misma fuerza. ¿Sabe usted por que? *b*) Generalice este resultado para N resortes en serie.

6.65. Un objeto es atraído hacia el origen con una fuerza dada por $F_x = -k/x^2$. (Las fuerzas gravitacionales y eléctricas tienen esta dependencia de la distancia.) *a*) Calcule el trabajo realizado por la fuerza F_x cuando el objeto se mueve en la dirección x de x_1 a x_2. Si $x_2 > x_1$, ¿el trabajo hecho por F_x es positivo o negativo? *b*) La otra fuerza que actúa sobre el objeto es la que usted ejerce con la mano para moverlo lentamente de x_1 a x_2. ¿Qué tanto trabajo efectúa usted? Si $x_2 > x_1$, ¿el trabajo que usted hace es positivo o negativo? *c*) Explique las similitudes y diferencias entre sus respuestas a los incisos *a*) y *b*).

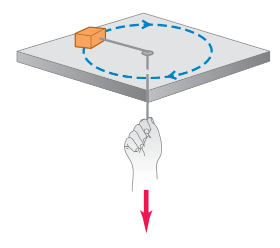
6.66. La atracción gravitacional de la Tierra sobre un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el objeto y el centro de la Tierra. En la superficie terrestre, esa fuerza es igual al peso normal del objeto, mg, donde $g = 9.8$ m/s^2; en tanto que a grandes distancias la fuerza es cero. Si un asteroide de 20,000 kg cae a la Tierra desde un punto muy lejano, ¿qué rapidez mínima tendrá al chocar contra la superficie terrestre y cuánta energía cinética impartirá a nuestro planeta? Puede ignorar los efectos de la atmósfera terrestre.

6.67. Coeficientes de fricción variables. Una caja resbala con una rapidez de 4.50 m/s por una superficie horizontal cuando, en el punto P, se topa con una sección áspera. Aquí, el coeficiente de fricción no es constante: inicia en 0.100 en P y aumenta linealmente con la distancia después de P, alcanzando un valor de 0.600 en 12.5 m más allá de P. *a*) Use el teorema trabajo-energía para obtener la distancia que la caja se desliza antes de pararse. *b*) Determine el coeficiente de fricción en el punto donde se paró. *c*) ¿Qué distancia se habría deslizado la caja si el coeficiente de fricción, en vez de aumentar, se hubiera mantenido en 0.100?

6.68. Considere un resorte con un extremo fijo que no obedece fielmente la ley de Hooke. Para mantenerlo estirado o comprimido una distancia x, se debe aplicar al extremo libre una fuerza sobre el eje x con componente $F_x = kx - bx^2 + cx^3$. Aquí $k = 100$ N/m, $b = 700$ N/m^2 y $c = 12{,}000$ N/m^3. Observe que $x > 0$ cuando se estira el resorte y $x < 0$ cuando se comprime. *a*) ¿Cuánto trabajo debe realizarse para estirar este resorte 0.050 m con respecto a su longitud no estirada? *b*) ¿Cuánto trabajo debe realizarse para *comprimirlo* 0.050 m con respecto a su longitud no estirada? *c*) ¿Es más fácil estirar o comprimir este resorte? Explique por qué en términos de la dependencia de F_x en x. (Muchos resortes reales tienen el mismo comportamiento cualitativo.)

6.69. Un pequeño bloque con masa de 0.120 kg se conecta a un cordón que pasa por un agujero en una superficie horizontal sin fricción (figura 6.34). El bloque está girando a una distancia de 0.40 m del agujero con rapidez de 0.70 m/s. Luego, se tira del cordón por abajo, acortando el radio de la trayectoria del bloque a 0.10 m. Ahora la rapidez del bloque es de 2.80 m/s. *a*) ¿Qué tensión hay en el cordón en la situación original cuando el bloque tienen una rapidez $v = 0.70$ m/s)? *b*) ¿Qué tensión hay en el cordón en la situación final cuando el bloque tienen una rapidez $v = 2.80$ m/s? *c*) ¿Cuánto trabajo efectuó la persona que tiró del cordón?


Figura 6.34 Problema 6.69.



6.70. Bombardeo con protones. Un protón con masa de 1.67×10^{-27} kg es impulsado con una rapidez inicial de 3.00×10^5 m/s directamente hacia un núcleo de uranio que está a 5.00 m. El protón es repelido por el núcleo de uranio con una fuerza de magnitud $F = \alpha/x^2$, donde x es la separación de los objetos y $\alpha = 2.12 \times$

10^{-26} N · m^2. Suponga que el núcleo de uranio permanece en reposo. *a*) ¿Qué rapidez tiene el protón cuando está a 8.00×10^{-10} m del núcleo de uranio? *b*) Al acercarse el protón al núcleo de uranio, la fuerza de repulsión lo frena hasta detenerlo momentáneamente, después de lo cual el protón se aleja del núcleo de uranio. ¿Qué tanto se acerca el protón al núcleo? *c*) ¿Qué rapidez tiene el protón cuando está otra vez a 5.00 m del núcleo de uranio?

6.71. Un bloque de hielo con masa de 6.00 kg está inicialmente en reposo en una superficie horizontal sin fricción. Un obrero le aplica después una fuerza horizontal $\vec{F}$ y el bloque se mueve sobre el eje *x*, de modo que su posición en función del tiempo está dada por $x(t) = \alpha t^2 + \beta t^3$, donde $\alpha = 0.200$ m/s^2, $\beta = 0.0200$ m/s^3. *a*) Calcule la velocidad del objeto en $t = 4.00$ s. *b*) Calcule la magnitud de $\vec{F}$ en $t = 4.00$ s. *c*) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ durante los primeros 4.00 s del movimiento.

6.72. El impacto del Génesis. Cuando la cápsula de 210 kg de la misión Génesis se estrelló (véase el ejercicio 5.17 del capítulo 5) con una rapidez de 311 km/h, se incrustó 81.0 cm en el suelo del desierto. Suponiendo una aceleración constante durante el impacto, ¿con qué tasa media la cápsula efectuó trabajo sobre el desierto?

6.73. Un hombre y su bicicleta tienen una masa combinada de 80.0 kg. Al llegar a la base de un puente, el hombre viaja a 5.00 m/s (figura 6.35). La altura vertical del puente que debe subir es de 5.20 m, y en la cima la rapidez del ciclista disminuyó a 1.50 m/s. Ignore la fricción y cualquier ineficiencia de la bicicleta o de las piernas del ciclista. *a*) ¿Qué trabajo total se efectúa sobre el hombre y su bicicleta al subir de la base a la cima del puente? *b*) ¿Cuánto trabajo realizó el hombre con la fuerza que aplicó a los pedales?

Figura **6.35** Problema 6.73.



6.74. Una fuerza en la dirección $+x$ tiene magnitud $F = b/x^n$, donde *b* y *n* son constantes. *a*) Para $n > 1$, calcule el trabajo efectuado sobre una partícula por esta fuerza cuando la partícula se mueve sobre el eje *x* de $x = x_0$ al infinito. *b*) Demuestre que, para $0 < n < 1$, aunque *F* se acerque a cero al hacerse *x* muy grande, *F* realiza un trabajo infinito cuando la partícula se mueve de $x = x_0$ al infinito.

6.75. Imagine que le piden diseñar amortiguadores de resorte para las paredes de un estacionamiento. Un automóvil de 1200 kg que rueda libremente a 0.65 m/s no debe comprimir el resorte más de 0.070 m antes de detenerse. ¿Qué constante de fuerza debería tener el resorte? Suponga que la masa del resorte es despreciable.

6.76. El resorte de un rifle de resorte tiene masa despreciable y una fuerza constante $k = 400$ N/m. El resorte se comprime 6.00 cm y una esfera con masa de 0.0300 kg se coloca en el cañón horizontal contra el resorte comprimido. El resorte se libera y la esfera sale por el cañón. Éste mide 6.00 cm, así que la esfera sale de él en el instante en que pierde contacto con el resorte. El rifle se sostiene con el cañón horizontal. *a*) Calcule la rapidez con que la esfera sale del cañón, ignorando la fricción. *b*) Calcule la rapidez con que la esfera sale del cañón, suponiendo que una fuerza de resistencia constante de 6.00 N actúa sobre la esfera mientras se mueve dentro del cañón. *c*) Para la situación del inciso *b*), ¿en qué posición dentro del cañón la esfera tiene mayor rapidez? Determine tal rapidez. (En este caso, la rapidez máxima no se alcanza en el extremo del cañón.)

6.77. Un libro de 2.50 kg se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable y fuerza constante de 250 N/m, comprimiéndolo 0.250 m. Al soltarse, el libro se desliza sobre una mesa horizontal que tiene coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.30$. Use el teorema trabajo-energía para averiguar qué distancia recorre el libro desde su posición inicial hasta detenerse.

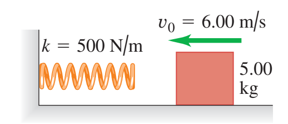
6.78. Empujar un gato. Micifuz (masa de 7.00 kg) está tratando de llegar a la parte más alta de una rampa sin fricción de 2.00 m de longitud, que tiene una inclinación de 30.0° sobre la horizontal. Puesto que el pobre felino no tiene tracción alguna sobre la rampa, usted lo empuja en todo momento ejerciendo una fuerza constante de 100 N paralela a la rampa. Si Micifuz empieza a correr desde más atrás, de modo que tenga una rapidez de 2.40 m/s en la base de la rampa, ¿qué rapidez tendrá al llegar a la parte más alta? Use el teorema trabajo-energía.

6.79. Barrera protectora. Un estudiante propone un diseño para una barrera contra choques de automóviles consistente en un resorte con masa despreciable capaz de detener una vagoneta de 1700 kg que se mueve a 20.0 m/s. Para no lastimar a los pasajeros, la aceleración del auto al frenarse no puede ser mayor que 5.00*g*. *a*) Calcule la constante de resorte *k* requerida, y la distancia que el resorte se comprimirá para detener el vehículo. No considere la deformación sufrida por el vehículo ni la fricción entre el vehículo y el piso. *b*) ¿Qué desventajas tiene este diseño?

6.80. Un grupo de estudiantes empuja a un profesor de física sentado en una silla provista de ruedas sin fricción, para subirlo 2.50 m por una rampa inclinada 30.0° sobre la horizontal. La masa combinada del profesor y la silla es de 85.0 kg. Los estudiantes aplican una fuerza horizontal constante de 600 N. La rapidez del profesor en la base de la rampa es de 2.00 m/s. Use el teorema trabajo-energía para calcular su rapidez en la parte superior de la rampa.

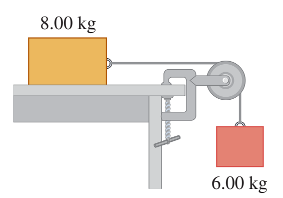
6.81. Un bloque de 5.00 kg se mueve con $v_0 = 6.00$ m/s en una superficie horizontal sin fricción hacia un resorte con fuerza constante $k = 500$ N/m que está unido a una pared (figura 6.36). El resorte tiene masa despreciable. *a*) Calcule la distancia máxima que se comprimirá el resorte. *b*) Si dicha distancia no debe ser mayor que 0.150 m, ¿qué valor máximo puede tener v_0?

Figura **6.36** Problema 6.81.



6.82. Considere el sistema de la figura 6.37. La cuerda y la polea tienen masas despreciables, y la polea no tiene fricción. Entre el bloque de 8.00 kg y la mesa, el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.250$. Los bloques se sueltan del reposo. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 6.00 kg después de descender 1.50 m.

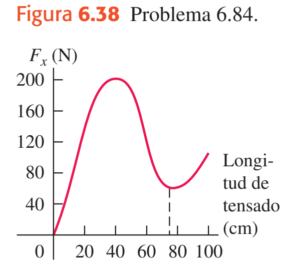
Figura **6.37** Problemas 6.82 y 6.83.



6.83. Considere el sistema de la figura 6.37. La cuerda y la polea tienen masas despreciables, y la polea no tiene fricción. El bloque de 6.00 kg se mueve inicialmente hacia abajo, y el bloque de 8.00 kg se mueve a la derecha, ambos con rapidez de 0.900 m/s. Los bloques se detienen después de moverse 2.00 m. Use el teorema trabajo-energía para calcular el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de 8.00 kg y la mesa.

6.84. Arco y flecha. La figura 6.38 muestra cómo la fuerza ejercida por la cuerda de un arco compuesto sobre una flecha varía en función de qué tan atrás se tira de la flecha (la longitud de tensado). Suponga que la misma fuerza se ejerce sobre la flecha cuando ésta se mueve hacia adelante después de soltarse. El tensado máximo de este arco es una longitud de 75.0 cm. Si el arco dispara una flecha de 0.0250 kg con tensado máximo, ¿qué rapidez tiene la flecha al salir del arco?

Figura 6.38 Problema 6.84.



6.85. En una pista de hielo horizontal, prácticamente sin fricción, una patinadora que se mueve a 3.0 m/s encuentra una zona áspera que reduce su rapidez en un 45% debido a una fuerza de fricción que es del 25% del peso de la patinadora. Use el teorema trabajo-energía para determinar la longitud de la zona áspera.

6.86. Rescate. Imagine que una amiga (con masa de 65.0 kg) está parada en medio de un estanque congelado. Hay muy poca fricción entre sus pies y el hielo, de modo que no puede caminar. Por fortuna, tiene una cuerda ligera atada a la cintura y usted está en la orilla sosteniendo el otro extremo. Usted tira de la cuerda durante 3.00 s y acelera a su amiga desde el reposo hasta tener una rapidez de 6.00 m/s, mientras usted permanece en reposo. ¿Qué potencia media suministra la fuerza que aplicó?

6.87. Se requiere una bomba para elevar 800 kg de agua (aproximadamente 210 galones) por minuto desde un pozo de 14.0 m, expulsándola con una rapidez de 18.0 m/s. a) ¿Cuánto trabajo se efectuará por minuto para subir el agua? *b*) ¿Cuánto trabajo se efectuará para impartirle la energía cinética que tiene al salir? *c*) ¿Qué potencia desarrolla la bomba?

6.88. Calcule la potencia desarrollada por el obrero del problema 6.71 en función del tiempo. ¿Qué valor numérico tiene la potencia (en watts) en $t = 4.00$ s?

6.89. Una estudiante de física pasa una parte del día caminando entre clases o por esparcimiento, y durante ese tiempo gasta energía a una tasa media de 280 W. El resto del día está sentada en clase, estudiando o descansando; durante estas actividades, gasta energía a una tasa media de 100 W. Si en un día ella gasta en total 1.1×10^7 J de energía, ¿cuánto tiempo dedicó a caminar?

6.90. Todas las aves, sea cual fuere su tamaño, deben desarrollar continuamente una potencia de entre 10 y 25 watts por kilogramo de masa corporal para volar batiendo las alas. *a*) El colibrí gigante de los Andes (*Patagona gigas*) tiene una masa de 70 g y aletea 10 veces por segundo al quedar suspendido. Estime el trabajo efectuado por ese colibrí en cada aleteo. *b*) Un atleta de 70 kg puede desarrollar una potencia de 1.4 kW durante unos cuantos segundos como máximo; el desarrollo *constante* de potencia de un atleta común es sólo del orden de 500 W. ¿Es posible para un avión de propulsión humana poder volar por periodos largos batiendo las alas? Explique su respuesta.

6.91. La presa Grand Coulee tiene 1270 m de longitud y 170 m de altura. La potencia eléctrica producida por los generadores en su base es de aproximadamente 2000 MW. ¿Cuántos metros cúbicos de agua deben fluir cada segundo desde la parte superior de la presa, para producir esta potencia si el 92% del trabajo realizado sobre el agua por la gravedad se convierte en energía eléctrica? (Cada cm^3 de agua tiene 1000 kg de masa.)

6.92. El motor de un automóvil de masa *m* alimenta una potencia constante *P* a las ruedas para acelerar el auto. Puede ignorarse la fricción por rodamiento y la resistencia del aire. El auto está inicialmente en reposo. *a*) Demuestre que la rapidez del auto en función del tiempo es $v = (2Pt/m)^{1/2}$. *b*) Demuestre que la aceleración del auto no es constante, sino que está dada en función del tiempo por $a = (P/2mt)^{1/2}$. *c*) Demuestre que el desplazamiento en función del tiempo es $x - x_0 = (8P/9m)^{1/2}\,t^{3/2}$.

6.93. Potencia del corazón humano. El corazón humano es una bomba potente y muy confiable; cada día admite y descarga unos 7500 L de sangre. Suponga que el trabajo que realiza el corazón es igual al requerido para levantar esa cantidad de sangre a la altura media de una mujer estadounidense (1.63 m). La densidad (masa por unidad de volumen) de la sangre es de 1.05×10^3 kg/m^3. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza el corazón en un día? b) ¿Qué potencia desarrolla en watts?

6.94. Seis unidades diesel en serie pueden suministrar 13.4 MW al primer vagón de un tren de carga. Las unidades diesel tienen una masa total de 1.10×10^6 kg. Los vagones tienen una masa media de 8.2×10^4 kg y cada uno requiere un tirón horizontal de 2.8 kN para moverse a 27 m/s (constante) en vías horizontales. *a*) ¿Cuántos vagones puede tener el tren en estas condiciones? *b*) En tal caso, no sobraría potencia para acelerar ni para subir cuestas. Demuestre que la fuerza adicional requerida para acelerar el tren es aproximadamente la misma para lograr una aceleración de 0.10 m/s^2, que para subir una pendiente de 1.0% (ángulo de pendiente $\alpha = \arctan 0.010$). *c*) Con la pendiente de 1.0%, demuestre que se necesitan 2.9 MW más para mantener la rapidez de 27 m/s de las unidades diesel. *d*) Con 2.9 MW menos de potencia disponible, ¿cuántos vagones pueden arrastrar las seis unidades diesel subiendo una cuesta de 1.0% con rapidez constante de 27 m/s?

6.95. Se necesita una fuerza de 53 kN aplicada al primer vagón de un tren de 16 vagones con masa de 9.1×10^5 kg, para tirar de él con rapidez constante de 45 m/s (101 mi/h) sobre rieles horizontales. *a*) ¿Qué potencia debe proporcionar la locomotora al primer vagón? *b*) ¿Cuánta más potencia que la calculada en *a*) se necesitaría para impartir al tren una aceleración de 1.5 m/s^2 en el instante en que el tren va a 45 m/s sobre vías horizontales? *c*) ¿Cuánta más potencia que la calculada en *a*) se necesitaría para tirar del tren subiendo una cuesta de 1.5% (ángulo de pendiente α = arelan 0.015) con rapidez constante de 45 m/s?

6.96. Varias fuerzas actúan sobre un objeto. Una de ellas es $\vec{F} = \alpha xy\hat{\imath}$, una fuerza en la dirección *x* cuya magnitud depende de la posición del objeto, con $\alpha = 2.50$ N/m^2. Calcule el trabajo realizado por esta fuerza sobre el objeto para cada uno de los siguientes desplazamientos del objeto: *a*) El objeto parte del punto $x = 0$, $y = 3.00$ m y se mueve paralelo al eje *x* hasta el punto $x = 2.00$ m, $y = 3.00$ m. *b*) El objeto parte del punto $x = 2.00$ m, $y = 0$ y se mueve en la dirección *y* hasta el punto $x = 2.00$ m, $y = 3.00$ m. *c*) El objeto parte del origen y se mueve sobre la línea $y = 1.5x$ hasta el punto $x = 2.00$ m, $y = 3.00$ m.

6.97. Ciclismo. Para una ciclista de ruta, el coeficiente de arrastre $C\left(f_{aire} = \frac{1}{2}CA\rho v^2\right)$ es 1.00, el área frontal *A* es de 0.463 m^2 y el coeficiente de fricción por rodamiento es de 0.0045. Ella tiene una masa de 50.0 kg, y su bicicleta, 12.0 kg. *a*) Para mantener una rapidez de 12.0 m/s (unas 27 mi/h) en un camino plano, ¿qué potencia debe suministrar la ciclista a la rueda trasera? *b*) En carreras de velocidad, 1a misma ciclista usa otra bicicleta con coeficiente de fricción por rodamiento de 0.0030 y masa de 9.00 kg. Además, la ciclista se encorva para reducir su coeficiente de arrastre a 0.88 y su área frontal a 0.366 m^2. ¿Qué po-

tencia debe suministrar ahora a la rueda trasera para mantener una rapidez de 12.0 m/s? *c*) En la situación del inciso *b*), ¿qué potencia se requiere para mantener una rapidez de 6.0 m/s? Considere la gran reducción en la potencia requerida cuando la rapidez sólo se reduce a la mitad. (Si desea saber más acerca de las limitaciones aerodinámicas de la rapidez para una amplia variedad de vehículos de propulsión humana, véase "The Aerodynamics of Human-Powered Land Vehicles", *Scientific American*, diciembre de 1983.)

6.98. Potencia automotriz I. El motor de un camión transmite 28.0 kW (37.5 hp) a las ruedas de tracción cuando el camión viaja con velocidad constante de magnitud 60.0 km/h (37.3 mi/h) sobre una carretera horizontal. *a*) Determine la fuerza de resistencia que actúa sobre el camión. *b*) Suponga que el 65% de tal fuerza se debe a la fricción por rodamiento, y el resto, a la resistencia del aire. Si la fuerza de fricción por rodamiento es independiente de la rapidez y la fuerza de resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la rapidez ¿qué potencia impulsará el camión a 30.0 km/h? ¿Y a 120 km/h? Dé sus respuestas en kilowatts y en caballos de potencia.

6.99. Potencia automotriz II. *a*) Si se requieren 8.00 hp para impulsar un automóvil de 1800 kg a 60.0 km/h en una carretera horizontal, calcule la fuerza retardante total debida a la fricción, la resistencia del aire, etcétera. *b*) ¿Qué potencia se requiere para impulsar el auto a 60.0 km/h hacia arriba en una pendiente de 10.0% (que sube 10.0 m por cada 100.0 m de distancia horizontal)? *c*) ¿Qué potencia se requiere para impulsar el auto a 60.0 km/h en una *bajada* de 1.00%? *d*) ¿Qué inclinación debe tener una pendiente para que el auto avance a 60.0 km/h sin motor?

Problemas de desafío

6.100. En un día invernal en Maine, un bodeguero está empujando cajas hacia arriba, por una tabla áspera inclinada con un ángulo α sobre la horizontal. La tabla está cubierta en parte con hielo, y hay más hielo cerca de la base de la tabla que cerca del tope, de modo que el coeficiente de fricción aumenta con la distancia x a lo largo de la tabla: $\mu = Ax$, donde A es una constante positiva y la base de la tabla está en $x = 0$. (Para esta tabla, los coeficientes de fricción cinética y estática son iguales, $\mu_k = \mu_s = \mu$.) El bodeguero empuja una caja tabla arriba, de modo que sale de la base de la tabla con rapidez v_0. Demuestre que cuando la caja se detiene, permanecerá en reposo si

$$v_0^2 \geq \frac{3g\,\text{sen}^2\alpha}{A\cos\alpha}$$

6.101. Un resorte con masa. Normalmente ignoramos la energía cinética de las espiras en movimiento de un resorte; sin embargo, intentemos obtener una aproximación razonable de esta cantidad. Considere un resorte de masa M, longitud en equilibrio L_0 y constante de resorte k. El trabajo efectuado para estirar o comprimir el resorte en una distancia L es $\frac{1}{2}kX^2$, donde $X = L - L_0$. *a*) Considere que el resorte descrito tiene un extremo fijo y el otro moviéndose con rapidez v. Suponga que la rapidez de los puntos a lo largo del resorte varía linealmente con la distancia l medida desde el extremo fijo. Suponga también que la masa M del resorte se distribuye uniformemente a lo largo del mismo. Calcule la energía cinética del resorte en términos de M y v. (*Sugerencia*: divida el resorte en segmentos de longitud dl; determine la rapidez de cada segmento en términos de l, v y L; calcule la masa de cada segmento en términos de dl, M y L, e integre desde 0 hasta L. El resultado *no* es $\frac{1}{2}Mv^2$, ya que no todo el resorte se mueve con la misma rapidez.) En un rifle de resorte, un resorte de masa 0.243 kg y fuerza constante 3200 N/m se comprime 2.50 cm con respecto a su longitud no estirada. Cuando se tira del gatillo, el resorte empuja horizontalmente una esfera de 0.053 kg. El trabajo efectuado por la fricción es despreciable. Calcule la rapidez de la esfera cuando el resorte recupera su longitud no comprimida *b*) despreciando la masa del resorte; *c*) incluyendo, con ayuda de los resultados del inciso *a*), la masa del resorte. *d*) En el inciso *c*), ¿qué energía cinética final tienen la esfera y el resorte?

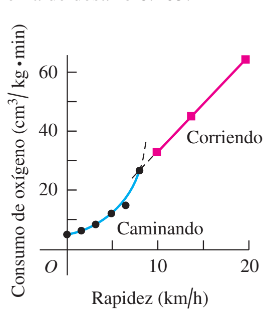
6.102. Un avión en vuelo está sujeto a una fuerza de resistencia del aire proporcional al cuadrado de su rapidez v. Sin embargo, hay una fuerza de resistencia adicional porque el avión tiene alas. El aire que fluye sobre las alas es empujado hacia abajo y ligeramente hacia adelante de modo que, por la tercera ley de Newton, el aire ejerce una fuerza sobre las alas y el avión que es hacia arriba y ligeramente hacia atrás (figura 6.39). La fuerza hacia arriba es la fuerza de sustentación que mantiene al avión en vuelo, en tanto que la fuerza hacia atrás se denomina *arrastre inducido*. A las rapideces de vuelo, el arrastre inducido es inversamente proporcional a v^2, así que la fuerza de resistencia total del aire se puede expresar como $F_{\text{aire}} = \alpha v^2 + \beta/v^2$, donde α y β son constantes positivas que dependen de la forma y tamaño del avión y de la densidad del aire. Para un Cessna 150, un avión pequeño de un solo motor, $\alpha = 0.30\ \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ y $\beta = 3.5 \times 10^5\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$. En vuelo estable, el motor debe suministrar una fuerza hacia adelante que equilibre exactamente la fuerza de resistencia del aire. *a*) Calcule la rapidez (en km/h) a la que este avión tiene el *alcance* máximo (es decir, viaja mayor distancia) para una cantidad dada de combustible. *b*) Calcule la rapidez (en km/h) con la que el avión tendrá *permanencia* máxima en el aire.

Figura 6.39 Problema de desafío 6.102.



6.103. La figura 6.40 muestra la tasa de consumo de oxígeno de hombres que caminan y corren a diferentes rapideces. El eje vertical indica volumen de oxígeno (en cm^3) que un hombre consume por kilogramo

Figura 6.40 Problema de desafío 6.103.



de masa corporal por minuto. Observe la transición de caminar a correr que se da naturalmente cerca de los 9 km/h. El metabolismo de 1 cm^3 de oxígeno libera unos 20 J de energía. Con los datos de la gráfica, obtenga la energía requerida para que un hombre de 70 kg viaje 1 km a pie con cada una de las siguientes rapideces: *a*) 5 km/h (caminando); *b*) 10 km/h (corriendo); *c*) 15 km/h (corriendo). *d*) ¿Cuál rapidez es la más eficiente, es decir, requiere menor energía para viajar 1 km?

6.104. Demostración general del teorema trabajo-energía. Considere una partícula que se mueve siguiendo una trayectoria curva en el espacio desde (x_1, y_1, z_1) hasta (x_2, y_2, z_2). En el punto inicial, la partícula tiene velocidad $\vec{v} = v_{1x}\hat{\imath} + v_{1y}\hat{\jmath} + v_{1z}\hat{k}$. La trayectoria se puede dividir en segmentos infinitesimales $d\vec{l} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$. Mientras la partícula se mueve, actúa sobre ella una fuerza neta $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$. Las componentes de fuerza F_x, F_y y F_z son, en general, funciones de la posición. Por la misma sucesión de pasos empleada en las ecuaciones (6.11) a (6.13), demuestre el teorema trabajo-energía para este caso general. Es decir, demuestre que

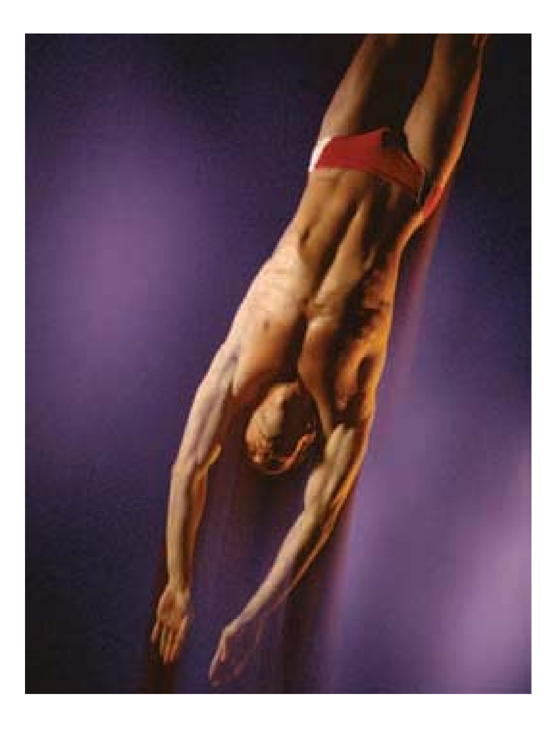
$$W_{tot} = K_2 - K_1$$

donde

$$W_{tot} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} (F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$$

ENERGÍA POTENCIAL Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

7



? Mientras este clavadista entra en el agua, ¿la fuerza de gravedad realiza trabajo positivo o negativo sobre él? ¿El agua realiza trabajo positivo o negativo sobre él?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo utilizar el concepto de energía potencial gravitacional en problemas que implican movimiento vertical.
- Cómo utilizar el concepto de energía potencial elástica en problemas que implican un cuerpo en movimiento unido a un resorte estirado o comprimido.
- La distinción entre fuerzas conservativas y no conservativas, y cómo resolver problemas donde ambos tipos de fuerzas actúan sobre un cuerpo en movimiento.
- Cómo calcular las propiedades de una fuerza conservativa conociendo la función de energía potencial correspondiente.
- Cómo emplear diagramas de energía para entender el movimiento rectilíneo de un objeto bajo la influencia de una fuerza conservativa.

Cuando un clavadista se tira de un trampolín a la alberca, golpea el agua rápidamente, con mucha energía cinética. ¿De dónde proviene esa energía? La respuesta que dimos en el capítulo 6 fue que la fuerza gravitacional (su peso) realiza trabajo sobre el clavadista al caer. La energía cinética del clavadista —energía asociada con su *movimiento*— aumenta en una cantidad igual al trabajo realizado.

Sin embargo, hay otra forma muy útil de ver el trabajo y la energía cinética. Este nuevo enfoque se basa en el concepto de *energía potencial*, que es energía asociada a la *posición* de un sistema, no a su movimiento. En este enfoque, hay *energía potencial gravitacional* incluso cuando el clavadista está parado en el trampolín. Al caer, no se agrega energía al sistema Tierra-clavadista, sino que una reserva de energía se *transforma* de una forma (energía potencial) a otra (energía cinética). En este capítulo, veremos cómo puede entenderse esta transformación con el teorema trabajo-energía.

Si el clavadista rebota en el extremo del trampolín antes de saltar, la tabla flexionada almacena otra clase de energía potencial llamada *energía potencial elástica*. Veremos la energía potencial elástica de sistemas sencillos como un resorte estirado o comprimido. (Otra clase importante de energía potencial se asocia a las posiciones relativas de partículas con carga eléctrica. Veremos esto en el capítulo 23.)

Demostraremos que, en algunos casos, la suma de las energías cinética y potencial de un sistema, llamada, *energía mecánica total*, es constante durante el movimiento del sistema. Esto nos llevará al enunciado general de la *ley de conservación de la energía*, que es uno de los principios más fundamentales y trascendentales de la ciencia.

7.1 Cuando un balón de básquetbol desciende, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética y aumenta la rapidez del balón.



7.1 Energía potencial gravitacional

Como vimos en el capítulo 6 una partícula gana o pierde energía cinética porque interactúa con otros objetos que ejercen fuerzas sobre ella. En cualquier interacción, el cambio de energía cinética de una partícula es igual al trabajo total efectuado sobre la partícula por todas las fuerzas que actúan sobre ella.

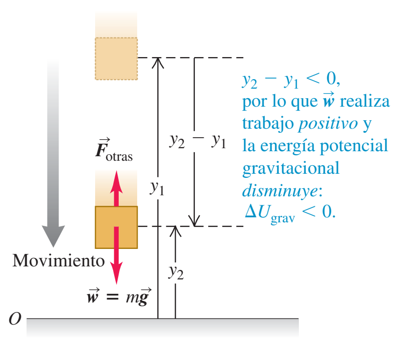
En muchas situaciones, parece que se almacena energía en un sistema para recuperarse después. Por ejemplo, hay que efectuar trabajo para levantar una roca pesada sobre la cabeza. Parece razonable que, al levantar la roca en el aire, se está almacenando energía en el sistema, la cual se convierte después en energía cinética al dejar caer la roca.

Este ejemplo señala a la idea de una energía asociada con la *posición* de los cuerpos en un sistema. Este tipo de energía es una medida del *potencial* o *posibilidad* de efectuar trabajo. Al levantar una roca, existe la posibilidad de que la fuerza de gravitación realice trabajo sobre ella, pero sólo si la roca se deja caer al suelo. Por ello, la energía asociada con la posición se llama **energía potencial**. Lo dicho sugiere que hay energía potencial asociada al peso de un cuerpo y a su altura sobre el suelo: la *energía potencial gravitacional* (figura 7.1).

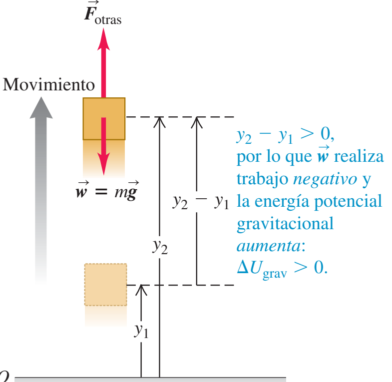
Ahora tenemos *dos* formas de describir lo que sucede cuando un cuerpo cae sin resistencia del aire. Una forma consiste en decir que disminuye la energía potencial gravitacional y aumenta la energía cinética del cuerpo que cae. La otra forma, que vimos en el capítulo 6, es que aumenta la energía cinética de un cuerpo que cae porque la fuerza de gravedad terrestre (el peso del cuerpo) realiza trabajo sobre el cuerpo. Más adelante en esta sección utilizaremos el teorema trabajo-energía para demostrar que estas dos descripciones son equivalentes.

7.2 Cuando un cuerpo se mueve verticalmente de una altura inicial y_1 a una altura final y_2, la fuerza gravitacional $\vec{w}$ efectúa trabajo y cambia la energía potencial gravitacional.

a) Un cuerpo se mueve hacia abajo



b) Un cuerpo se mueve hacia arriba



No obstante, para empezar, deduzcamos la expresión para energía potencial gravitacional. Consideremos un cuerpo de masa m que se mueve en el eje y (vertical), como en la figura 7.2. Las fuerzas que actúan sobre él son su peso, de magnitud $w = mg$, y tal vez otras; llamamos a la suma vectorial (resultante) de todas las otras fuerzas $\vec{F}_{otras}$. Suponemos que el cuerpo permanece tan cerca de la superficie terrestre que el peso es constante. (En el capítulo 12 veremos que el peso disminuye con la altura.) Queremos determinar el trabajo efectuado por el peso cuando el cuerpo cae de una altura y_1 sobre el origen a una altura menor y_2 (figura 7.2a). El peso y el desplazamiento tienen la misma dirección, así que el trabajo W_{grav} efectuado sobre el cuerpo por su peso es positivo;

$$W_{grav} = Fs = w(y_1 - y_2) = mgy_1 - mgy_2 \tag{7.1}$$

Esta expresión también da el trabajo correcto cuando el cuerpo *sube* y y_2 es mayor que y_1 (figura 7.2b). En tal caso, la cantidad $y_1 - y_2$ es negativa y W_{grav} es negativa porque el peso y el desplazamiento tienen direcciones opuestas.

La ecuación (7.1) muestra que podemos expresar W_{grav} en términos de los valores de la cantidad mgy al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad, el producto del peso mg y la altura y sobre el origen de las coordenadas, es la **energía potencial gravitacional**, U_{grav}:

$$U_{grav} = mgy \qquad \text{(energía potencial gravitacional)} \tag{7.2}$$

Su valor inicial es $U_{grav,1} = mgy_1$ y su valor final es $U_{grav,2} = mgy_2$. El cambio en U_{grav} es su valor final menos su valor inicial: $\Delta U_{grav} = U_{grav,2} - U_{grav,1}$. Podemos expresar el trabajo W_{grav} realizado por la fuerza gravitacional durante el desplazamiento de y_1 a y_2 como

$$W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2} = -(U_{grav,2} - U_{grav,1}) = -\Delta U_{grav} \tag{7.3}$$

El signo negativo de ΔU_{grav} es *fundamental.* Cuando el cuerpo sube, y aumenta, el trabajo realizado por la gravedad es negativo y la energía potencial gravitacional aumenta ($\Delta U_{grav} > 0$). Si el cuerpo baja, y disminuye, la gravedad realiza trabajo positivo y la energía potencial gravitacional se reduce ($\Delta U_{grav} < 0$). Es como sacar dinero del banco (reducir U_{grav}) y gastarlo (realizar trabajo positivo). Como muestra la ecuación (7.3), la unidad de energía potencial es el joule (J), la misma del trabajo.

CUIDADO **¿A qué cuerpo "pertenece" la energía potencial gravitacional?** *No* es correcto llamar a $U_{grav} = mgy$ la "energía potencial gravitacional del cuerpo", ya que la energía potencial gravitacional U_{grav} es una propiedad *compartida* del cuerpo y la Tierra. El valor de U_{grav} aumenta si la Tierra permanece fija y la altura aumenta; también aumenta si el cuerpo está fijo en el espacio y la Tierra se aleja de él. Observe que en la fórmula $U_{grav} = mgy$ intervienen características tanto del cuerpo (su masa m) como de la Tierra (el valor de g).

Conservación de la energía mecánica (sólo fuerzas gravitacionales)

Si quiere ver para qué sirve la energía potencial gravitacional, suponga que el peso del cuerpo es la *única* fuerza que actúa sobre él: $\vec{F}_{otras} = \mathbf{0}$. Entonces, el cuerpo cae libremente sin resistencia del aire, y podría estar subiendo o bajando. Sea v_1 su rapidez en y_1, y v_2 en y_2. El teorema trabajo-energía, ecuación (6.6), indica que el trabajo total efectuado sobre el cuerpo es igual al cambio en su energía cinética; $W_{tot} = \Delta K = K_2 - K_1$. Si la gravedad es la única fuerza que actúa, entonces, por la ecuación (7.3), $W_{tot} = W_{grav} = -\Delta U_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$. Juntando esto,

$$\Delta K = -\Delta U_{grav} \qquad \text{o bien,} \qquad K_2 - K_1 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

que podemos reescribir como

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2} \qquad \text{(si sólo la gravedad realiza trabajo)} \qquad (7.4)$$

o bien

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad \text{(si sólo la gravedad realiza trabajo)} \quad (7.5)$$

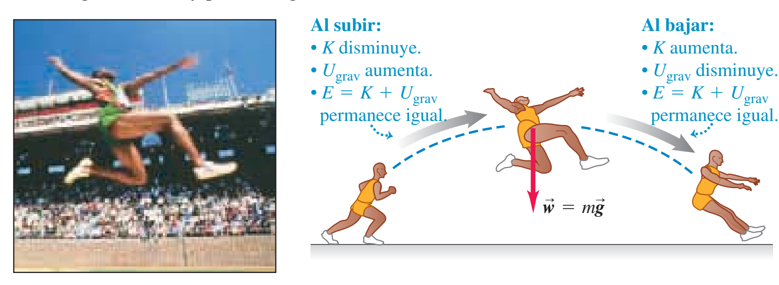
Ahora definimos la suma $K + U_{grav}$ de las energías cinética y potencial como E, la **energía mecánica total del sistema**. Por "sistema" nos referimos al cuerpo de masa m y la Tierra considerados juntos, porque la energía potencial gravitacional U es una propiedad compartida de ambos cuerpos. Así, $E_1 = K_1 + U_{grav,1}$ es la energía mecánica total en y_1 y $E_2 = K_2 + U_{grav,2}$ es la energía mecánica total en y_2. La ecuación (7.4) dice que, cuando el peso del cuerpo es la única fuerza que realiza trabajo sobre él, $E_1 = E_2$. Es decir, E es constante; tiene el mismo valor en y_1 que en y_2. No obstante, dado que las posiciones y_1 y y_2 son puntos arbitrarios en el movimiento del cuerpo, la energía mecánica total E tiene el mismo valor en *todos* los puntos durante el movimiento;

$$E = K + U_{grav} = \text{constante} \qquad \text{(si sólo la gravedad efectúa trabajo)}$$

Una cantidad que siempre tiene el mismo valor es una cantidad que *se conserva. Si sólo la fuerza de gravedad efectúa trabajo, la energía mecánica total es constante, es decir, se conserva* (figura 7.3). Éste es nuestro primer ejemplo de la **conservación de la energía mecánica**.

Cuando lanzamos una pelota al aire, su rapidez disminuye al subir, a medida que la energía cinética se convierte en energía potencial: $\Delta K < 0$ y $\Delta U_{grav} > 0$. Al bajar, la energía potencial se convierte en cinética y la rapidez de la pelota aumenta: $\Delta K > 0$ y $\Delta U_{grav} < 0$. No obstante, la energía mecánica *total* (cinética más potencial) es la misma en todos los puntos del movimiento, siempre que ninguna otra fuerza realice trabajo sobre la pelota (la resistencia del aire debe ser insignificante).

7.3 Mientras el atleta está en el aire, sólo la gravedad efectúa trabajo sobre él (si despreciamos los efectos menores de la resistencia del aire). La energía mecánica (la suma de las energías cinética y potencial gravitacional) se conserva.





5.2 Frenado de un elevador que asciende
5.3 Frenado de un elevador que baja
5.6 Rapidez de un esquiador

Sigue siendo verdad que la fuerza gravitacional efectúa trabajo sobre el cuerpo al subir o bajar éste, pero ya no tenemos que calcularlo directamente; basta ver cómo cambia el valor de U_{grav}.

CUIDADO **Elija "altura cero" siempre que desee** En lo que se refiere a la energía potencial gravitacional, quizá elijamos la altura como $y = 0$. Si desplazamos el origen de y, los valores de y_1 y y_2 cambiarán, al igual que los valores de $U_{grav,1}$ y $U_{grav,2}$; sin embargo, tal cambio no tiene efecto en la *diferencia* del peso $y_2 - y_1$ ni en la *diferencia* de la energía potencial gravitacional $U_{grav,2} - U_{grav,1} = mg(y_2 - y_1)$. Como veremos en el siguiente ejemplo, la cantidad que tiene importancia física no es el valor de U_{grav} en cierto punto, sino la *diferencia* en U_{grav} entre 2 puntos. Así, podemos definir U_{grav} como cero en cualquier punto sin afectar la física de la situación.

Ejemplo 7.1 Altura de una pelota por conservación de la energía

Usted lanza una pelota de béisbol con masa de 0.145 kg hacia arriba, dándole una velocidad inicial hacia arriba de 20.0 m/s. Determine qué altura alcanza, despreciando la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez en el aire, la única fuerza que actúa sobre la pelota es la gravedad; por lo tanto, podemos usar la conservación de la energía mecánica.

PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (7.4) y (7.5); el punto 1 será el punto en que la bola sale de la mano, y el punto 2 donde la pelota alcanza su altura máxima. Al igual que en la figura 7.2, elegimos el eje $+y$ que apunta verticalmente hacia arriba. La rapidez de la pelota en el punto 1 es $v_1 = 20.0$ m/s. La pelota está instantáneamente en reposo en el punto más alto de su movimiento, así que $v_2 = 0$.

La incógnita es la distancia que la pelota se mueve verticalmente entre estos dos puntos, es decir, el desplazamiento $y_2 - y_1$. Si colocamos el origen donde la pelota sale de la mano (punto 1), entonces, $y_1 = 0$ (figura 7.4) y la incógnita es simplemente y_2.

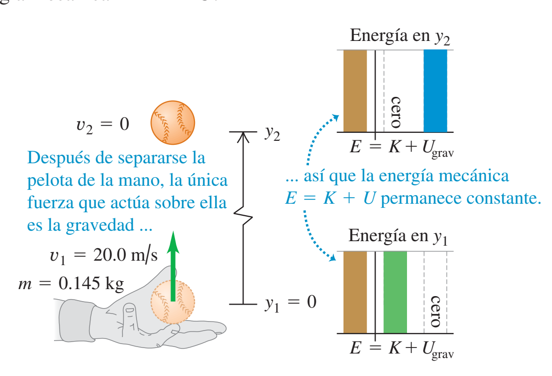
EJECUTAR: Puesto que $y_1 = 0$, la energía potencial en el punto 1 es $U_{grav,1} = mgy_1 = 0$. Además, dado que la pelota está en reposo en el punto 2, la energía cinética en ese punto es $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0$. Así que la ecuación (7.4), que dice que $K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$, se convierte en

$$K_1 = U_{grav,2}$$

Como se ve en las gráficas de barras de energía de la figura 7.4, la energía cinética de la pelota en el punto 1 se convierte totalmente en energía potencial gravitacional en el punto 2. En el punto 1, la energía cinética es

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(0.145\text{ kg})(20.0\text{ m/s})^2 = 29.0\text{ J}$$

7.4 Después de que la pelota sale de la mano, se conserva la energía mecánica $E = K + U$.



y es igual a la energía potencial $U_{grav,2} = mgy_2$ en el punto 2, así que

$$y_2 = \frac{U_{grav,2}}{mg} = \frac{29.0\text{ J}}{(0.145\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)} = 20.4\text{ m}$$

También podemos resolver $K_1 = U_{grav,2}$ algebraicamente despejando y_2:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2$$

$$y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(20.0\text{ m/s})^2}{2(9.80\text{ m/s}^2)} = 20.4\text{ m}$$

EVALUAR: La masa se elimina, como esperábamos; en el capítulo 2 vimos que el movimiento de un cuerpo en caída libre no depende de su masa. De hecho, podríamos haber deducido el resultado $y_2 = v_1^2/2g$ utilizando la ecuación (2.13).

Al realizar el cálculo, elegimos el origen en el punto 1, de modo que $y_1 = 0$ y $U_{grav,1} = 0$. ¿Qué pasa si elegimos otro origen? Suponga que lo colocamos 5.0 m debajo del punto 1, de modo que $y_1 = 5.0$ m. Entonces, la energía mecánica total en el punto 1 será en parte cinética y en parte potencial; no obstante, en el punto 2 será puramente potencial. Si realiza de nuevo el cálculo usando este origen, obtendrá $y_2 = 25.4$ m, esto es, 20.4 m sobre el punto 1, igual que con el primer origen. En cualquier problema similar, corresponde a usted elegir la altura donde $U_{grav} = 0$; no se rompa la cabeza, porque la física de la respuesta no depende de su decisión.

Cuando realizan trabajo otras fuerzas distintas de la gravedad

Si otras fuerzas actúan sobre el cuerpo además de su peso, entonces $\vec{F}_{otras}$ de la figura 7.2 *no* es cero. En el caso del martinete del ejemplo 6.4 (sección 6.2), la fuerza aplicada por el cable y la fricción de las guías verticales son ejemplos de fuerzas que podrían estar incluidas en $\vec{F}_{otras}$. El trabajo gravitacional W_{grav} aún está dado por la ecuación (7.3), pero el trabajo total W_{tot} es la suma de W_{grav} y el trabajo de $\vec{F}_{otras}$. Llamamos a este trabajo adicional W_{otras}, de modo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas es $W_{tot} = W_{grav} + W_{otras}$. Igualando esto al cambio de energía cinética, tenemos

$$W_{otras} + W_{grav} = K_2 - K_1 \tag{7.6}$$

Además, por la ecuación (7.3), $W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$, así que

$$W_{otras} + U_{grav,1} - U_{grav,2} = K_2 - K_1$$

que podemos reacomodar así:

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2} \quad \text{(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)} \tag{7.7}$$

Por último, usando las expresiones adecuadas para los distintos términos de energía:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + W_{otras} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad \text{(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)} \tag{7.8}$$

El significado de las ecuaciones (7.7) y (7.8) es que *el trabajo realizado por todas las fuerzas* distintas de la fuerza gravitacional *es igual al cambio en la energía mecánica total* $E = K + U_{grav}$ *del sistema, donde* U_{grav} *es la energía potencial gravitacional. Si* W_{otras} es positivo, E aumenta y $(K_2 + U_{grav,2}) > (K_1 + U_{grav,1})$. Si W_{otras} es negativo, E disminuye (figura 7.5). En el caso especial en que sólo el peso del cuerpo realiza trabajo, $W_{otras} = 0$. Entonces, la energía mecánica total es constante, y volvemos a la ecuación (7.4) o (7.5).

7.5 Conforme este paracaidista va cayendo, la fuerza hacia arriba de la resistencia del aire realiza trabajo negativo W_{otras} sobre él. Por lo tanto, disminuye la energía mecánica total $E = K + U$: la rapidez y la energía cinética K del paracaidista permanecen iguales, en tanto que disminuye la energía potencial gravitacional U.



Estrategia para resolver problemas 7.1 — Problemas donde se utiliza energía mecánica I



IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Decida si conviene resolver el problema con métodos de energía, usando $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ directamente, o con una combinación de estrategias. El enfoque de energía es muy útil si el problema implica movimiento con fuerzas variables, en una trayectoria curva (que veremos más adelante) o ambas cuestiones. Si el problema implica tiempo transcurrido, el enfoque de energía *no* suele ser el mejor porque en él no interviene el tiempo directamente.

PLANTEAR *el problema* utilizando los siguientes pasos:

1. Si usa el enfoque de energía, primero decida cuáles son los estados inicial y final (posiciones y velocidades) del sistema. Use el subíndice 1 para el estado inicial y el subíndice 2 para el estado final. Resulta útil hacer dibujos que muestren los estados inicial y final.
2. Defina su sistema de coordenadas, sobre todo el nivel donde $y = 0$. Esto le servirá para calcular las energías potenciales gravitacionales. La ecuación (7.2) supone que la dirección $+y$ es hacia arriba; le sugerimos tomar esa decisión de forma consistente.
3. Identifique todas las fuerzas que efectúen trabajo que no puedan describirse en términos de energía potencial. (Por ahora, esto significa cualesquiera fuerzas no gravitacionales. Sin embargo, más adelante en este capítulo veremos que el trabajo efectuado por un resorte ideal también puede expresarse como un cambio en la energía potencial.) Los diagramas de cuerpo libre siempre son útiles.

continúa

4. Elabore una lista de las cantidades conocidas e incógnitas, incluyendo las coordenadas y las velocidades en cada punto. Decida qué incógnitas resolverá.

EJECUTAR *la solución:* Escriba expresiones para las energías cinéticas y potenciales iniciales y finales (K_1, K_2, $U_{grav,1}$ y $U_{grav,2}$). Relacione después las energías cinética y potencial y el trabajo efectuado por otras fuerzas, W_{otras}, usando la ecuación (7.7). (Tendrá que calcular W_{otras} en términos de tales fuerzas.) Si ninguna otra fuerza realiza trabajo, esta expresión se vuelve la ecuación (7.4). Es conveniente dibujar gráficas de barras que muestran los valores iniciales y finales de K, U_{grav} y $E = K + U$. Despeje la incógnita requerida.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique si su respuesta es lógica físicamente. Tenga presente, aquí y más adelante, que el trabajo efectuado por cada fuerza debe estar representado en $U_{grav,1} - U_{grav,2} = -\Delta U_{grav}$, o bien, en W_{otras}; pero *nunca* en ambos. El trabajo gravitacional está incluido en ΔU_{grav}, así que tenga cuidado de no incluirlo otra vez en W_{otras}.

Ejemplo 7.2 Trabajo y energía al lanzar una pelota de béisbol

En el ejemplo 7.1, suponga que la mano sube 0.50 m al lanzar la pelota, la cual, al salir de la mano, tiene una velocidad hacia arriba de 20.0 m/s. Otra vez ignore la resistencia del aire. *a*) Suponiendo que su mano ejerce una fuerza constante hacia arriba sobre la pelota, calcule la magnitud de esa fuerza. *b*) Calcule la rapidez de la pelota en un punto 15.0 m arriba del punto de donde salió de la mano.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 7.1, usamos la conservación de la energía mecánica porque sólo la gravedad efectuaba trabajo. En este ejemplo, en cambio, debemos incluir también el trabajo no gravitacional efectuado por la mano.

PLANTEAR: La figura 7.6 muestra un diagrama de la situación, incluyendo un diagrama de cuerpo libre de la pelota al ser lanzada. Sea el punto 1 el punto donde la mano inicia su movimiento, el punto 2 donde la pelota sale de la mano, y el punto 3 donde la pelota está 15.0 m arriba del punto 2. La fuerza no gravitacional de su mano $\vec{F}$ sólo actúa entre los puntos 1 y 2. Utilizando el mismo sistema de coordenadas que en el ejemplo 7.1, tenemos $y_1 = -0.50$ m, $y_2 = 0$ y $y_3 = 15.0$ m.

7.6 a) Aplicación de las nociones de energía al lanzamiento vertical de una pelota hacia arriba. b) Diagrama de cuerpo libre de la pelota al lanzarla.

La pelota parte del reposo en el punto 1, así que $v_1 = 0$, y nos dicen que la rapidez con que la pelota sale de la mano es $v_2 = 20.0$ m/s. Las incógnitas son *a*) la magnitud F de la fuerza que la mano aplica y *b*) la rapidez v_3 en el punto 3.

EJECUTAR: *a*) Para determinar la magnitud de $\vec{F}$, primero usaremos la ecuación (7.7) al calcular el trabajo W_{otras} efectuado por esa fuerza. Tenemos

$$K_1 = 0$$
$$U_{grav,1} = mgy_1 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-0.50 \text{ m}) = -0.71 \text{ J}$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(0.145 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})^2 = 29.0 \text{ J}$$
$$U_{grav,2} = mgy_2 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0) = 0$$

La energía potencial inicial $U_{grav,1}$ es *negativa* porque la pelota inicialmente estaba abajo del origen. (No se preocupe de tener una energía potencial que sea menor que cero. Recuerde que lo importante es la *diferencia* en energía potencial de un punto al otro.) Por la ecuación (7.7), $K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$, así que

$$W_{otras} = (K_2 - K_1) + (U_{grav,2} - U_{grav,1})$$
$$= (29.0 \text{ J} - 0) + (0 - (-0.71 \text{ J})) = 29.7 \text{ J}$$

La energía cinética de la pelota aumenta en $K_2 - K_1 = 29.0$ J, y la energía potencial aumenta en $U_{grav,2} - U_{grav,1} = 0.71$ J; la suma es $E_2 - E_1$, el cambio en la energía mecánica total, que es igual a W_{otras}.

Suponiendo que la fuerza $\vec{F}$ hacia arriba aplicada por la mano es constante, el trabajo W_{otras} efectuado por esta fuerza es igual a la magnitud F de la fuerza multiplicada por el desplazamiento hacia arriba $y_2 - y_1$ en el que actúa:

$$W_{otras} = F(y_2 - y_1)$$
$$F = \frac{W_{otras}}{y_2 - y_1} = \frac{29.7 \text{ J}}{0.50 \text{ m}} = 59 \text{ N}$$

Esto es unas 40 veces más que el peso de la pelota.

b) Para obtener la rapidez en el punto 3, tomamos nota de que, entre los puntos 2 y 3, se conserva la energía mecánica total; la fuerza de la mano ya no actúa, así que $W_{otras} = 0$. Podemos calcular la energía cinética en el punto 3 mediante la ecuación (7.4):

$$K_2 + U_{grav,2} = K_3 + U_{grav,3}$$
$$U_{grav,3} = mgy_3 = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(15.0 \text{ m}) = 21.3 \text{ J}$$
$$K_3 = (K_2 + U_{grav,2}) - U_{grav,3}$$
$$= (29.0 \text{ J} + 0 \text{ J}) - 21.3 \text{ J} = 7.7 \text{ J}$$

Dado que $K_3 = \frac{1}{2}mv_{3y}^2$, donde v_{3y} es la componente y de la velocidad de la pelota en el punto 3, tenemos

$$v_{3y} = \pm\sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(7.7\ \text{J})}{0.145\ \text{kg}}} = \pm 10\ \text{m/s}$$

El significado del signo más o del menos es que la pelota pasa *dos veces* por el punto 3, una vez de subida y otra de bajada. La energía mecánica total E es constante e igual a 29.0 J mientras la pelota está en caída libre, y la energía potencial en el punto 3 es $U_{grav,3} = 21.3$ J, sea que la pelota esté subiendo o bajando. Así, en el punto 3 la energía cinética K_3 y la *rapidez* de la pelota no dependen de la dirección del movimiento de la pelota. La velocidad v_{3y} es positiva (+10 m/s) cuando la pelota sube, y negativa (−10 m/s) cuando baja; la rapidez v_3 es de 10 m/s en ambos casos.

EVALUAR: Para comprobar el resultado, recordemos que en el ejemplo 7.1, la pelota alcanza una altura máxima de $y = 20.4$ m. En ese punto, toda la energía cinética que la pelota tenía cuando salió de la mano en $y = 0$ ya se convirtió en energía potencial gravitacional. En $y = 15.0$, la pelota está a tres cuartas partes del camino hacia su altura máxima, así que unas tres cuartas partes de su energía mecánica deberían estar en forma de energía potencial. (Esto se muestra en la gráfica de barras de la energía en la figura 7.6a.) ¿Puede demostrar que es así, con base en los valores obtenidos para K_3 y $U_{grav,3}$?

Energía potencial gravitacional para movimiento en una trayectoria curva

En nuestros primeros dos ejemplos, el cuerpo se movió en una trayectoria vertical recta. ¿Qué sucede si la trayectoria es inclinada o curva (figura 7.7a)? Sobre el cuerpo actúa la fuerza gravitacional $\vec{w} = m\vec{g}$ y tal vez otras fuerzas cuya resultante llamamos $\vec{F}_{otras}$. Para calcular el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional durante este desplazamiento, dividimos la trayectoria en segmentos pequeños $\Delta\vec{s}$; un segmento típico se muestra en la figura 7.7b. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre este segmento es el producto escalar de la fuerza y el desplazamiento. En términos de vectores unitarios, la fuerza es $\vec{w} = m\vec{g} = -mg\hat{j}$ y el desplazamiento es $\Delta\vec{s} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{j}$, así que el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es

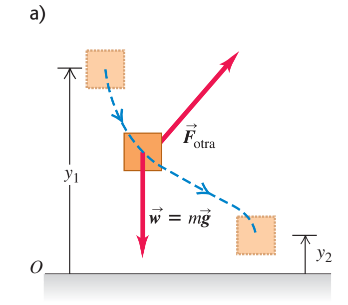
$$\vec{w}\cdot\Delta\vec{s} = -mg\hat{j}\cdot(\Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{j}) = -mg\Delta y$$

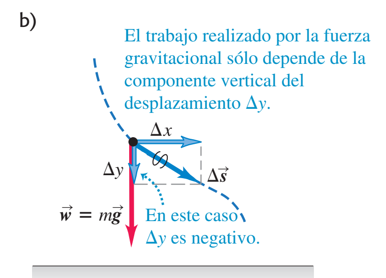
El trabajo efectuado por la gravedad es el mismo que si el cuerpo se hubiera desplazado verticalmente una distancia Δy, sin desplazamiento horizontal. Esto se cumple para cada segmento, así que el trabajo *total* efectuado por la fuerza gravitacional es $-mg$ multiplicado por el desplazamiento vertical *total* $(y_2 - y_1)$:

$$W_{grav} = -mg(y_2 - y_1) = mgy_1 - mgy_2 = U_{grav,1} - U_{grav,2}$$

Esto es igual a la ecuación (7.1) o (7.3), donde se supuso una trayectoria completamente vertical. Así que, aun si la trayectoria de un cuerpo entre dos puntos es curva, el trabajo total efectuado por la gravedad depende sólo de la diferencia de altura entre esos dos puntos. Este trabajo no se ve afectado por ningún movimiento horizontal que pueda darse. Por lo tanto, *podemos usar la misma expresión para la energía potencial gravitacional, sea la trayectoria del cuerpo recta o curva.*

7.7 Cálculo del cambio en energía potencial gravitacional para un desplazamiento a lo largo de una trayectoria curva.





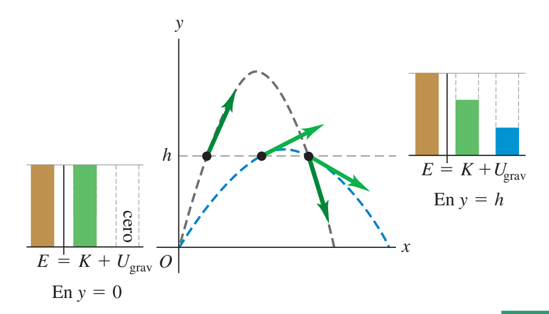
Ejemplo conceptual 7.3 Energía en el movimiento de proyectiles

Se batean dos pelotas de béisbol idénticas con la misma rapidez y altura iniciales pero distintos ángulos iniciales. Demuestre que, a una altura dada h, ambas pelotas tienen la misma rapidez si puede despreciarse la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

Si no hay resistencia del aire, la única fuerza que actúa sobre cada pelota después de ser bateada es su peso, así que la energía mecánica total de cada pelota es constante. La figura 7.8 muestra las trayectorias de dos pelotas bateadas a la misma altura con la misma rapidez inicial y, por lo tanto, la misma energía mecánica total, pero con diferentes ángulos iniciales. En todos los puntos con la misma altura, la energía potencial es la misma. Entonces, la energía cinética a esta altura debe ser igual para ambas pelotas y su rapidez es idéntica.

7.8 Para la misma rapidez y altura iniciales, la rapidez de un proyectil a una altura dada h siempre es la misma, si se desprecia la resistencia del aire.



Ejemplo 7.4 Cálculo de rapidez en un círculo vertical

Imagine que su primo Morton baja en patineta por una rampa curva en un parque. Tratando a Morton y a su patineta como una partícula, ésta describe un cuarto de círculo de radio $R = 3.00$ m (figura 7.9). La masa total de Morton y su patineta es de 25.0 kg. Él parte del reposo y no hay fricción. *a*) Calcule su rapidez en la base de la rampa. *b*) Obtenga la fuerza normal que actúa sobre él en la base de la rampa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: No podemos usar las ecuaciones de aceleración constante, porque la aceleración de Morton no es constante; la pendiente disminuye a medida que él desciende. En vez de ello, usaremos el enfoque de energía. Puesto que Morton se mueve en un arco circular, también usaremos lo que aprendimos acerca del movimiento circular en la sección 5.4.

PLANTEAR: Puesto que no hay fricción, la única fuerza además del peso de Morton es la fuerza normal $\vec{n}$ ejercida por la rampa (figura 7.9b). Aunque esta fuerza actúa en toda la trayectoria, *no* efectúa trabajo porque $\vec{n}$ siempre es perpendicular al desplazamiento de Morton. Así, $W_{otras} = 0$ y se conserva la energía mecánica.

Llamemos 1 al punto de partida, y 2 a la base de la rampa curva, y sea $y = 0$ en la base (figura 7.9a). Entonces, $y_1 = R$ y $y_2 = 0$. (Estamos tratando a Morton como si toda su masa estuviera concentrada en su centro.) Morton parte del reposo en el tope, así que $v_1 = 0$. La incógnita en el inciso *a*) es su rapidez en la base, v_2. En el inciso *b*), nos interesa encontrar la magnitud n de la fuerza normal en el punto 2. Puesto que esta fuerza no efectúa trabajo, no aparece en la ecuación de energía, así que ahora usaremos la segunda ley de Newton.

EJECUTAR: *a*) Las diferentes energías son

$$K_1 = 0 \qquad U_{grav,1} = mgR$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad U_{grav,2} = 0$$

Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$
$$v_2 = \sqrt{2gR}$$
$$= \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m})} = 7.67\ \text{m/s}$$

Cabe señalar que esta respuesta no depende de que la rampa sea circular; sea cual fuere la forma de la rampa, Morton tendrá la misma rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en la base. Esto se cumpliría aunque las ruedas de su patineta perdieran contacto con la rampa durante la bajada, porque la fuerza gravitacional seguiría siendo la única que efectúa trabajo. De hecho, la rapidez es la misma que si Morton hubiera caído verticalmente una altura R. La respuesta también es independiente de su masa.

b) Para obtener n en el punto 2 empleando la segunda ley de Newton, necesitamos el diagrama de cuerpo libre en ese punto (figura 7.9b). En el punto 2, Morton se mueve con rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en un círculo de radio R; su aceleración es hacia el centro del círculo y tiene magnitud

$$a_{rad} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

Si tomamos la dirección $+y$ hacia arriba, la componente y de la segunda ley de Newton es

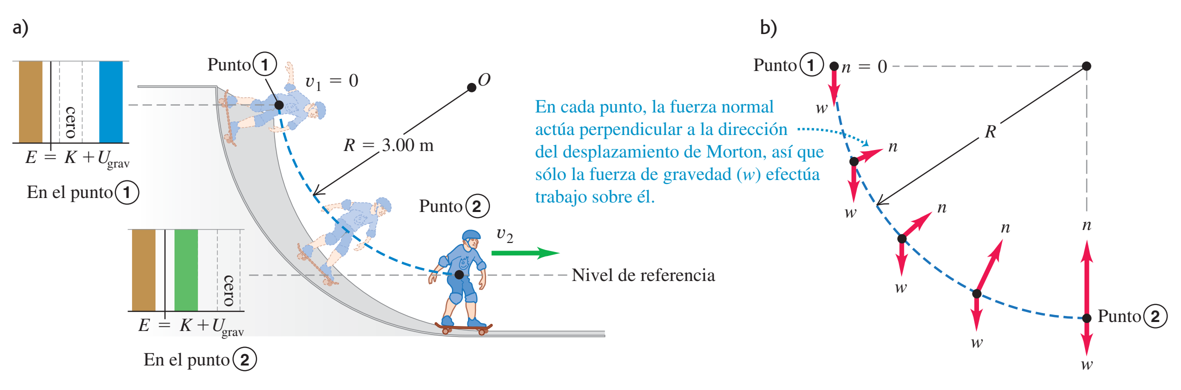
$$\sum F_y = n + (-w) = ma_{rad} = 2mg$$
$$n = w + 2mg = 3mg$$
$$= 3(25.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 735\ \text{N}$$

En el punto 2, la fuerza normal es el triple del peso de Morton. Este resultado es independiente del radio de la rampa circular. En los ejemplos 5.9 (sección 5.2) y 5.24 (sección 5.4) aprendimos que la magnitud de n es el *peso aparente*, así que Morton sentirá como si tuviera tres veces su peso real mg. Sin embargo, tan pronto como llegue a la parte horizontal de la rampa a la derecha del punto 2, la fuerza normal bajará a $w = mg$, y Morton se sentirá normal otra vez. ¿Entiende por qué?

EVALUAR: Este ejemplo ilustra una regla general acerca del papel de las fuerzas en problemas en que usamos técnicas de energía: lo que importa no es sólo si *actúa* una fuerza, sino si *efectúa trabajo*. Si la fuerza no efectúa trabajo, como en el caso de la fuerza normal $\vec{n}$ en este ejemplo, no aparece en la ecuación (7.7), $K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$.

Observe que tuvimos que usar *tanto* el enfoque de energía *como* la segunda ley de Newton para resolver este problema: la conservación de energía nos dio la rapidez, y $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ nos dio la fuerza normal. En cada parte del problema, usamos la técnica que más fácilmente nos lleva a la respuesta.

7.9 a) Morton baja en patineta por una rampa circular sin fricción. La energía mecánica total es constante. b) Diagramas de cuerpo libre de Morton y su patineta en varios puntos de la rampa.



Ejemplo 7.5 Círculo vertical con fricción

En el ejemplo 7.4, suponga que la rampa tiene fricción y la rapidez de Morton en la base es de sólo 6.00 m/s. ¿Qué trabajo efectuó la fuerza de fricción sobre él?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 7.10 muestra que de nuevo la fuerza normal no efectúa trabajo, pero ahora hay una fuerza de fricción $\vec{f}$ que *sí* realiza trabajo. Entonces, el trabajo que no es gravitacional efectuado sobre Morton entre los puntos 1 y 2, W_{otras}, no es cero.

PLANTEAR: Usamos el mismo sistema de coordenadas y los mismos puntos inicial y final que en el ejemplo 7.4 (figura 7.10). Nuestra incógnita es el trabajo realizado por la fricción, W_f; puesto que la fricción es la única fuerza distinta de la gravedad que efectúa trabajo, esto es igual a W_{otras}. Obtendremos W_f con la ecuación (7.7).

EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = 0$$

$$U_{grav,1} = mgR = (25.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(3.00\text{ m}) = 735\text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(25.0\text{ kg})(6.00\text{ m/s})^2 = 450\text{ J}$$

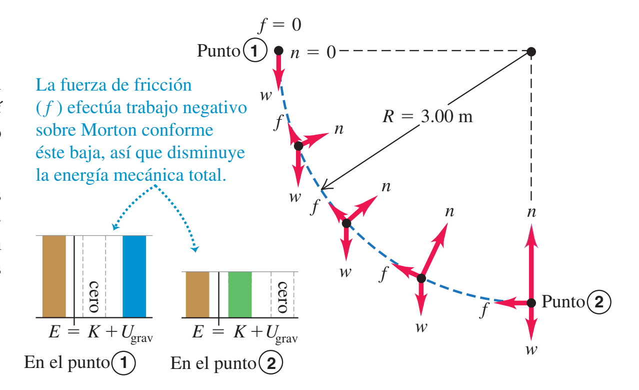
$$U_{grav,2} = 0$$

Por la ecuación (7.7),

$$W_f = K_2 + U_{grav,2} - K_1 - U_{grav,1}$$
$$= 450\text{ J} + 0 - 0 - 735\text{ J} = -285\text{ J}$$

El trabajo efectuado por la fuerza de fricción es -285 J, y la energía mecánica total *disminuye* en 285 J. ¿Entiende por qué W_f debe ser negativo?

7.10 Diagrama de cuerpo libre y gráfica de barras de la energía, para Morton bajando en patineta por una rampa con fricción.



EVALUAR: El movimiento de Morton está determinado por la segunda ley de Newton, $\sum\vec{F} = m\vec{a}$. Pero sería muy difícil aplicar esta ley directamente al problema, porque las fuerzas normal y de fricción, así como la aceleración, están cambiando continuamente de magnitud y dirección conforme Morton baja. El enfoque de energía, en cambio, relaciona los movimientos en el tope y la base de la rampa, sin implicar los pormenores de lo que sucede en medio. Muchos problemas son fáciles si usamos consideraciones de energía, y muy complejos, si intentamos usar directamente las leyes de Newton.

Ejemplo 7.6 Plano inclinado con fricción

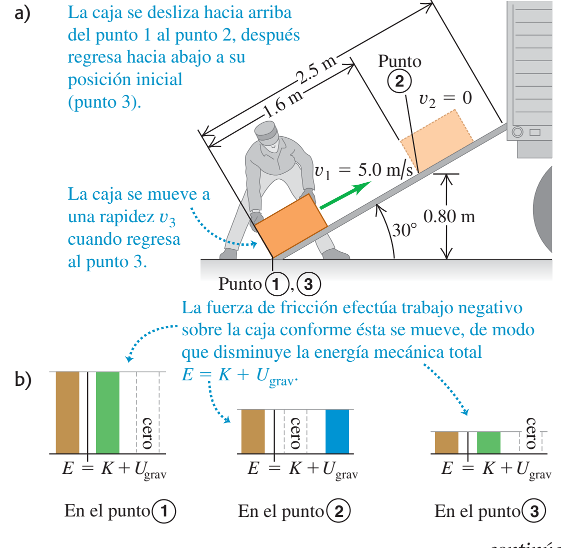
Queremos subir una caja de 12 kg a un camión deslizándola por una rampa de 2.5 m inclinada 30°. Un obrero, sin considerar la fricción, calcula que puede subir la caja por la rampa dándole una rapidez inicial de 5.0 m/s con un empujón en la base. Sin embargo, la fricción *no* es despreciable; la caja sube 1.6 m por la rampa, se para y se desliza de regreso (figura 7.11). *a*) Suponiendo que la fuerza de fricción que actúa sobre la caja es constante, calcule su magnitud. *b*) Qué rapidez tiene la caja al volver a la base de la rampa?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza de fricción efectúa trabajo sobre la caja mientras ésta se desliza. Igual que en el ejemplo 7.2, con el enfoque de energía del inciso *a*) obtendremos la magnitud de la fuerza no gravitacional que efectúa trabajo (en este caso la fricción). En el inciso *b*) podremos calcular cuánto trabajo no gravitacional efectúa esa fuerza mientras la caja se desliza rampa abajo. Entonces podremos usar el enfoque de energía otra vez para obtener la rapidez de la caja en la base de la rampa.

PLANTEAR: La primera parte del movimiento es del punto 1, la base de la rampa, al punto 2, donde la caja se para instantáneamente. En la segunda parte del movimiento, la caja vuelve a la base de la rampa, que llamaremos punto 3 (figura 7.11a). Tomaremos $y = 0$ (y, por

7.11 a) Una caja sube deslizándose por una rampa, se para y se desliza de regreso. b) Gráficas de barras de la energía para los puntos 1, 2 y 3.



continúa

lo tanto, $U_{grav} = 0$) en el piso, así que $y_1 = 0$, $y_2 = (1.6\text{ m})$ sen $30° = 0.80$ m, y $y_3 = 0$. Nos dicen que $v_1 = 5.0$ m/s y $v_2 = 0$ (la caja está instantáneamente en reposo en el punto 2). La incógnita en el inciso *a*) es *f*, la magnitud de la fuerza de fricción. En el inciso *b*), la incógnita es v_3, la rapidez en la base de la rampa.

EJECUTAR: *a*) Las energías son

$$K_1 = \frac{1}{2}(12\text{ kg})(5.0\text{ m/s})^2 = 150\text{ J}$$
$$U_{grav,1} = 0$$
$$K_2 = 0$$
$$U_{grav,2} = (12\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(0.80\text{ m}) = 94\text{ J}$$
$$W_{otras} = -fs$$

donde *f* es la magnitud desconocida de la fuerza de fricción y $s = 1.6$ m. Con la ecuación (7.7), obtenemos

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$W_{otras} = -fs = (K_2 + U_{grav,2}) - (K_1 + U_{grav,1})$$
$$f = -\frac{(K_2 + U_{grav,2}) - (K_1 + U_{grav,1})}{s}$$
$$= -\frac{(0 + 94\text{ J}) - (150\text{ J} + 0)}{1.6\text{ m}} = 35\text{ N}$$

La fuerza de fricción de 35 N, actuando a lo largo de 1.6 m, reduce la energía mecánica de la caja de 150 J a 94 J (figura 7.11c).

b) Al bajar del punto 2 al punto 3 en la base de la rampa, tanto la fuerza de fricción como el desplazamiento invierten su dirección pero tienen las mismas magnitudes, así que el trabajo por fricción tiene el mismo valor negativo cuando va del punto 1 al punto 2. El trabajo total efectuado por la fricción entre los puntos 1 y 3 es

$$W_{otras} = W_{fric} = -2fs = -2(35\text{ N})(1.6\text{ m}) = -112\text{ J}$$

Del inciso *a*), $K_1 = 150$ J y $U_{grav,1} = 0$. La ecuación (7.7) da, entonces,

$$K_1 + U_{grav,1} + W_{otras} = K_3 + U_{grav,3}$$
$$K_3 = K_1 + U_{grav,1} - U_{grav,3} + W_{otras}$$
$$= 150\text{ J} + 0 - 0 + (-112\text{ J}) = 38\text{ J}$$

La caja vuelve a la base de la rampa con sólo 38 J de los 150 J originales de energía mecánica (figura 7.11b). Usando $K_3 = \frac{1}{2}mv_3^2$,

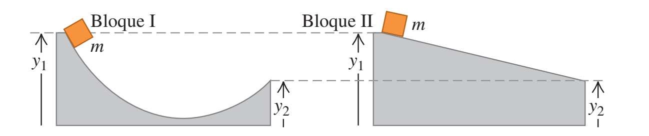
$$v_3 = \sqrt{\frac{2K_3}{m}} = \sqrt{\frac{2(38\text{ J})}{12\text{ kg}}} = 2.5\text{ m/s}$$

EVALUAR: Observe que la rapidez de la caja cuando regresa a la base de la rampa, $v_3 = 2.5$ m/s, es menor que la rapidez $v_1 = 5.0$ m/s con que salió de ese punto. Eso está bien: se perdió energía debido a la fricción.

En el inciso *b*) aplicamos la ecuación (7.7) a los puntos 1 y 3, considerando el viaje redondo en conjunto. De forma alternativa, podríamos haber considerado la segunda parte del movimiento por sí mismo y aplicado la ecuación (7.7) a los puntos 2 y 3. Inténtelo y sabrá si obtiene el mismo resultado para v_3.

Evalúe su comprensión de la sección 7.1 La figura muestra dos rampas distintas sin fricción. Las alturas y_1 y y_2 son iguales en cada rampa. Si un bloque con masa *m* se suelta del reposo en el extremo izquierdo de cada rampa, ¿cuál bloque tendrá mayor rapidez al llegar al extremo derecho? i) el bloque I; ii) el bloque II; iii) la rapidez es la misma para ambos bloques.

MP





7.12 El tendón de Aquiles, que va de la parte de atrás del tobillo al hueso del talón, actúa como un resorte natural. Cuando se estira y luego se relaja, el tendón almacena y después libera energía potencial elástica. Esta acción de resorte reduce el trabajo que al correr deben efectuar los músculos de la pierna.

7.2 Energía potencial elástica

Hay muchas situaciones donde encontramos energía potencial que no sea de naturaleza gravitacional. Un ejemplo es la banda de hule de una resortera. El trabajo es efectuado por la fuerza que estira la banda, y ese trabajo se almacena hasta en la banda hasta que ésta se suelta. Entonces, la banda imparte energía cinética al proyectil.

Éste es el mismo patrón que vimos en el martinete de la sección 7.1: efectuar trabajo sobre el sistema para almacenar energía, que después se convierte en energía cinética. Describiremos el proceso de almacenar energía en un cuerpo deformable, como un resorte o una banda de hule, en términos de *energía potencial elástica* (figura 7.12). Un cuerpo es *elástico* si recupera su forma y tamaño originales después de deformarse.

Específicamente, consideraremos el almacenamiento de energía en un resorte ideal como los que estudiamos en la sección 6.3. Para mantener un resorte ideal estirado una distancia *x*, debemos ejercer una fuerza $F = kx$, donde *k* es la constante de fuerza del resorte. Ésta es una idealización útil porque muchos cuerpos elásticos exhiben tal proporcionalidad directa entre la fuerza $\vec{F}$ y el desplazamiento *x*, siempre que *x* sea lo suficientemente pequeña.

Procedemos igual que con la energía potencial gravitacional. Comenzamos con el trabajo realizado por la fuerza elástica (del resorte) y lo combinamos con el teorema trabajo-energía. La diferencia es que la energía potencial gravitacional es una propiedad compartida de un cuerpo y la Tierra; no obstante, la energía potencial elástica sólo se almacena en el resorte (u otro cuerpo deformable).

La figura 7.13 muestra el resorte ideal de la figura 6.18, con su extremo izquierdo fijo y el extremo derecho conectado a un bloque de masa m que puede moverse sobre el eje x. En la figura 7.13a, el cuerpo está en $x = 0$ con el resorte ni estirado ni comprimido. Movemos el bloque estirando o comprimiendo el resorte, y luego lo soltamos. Al moverse el bloque de una posición x_1 a otra posición x_2, ¿cuánto trabajo realiza la fuerza elástica (del resorte) sobre el bloque?

En la sección 6.3 vimos que el trabajo que debemos efectuar *sobre* el resorte para mover un extremo desde un alargamiento x_1 hasta otro alargamiento distinto x_2 es

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } sobre \text{ un resorte)}$$

donde k es la constante de fuerza del resorte. Si estiramos más el resorte, realizamos trabajo positivo sobre él; si dejamos que el resorte se relaje sosteniendo un extremo, realizamos trabajo negativo sobre él. También vimos que esta expresión para el trabajo sigue siendo correcta si el resorte se comprime, en vez de estirarse, de modo que x_1 o x_2, o ambos, son negativos. Ahora nos interesa el trabajo efectuado *por* el resorte. Por la tercera ley de Newton, un trabajo es el negativo del otro. Cambiando los signos en la ecuación, vemos que, al desplazarse de x_1 a x_2, el resorte efectúa un trabajo W_{el} dado por

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } por \text{ un resorte)}$$

El subíndice "el" significa *elástico*. Si x_1 y x_2 son positivos y $x_2 > x_1$ (figura 7.13b), el resorte efectúa trabajo negativo sobre el bloque, que se mueve en la dirección $+x$ mientras el resorte tira de él en la dirección $-x$. El resorte se estira más y el bloque se frena. Si x_1 y x_2 son positivos y $x_2 < x_1$ (figura 7.13c), el trabajo del resorte es positivo al relajarse y el bloque se acelera. Si el resorte puede comprimirse o estirarse, x_1 o x_2, o ambos, pueden ser negativos; sin embargo, la expresión para W_{el} sigue siendo válida. En la figura 7.13d, x_1 y x_2 son negativos, pero x_2 lo es menos; el resorte comprimido efectúa trabajo positivo al relajarse, acelerando al bloque.

Como hicimos con el trabajo gravitacional, podemos expresar el trabajo del resorte en términos de una cantidad dada al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad es $\frac{1}{2}kx^2$, que definimos como la **energía potencial elástica**:

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(energía potencial elástica)} \qquad (7.9)$$

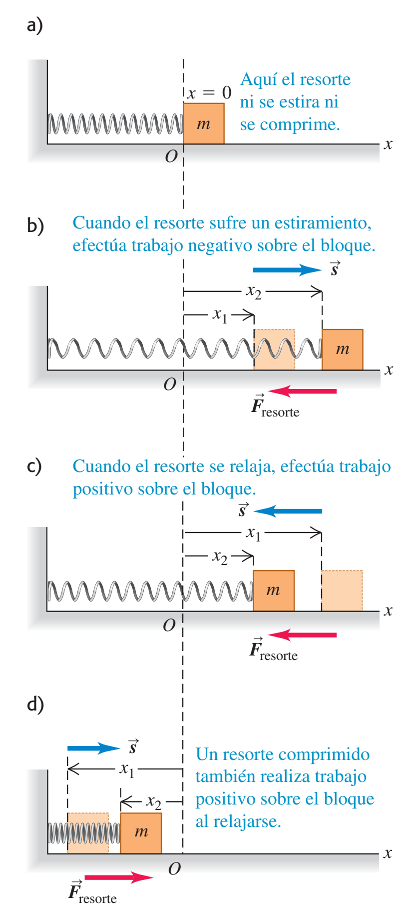
La figura 7.14 es una gráfica de la ecuación (7.9). La unidad de U_{el} es el joule (J), la misma de *todas* las cantidades de energía y trabajo; esto es evidente en la ecuación (7.9), si recordamos que las unidades de k son N/m y que 1 N · m = 1 J.

Podemos usar la ecuación (7.9) para expresar el trabajo W_{el} efectuado sobre el bloque por la fuerza elástica en términos del cambio en la energía potencial elástica:

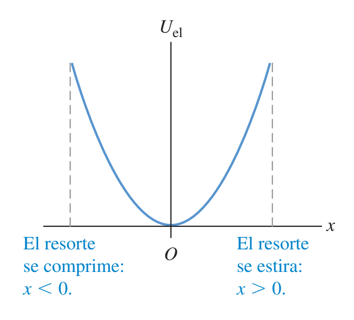
$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \qquad (7.10)$$

Si un resorte estirado se estira más, como en la figura 7.13b, W_{el} es negativo y U_{el} *aumenta*; se almacena más energía potencial en el resorte. Si un resorte estirado se relaja (figura 7.13c), x disminuye, W_{el} es positivo y U_{el} *disminuye*; el resorte pierde energía potencial elástica. Los valores negativos de x corresponden a un resorte

7.13 Cálculo del trabajo realizado por un resorte conectado a un bloque sobre una superficie horizontal. La cantidad x es la extensión o compresión del resorte.



7.14 La gráfica de la energía potencial elástica para un resorte ideal es una parábola: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es la extensión o compresión del resorte. La energía potencial elástica U_{el} nunca es negativa.



comprimido pero, como muestra la figura 7.14, U_{el} es positiva para x tanto positiva como negativa, y las ecuaciones (7.9) y (7.10) son válidas en ambos casos. Cuanto más se comprima *o* estira un resorte, mayor será su energía potencial elástica.

CUIDADO **Energía potencial gravitacional contra energía potencial elástica** Una diferencia importante entre la energía potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$ y la energía potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ es que *no* tenemos la libertad de elegir $x = 0$ donde queramos. Para que sea congruente con la ecuación (7.9), $x = 0$ *debe* ser la posición donde el resorte no está ni estirado ni comprimido. Ahí, su energía potencial elástica y la fuerza que ejerce son ambas cero.

El teorema trabajo-energía dice que $W_{tot} = K_2 - K_1$ sin importar qué tipo de fuerzas actúen sobre el cuerpo. Si la fuerza elástica es la *única* que realiza trabajo sobre el cuerpo, entonces,

$$W_{tot} = W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$$

El teorema trabajo-energía $W_{tot} = K_2 - K_1$ nos da así

$$K_1 + U_{el,1} = K_2 + U_{el,2} \quad \text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)} \tag{7.11}$$

Aquí, U_{el} está dada por la ecuación (7.9), por lo que

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)} \tag{7.12}$$

En este caso, la energía mecánica total $E = K + U_{el}$ (la suma de las energías potenciales cinética y *elástica*) se *conserva.* Un ejemplo es el movimiento del bloque de la figura 7.13, siempre que la superficie horizontal no tenga fricción y ninguna fuerza además de la ejercida por el resorte efectúe trabajo.

Para que la ecuación (7.12) sea estrictamente correcta, el resorte ideal *no debe tener masa*; si la tiene, también tendrá energía cinética al moverse las espiras del resorte. Podemos despreciar la energía cinética del resorte, si su masa es mucho menor que la masa m del cuerpo conectado al resorte. Por ejemplo, un automóvil común tiene una masa de 1200 kg o más. Los resortes de su suspensión tienen masas de unos cuantos kilogramos, así que podemos despreciarlas si queremos estudiar cómo el auto rebota sobre su suspensión.

Situaciones con energía potencial tanto gravitacional como elástica

ActivPhysics ONLINE
5.4 Salto inverso con bungee
5.5 Bolos con impulso de resorte

Las ecuaciones (7.11) y (7.12) son válidas si la única energía potencial del sistema es la elástica. ¿Qué sucede si tenemos fuerzas *tanto* gravitacionales *como* elásticas, digamos un bloque conectado al extremo inferior de un resorte que cuelga verticalmente? ¿Y qué ocurre si el trabajo también es efectuado por otras fuerzas que *no pueden* describirse en términos de energía potencial, como la fuerza de resistencia del aire sobre un bloque en movimiento? Entonces, el trabajo total es la suma del trabajo efectuado por la fuerza gravitacional (W_{grav}), por la fuerza elástica (W_{el}) y por otras fuerzas (W_{otras}): $W_{tot} = W_{grav} + W_{el} + W_{otras}$. De esta manera, el teorema trabajo-energía da

$$W_{grav} + W_{el} + W_{otras} = K_2 - K_1$$

El trabajo efectuado por la fuerza gravitacional es $W_{grav} = U_{grav,1} - U_{grav,2}$ y el trabajo efectuado por el resorte es $W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$. Por lo tanto, podemos rescribir el teorema trabajo-energía para este caso más general como

$$K_1 + U_{grav,1} + U_{el,1} + W_{otras} = K_2 + U_{grav,2} + U_{el,2} \quad \text{(válida en general)} \tag{7.13}$$

O bien, de manera equivalente,

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2 \qquad \text{(válida en general)} \qquad (7.14)$$

donde $U = U_{grav} + U_{el} = mgy + \frac{1}{2}kx^2$ es la *suma* de la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica. Para abreviar, lamamos U simplemente a la "energía potencial".

La ecuación (7.14) es *la expresión más general* de la relación entre energía cinética, energía potencial y trabajo realizado por otras fuerzas, la cual nos indica:

El trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la elástica o la gravitacional es igual al cambio de energía mecánica total $E = K + U$ del sistema, donde $U = U_{grav} + U_{el}$ es la suma de la energía potencial gravitacional y la energía potencial elástica.

El "sistema" se compone del cuerpo de masa m, la Tierra con la que interactúa a través de la fuerza gravitacional y el resorte de constante de fuerza k.

Si W_{otras} es positivo, $E = K + U$ aumenta; si W_{otras} es negativo, E disminuye. Si las fuerzas gravitacional *y* elástica son las *únicas* que efectúan trabajo sobre el cuerpo, $W_{otras} = 0$ y la energía mecánica total (que incluye energías potenciales gravitacional y elástica) se conserva. (Compare la ecuación (7.14) con las ecuaciones (7.7) y (7.8), que describen situaciones donde hay energía potencial gravitacional pero no energía potencial elástica.)

El salto con bungee (figura 7.15) es un ejemplo de transformaciones entre energía cinética, energía potencial elástica y energía potencial gravitacional. Al caer la persona, la energía potencial gravitacional disminuye y se convierte en la energía cinética del saltador y la energía potencial elástica de la cuerda del bungee. Más allá de cierto punto de la caída, la rapidez de la persona disminuye, con lo que tanto la energía potencial gravitacional como la energía cinética se convierten en energía potencial elástica.

7.15 La caída de una persona atada a un bungee implica interacciones entre energía cinética, energía potencial gravitacional y energía potencial elástica. Sin embargo, la energía mecánica no se conserva, porque tanto fuerzas de fricción dentro de la cuerda del bungee como la resistencia del aire también efectúan trabajo. (Si la energía mecánica *se conservara*, ¡la persona seguiría rebotando eternamente!)



Estrategia para resolver problemas 7.2 Problemas utilizando energía mecánica II



La Estrategia para resolver problemas 7.1 (sección 7.1) es igualmente útil para resolver problemas que implican fuerzas elásticas además de gravitacionales. Lo único nuevo es que ahora la energía potencial U incluye la energía potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es el desplazamiento del resorte *respecto a su longitud no estirada.* La energía potencial da cuenta del trabajo realizado por las fuerzas gravitacional y elástica; el trabajo de las otras fuerzas, W_{otras}, debe incluirse por separado.

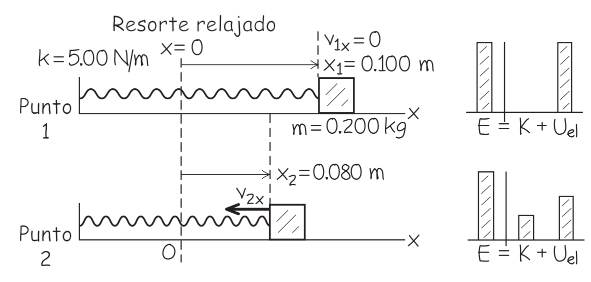
Ejemplo 7.7 Movimiento con energía potencial elástica

Un deslizador de masa $m = 0.200$ kg descansa en un riel de aire horizontal, sin fricción, conectado a un resorte con constante de fuerza $k = 5.00$ N/m. Usted tira del deslizador, estirando el resorte 0.100 m, y luego se suelta con velocidad inicial cero. El deslizador regresa a su posición de equilibrio ($x = 0$). ¿Qué velocidad tiene cuando $x = 0.080$ m?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como la fuerza del resorte varía con la posición, este problema no puede resolverse con las ecuaciones para movimiento con aceleración constante; ahora usaremos la idea de que, al comenzar a moverse el deslizador, la energía potencial elástica se convierte en energía cinética. (El deslizador permanece a la misma altura durante todo el movimiento, así que la energía potencial gravitacional no es importante. Por lo tanto, $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.)

7.16 Nuestros esquemas y gráficas de barra de la energía para este problema.



PLANTEAR: La figura 7.16 muestra nuestros esquemas. La fuerza del resorte es la única que efectúa trabajo sobre el deslizador, así que

continúa

$W_{otras} = 0$ y podemos usar la ecuación (7.11). Sea el punto 1 donde se suelta el deslizador, y el punto 2, en $x = 0.080$ m. Conocemos la velocidad en el punto 1 ($v_{1x} = 0$); la incógnita es la velocidad x en el punto 2, v_{2x}.

EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_{1x}{}^2 = \frac{1}{2}(0.200 \text{ kg})(0)^2 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1{}^2 = \frac{1}{2}(5.00 \text{ n/m})(0.100 \text{ m})^2 = 0.0250 \text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}{}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5.00 \text{ N/m})(0.080 \text{ m})^2 = 0.0160 \text{ J}$$

Entonces, por la ecuación (7.11),

$$K_2 = K_1 + U_1 - U_2 = 0 + 0.0250 \text{ J} - 0.0160 \text{ J} = 0.0090 \text{ J}$$

$$v_{2x} = \pm\sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \pm\sqrt{\frac{2(0.0090 \text{ J})}{0.200 \text{ kg}}} = \pm 0.30 \text{ m/s}$$

Elegimos la raíz negativa porque el deslizador se está moviendo en la dirección $-x$; la respuesta que queremos es $v_{2x} = -0.30$ m/s.

EVALUAR: ¿Qué significa la segunda solución, $v_{2x} = +0.30$ m/s? En algún momento, el resorte se comprimirá y empujará el deslizador hacia la derecha en la dirección $+x$ (véase la figura 7.13d). La segunda solución nos dice que, cuando el deslizador pase por $x = 0.080$ m moviéndose hacia la derecha, su rapidez será de 0.30 m/s: la misma que cuando pasó por este punto moviéndose hacia la izquierda.

Cuando el deslizador pase por el punto $x = 0$, el resorte estará relajado y toda la energía mecánica estará en forma de energía cinética. ¿Puede demostrar que la rapidez del deslizador en ese punto es de 0.50 m/s?

Ejemplo 7.8 Movimiento con energía potencial elástica y trabajo efectuado por otras fuerzas

Para el sistema del ejemplo 7.7, suponga que el deslizador está inicialmente en reposo en $x = 0$, con el resorte sin estirar. Usted aplica al deslizador una fuerza constante $\vec{F}$ en la dirección $+x$ con magnitud de 0.610 N. ¿Qué velocidad tiene éste cuando se movió a $x = 0.100$ m?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aunque la fuerza aplicada $\vec{F}$ es constante, la fuerza del resorte no lo es, así que la aceleración del deslizador no es constante. La energía mecánica total no se conserva a causa del trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$, pero aun así podemos usar la relación de energía de la ecuación (7.13). (Al igual que en el ejemplo 7.7, ignoramos la energía potencial gravitacional porque no cambia la altura del deslizador. Por lo tanto, sólo tenemos energía potencial, así que $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.)

PLANTEAR: Tomemos como punto 1 en $x = 0$, donde la velocidad es $v_{1x} = 0$, y como punto 2, $x = 0.100$ m (no son los mismos puntos rotulados en la figura 7.16). La incógnita es v_{2x}, la velocidad en el punto 2.

EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = 0$$

$$U_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_{2x}{}^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}(5.00 \text{ N/m})(0.100 \text{ m})^2 = 0.0250 \text{ J}$$

$$W_{otras} = (0.610 \text{ N})(0.100 \text{ m}) = 0.0610 \text{ J}$$

(Para calcular W_{otras}, multiplicamos la magnitud de la fuerza por el desplazamiento, ya que ambas tienen la dirección $+x$.) Inicialmente, la energía mecánica total es cero; el trabajo realizado por $\vec{F}$ aumenta la energía mecánica total a 0.0610 J, de los cuales 0.0250 J corresponden a energía potencial elástica. El resto es energía cinética. Por la ecuación (7.13),

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$$

$$K_2 = K_1 + U_1 + W_{otras} - U_2$$

$$= 0 + 0 + 0.0610 \text{ J} - 0.0250 \text{ J} = 0.0360 \text{ J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0360 \text{ J})}{0.200 \text{ kg}}} = 0.60 \text{ m/s}$$

Elegimos la raíz cuadrada positiva porque el deslizador se mueve en la dirección $+x$.

EVALUAR: Para verificar la respuesta, piense en qué cambiaría si desconectáramos el deslizador del resorte. Entonces, $\vec{F}$ sería la única fuerza que efectúa trabajo, la energía potencial sería cero en todo momento y la ecuación (7.13) nos daría

$$K_2 = K_1 + W_{otras} = 0 + 0.0610 \text{ J}$$

$$v_{2x} = \sqrt{\frac{2K_2}{m}} = \sqrt{\frac{2(0.0610 \text{ J})}{0.200 \text{ kg}}} = 0.78 \text{ m/s}$$

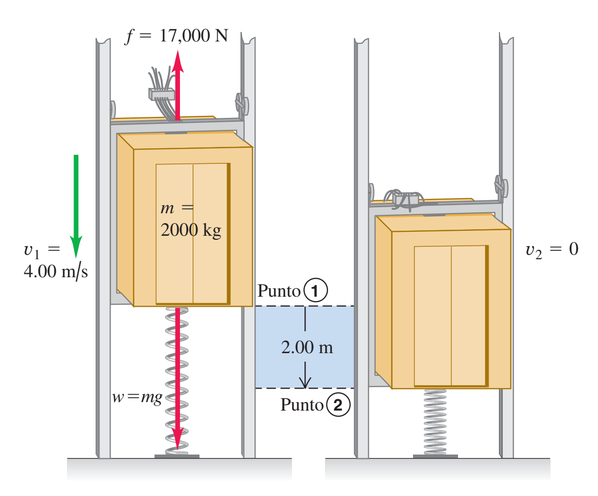
Obtuvimos una velocidad menor que este valor porque el resorte efectúa trabajo negativo sobre el deslizador al estirarse (véase la figura 7.13b).

Si usted deja de empujar el deslizador cuando éste alcanza el punto $x = 0.100$ m, más allá de este punto la única fuerza que realiza trabajo sobre el deslizador es la fuerza del resorte. Por lo tanto, para $x > 0.100$ m, se conserva la energía mecánica total $E = K + U$ y se mantiene el mismo valor de 0.0610 J. El deslizador frenará conforme el resorte siga estirándose, así que la energía cinética K disminuirá al aumentar la energía potencial. El deslizador llegará al reposo en $x = x_3$; en este punto la energía cinética es cero y la energía potencial $U = U_{el} = \frac{1}{2}kx_3^2$ es igual a la energía mecánica total 0.0610 J. El lector debería ser capaz de demostrar que el deslizador llega al reposo en $x_3 = 0.156$ m, lo que significa que se mueve otros 0.056 m después de que se elimina la fuerza $\vec{F}$ en $x_2 = 0.100$ m. (Puesto que no hay fricción, el deslizador no permanecerá en reposo, sino que empezará a regresar hacia $x = 0$ debido a la fuerza del resorte estirado.)

Ejemplo 7.9 Movimiento con fuerzas gravitacional, elástica y de fricción

En una situación de diseño "del peor caso", un elevador de 2000 kg con cables rotos cae a 4.00 m/s cuando hace contacto con un resorte amortiguador en el fondo del cubo. Se supone que el resorte debe detener el elevador, comprimiéndose 2.00 m al hacerlo (figura 7.17). Durante el movimiento, un freno de seguridad aplica una fuerza de fricción constante de 17,000 N al elevador. Imagine que es un consultor de diseño y le piden determinar qué constante de fuerza debería tener el resorte.

7.17 La caída de un elevador es detenida por un resorte y una fuerza de fricción constante.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos el enfoque de energía para determinar la constante de fuerza que aparece en la expresión de energía potencial elástica. Observe que en este problema intervienen energías potenciales *tanto* gravitacional *como* elástica. Además, la energía mecánica total no se conserva porque la fricción realiza trabajo negativo W_{otras} sobre el elevador.

PLANTEAR: Puesto que la energía mecánica no se conserva e interviene más de un tipo de energía potencial, usaremos la forma más general de la relación de energía, la ecuación (7.13). Tomaremos como punto 1 la posición de la base del elevador cuando recién entra en contacto con el resorte, y como punto 2, su posición cuando queda en reposo. Elegimos el origen en el punto 1, así que $y_1 = 0$ y $y_2 = -2.00$ m. Entonces, la coordenada del extremo superior del resorte es la misma que la coordenada del elevador, y la energía potencial elástica en cualquier punto entre el punto 1 y el 2 es $U_{\text{el}} = \frac{1}{2}ky^2$. (La energía potencial gravitacional es $U_{\text{grav}} = mgy$, como siempre.) Conocemos las rapideces inicial y final del elevador y la magnitud de la fuerza de fricción, así que la única incógnita es la constante de fuerza k (nuestra incógnita).

EJECUTAR: La rapidez inicial del elevador es $v_1 = 4.00$ m/s, así que su energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(2000\text{ kg})(4.00\text{ m/s})^2 = 16{,}000\text{ J}$$

El elevador se detiene en el punto 2, así que $K_2 = 0$. La energía potencial en el punto 1, U_1, es cero; $U_{\text{grav}} = 0$ porque $y_1 = 0$, y $U_{\text{el}} = 0$ porque el resorte aún no está comprimido. En el punto 2, hay energía potencial tanto gravitacional como elástica, de modo que

$$U_2 = mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2$$

La energía potencial gravitacional en el punto 2 es

$$mgy_2 = (2000\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-2.00\text{ m}) = -39{,}200\text{ J}$$

La otra fuerza es la fuerza de fricción (17,000 N), que actúa opuesta al desplazamiento de 2.00 m, por lo que

$$W_{\text{otras}} = -(17{,}000\text{ N})(2.00\text{ m}) = -34{,}000\text{ J}$$

Incluimos estos términos en $K_1 + U_1 + W_{\text{otras}} = K_2 + U_2$ y obtenemos

$$K_1 + 0 + W_{\text{otras}} = 0 + \left(mgy_2 + \frac{1}{2}ky_2^2\right)$$

así que la constante de fuerza del resorte es

$$k = \frac{2(K_1 + W_{\text{otras}} - mgy_2)}{y_2^2}$$
$$= \frac{2[16{,}000\text{ J} + (-34{,}000\text{ J}) - (-39{,}200\text{ J})]}{(-2.00\text{ m})^2}$$
$$= 1.06 \times 10^4\text{ N/m}$$

Ésta es aproximadamente un décimo de la constante de fuerza de un resorte en la suspensión de un automóvil.

EVALUAR: Examinemos lo que podría parecer una paradoja aquí. La energía potencial elástica del resorte en el punto 2 es

$$\frac{1}{2}ky_2^2 = \frac{1}{2}(1.06 \times 10^4\text{ N/m})(-2.00\text{ m})^2 = 21{,}200\text{ J}$$

Esto es *más* que la energía mecánica total en el punto 1:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 16{,}000\text{ J} + 0 = 16{,}000\text{ J}$$

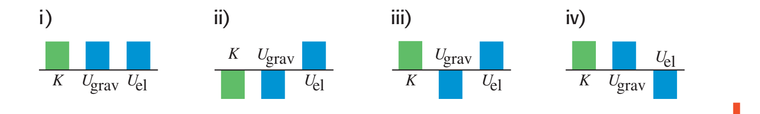
Sin embargo, la fuerza de fricción hizo que la energía mecánica del sistema *disminuyera* en 34,000 J entre el punto 1 y el punto 2. ¿Apareció energía de la nada? No se preocupe; no hay tal paradoja. En el punto 2 también hay energía potencial gravitacional *negativa*, $mgy_2 = -39{,}200$ J porque el punto 2 está debajo del origen. La energía mecánica total en el punto 2 es

$$E_2 = K_2 + U_2 = 0 + \frac{1}{2}ky_2^2 + mgy_2$$
$$= 0 + 21{,}200\text{ J} + (-39{,}200\text{ J}) = -18{,}000\text{ J}$$

Ésta no es sino la energía mecánica inicial de 16,000 J menos los 34,000 J perdidos por la fricción.

¿El elevador se quedará en el fondo del cubo? En el punto 2 el resorte comprimido ejerce una fuerza hacia arriba de magnitud $F_{\text{resorte}} = (1.06 \times 10^4\text{ N/m})(2.00\text{ m}) = 21{,}200$ N; mientras que la fuerza de gravedad sobre el elevador es sólo $w = mg = (2000\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 19{,}600$ N. Entonces, si no hubiera fricción, habría una fuerza neta hacia arriba de $21{,}200\text{ N} - 19{,}600\text{ N} = 1600$ N y el elevador rebotaría hacia arriba. Sin embargo, hay fricción por el freno de seguridad, el cual puede ejercer una fuerza de hasta 17,000 N; de esta manera, el freno evitaría que el elevador rebote.

Evalúe su comprensión de la sección 7.2 Considere la situación del ejemplo 7.9 en el instante en que el elevador aún se mueve hacia abajo y el resorte se comprime 1.00 m. En la siguiente figura, ¿cuál de las gráficas de barra de la energía presenta con mayor precisión la energía cinética K, la energía potencial gravitacional U_{grav} y la energía potencial elástica U_{el} en dicho instante?



7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

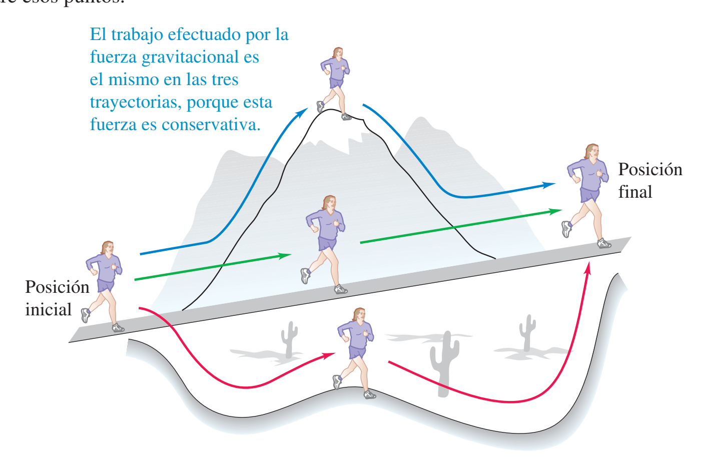
Al estudiar la energía potencial hemos hablado de "almacenar" energía cinética convirtiéndola en energía potencial, pensando siempre que podremos recuperarla después como energía cinética. Por ejemplo, una pelota lanzada hacia arriba se frena al convertir su energía cinética en potencial; sin embargo, al bajar la conversión se invierte y la pelota se acelera al convertir su energía potencial otra vez en energía cinética. Si no hay resistencia del aire, la pelota se mueve con la misma rapidez cuando regresa al punto de lanzamiento que cuando se lanzó.

Otro ejemplo es el de un deslizador que se mueve sobre un riel de aire horizontal sin fricción que choca contra un amortiguador de resorte en el extremo del riel. El resorte se comprime y el deslizador se detiene; luego rebota. Como no hay fricción, el deslizador tiene la misma rapidez y energía cinética que tenía antes de chocar. Aquí también hay una conversión bidireccional: de energía cinética a potencial y viceversa. En ambos casos, podemos definir una función de energía potencial tal que la energía mecánica total, cinética más potencial, es constante o *se conserva* durante el movimiento.

Fuerzas conservativas

Decimos que una fuerza que ofrece esta oportunidad de conversión bidireccional entre energías cinética y potencial es una **fuerza conservativa**. Hemos visto dos ejemplos de fuerzas conservativas: la gravitacional y la de resorte. (Más adelante en este libro estudiaremos otra fuerza conservativa, la fuerza eléctrica entre los objetos cargados.) Una característica fundamental de las fuerzas conservativas es que su trabajo siempre es *reversible.* Algo que depositamos en el "banco" de energía puede retirarse después sin pérdida. Otro aspecto importante de las fuerzas conservativas es que un cuerpo puede moverse del punto 1 al punto 2 siguiendo varios caminos; pero el trabajo realizado por una fuerza conservativa es el mismo para todos (figura 7.18).

7.18 El trabajo realizado por una fuerza conservativa como la gravedad depende sólo de los extremos de la trayectoria de movimiento, no sobre la trayectoria específica seguida entre esos puntos.



Así, si un cuerpo se mantiene cerca de la superficie terrestre, la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ es independiente de la altura, y el trabajo realizado por tal fuerza sólo depende del cambio de altura. Si el cuerpo describe una trayectoria cerrada, volviendo al punto de partida, el trabajo *total* de la fuerza gravitacional siempre es cero.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa *siempre* tiene estas propiedades:

1. Puede expresarse como la diferencia entre los valores inicial y final de una función de *energía potencial*.
2. Es reversible.
3. Es independiente de la trayectoria del cuerpo y depende sólo de los puntos inicial y final.
4. Si los puntos inicial y final son el mismo, el trabajo total es cero.

Si las *únicas* fuerzas que efectúan trabajo son conservativas, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante.

Fuerzas no conservativas

No todas las fuerzas son conservativas. Considere la fuerza de fricción que actúa sobre la caja que se desliza por la rampa del ejemplo 7.6 (sección 7.1). El cuerpo sube y luego regresa al punto de partida, pero el trabajo total efectuado por la fricción sobre él *no* es cero. Al invertirse la dirección del movimiento, se invierte la fuerza de fricción, que realiza trabajo *negativo* en *ambas* direcciones. Si un automóvil con frenos bloqueados se derrapa por el pavimento con rapidez (y energía cinética) decreciente(s), la energía cinética perdida no se puede recuperar invirtiendo el movimiento ni de ninguna otra manera, y la energía mecánica *no* se conserva. *No* hay función de energía potencial para la fuerza de fricción.

Asimismo, la fuerza de resistencia de fluidos (sección 5.3) no es conservativa. Si lanzamos una pelota hacia arriba, la resistencia del aire efectúa trabajo negativo sobre ella al subir *y* al bajar. La pelota regresa a la mano con menor rapidez y menos energía cinética que cuando salió, y no hay forma de recuperar la energía mecánica perdida.

El trabajo realizado por una **fuerza no conservativa** *no* puede representarse con una función de energía potencial. Algunas fuerzas no conservativas, como la fricción cinética o la resistencia de fluidos, hacen que se pierda o se disipe energía mecánica: son **fuerzas disipadoras**. También hay fuerzas no conservativas que *aumentan* la energía mecánica. Los fragmentos de un petardo que estalla salen despedidos con una energía cinética muy grande, debido a una reacción química de la pólvora con el oxígeno. Las fuerzas liberadas por esta reacción no son conservativas porque el proceso no es reversible. ¡Los trozos nunca se volverán a unir espontáneamente para formar un petardo!

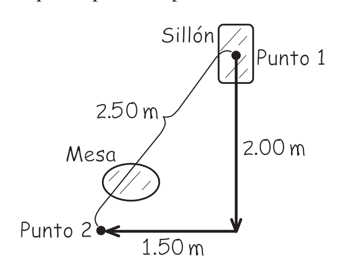
Ejemplo 7.10 El trabajo de fricción depende de la trayectoria

Imagine que está reacomodando sus muebles y desea mover 2.50 m un sillón de 40.0 kg en una habitación. Sin embargo, el camino rectilíneo está bloqueado por una pesada mesa de centro que no desea mover. Por lo tanto, mueve el sillón siguiendo una doble trayectoria, cuyos lados tienen 2.00 m y 1.50 m de longitud. En comparación con la trayectoria recta, ¿cuánto trabajo más se debe realizar usted para empujar el sillón por la trayectoria acodada? El coeficiente de fricción cinética es de 0.200.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aquí efectúan trabajo tanto usted como la fuerza de fricción, así que deberemos usar la relación de energía que incluye fuerzas distintas de la elástica o gravitacional. Con esa relación, obtendremos un vínculo entre el trabajo efectuado por *usted* y el efectuado por la *fricción*.

7.19 Nuestro esquema para este problema.



PLANTEAR: El esquema de la situación se muestra en la figura 7.19. El sillón está en reposo tanto en el punto 1 como en el punto 2, así que

continúa

$K_1 = K_2 = 0$. No hay energía potencial elástica (no hay resortes), y la energía potencial gravitacional no cambia porque el movimiento del sillón es sólo horizontal: $U_1 = U_2$. De la ecuación (7.14), se sigue que $W_{otras} = 0$. El otro trabajo realizado sobre el sillón es la suma del trabajo positivo que usted realiza, W_{ud} y el trabajo negativo W_{fric}, de la fuerza de fricción cinética. Puesto que la suma es cero, tenemos

$$W_{ud} = -W_{fric}$$

Por lo tanto, para determinar W_{ud}, calcularemos el trabajo efectuado por la fricción.

EJECUTAR: Como el piso es horizontal, la fuerza normal sobre el sillón es igual a su peso mg, y la magnitud de la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n = \mu_k mg$. El trabajo que usted debe efectuar en cada trayectoria es entonces

$$\begin{aligned} W_{ud} &= -W_{fric} = -(-f_k s) = +\mu_k mgs \\ &= (0.200)(40.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.50\text{ m}) \\ &= 196\text{ J} \qquad \text{(trayectoria rectilínea)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{ud} &= -W_{fric} \\ &= (0.200)(40.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.00\text{ m} + 1.50\text{ m}) \\ &= 274\text{ J} \qquad \text{(trayectoria acodada)} \end{aligned}$$

El trabajo extra que usted debe realizar es $274\text{ J} - 196\text{ J} = 78\text{ J}$.

EVALUAR: El trabajo efectuado por la fricción es $W_{fric} = -W_{ud} = -196$ J por el camino recto; y -274 J por el camino acodado. El trabajo efectuado por la fricción depende del camino seguido, y esto demuestra que la fricción es una fuerza *no conservativa*.

Ejemplo 7.11 ¿Conservativa o no conservativa?

En cierta región del espacio, la fuerza que actúa sobre un electrón es $\vec{F} = Cx\hat{j}$, donde C es una constante positiva. El electrón se mueve en sentido antihorario en un cuadrado sobre el plano xy (figura 7.20). Las esquinas del cuadrado están en $(x, y) = (0, 0)$, $(L, 0)$, (L, L) y $(0, L)$. Calcule el trabajo de $\vec{F}$ sobre el electrón durante una vuelta. ¿Esta fuerza es conservativa o no conservativa?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el ejemplo 7.10, la fuerza de fricción tenía magnitud constante y siempre era opuesta al desplazamiento, así que era fácil calcular el trabajo efectuado. Aquí, en cambio, la fuerza $\vec{F}$ no es constante y en general no está en la misma dirección que el desplazamiento.

PLANTEAR: Para obtener trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$, usaremos la expresión más general del trabajo (ecuación 6.14):

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

donde $d\vec{l}$ es un desplazamiento infinitesimal. Calculemos el trabajo realizado en cada tramo del cuadrado y luego sumemos los resultados para obtener el trabajo efectuado en el viaje "de ida y vuelta".

EJECUTAR: En el primer tramo, de $(0, 0)$ a $(L, 0)$, la fuerza varía pero siempre es perpendicular al desplazamiento, así que $\vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, y el trabajo efectuado sobre el primer tramo es $W_1 = 0$. La fuerza tiene siempre el mismo valor $\vec{F} = CL\hat{j}$ sobre el segundo tramo de $(L, 0)$ a (L, L). El desplazamiento en este tramo es en la dirección $+y$, así que $d\vec{l} = dy\hat{j}$ y

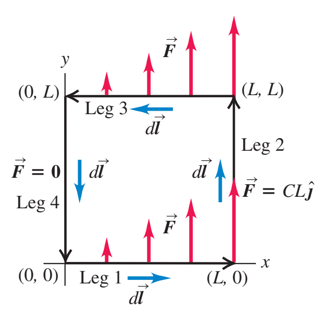
$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = CL\hat{j} \cdot dy\hat{j} = CL\,dy$$

El trabajo efectuado en el segundo tramo es entonces

$$W_2 = \int_{(L,0)}^{(L,L)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^{y=L} CL\,dy = CL\int_0^L dy = CL^2$$

En el tercer tramo, de (L, L) a $(0, L)$, $\vec{F}$ es otra vez perpendicular al desplazamiento, de manera que $W_3 = 0$. La fuerza es cero en el tramo final, de $(0, L)$ a $(0, 0)$, así que no se efectúa trabajo y $W_4 = 0$. El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ en el viaje "de ida y vuelta" es

7.20 Un electrón que se mueve alrededor de una espira cuadrada mientras sobre él actúa una fuerza $\vec{F} = Cx\hat{j}$.



$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 0 + CL^2 + 0 + 0 = CL^2$$

Los puntos inicial y final son el mismo, pero el trabajo total de $\vec{F}$ no es cero. Se trata de una fuerza no conservativa; *no puede* representarse con una función de energía potencial.

EVALUAR: Dado que W es positivo, *aumenta* la energía mecánica del electrón en el recorrido. Esto no es una curiosidad matemática; es una descripción de lo que sucede en una planta generadora de electricidad. Una espira de alambre se mueve en un campo magnético, el cual produce una fuerza no conservativa similar a la del ejemplo. Los electrones que se mueven en el alambre adquieren energía al dar vuelta a la espira, y esa energía se conduce a través de líneas de transmisión al consumidor. (Veremos esto con detalle en el capítulo 29.)

Si el electrón viajara por la espira en sentido horario en vez de antihorario, la fuerza $\vec{F}$ no cambiaría, pero se invertiría la dirección de cada desplazamiento infinitesimal $d\vec{l}$. Por lo tanto, el trabajo tendría signo opuesto y, para el recorrido completo en sentido horario, sería $W = -CL^2$. Este comportamiento es distinto del de la fuerza de fricción no conservativa. Cuando un cuerpo se desliza sobre una superficie estacionaria con fricción, el trabajo de la fricción siempre es negativo, sea cual fuere la dirección del movimiento (véase el ejemplo 7.6 en la sección 7.1).

La ley de conservación de la energía

Las fuerzas no conservativas no pueden representarse en términos de energía potencial; no obstante, podemos describir sus efectos en términos de energías distintas de la cinética y la potencial. Cuando un automóvil con frenos bloqueados se derrapa hasta detenerse, se calientan los neumáticos y el camino. La energía asociada a este cambio en el estado de los materiales se denomina **energía interna**. Cuando se eleva la temperatura de un cuerpo, aumenta su energía interna; si se reduce su temperatura, disminuye su energía interna.



5.7 Máquina de Atwood modificada

Para captar el significado de la energía interna, consideremos un bloque que se desliza por una superficie áspera. Cuando se desliza, la fricción realiza trabajo *negativo* sobre el bloque, y el cambio de energía interna del bloque y la superficie es *positivo* (ambos se calientan). Experimentos cuidadosos demuestran que el aumento en la energía interna es *exactamente* igual al valor absoluto del trabajo efectuado por la fricción. Dicho de otro modo,

$$\Delta U_{\text{int}} = -W_{\text{otras}}$$

donde ΔU_{int} es el cambio de energía interna. Si sustituimos esto en la ecuación (7.7) o (7.14), vemos que

$$K_1 + U_1 - \Delta U_{\text{int}} = K_2 + U_2$$

Si escribimos $\Delta K = K_2 - K_1$ y $\Delta U = U_2 - U_1$, podemos expresar finalmente esto como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = 0 \quad \text{(ley de conservación de la energía)} \tag{7.15}$$

Este notable enunciado es la forma general de la **ley de conservación de la energía**. En un proceso dado, las energías cinética, potencial e interna de un sistema pueden cambiar; pero la *suma* de todos los cambios siempre es cero. Una disminución en una forma de energía se compensa con un aumento en las otras (figura 7.21). Si ampliamos nuestra definición de energía para incluir la energía interna, la ecuación (7.15) dice que *la energía nunca se crea ni se destruye, sólo cambia de forma.* No se ha observado aún una excepción a esta regla.

Observe que el concepto de trabajo no aparece en la ecuación (7.15). Esta ecuación nos invita a pensar sólo en términos de conversión de energía de una forma a otra. Por ejemplo, si lanzamos una pelota hacia arriba, convertimos parte de la energía interna de las moléculas de nuestro cuerpo en energía cinética de la pelota, que se convierte en energía potencial gravitacional conforme la pelota sube, y otra vez en energía cinética al bajar. Si hay resistencia del aire, parte de la energía calienta el aire y la pelota, aumentando su energía interna. La energía se convierte en la forma cinética cuando la pelota cae. Si atrapamos la pelota al caer, la energía que no se perdió en el aire se convertirá otra vez en energía interna; la pelota y su mano ahora están más calientes que al principio.

En los capítulos 19 y 20 estudiaremos la relación entre energía interna, cambios de temperatura, calor y trabajo. Éste es el corazón del campo de la física llamado *termodinámica.*

7.21 Cuando se quema un litro de gasolina en el motor de un automóvil, libera 3.3×10^7 J de energía interna. Por lo tanto, $\Delta U_{\text{int}} = -3.3 \times 10^7$ J, donde el signo menos indica que disminuyó la cantidad de energía almacenada en la gasolina. Esa energía se puede convertir en energía cinética (para que aumente la rapidez del auto) o en energía potencial (para que el auto suba una cuesta).



Ejemplo 7.12 Trabajo efectuado por la fricción

Examinemos otra vez el ejemplo 7.5 de la sección 7.1, donde Morton baja en patineta una rampa curva. Su energía cinética inicial es cero, y la potencial es 735 J. Abajo, su energía cinética es de 450 J y la potencial es cero. Por lo tanto, $\Delta K = +450$ J y $\Delta U = -735$ J. El trabajo $W_{\text{otras}} = W_{\text{fric}}$ efectuado por las fuerzas de fricción no conservativas es -285 J, así que el cambio de energía interna es $\Delta U_{\text{int}} = -W_{\text{otras}} = +285$ J. Las ruedas, los cojinetes y la rampa se calientan un poco cuando baja Morton. Según la ecuación (7.15), la suma de los cambios de energía es cero:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = +450\text{ J} + (-735\text{ J}) + 285\text{ J} = 0$$

Se conserva la energía total del sistema (incluidas las formas de energía no mecánicas).

Evalúe su comprensión de la sección 7.3 En una estación generadora hidroeléctrica, el agua que cae impulsa las turbinas ("ruedas de agua") que a la vez impulsan generadores eléctricos. En comparación con la cantidad de energía potencial gravitacional liberada por el agua que cae, ¿qué tanta energía eléctrica se produce? i) la misma; ii) más; iii) menos.

7.4 Fuerza y energía potencial

En los dos tipos de fuerzas conservativas (gravitacional y elástica) que estudiamos, comenzamos con una descripción del comportamiento de la *fuerza* y de él dedujimos una expresión para la *energía potencial*. Por ejemplo, para un cuerpo de masa m en un campo gravitacional uniforme, la fuerza gravitacional es $F_y = -mg$. Vimos que la energía potencial correspondiente es $U(y) = mgy$. Para estirar un resorte ideal una distancia x, ejercemos una fuerza igual a $+kx$. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que un resorte ideal ejerce sobre un cuerpo es opuesta, $F_x = -kx$. La función de energía potencial correspondiente es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

No obstante, en su estudio de la física el lector encontrará situaciones donde tiene una expresión para la *energía potencial* en función de la posición y necesita determinar *la fuerza* correspondiente. Veremos varios ejemplos de este tipo cuando estudiemos las fuerzas eléctricas más adelante. En general, es mucho más fácil calcular primero la energía potencial eléctrica, y luego determinar la fuerza eléctrica correspondiente.

Veamos cómo calcular la fuerza que corresponde a una expresión de energía potencial dada. Primero, consideremos un movimiento rectilíneo sobre el eje x. Denotamos la componente x de la fuerza, que es función de x, con $F_x(x)$; y la energía potencial, con $U(x)$. Esta notación nos recuerda que tanto F_x como U son *funciones* de x. Ahora recordamos que, en cualquier desplazamiento, el trabajo W efectuado por una fuerza conservativa es el negativo del cambio de energía potencial ΔU:

$$W = -\Delta U$$

Apliquemos esto a un desplazamiento pequeño Δx. El trabajo efectuado por $F_x(x)$ durante este desplazamiento es aproximadamente igual a $F_x(x)\,\Delta x$. Decimos "aproximadamente" porque $F_x(x)$ podría variar un poco en el intervalo Δx; pero se cumple, al menos aproximadamente, que

$$F_x(x)\,\Delta x = -\Delta U \qquad \text{y} \qquad F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Probablemente ya ve usted hacia dónde vamos. En el límite $\Delta x \rightarrow 0$, la variación de F_x se hace despreciable y tenemos la relación exacta

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(fuerza a partir de la energía potencial, en una dimensión)} \tag{7.16}$$

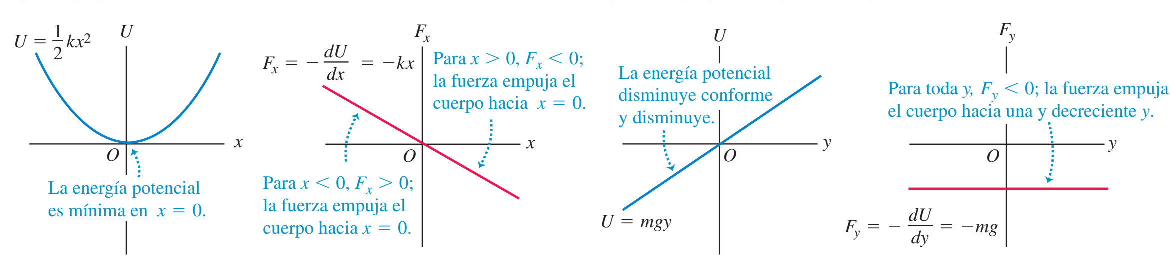
Este resultado es lógico; en las regiones donde $U(x)$ cambia más rápidamente con x (donde $dU(x)/dx$ es grande), se efectúa trabajo máximo durante un desplazamiento dado, y esto corresponde a una magnitud de fuerza grande. Además, si $F_x(x)$ está en la dirección $+x$, $U(x)$ *disminuye* al aumentar x. De esta manera, $F_x(x)$ y $dU(x)/dx$ deberían tener signos opuestos. El significado físico de la ecuación (7.16) es que *una fuerza conservativa siempre trata de llevar el sistema a una energía potencial menor*.

Como verificación, consideremos la función de la energía potencial elástica, $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si sustituimos esto en la ecuación (7.16):

$$F_x(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$



7.22 Una fuerza conservativa es el negativo de la derivada de la energía potencial correspondiente.



que es la expresión correcta para la fuerza ejercida por un resorte ideal (figura 7.22a). Asimismo, tenemos $U(y) = mgy$ para la energía potencial gravitacional; después de cambiar x a y (el eje donde se efectúa el movimiento), tenemos $F_y = -dU/dy = -d(mgy)/dy = -mg$, que es la expresión correcta para la fuerza gravitacional (figura 7.22b).

Ejemplo 7.13 Fuerza eléctrica y su energía potencial

Una partícula con carga eléctrica se sostiene en reposo en $x = 0$; mientras que otra con idéntica carga puede moverse libremente en el eje $+x$. La energía potencial del sistema es

$$U(x) = \frac{C}{x}$$

donde C es una constante positiva que depende de la magnitud de las cargas. Deduzca una expresión para la componente x de fuerza que actúa sobre la partícula cargada móvil, en función de su posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Tenemos la función de energía potencial $U(x)$, y buscamos la función $F_x(x)$.

PLANTEAR: Utilizaremos la ecuación (7.16), $F_x(x) = -dU(x)/dx$.

EJECUTAR: La derivada con respecto a x de la función $1/x$ es $-1/x^2$, así que la fuerza sobre la partícula con carga móvil para $x > 0$ es

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = -C\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{C}{x^2}$$

EVALUAR: La componente x de fuerza es positiva, y corresponde a una interacción de repulsión entre cargas eléctricas iguales. La energía potencial es muy grande cuando las partículas están muy juntas (si x es pequeña) y se acerca a cero cuando se alejan entre sí (x se hace grande); la fuerza empuja la carga móvil hacia valores positivos grandes de x, para los que la energía potencial es menor. La fuerza $F_x(x) = C/x^2$ se hace más débil conforme las partículas se separan (aumenta x). Estudiaremos más a fondo las fuerzas eléctricas en el capítulo 21.

Fuerza y energía potencial en tres dimensiones

Podemos extender este análisis a tres dimensiones, donde la partícula puede moverse en las direcciones x, y, z, o todas a la vez, bajo la acción de una fuerza conservativa con componentes F_x, F_y y F_z. Cada componente de fuerza puede ser función de las coordenadas x, y y z. La función de energía potencial U también es función de las tres coordenadas espaciales. Ahora podemos usar la ecuación (7.16) para calcular cada componente de la fuerza. El cambio de energía potencial ΔU cuando la partícula se mueve una distancia pequeña Δx en la dirección x está dada otra vez por $-F_x\Delta x$; no depende de F_y ni de F_z, que representan las componentes de la fuerza perpendicular al desplazamiento que no efectúan trabajo. Tenemos de nuevo la relación aproximada

$$F_x = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

Las componentes de fuerza y y z se determinan exactamente de la misma forma:

$$F_y = -\frac{\Delta U}{\Delta y} \qquad F_z = -\frac{\Delta U}{\Delta z}$$

Si queremos que las relaciones sean exactas, deberemos tomar límites $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\Delta z \to 0$ para que estos cocientes se conviertan en derivadas. Dado que U

puede ser función de las tres coordenadas, debemos recordar que, al calcular las derivadas, sólo una coordenada cambia a la vez. Calculamos la derivada de U con respecto a x suponiendo que y y z son constantes y sólo x varía, y así sucesivamente. Éstas se llaman *derivadas parciales* y su notación usual es $\partial U/\partial x$, y así sucesivamente; el símbolo ∂ es una d modificada, por lo que escribimos

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(fuerza a partir de la energía potencial)} \tag{7.17}$$

Podemos usar vectores unitarios para escribir una sola expresión vectorial compacta para la fuerza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad \text{(fuerza a partir de la energía potencial)} \tag{7.18}$$

La expresión en paréntesis representa una operación específica sobre la función U, donde se obtiene la derivada parcial de U con respecto a cada coordenada, se multiplican por el vector unitario correspondiente y se suman vectorialmente. Esta operación se denomina **gradiente** de U y suele abreviarse $\vec{\nabla}U$. Por lo tanto, la fuerza es el negativo del gradiente de la función de energía potencial:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U \tag{7.19}$$

Como verificación, sustituyamos en la ecuación (7.19) la función $U = mgy$ para la energía potencial gravitacional:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(mgy) = -\left(\frac{\partial(mgy)}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial(mgy)}{\partial z}\hat{k}\right) = (-mg)\hat{\jmath}$$

Ésta es la expresión que ya conocemos para la fuerza gravitacional.

Ejemplo 7.14 Fuerza y energía potencial en dos dimensiones

Un disco de hockey se desliza sobre una mesa de hockey de aire, sin fricción; sus coordenadas son x y y, y sobre él actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial

$$U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$$

Deduzca una expresión para la fuerza que actúa sobre el disco y obtenga una expresión para la magnitud de la fuerza en función de la posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al empezar con la función $U(x, y)$, queremos calcular las componentes vectoriales y la magnitud de la fuerza conservativa $\vec{F}$ correspondiente.

PLANTEAR: Obtendremos las componentes de la fuerza a partir de la función $U(x, y)$ empleando la ecuación (7.18). Esta función no depende de z, así que la derivada parcial de U con respecto a z es $\partial U/\partial z = 0$ y la fuerza no tiene componente z; luego determinaremos la magnitud de la fuerza empleando la fórmula para la magnitud de un vector: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$.

EJECUTAR: Las componentes x y y de la fuerza son

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -kx \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky$$

Por la ecuación (7.18), esto corresponde a la expresión vectorial

$$\vec{F} = -k(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath})$$

Ahora $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ es el vector de posición $\vec{r}$ de la partícula, así que podemos rescribir la expresión como $\vec{F} = -k\vec{r}$. Esto representa una fuerza que siempre tiene dirección opuesta al vector de posición de la partícula, es decir, que siempre está dirigida al origen. La energía potencial es mínima en el origen, así que en este caso también la fuerza empuja en la dirección de energía potencial decreciente.

La *magnitud* de la fuerza en cualquier punto es

$$F = \sqrt{(-kx)^2 + (-ky)^2} = k\sqrt{x^2 + y^2} = kr$$

donde r es la distancia de la partícula al origen. Ésta es la fuerza que sería ejercida sobre el disco, si éste estuviera unido a un resorte que obedece la ley de Hooke y tiene longitud despreciable (en comparación con las demás distancias del problema) cuando no está estirado. (El otro extremo está unido a la mesa de aire de hockey en el origen.)

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado tomando nota de que la función de energía potencial también puede expresarse como $U = \frac{1}{2}kr^2$. Escrita de este modo, U es función de una sola coordenada r, así que podemos calcular la fuerza con la ecuación (7.16) después de sustituir x por r:

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}kr^2\right) = -kr$$

Igual que en nuestro resultado anterior, la fuerza tiene magnitud kr; el signo menos indica que la fuerza está dirigida radialmente hacia adentro (hacia el origen).

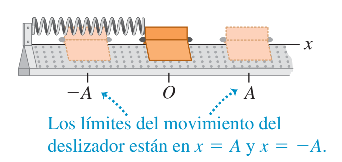
Evalúe su comprensión de la sección 7.4 Una fuerza conservativa F_x actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo del eje x. En cierto punto, la fuerza es cero. *a*) En ese punto, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca del valor de la función de energía potencial $U(x)$ es correcto? i) $U(x) = 0$; ii) $U(x) > 0$; iii) $U(x) < 0$; iv) no hay información suficiente para decidir. *b*) En ese punto, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca del valor de la derivada de $U(x)$ es correcto? i) $dU(x)/dx = 0$; ii) $dU(x)/dx > 0$; iii) $dU(x)/dx < 0$; iv) no hay información suficiente para decidir.

7.5 Diagramas de energía

Cuando una partícula se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza conservativa, podemos entender mejor los posibles movimientos examinando la gráfica de la función de energía potencial $U(x)$. La figura 7.23a muestra un deslizador con masa m que se mueve en el eje x sobre un riel de aire. El resorte ejerce sobre él una fuerza de magnitud $F_x = -kx$. La figura 7.23b es la gráfica de la función de energía potencial correspondiente $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Si la fuerza elástica del resorte es la *única* fuerza horizontal que actúa sobre el deslizador, la energía mecánica total $E = K + U$ es constante, independiente de x. En ese caso, una gráfica de E en función de x es una recta horizontal. Empleamos el término **diagrama de energía** para una gráfica así, la cual muestra tanto la función de energía potencial $U(x)$ como la energía de la partícula bajo la influencia de la fuerza que corresponde a $U(x)$.

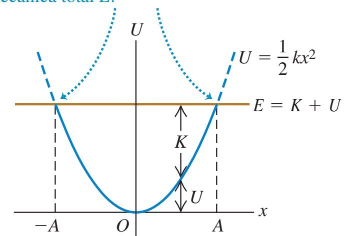
7.23 a) Deslizador en un riel de aire. El resorte ejerce una fuerza $F_x = -kx$. b) Función de energía potencial.

a)



b)

En la gráfica los límites del movimiento son los puntos donde la curva de U interseca la línea horizontal que representa la energía mecánica total E.



La distancia vertical entre las curvas de U y E en cada punto representa la diferencia $E - U$ y es igual a la energía cinética K en ese punto. Vemos que K es máxima en $x = 0$ y cero en los valores de x donde se cruzan las curvas (A y $-A$ en el diagrama). Así, la rapidez v es máxima en $x = 0$ y cero en $x = \pm A$, los puntos del *máximo* desplazamiento posible desde $x = 0$ para un valor dado de la energía total E. La energía potencial U nunca puede ser mayor que la energía total E, pues entonces K tendría que ser negativa, lo cual es imposible. El movimiento es una oscilación entre los puntos $x = A$ y $x = -A$.

En cada punto, la fuerza F_x sobre el deslizador es igual al negativo de la pendiente de la curva $U(x)$: $F_x = -dU/dx$ (véase la figura 7.22a). Cuando la partícula está en $x = 0$, la pendiente y la fuerza son cero, y tenemos una posición de *equilibrio*. Si x es positivo, la pendiente de la curva de $U(x)$ es positiva y F_x es negativa, dirigida hacia el origen. Si x es negativo, la pendiente es negativa y F_x es positiva, otra vez hacia el origen. Una fuerza así se denomina *fuerza restauradora*; si el deslizador se desplaza hacia cualquier lado de $x = 0$, la fuerza resultante tiende a "restaurarlo" a $x = 0$. Una situación parecida es una canica que rueda en una ensaladera de fondo redondo. Decimos que $x = 0$ es un punto de **equilibrio estable**. Más generalmente, *todo mínimo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio estable*.

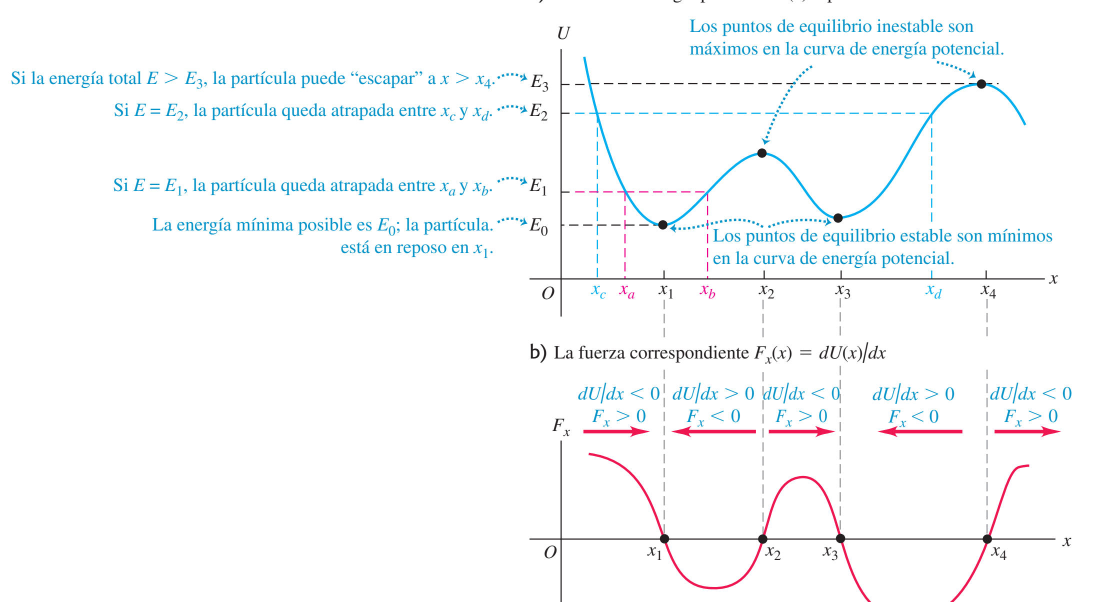
La figura 7.24a muestra una función de energía potencial $U(x)$ hipotética pero más general. La figura 7.24b ilustra la fuerza $F_x = -dU/dx$ correspondiente. Donde x_1 y x_3 son puntos de equilibrio estable. En ellos, $F_x = 0$ porque la pendiente de la curva $U(x)$ es cero. Si la partícula se desplaza hacia cualquier lado, la fuerza la empuja hacia el punto de equilibrio. La pendiente de la curva $U(x)$ también es cero en x_2 y x_4, que también son puntos de equilibrio. Sin embargo, cuando la partícula se desplaza un poco a la derecha de cualquiera de ellos, la pendiente de la curva de $U(x)$ se hace negativa, lo que corresponde a una F_x positiva que tiende a alejar más la partícula. Si ésta se desplaza un poco a la izquierda, F_x es negativa y también tiende a alejar a la partícula del equilibrio. Esto es similar a una canica que rueda sobre la parte superior de una bola de bolos. Los puntos x_2 y x_4 son puntos de **equilibrio inestable**; *todo máximo de una curva de energía potencial es una posición de equilibrio inestable.*

CUIDADO **Energía potencial y la dirección de una fuerza conservativa** La dirección de la fuerza sobre un cuerpo *no* está determinada por el signo de la energía potencial U; lo que importa es el signo de $F_x = -dU/dx$. Como vimos en la sección 7.1, la cantidad físicamente significativa es la *diferencia* en el valor de U entre dos puntos, y esto es lo que la

7.24 La función de energía potencial $U(x)$ corresponde a los puntos donde $F_x = 0$.







derivada $F_x = -dU/dx$ mide. Esto implica que podemos agregar cualquier constante a la función de energía potencial sin alterar la física de la situación.

Si la energía total es E_1 y la partícula está inicialmente cerca de x_1, sólo puede moverse en la región entre x_a y x_b determinada por la intersección de las curvas de E_1 y U (figura 7.24a). De nuevo, U no puede ser mayor que E_1 porque K no puede ser negativa. Decimos que la partícula se mueve en un *pozo de potencial*, y x_a y x_b son los *puntos de retorno* de su movimiento (pues en ellos la partícula se detiene e invierte su dirección). Si aumentamos la energía total al nivel E_2, la partícula puede ampliar su movimiento, de x_c a x_d. Si la energía total es mayor que E_3, la partícula puede "escapar" y alcanzar valores indefinidamente grandes de x. En el otro extremo, E_0 representa la energía total mínima posible que el sistema puede tener.

Evalúe su comprensión de la sección 7.5 En la figura 7.24b la curva tiene un máximo en el punto entre x_2 y x_3. Cuando está en dicho punto, ¿cuál enunciado describe correctamente lo que sucede a la partícula? i) La aceleración de la partícula es cero. ii) La partícula acelera en la dirección $+x$; la magnitud de la aceleración es menor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3. iii) La partícula acelera en la dirección $+x$; la magnitud de la aceleración es mayor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3. iv) La partícula acelera en la dirección $-x$; la magnitud de la aceleración es menor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3. v) La partícula acelera en la direccion $-x$; la magnitud de la aceleración es mayor que en cualquier otro punto entre x_2 y x_3.

CAPÍTULO 7 RESUMEN

Energía potencial gravitacional y energía potencial elástica: El trabajo efectuado sobre una partícula por una fuerza gravitacional constante puede representarse en términos de un cambio en la energía potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$. Esta energía es una propiedad compartida de la partícula y la Tierra. Una energía potencial también se asocia con la fuerza elástica $F_x = -kx$ ejercida por un resorte ideal, donde x es la distancia de estiramiento o compresión. El trabajo efectuado por esta fuerza puede representarse como un cambio en la energía potencial elástica del resorte, $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$.

$$\begin{aligned} W_{grav} &= mgy_1 - mgy_2 \\ &= U_{grav,1} - U_{grav,2} \\ &= -\Delta U_{grav} \end{aligned} \qquad (7.1),\ (7.3)$$

$$\begin{aligned} W_{el} &= \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \\ &= U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el} \end{aligned} \qquad (7.10)$$

y
$U_{grav,1} = mgy_1$
$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$
$x = 0$
x
$U_{grav,2} = mgy_2$
O

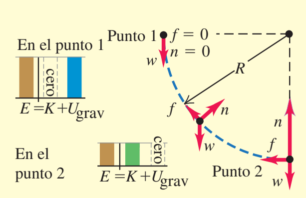
Cuando la energía mecánica total se conserva: La energía potencial total U es la suma de las energías potenciales gravitacional y elástica: $U = U_{grav} + U_{el}$. Si sólo fuerzas gravitacional y elástica realizan trabajo sobre una partícula, se conserva la suma de las energías cinética y potencial. Esta suma, $E = K + U$, se denomina energía mecánica total. (Véanse los ejemplos 7.1, 7.3, 7.4 y 7.7.)

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \qquad (7.4),\ (7.11)$$

y
h
O
x
En $y = h$
$E = K + U_{grav}$
En $y = 0$
cero
$E = K + U_{grav}$

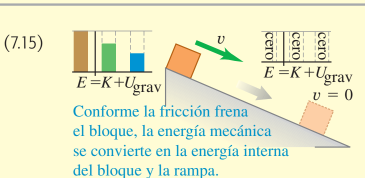
Cuando la energía mecánica total no se conserva: Cuando fuerzas distintas de la gravitacional y la elástica efectúan trabajo sobre una partícula, el trabajo W_{otras} realizado por estas otras fuerzas es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial total). (Véanse los ejemplos 7.2, 7.5, 7.6, 7.8 y 7.9.)

$$K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2 \qquad (7.14)$$



Fuerzas conservativas, fuerzas no conservativas y la ley de conservación de la energía: Todas las fuerzas son conservativas o bien no conservativas. Una fuerza conservativa es aquella para la cual la relación trabajo-energía cinética es totalmente reversible. El trabajo de una fuerza conservativa siempre puede representarse mediante una función de energía potencial, no así el de una fuerza no conservativa. El trabajo realizado por fuerzas no conservativas se manifiesta como cambios en la energía interna de los cuerpos. La suma de las energías cinética, potencial e interna siempre se conserva. (Véanse los ejemplos 7.10 a 7.12.)

$$\Delta K + \Delta U + \Delta U_{int} = 0 \qquad (7.15)$$

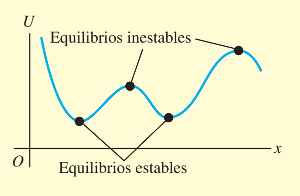


Cálculo de la fuerza a partir de la energía potencial: En un movimiento rectilíneo, una fuerza conservativa $F_x(x)$ es la derivada negativa de la función de energía potencial U asociada a ella. En tres dimensiones, las componentes de una fuerza conservativa son las derivadas parciales negativas de U. (Véanse los ejemplos 7.13 y 7.14.)

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (7.16)$$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad (7.17)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right) \qquad (7.18)$$



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La gravedad está efectuando trabajo positivo sobre el clavadista, pues esta fuerza tiene la misma dirección hacia abajo que el desplazamiento de aquél. Esto corresponde a una disminución en la energía potencial gravitacional. El agua está efectuando trabajo negativo sobre el clavadista; ejerce una fuerza hacia arriba debido a la resistencia de fluido mientras el clavadista se mueve hacia abajo. Esto corresponde a un incremento en la energía interna del clavadista y del agua (véase la sección 7.3).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

7.1 Respuesta: iii) La energía cinética inicial $K_1 = 0$, la energía potencial inicial $U_1 = mgy_1$ y la energía potencial final $U_2 = mgy_2$ son las mismas para ambos bloques. La energía mecánica se conserva en ambos casos, así que la energía cinética final $K = \frac{1}{2}mv_2^2$ también es la misma para ambos bloques. Por lo tanto, ¡la rapidez en el extremo derecho es la *misma* en ambos casos!

7.2 Respuesta: iii) El elevador aún se mueve hacia abajo, de manera que la energía cinética K es positiva (recuerde que K nunca puede ser negativa); el elevador está debajo del punto 1, así que $y < 0$ y $U_{grav} < 0$; y el resorte se comprime, por lo que $U_{el} > 0$.

7.3 Respuesta: iii) A causa de la fricción en las turbinas y entre el agua y las turbinas, algo de la energía potencial se pierde al calentar el agua y el mecanismo.

7.4 Respuestas: *a*) iv), *b*) i) Si $F_x = 0$ en un punto, la derivada de $U(x)$ en ese punto debe ser cero porque $F_x = -dU(x)/dx$. Sin embargo, esto no nos dice absolutamente nada acerca del *valor* de $U(x)$ en ese punto.

7.5 Respuesta: iii) La figura 7.24b muestra la componente de fuerza F_x. Donde esta tiene su valor máximo (más positivo), la componente x de la fuerza y la aceleración x tienen valores más positivos que en los valores adyacentes de x.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P7.1. Se lanza una pelota béisbol verticalmente hacia arriba con rapidez inicial v_0. Si no se desprecia la resistencia del aire, cuando la pelota vuelva a su altura inicial su rapidez será menor que v_0. Explique esto usando conceptos de energía.

P7.2. Un proyectil tiene la misma energía cinética inicial sin importar su ángulo de lanzamiento. ¿Por qué no alcanza la misma altura máxima en todos los casos?

P7.3. ¿La rapidez de un objeto en la base de una rampa sin fricción depende de la forma de la rampa o sólo de su altura? Explique su respuesta. ¿Y cuando la rampa *sí* tiene fricción?

P7.4. Se deja caer un huevo a partir del reposo desde la azotea de un edificio al suelo. Un estudiante en la azotea observa la caída, que usa coordenadas con origen en la azotea; y otro estudiante en el suelo usa coordenadas con origen en el suelo. ¿Asignan ambos valores iguales o diferentes a las energías potenciales gravitacionales inicial y final, al cambio de energía potencial gravitacional y a la energía cinética del huevo, justo antes de golpear el suelo? Explique su respuesta.

P7.5. Un profesor de física tenía una bola de boliche colgada de una cuerda muy larga sujeta al techo de una aula muy grande. Con la finalidad de ilustrar su fe en la conservación de la energía, gustaba de retroceder a un costado del estrado, tirando de la bola hasta que la tensa cuerda la dejaba llegar justo a la punta de su nariz, y luego la soltaba. La pesada bola describía un gran arco sobre el estrado y regresaba, parándose momentáneamente justo frente a la nariz del inmóvil e impávido profesor. Un día, después de la demostración, alzó la vista justo a tiempo para ver que un estudiante en el otro lado del estrado *empujaba* la bola después de tirar de ella hasta tenerla frente a su nariz, tratando de duplicar la demostración. Termine de contar la historia y explique el posiblemente trágico desenlace.

P7.6. ¿Energía perdida? El principio de conservación de la energía nos dice que la energía nunca se pierde, tan sólo cambia de una forma a otra. Sin embargo, en muchas situaciones cotidianas, parece que se pierde energía. En cada caso, explique qué le ocurre a la energía "perdida". *a*) Una caja que se desliza por el piso se detiene a causa de la fricción. ¿De qué manera la fricción se lleva su energía cinética, y que le sucede a tal energía? *b*) Un automóvil se detiene cuando usted aplica los frenos. ¿Qué le ocurre a su energía cinética? *c*) La resistencia del aire "consume" algo de la energía potencial gravitacional de un objeto que cae. ¿En qué tipo de energía se convirtió la energía potencial "perdida"? *d*) Cuando un transbordador espacial que regresa toca tierra, ha perdido casi toda su energía cinética y su energía potencial gravitacional. ¿A dónde se fue toda esa energía?

P7.7. ¿Una fuerza de fricción puede en algún caso *aumentar* la energía mecánica de un sistema? De ser así, mencione algunos ejemplos.

P7.8. Una clavadista rebota en un trampolín, yendo un poco más alto cada vez. Explique cómo aumenta la energía mecánica total.

P7.9. Física fracturada. A menudo las personas llaman recibo de *potencia* a su recibo de electricidad, aun cuando la cantidad en la que se basa está expresada en *kilowatt-horas*. ¿Qué es lo que en realidad se les cobra a las personas en tal recibo?

P7.10. Una piedra de masa m y otra de masa $2m$ se sueltan desde el reposo a la misma altura sin que sufran resistencia del aire durante la caída. ¿Qué enunciado sobre estas piedras es verdadero? (Puede haber más de una opción correcta.) *a*) Ambas tienen la misma energía potencial gravitacional inicial. *b*) Ambas tienen la misma energía cinética cuando llegan al suelo. *c*) Ambas llegan al suelo con la misma rapidez. *d*) Cuando llegan al suelo, la piedra más pesada tiene el doble de energía cinética que la más ligera. *e*) Cuando llegan al suelo, la piedra más pesada tiene cuatro veces la energía cinética que la más ligera.

P7.11. En un estanque congelado sin fricción, un disco de hockey se oprime contra un resorte ideal fijo (sin estar unido a él), comprimiendo

el resorte una distancia x_0. La energía máxima almacenada en el resorte es U_0, la rapidez máxima que el disco gana después de que se libera es v_0 y la energía cinética máxima es K_0. Ahora el disco se oprime de manera que comprime el resorte el doble que antes. En este caso, *a*) ¿cuál es la energía potencial máxima almacenada en el resorte (en términos de U_0)? y *b*) ¿cuáles son la energía cinética máxima y la rapidez (en términos de K_0 y de x_0) del disco?

P7.12. Cuando la gente siente frío, a menudo frota sus manos una contra la otra para calentarlas. ¿Cómo se produce calor al hacer esto? ¿De donde proviene el calor?

P7.13. A menudo se escucha decir que a final de cuentas la mayoría de la energía proviene del Sol. Rastree cada una de las siguientes energías al Sol. *a*) La energía cinética de un avión a reacción; *b*) la energía potencial ganada por un alpinista; *c*) la energía eléctrica usada para hacer funcionar una computadora; *d*) La energía eléctrica de una planta hidroeléctrica.

P7.14. Una caja se desliza hacia abajo por una rampa, en tanto que las fuerzas de gravedad y de fricción realizan trabajo sobre ella. ¿El trabajo realizado por cada una de estas fuerzas puede expresarse en términos del cambio en una función de energía potencial? Para cada fuerza explique el porqué.

P7.15. En términos físicos, explique por qué la fricción es una fuerza no conservativa. ¿Puede almacenar energía para uso futuro?

P7.16. Un resorte atado en su posición comprimida se disuelve en ácido. ¿Qué pasa con su energía potencial?

P7.17. Dado que sólo los cambios en la energía potencial son importantes en cualquier problema, un estudiante decide tomar la energía potencial elástica de un resorte como cero, cuando el resorte está estirado una distancia x_1. Entonces, el estudiante decide que $U = \frac{1}{2}k(x - x_1)^2$. ¿Esto es correcto? Explique su respuesta.

P7.18. La figura 7.22a muestra la función de energía potencial para la fuerza $F_x = -kx$. Dibuje esa función para la fuerza $F_x = +kx$. Para esta fuerza, ¿$x = 0$ es un punto de equilibrio? ¿Es equilibrio estable o inestable? Explique su respuesta.

P7.19. La figura 7.22b muestra la función de energía potencial asociada a la fuerza gravitacional entre un objeto y la Tierra. Use esta curva para explicar por qué los objetos siempre caen hacia la Tierra al soltarse.

P7.20. En un sistema de dos partículas, solemos considerar que la energía potencial para la fuerza entre las partículas se acerca a cero cuando la separación entre ellas se acerca a infinito. En tal caso, explique por qué la energía potencial con una separación no infinita es positiva si las partículas se repelen y negativa si se atraen.

P7.21. Explique por qué los puntos $x = A$ y $x = -A$ de la figura 7.23b se llaman *puntos de retorno*. ¿Qué relación hay entre los valores de E y U en un punto de retorno?

P7.22. Una partícula está en *equilibrio neutral* si la fuerza neta que actúa sobre ella es cero, y permanece cero si la partícula se desplaza un poco en cualquier dirección. Dibuje la función de energía potencial cerca de un punto de equilibrio neutral, para el caso de movimiento unidimensional. Dé un ejemplo de un objeto en equilibrio neutral.

P7.23. La fuerza neta sobre una partícula de masa m tiene la función de energía potencial graficada en la figura 7.24a. Si la energía total es E_1, dibuje la curva de la rapidez v de la partícula contra su posición x. ¿En qué valor de x es v máxima? Dibuje la curva si la energía total es E_2.

P7.24. La función de energía potencial de una fuerza $\vec{F}$ es $U = \alpha x^3$, donde α es una constante positiva. ¿Qué dirección tiene $\vec{F}$?

Ejercicios

Sección 7.1 Energía potencial gravitacional

7.1. En un día una alpinista de 75 kg asciende desde el nivel de 1500 m de un risco vertical hasta la cima a 2400 m. El siguiente día, desciende desde la cima hasta la base del risco, que está a una elevación de 1350 m. ¿Cuál es su cambio en energía potencial gravitacional *a*) durante el primer día y *b*) durante el segundo día?

7.2. Un saco de 5.00 kg de harina se levanta 15.0 m verticalmente con rapidez constante de 3.50 m/s. *a*) ¿Qué fuerza se requiere? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza esa fuerza sobre el saco? ¿Qué pasa con dicho trabajo?

7.3. Un saco de correo de 120 kg cuelga de una cuerda vertical de 3.5 m de longitud. Un trabajador de correos desplaza el saco a una posición lateral a 2.0 m de su posición original, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. *a*) ¿Qué fuerza horizontal se necesita para mantener el saco en la nueva posición? *b*) Cuando el saco se mueve a esta posición, ¿cuánto trabajo es efectuado i) por la cuerda y ii) por el trabajador?

7.4. Un nadador de 72 kg salta a la vieja piscina desde un trampolín que está a 3.25 m sobre el agua. Use la conservación de la energía para obtener su rapidez justo al momento de llegar al agua *a*) si él tan sólo se tapa la nariz y se deja caer, *b*) si se lanza valientemente directo hacia arriba (¡pero apenas más allá del trampolín!) a 2.50 m/s, y *c*) si se lanza hacia abajo a 2.50 m/s.

7.5. Se lanza una pelota de béisbol desde la azotea de un edificio de 22.0 m de altura con velocidad inicial de magnitud 12.0 m/s y dirigida con un ángulo de 53.1° sobre la horizontal. *a*) ¿Qué rapidez tiene la pelota justo antes de tocar el suelo? Use métodos de energía y desprecie la resistencia del aire. *b*) Repita pero con la velocidad inicial a 53.1° *abajo* de la horizontal. *c*) Si se incluye el efecto de la resistencia del aire, ¿en qué parte, *a*) o *b*), se obtiene una rapidez mayor?

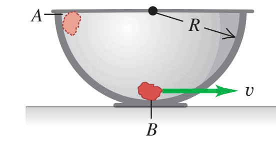
7.6. Una caja de masa M parte del reposo en la cima de una rampa sin fricción inclinada con un ángulo α sobre la horizontal. Calcule su rapidez en la base de la rampa, una distancia d desde donde inició. Obtenga la respuesta de dos maneras: *a*) Tome el nivel donde la energía potencial es cero como la base de la rampa con la dirección $+y$ hacia arriba. *b*) Tome el nivel cero para la energía potencial como la cima de la rampa con la dirección $+y$ hacia arriba. *c*) ¿Por qué no se tomó en cuenta la fuerza normal en la solución?

7.7. Resuelva el inciso *b*) del ejemplo 7.6 (sección 7.1) aplicando la ecuación (7.7) a los puntos 2 y 3, en vez de a los puntos 1 y 3 como se hizo en el ejemplo.

7.8. A una caja vacía se le da un empujón inicial y baja deslizándose por una rampa con rapidez inicial v_0, llegando a la base con rapidez v y energía cinética K. Se colocan unos libros en la caja, de modo que se cuadruplica la masa total. El coeficiente de fricción cinética es constante y la resistencia del aire es insignificante. Con la misma v_0 en el tope de la rampa ¿qué rapidez y energía cinética tendría ahora la caja al llegar a la base? Explique su razonamiento.

7.9. Una piedra con masa de 0.20 kg se libera del reposo en el punto A, en el borde de un tazón hemisférico de radio $R = 0.50$ m (figura 7.25). Suponga que la piedra es pequeña en comparación con R, así que puede tratarse como partícula y suponga que la piedra se desliza en vez de rodar. El trabajo efectuado por la fricción sobre la piedra al bajar del punto A al punto B en la base del tazón es de 0.22 J. *a*) Entre los puntos A y B, ¿cuánto trabajo es efectuado sobre la piedra por i) la fuerza normal y ii) la gravedad? *b*) ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar a B? c) De las tres fuerzas que actúan sobre la piedra cuando ésta se desliza hacia abajo por el tazón, ¿cuáles (si acaso) son constantes y cuáles no lo son? Explique su respuesta. *d*) Justo cuando la piedra llega al punto B, ¿cuál es la fuerza normal sobre ella hacia la base del tazón?

Figura 7.25 Ejercicio 7.9.



7.10. Una piedra de masa m se lanza hacia arriba a un ángulo θ sobre la horizontal y no experimenta resistencia del aire considerable. Use la conservación de la energía para demostrar que, en su punto más alto, la piedra está a una distancia $v_0^2(\mathrm{sen}^2\theta)/2g$ sobre el punto donde se lanzó. (*Sugerencia*: $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$.)

7.11. Imagine que, en un parque de diversiones, usted está probando una nueva montaña rusa con un carrito vacío de 120 kg de masa. Una parte de la vía es un rizo vertical con radio de 12.0 m. En el fondo del rizo (punto A), el carrito tiene rapidez de 25.0 m/s; y en la parte superior (punto B), de 8.0 m/s. ¿Cuánto trabajo efectúa la fricción cuando el carrito rueda del punto A al B?

7.12. Tarzán y Jane. Tarzán, en un árbol, ve a Jane en otro árbol. Él toma el extremo de una liana de 20 m que forma un ángulo de 45° con la vertical, se deja caer de su rama y describe un arco hacia abajo para llegar a los brazos de Jane. En este punto, su liana forma un ángulo de 30° con la vertical. Calcule la rapidez de Tarzán justo antes de llegar a donde está Jane para determinar si la abrazará tiernamente o la tirará de la rama. Puede hacer caso omiso de la resistencia del aire y la masa de la liana.

7.13. Un horno de microondas de 10.0 kg se empuja para subirlo 8.00 m por la superficie de una rampa inclinada a 36.9° sobre la horizontal, aplicando una fuerza constante $\vec{F}$ de magnitud 110 N, que actúa paralela a la rampa. El coeficiente de fricción cinética entre el horno y la rampa es de 0.250. *a*) ¿Qué trabajo realiza la fuerza $\vec{F}$ sobre el horno? *b*) ¿Y la fuerza de fricción? *c*) Calcule el aumento en la energía potencial del horno. *d*) Use sus respuestas de los incisos *a*), *b*) y *c*) para calcular el aumento en la energía cinética del horno. *e*) Use $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ para calcular la aceleración del horno. Suponiendo que el horno parte del reposo, use la aceleración para calcular la rapidez del horno después de recorrer 8.00 m. Calcule con esto el aumento en la energía cinética del horno y compare su respuesta con la respuesta del inciso *d*).

7.14. Péndulo. Una piedrita de 0.12 kg está atada a un hilo sin masa de 0.80 m de longitud, formando un péndulo que oscila con un ángulo máximo de 45° con la vertical. La resistencia del aire es despreciable. *a*) ¿Qué rapidez tiene la piedra cuando el hilo pasa por la posición vertical? *b*) ¿Qué tensión hay en el hilo cuando forma un ángulo de 45° con la vertical? *c*) ¿Y cuando pasa por la vertical?

Sección 7.2 Energía potencial elástica

7.15. Una fuerza de 800 N estira cierto resorte una distancia de 0.200 m. *a*) ¿Qué energía potencial tiene el resorte cuando se estira 0.200 m? *b*) ¿Y cuando se le comprime 5.00 cm?

7.16. Un resorte ideal de masa despreciable tiene 12.00 cm de longitud cuando nada se une a él. Cuando usted cuelga un peso de 3.15 kg del resorte, mide que la longitud de éste es de 13.40 cm. Si usted quisiera almacenar 10.0 J de energía potencial en este resorte, ¿cuál sería su longitud *total*? Suponga que sigue obedeciendo la ley de Hooke.

7.17. Un resorte almacena energía potencial U_0 cuando se comprime una distancia x_0 desde su longitud sin comprimir. *a*) En términos de U_0, ¿cuánta energía almacena el resorte cuando se comprime i) el doble de la distancia y ii) la mitad de la distancia? *b*) En términos de x_0, ¿cuánto debe comprimirse desde su longitud sin comprimir para almacenar i) el doble de energía y ii) la mitad de energía?

7.18. Una resortera dispara un guijarro de 10 g a una distancia de 22.0 m hacia arriba. *a*) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en la banda de caucho de la resortera? *b*) Con la misma energía potencial almacenada en la banda, ¿a qué altura puede dispararse un guijarro de 25 g? *c*) ¿Qué efectos físicos despreció al resolver este problema?

7.19. Un resorte de masa despreciable tiene una constante de fuerza $k = 1600$ N/m. *a*) ¿Qué tanto debe comprimirse para almacenar en él 3.20 J de energía potencial? *b*) El resorte se coloca verticalmente con un extremo en el piso, y se deja caer sobre él un libro de 1.20 kg desde una altura de 0.80 m. Determine la distancia máxima que se comprimirá el resorte.

7.20. Un queso de 1.20 kg se coloca en un resorte vertical con masa despreciable y constante de fuerza $k = 1800$ N/m que está comprimido 15.0 cm. Cuando se suelta el resorte, ¿qué altura alcanza el queso sobre su posición original? (El queso y el resorte *no* están unidos.)

7.21. Considere el deslizador del ejemplo 7.7 (sección 7.2) y la figura 7.16. Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué desplazamiento x tiene el deslizador con respecto a su posición de equilibrio cuando su rapidez es de 0.20 m/s? (Usted debería obtener más de una respuesta. Explique por qué.)

7.22. Considere el deslizador del ejemplo 7.8 (sección 7.2) y la figura 7.16. *a*) Igual que en el ejemplo, el deslizador se suelta del reposo con el resorte estirado 0.100 m. ¿Qué rapidez tiene el deslizador cuando regresa a $x = 0$? *b*) ¿Qué desplazamiento inicial debe tener el deslizador para que su rapidez máxima en el movimiento subsecuente sea de 2.50 m/s?

7.23. Una masa de 2.50 kg se empuja contra un resorte horizontal, cuya constante de fuerza es de 25.0 N/cm, sobre una mesa de aire sin fricción. El resorte está unido a la superficie de la mesa, en tanto que la masa no está unida al resorte de ninguna manera. Cuando el resorte se comprime lo suficiente como para almacenar 11.5 J de energía potencial en él, la masa se libera repentinamente del reposo. *a*) Encuentre la rapidez máxima que alcanza la masa. ¿Cuándo ocurre? *b*) ¿Cuál es la aceleración máxima de la masa, y cuando ocurre?

7.24. *a*) ¿Qué rapidez tiene el elevador del ejemplo 7.9 (sección 7.2) después de haber bajado 1.00 m desde el punto 1 de la figura 7.17? *b*) ¿Qué aceleración tiene el elevador cuando está 1.00 m abajo del punto 1 de la figura 7.17?

7.25. Imagine que le piden diseñar un resorte que confiera a un satélite de 1160 kg una rapidez de 2.50 m/s relativa a un transbordador espacial en órbita. El resorte debe imprimir al satélite una aceleración máxima de $5.00g$. La masa del resorte, la energía cinética de retroceso del transbordador y los cambios en la energía potencial gravitacional serán despreciables. *a*) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? *b*) ¿Qué distancia debe comprimirse el resorte?

Sección 7.3 Fuerzas conservativas y no conservativas

7.26. Un reparador de azoteas de 75 kg sube por una escalera vertical de 7.0 m al techo plano de una casa. Después, camina 12 m sobre el techo, desciende por otra escalera vertical de 7.0 m y, por último, camina por el suelo regresando a su punto de partida. ¿Cuánto trabajo hizo sobre él la gravedad *a*) cuando subió; *b*) cuando bajó; *c*) cuando caminó por el techo y por el suelo? *d*) ¿Cuál es el trabajo total efectuado por la gravedad sobre él durante todo el recorrido? *e*) Con base en su respuesta al inciso *d*), diría usted que la gravedad es una fuerza conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.27. Se tira de una caja de 10.0 kg usando un alambre horizontal en un círculo sobre una superficie horizontal áspera, cuyo coeficiente de fricción cinética es de 0.250. Calcule el trabajo efectuado por la fricción durante un recorrido circular completo, si el radio es *a*) de 2.00 m y *b*) de 4.00 m. *c*) Con base en los resultados que acaba de obtener, diría usted que la fricción es una fuerza conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

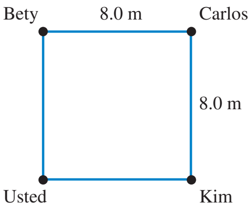
7.28. En un experimento, una de las fuerzas ejercidas sobre un protón es $\vec{F} = -\alpha x^2\hat{\imath}$, donde $\alpha = 12$ N/m². *a*) ¿Cuánto trabajo efectúa $\vec{F}$ cuando el protón se desplaza sobre la recta del punto (0.10 m, 0) al

punto (0.10 m, 0.40 m)? *b*) ¿Y sobre la recta del punto (0.10 m, 0) al punto (0.30 m, 0)? *c*) ¿Y sobre la recta del punto (0.30 m, 0) al punto (0.10 m, 0)? *d*) ¿$\vec{F}$ es una fuerza conservativa? Explique su respuesta. Si $\vec{F}$ es conservativa, ¿cuál es su función de energía potencial? Sea $U = 0$ cuando $x = 0$.

7.29. Un libro de 0.60 kg se desliza sobre una mesa horizontal. La fuerza de fricción cinética que actúa sobre el libro tiene una magnitud de 1.2 N. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el libro durante un desplazamiento de 3.0 m a la izquierda? *b*) Ahora el libro se desliza 3.0 m a la derecha, volviendo al punto inicial. Durante este segundo desplazamiento de 3.0 m, ¿qué trabajo efectúa la fricción sobre el libro? *c*) ¿Qué trabajo total efectúa la fricción sobre el libro durante el recorrido completo? *d*) Con base en su respuesta al inciso *c*), ¿diría que la fuerza de fricción es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.30. Usted y tres amigos están parados en las esquinas de un cuadrado de 8.0 m de lado, en el piso de un gimnasio (figura 7.26). Toman su libro de física y lo empujan de una persona a otra. La masa del libro es de 1.5 kg y el coeficiente de fricción cinética entre el libro y el piso es $\mu_k = 0.25$. *a*) El libro se desliza de usted a Bety y luego de Bety a Carlos a lo largo de las líneas que conectan a estas personas. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? *b*) Usted desliza el libro hacia Carlos a lo largo de la diagonal del cuadrado. ¿Qué trabajo realiza la fricción durante este desplazamiento? *c*) Usted desliza el libro a Kim, quien se lo devuelve. ¿Qué trabajo total realiza la fricción durante este movimiento del libro? *d*) ¿La fuerza de fricción sobre el libro es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

Figura 7.26 Ejercicio 7.30.



7.31. Un bloque con masa m está unido a un resorte ideal con constante de fuerza k. *a*) El bloque se mueve de x_1 a x_2 (donde $x_2 > x_1$). ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante este desplazamiento? *b*) El bloque se mueve de x_1 a x_2 y luego de x_2 a x_1. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante el desplazamiento de x_2 a x_1? ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte durante todo el desplazamiento $x_1 \to x_2 \to x_1$? Explique su respuesta. *c*) El bloque se mueve de x_1 a x_3 (donde $x_3 > x_2$). ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza del resorte durante este desplazamiento? Después, el bloque se mueve de x_3 a x_2. ¿Cuál es el trabajo realizado por el resorte durante este desplazamiento? ¿Cuál es el trabajo total realizado por el resorte durante el desplazamiento de $x_1 \to x_3 \to x_2$? Compare su respuesta con la respuesta del inciso *a*), donde los puntos inicial y final son los mismos pero la trayectoria es distinta.

Sección 7.4 Fuerza y energía potencial

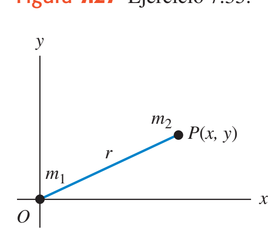
7.32. La energía potencial de un par de átomos de hidrógeno separados una distancia grande x está dada por $U(x) = -C_6/x^6$, donde C_6 es una constante positiva. ¿Qué fuerza ejerce un átomo sobre otro? ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión?

7.33. Una fuerza paralela al eje x actúa sobre una partícula que se mueve sobre el eje x. La fuerza produce una energía potencial $U(x)$ dada por $U(x) = \alpha x^4$, donde $\alpha = 1.20\ \text{J/m}^4$. ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza cuando la partícula está en $x = -0.800$ m?

7.34. Gravedad en una dimensión. Dos masas puntuales, m_1 y m_2, yacen en el eje x, con m_1 fija en el origen y m_2 en una posición x y libre para moverse. La energía potencial gravitacional de estas masas es $U(x) = -Gm_1m_2/x$, donde G es una constante (llamada *constante gravitacional*). Usted aprenderá más sobre la gravitación en el capítulo 12. Obtenga la componente x de la fuerza que actúa sobre m_2 debida a m_1. ¿Esta fuerza es de atracción o de repulsión? ¿Cómo lo sabe?

7.35. Gravedad en dos dimensiones. Dos masas puntuales, m_1 y m_2, yacen en el plano xy, con m_1 fija en el origen, y m_2 con libre movimiento y a una distancia r en un punto P, cuyas coordenadas son x y y (figura 7.27). La energía potencial gravitacional de estas masas es $U(r) = -Gm_1m_2/r$, donde G es la constante gravitacional. Demuestre que las componentes de la fuerza sobre m_2 debida a m_1 son

Figura 7.27 Ejercicio 7.35.



$$F_x = -\frac{Gm_1m_2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{y} \quad F_y = -\frac{Gm_1m_2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

(*Sugerencia*: primero escriba r en términos de x y y.) *b*) Demuestre que la magnitud de la fuerza sobre m_2 es $F = Gm_1m_2/r^2$. *c*) ¿m_1 atrae o repele a m_2? ¿Cómo lo sabe?

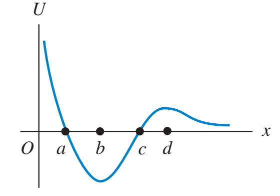
7.36. Sobre un objeto que se mueve en el plano xy actúa una fuerza conservativa descrita por la función de energía potencial $U(x, y) = \alpha(1/x^2 + 1/y^2)$, donde α es una constante positiva. Deduzca una expresión para la fuerza expresada en términos de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$.

Sección 7.5 Diagramas de energía

7.37. La energía potencial de dos átomos en una molécula diatómica se aproxima con $U(r) = a/r^{12} - b/r^6$, donde r es la distancia entre los átomos y a y b son constantes positivas. *a*) Determine la fuerza $F(r)$ que actúa sobre un átomo en función de r. Haga dos gráficas, una de $U(r)$ contra r y otra de $F(r)$ contra r. *b*) Encuentre la distancia de equilibrio entre los dos átomos. ¿Es estable el equilibrio? *c*) Suponga que los átomos están a la distancia de equilibrio obtenida en el inciso *b*). ¿Qué energía mínima debe agregarse a la molécula para *disociarla*, es decir, para separar los dos átomos una distancia infinita? Ésta es la *energía de disociación* de la molécula. *d*) Para la molécula CO, la distancia de equilibrio entre los átomos de carbono y oxígeno es de 1.13×10^{-10} m y la energía de disociación es de 1.54×10^{-18} J por molécula. Calcule los valores de las constantes a y b.

7.38. Una canica se mueve sobre el eje x. La función de energía potencial se muestra en la figura 7.28. *a*) ¿En cuál de las coordenadas x marcadas es cero la fuerza sobre la canica? *b*) ¿Cuál de esas coordenadas es una posición de equilibrio estable? *c*) ¿Y de equilibrio inestable?

Figura 7.28 Ejercicio 7.38.

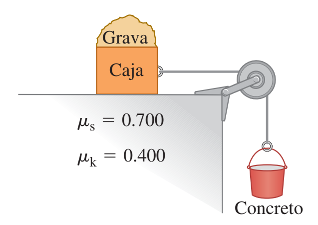


Problemas

7.39. En una obra en construcción, una cubeta de 65.0 kg de concreto cuelga de un cable ligero (pero resistente), que pasa por una polea ligera sin fricción y está conectada una caja de 80.0 kg que está en un techo horizontal (figura 7.29). El cable tira horizontalmente de la caja y una bolsa de grava de 50.0 kg descansa sobre la parte superior de

la caja. Se indican los coeficientes de fricción entre la caja y el techo. *a*) Obtenga la fuerza de fricción sobre la bolsa de grava y sobre la caja. *b*) Repentinamente un trabajador quita la bolsa de grava. Utilice la conservación de la energía para calcular la rapidez de la cubeta luego de haya descendido 2.00 m partiendo del reposo. (Usted puede verificar su respuesta resolviendo este problema con las leyes de Newton.)

Figura 7.29 Problema 7.39.

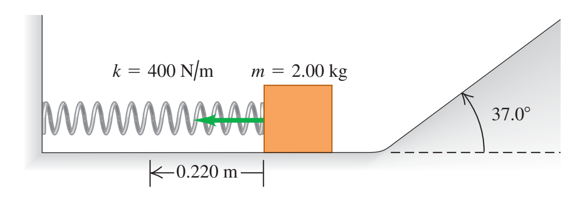


7.40. Dos bloques con diferente masa están unidos a cada uno de los extremos de una cuerda ligera, que pasa por una polea ligera sin fricción que está suspendida del techo. Los bloques se sueltan desde el reposo y el más pesado comienza a descender. Una vez que este bloque ha descendido 1.20 m, su rapidez es de 3.00 m/s. Si la masa total de los dos bloques es de 15.0 kg, ¿qué masa tiene cada bloque?

7.41. Física legal. En un accidente de tránsito, un automóvil golpeó a un peatón y luego el conductor pisó el freno para detener el auto. Durante el juicio subsecuente, el abogado del conductor alegó que éste había respetado el límite de rapidez de 35 mph que indicaban los letreros; pero que esa rapidez permitida era demasiado alta para que el conductor pudiera ver y reaccionar a tiempo ante el peatón. Imagine que el fiscal le llama como testigo experto. Su investigación del accidente produce las mediciones siguientes: las marcas de derrape producidas durante el tiempo en que los frenos estaban aplicados tenían una longitud de 280 ft, y el dibujo de los neumáticos produjo un coeficiente de fricción cinética de 0.30 con el pavimento. *a*) En su testimonio en el juzgado, ¿dirá que el conductor conducía respetando el límite de rapidez? Usted deberá ser capaz de respaldar su conclusión con un razonamiento claro, porque es seguro que uno de los abogados lo someterá a un interrogatorio. *b*) Si la multa por exceso de rapidez fuera de \$10 por cada mph más allá del límite de rapidez permitido, ¿el conductor tendría que pagar multa y, en tal caso, de cuánto sería?

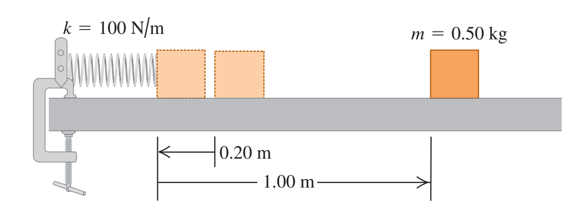
7.42. Un bloque de 2.00 kg se empuja contra un resorte con masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m, comprimiéndolo 0.220 m. Al soltarse el bloque, se mueve por una superficie sin fricción que primero es horizontal y luego sube a 37.0° (figura 7.30). *a*) ¿Qué rapidez tiene el bloque al deslizarse sobre la superficie horizontal después de separarse del resorte? *b*) ¿Qué altura alcanza el bloque antes de pararse y regresar?

Figura 7.30 Problema 7.42.



7.43. Un bloque con masa de 0.50 kg se empuja contra un resorte horizontal de masa despreciable, comprimiéndolo 0.20 m (figura 7.31). Al soltarse, el bloque se mueve 1.00 m sobre una mesa horizontal antes de detenerse. La constante del resorte es $k = 100$ N/m. Calcule el coeficiente de fricción cinética μ_k entre el bloque y la mesa.

Figura 7.31 Problema 7.43.



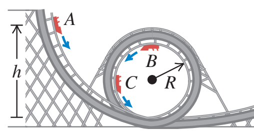
7.44. En una superficie horizontal, una caja con masa de 50.0 kg se coloca contra un resorte que almacena 360 J de energía. El resorte se suelta y la caja se desliza 5.60 m antes de detenerse. ¿Qué rapidez tiene la caja cuando está a 2.00 m de su posición inicial?

7.45. Rebote de pelota. Una pelota de caucho de 650 gramos se deja caer desde una altura de 2.50 m y en cada rebote alcanza el 75% de la altura que alcanzó en el rebote anterior. *a*) Calcule la energía mecánica inicial de la pelota, inmediatamente después de soltarse desde la altura original. *b*) ¿Cuánta energía mecánica pierde la pelota en su primer rebote? ¿Qué sucede con esa energía? *c*) ¿Cuánta energía mecánica se pierde durante el segundo rebote?

7.46. Rizo vertical. Un carrito de un juego de un parque de diversiones rueda sin fricción por la vía de la figura 7.32, partiendo del reposo en A a una altura h sobre la base del rizo. Trate el carrito como partícula. *a*) ¿Qué valor mínimo debe tener h (en términos de R) para que el carrito se desplace por el rizo sin caer en la parte superior (el punto B)? *b*) Si $h = 3.50R$ y $R = 20.0$ m, calcule la rapidez, aceleración radial y aceleración tangencial de los pasajeros cuando el carrito está en el punto C, en el extremo de un diámetro horizontal. Haga un diagrama a escala aproximada de las componentes de la aceleración.

Figura 7.32 Problema 7.46.





7.47. Un trozo de madera de 2.0 kg resbala por la superficie que se muestra en la figura 7.33. Los lados curvos son perfectamente lisos; pero el fondo horizontal tiene una longitud de 30 m y es áspero, con coeficiente de fricción cinética de 0.20 con la madera. El trozo de madera parte del reposo 4.0 m arriba del fondo áspero. *a*) ¿Dónde se detendrá finalmente este objeto? *b*) Para el movimiento desde que se suelta la madera hasta que se detiene, ¿cuál es el trabajo total que realiza la fricción?

Figura 7.33 Problema 7.47.

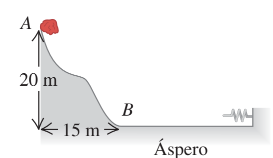
Madera

Fondo áspero

7.48. Subir y bajar la loma. Una roca de 28 kg se acerca al pie de una loma con rapidez de 15 m/s. La ladera de la loma tiene un ángulo constante de 40.0° sobre la horizontal. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la loma y la roca son 0.75 y 0.20, respectivamente. *a*) Use la conservación de la energía para obtener la altura máxima por arriba del pie de la loma a la que subirá la roca. *b*) ¿La roca permanecerá en reposo en ese punto más alto o se deslizará cuesta abajo? *c*) Si la roca resbala hacia abajo, calcule su rapidez cuando vuelva al pie de la loma.

7.49. Una piedra de 15.0 kg baja deslizándose una colina nevada (figura 7.34), partiendo del punto A con una rapidez de 10.0 m/s. No hay fricción en la colina entre los puntos A y B, pero sí en el terreno plano en la base, entre B y la pared. Después de entrar en la región ás-

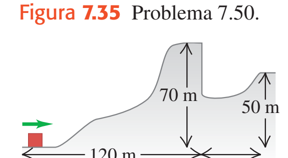
Figura 7.34 Problema 7.49.



pera, la piedra recorre 100 m y choca con un resorte muy largo y ligero, cuya constante de fuerza es de 2.00 N/m. Los coeficientes de fricción cinética y estática entre la piedra y el suelo horizontal son de 0.20 y 0.80, respectivamente. *a*) ¿Qué rapidez tiene la piedra al llegar al punto *B*? *b*) ¿Qué distancia comprimirá la piedra al resorte? *c*) ¿La piedra se moverá otra vez después de haber sido detenida por el resorte?

7.50. Un bloque de 2.8 kg que se desliza remonta la colina lisa, cubierta de hielo, de la figura 7.35. La cima de la colina es horizontal y está 70 m más arriba que su base. ¿Qué rapidez mínima debe tener el bloque en la base de la colina para no quedar atrapada en el foso al otro lado de la colina?

Figura 7.35 Problema 7.50.



7.51. Salto con bungee. La cuerda del bungee tiene 30.0 m de longitud y, estirada una distancia *x*, ejerce una fuerza restauradora de magnitud *kx*. Imagine que su suegro, cuya masa es de 95.0 kg, está parado en una plataforma 45.0 m sobre el suelo, con un extremo del bungee atado firmemente a su tobillo (y el otro extremo atado a la plataforma). Usted le ha prometido que, cuando se deje caer de la plataforma, caerá una distancia máxima de sólo 41.0 m antes de que el bungee lo detenga. Usted tenía varias cuerdas de bungee para elegir y las probó atándolas a un árbol y estirándolas tirando del otro extremo con una fuerza de 380.0 N. Durante esas pruebas, ¿qué distancia se estiró el bungee que debe elegir?

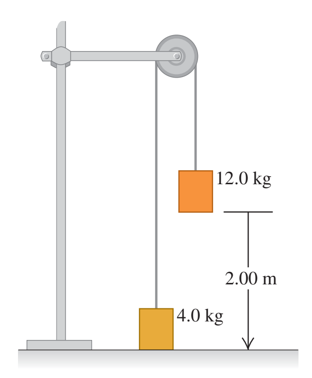
7.52. Rampa de salto en esquí. Imagine que está diseñando una rampa de salto en esquí para los siguientes Juegos Olímpicos Invernales. Necesita calcular la altura vertical *h* desde la puerta de salida hasta la base de la rampa. Los esquiadores se empujan con vigor en la salida de modo que, por lo regular, tienen una rapidez de 2.0 m/s al llegar a la puerta de salida. Por cuestiones de seguridad, los esquiadores no deben tener una rapidez mayor que 30.0 m/s al llegar a la base de la rampa. Usted determina que, para un esquiador de 85.0 kg bien entrenado, la fricción y la resistencia del aire efectuarán en total 4000 J de trabajo sobre él durante su descenso. Determine la altura máxima *h* con la que no se excederá la máxima rapidez segura.

7.53. El Gran Sandini es un cirquero de 60 kg que es disparado por un cañón de resorte. No son comunes los hombres de su calibre, así que usted le ayudará a diseñar un nuevo cañón, el cual tendrá un resorte muy grande de masa muy pequeña y constante de fuerza de 1100 N/m. El resorte se comprimirá con una fuerza de 4400 N. El interior del cañón está recubierto con teflón, por lo que la fuerza de fricción media es de sólo 40 N durante los 4.0 m que el cirquero se mueve dentro de él. ¿Con qué rapidez sale el cirquero del extremo del cañón, 2.5 m arriba de su posición inicial en reposo?

7.54. Imagine que está diseñando una rampa de entrega para cajas que contienen equipo para gimnasio. Las cajas de 1470 N tendrán una rapidez de 1.8 m/s en la parte más alta de una rampa inclinada 22.0° hacia abajo. La rampa ejerce una fuerza de fricción cinética de 550 N sobre cada caja, y la fricción estática máxima también tiene este valor. Cada caja comprimirá un resorte en la base de la rampa y se detendrá después de recorrer una distancia total de 8.0 m sobre la rampa. Una vez detenidas, las cajas no deben rebotar en el resorte. Calcule la constante de fuerza que debe tener el resorte para satisfacer los criterios de diseño.

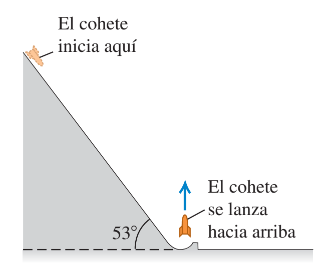
7.55. Un sistema que consta de dos cubetas de pintura conectadas por una cuerda ligera se suelta del reposo con la cubeta de pintura de 12.0 kg a 2.00 m sobre el piso (figura 7.36). Use el principio de conservación de la energía para calcular la rapidez con que esta cubeta golpea el piso. Puede ignorar la fricción y la masa de la polea.

Figura 7.36 Problema 7.55.



7.56. Un cohete de 1500 kg se lanza con una rapidez inicial ascendente de 50.0 m/s. Para ayudar a los motores, los ingenieros lo lanzarán desde el reposo sobre una rampa que se eleva 53° por arriba de la horizontal (figura 7.37). En la base, la rampa da vuelta hacia arriba y lanza el cohete verticalmente. Los motores proporcionan un empuje hacia delante constante de 2000 N, y la fricción con la superficie de la rampa es una constante de 500 N. ¿Qué tan lejos de la base de la rampa debería empezar el cohete, medido a lo largo de la superficie de la rampa?

Figura 7.37 Problema 7.56.



7.57. Una pieza de maquinaria de masa *m* se une a un resorte ideal horizontal con constante de fuerza *k* que está unido al borde de una superficie horizontal sin fricción. La pieza se empuja contra el resorte, comprimiéndolo una distancia x_0, y luego se libera desde el reposo. Encuentre *a*) la rapidez y *b*) la aceleración máximas de la pieza de maquinaria. *c*) ¿En qué parte del movimiento ocurren los máximos de los incisos *a*) y *b*)? *d*) ¿Cuál sería la extensión máxima del resorte? *e*) Describa el movimiento subsecuente de esta pieza de maquinaria. ¿Alguna vez se detendrá permanentemente?

7.58. Una tira de madera con masa despreciable y longitud de 80.0 cm gira sobre un eje horizontal que pasa por su centro. Una rata blanca con masa de 0.500 kg se aferra a un extremo y un ratón con masa de 0.200 kg se aferra al otro de la tira, la cual está horizontal cuando el sistema se libera del reposo. Si los animales logran permanecer asidos, ¿qué rapidez tiene cada uno cuando la tira pasa por la vertical?

7.59. Una papa de 0.100 kg está atada a un hilo de 2.50 m, cuyo otro extremo está atado a un soporte rígido. La papa se sostiene con el hilo tensado horizontalmente y se suelta. *a*) ¿Qué rapidez tiene la papa en el punto más bajo de su movimiento? *b*) ¿Qué tensión hay en el hilo en ese punto?

7.60. Los siguientes datos son de una simulación por computadora de una pelota de béisbol de 0.145 kg al ser bateada, considerando la resistencia del aire:

t	x	y	v_x	v_y
0	0	0	30.0 m/s	40.0 m/s
3.05 s	70.2 m	53.6 m	18.6 m/s	0
6.59 s	124.4 m	0	11.9 m/s	−28.7 m/s

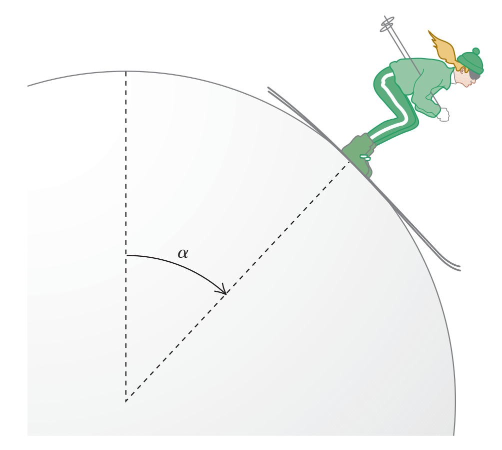
a) ¿Cuánto trabajo realizó el aire sobre la pelota al viajar ésta de su posición inicial a su máxima altura? *b*) ¿Y al bajar de la altura máxima a la altura inicial? *c*) Explique por qué la magnitud del trabajo calculado en el inciso *b*) es menor que la del calculado en el inciso *a*).

7.61. Bajar el poste. Un bombero de masa m parte del reposo y baja una distancia d deslizándose por un poste. Al final, él se mueve con tanta rapidez como si se hubiera dejado caer desde una plataforma de altura $h \leq d$ con resistencia del aire despreciable. *a*) ¿Qué fuerza de fricción media ejerció el bombero sobre el poste? ¿Es lógica su respuesta en los casos especiales de $h = d$ y $h = 0$? *b*) Calcule la fuerza de fricción promedio que ejerce un bombero de 75.0 kg si $d = 2.5$ m y $h = 1.0$ m. *c*) En términos de g, h y d, ¿qué rapidez tiene el bombero cuando está una distancia y arriba de la base del poste?

7.62. Una esquiadora de 60.0 kg parte del reposo en la cima de una ladera de 65.0 m de altura. *a*) Si las fuerzas de fricción efectúan −10.5 kJ de trabajo sobre ella al descender, ¿qué rapidez tiene al pie de la ladera? *b*) Ahora la esquiadora se mueve horizontalmente y cruza un terreno de nieve revuelta, donde $\mu_k = 0.20$. Si el terreno tiene 82.0 m de anchura y la fuerza promedio de la resistencia del aire que actúa sobre la esquiadora es de 160 N, ¿qué rapidez tiene ella después de cruzar esa zona? *c*) Ahora la esquiadora choca contra un montón de nieve, penetrando 2.5 m antes de parar. ¿Qué fuerza promedio ejerce la nieve sobre ella al detenerla?

7.63. Una esquiadora parte del tope de una enorme bola de nieve sin fricción, con rapidez inicial muy pequeña, y baja esquiando por el costado (figura 7.38). ¿En qué punto pierde ella contacto con la bola de nieve y sigue una trayectoria tangencial? Es decir, en el instante en que ella pierde contacto con la nieve, ¿qué ángulo α forma con la vertical una línea radial que va del centro de la bola a la esquiadora?

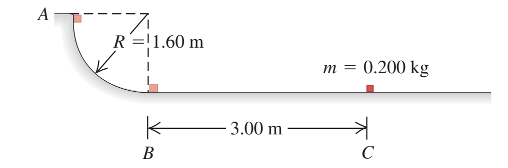
Figura 7.38 Problema 7.63.



7.64. Una roca está atada a un cordón cuyo otro extremo está fijo. Se imparte a la roca una velocidad tangencial inicial que la hace girar en un círculo vertical. Demuestre que la tensión en el cordón en el punto más bajo es mayor que la tensión en el punto más alto por un factor de 6 veces el peso de la roca.

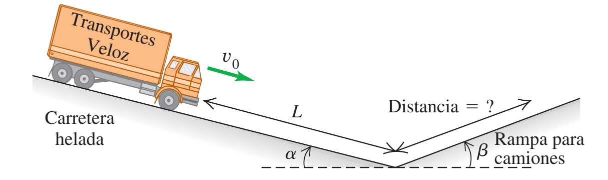
7.65. En un puesto de carga de camiones de una oficina de correos, un paquete pequeño de 0.200 kg se suelta del reposo en el punto A de una vía que forma un cuarto de círculo con radio de 1.60 m (figura 7.39). El paquete es tan pequeño relativo a dicho radio que puede tratarse como partícula. El paquete se desliza por la vía y llega al punto B con rapidez de 4.80 m/s. A partir de aquí, el paquete se desliza 3.00 m sobre una superficie horizontal hasta el punto C, donde se detiene. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción cinética tiene la superficie horizontal? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza la fricción sobre el paquete al deslizarse éste por el arco circular entre A y B?

Figura 7.39 Problema 7.65.



7.66. Los frenos de un camión de masa m fallan al bajar por una carretera helada con un ángulo de inclinación α constante hacia abajo. (figura 7.40). Inicialmente, el camión baja con rapidez v_0. Después de bajar una distancia L con fricción despreciable, el conductor guía el camión desbocado hacia una rampa de seguridad con ángulo β constante hacia arriba. La rampa tiene una superficie arenosa blanda donde el coeficiente de fricción por rodamiento es μ_r. ¿Qué distancia sube el camión por la rampa antes de detenerse? Use métodos de energía.

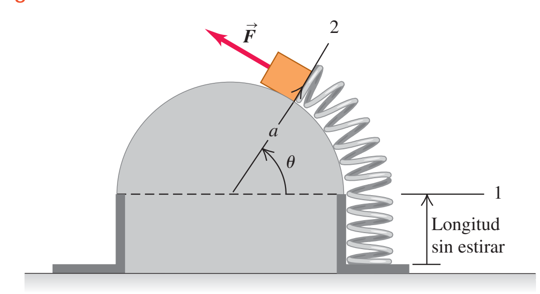
Figura 7.40 Problema 7.66.



7.67. Cierto resorte *no* obedece la ley de Hooke; ejerce una fuerza de restauración $F_x(x) = -\alpha x - \beta x^2$ si se estira o comprime, donde $\alpha = 60.0$ N/m y $\beta = 18.0$ N/m^2. Se desprecia la masa del resorte. *a*) Calcule la función de energía potencial $U(x)$ del resorte. Sea $U = 0$ cuando $x = 0$. *b*) Un objeto con masa de 0.900 kg en una superficie horizontal sin fricción se une a este resorte, se tira de él hasta desplazarlo 1.00 m a la derecha (dirección $+x$) para estirar el resorte, y se suelta. ¿Qué rapidez tiene el objeto cuando está 0.50 m a la derecha de la posición de equilibrio $x = 0$?

7.68. Una fuerza variable $\vec{F}$ se mantiene tangente a una superficie semicircular sin fricción (figura 7.41). Se varía lentamente la fuerza para

Figura 7.41 Problema 7.68.

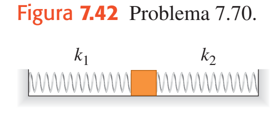


mover un bloque de peso w, estirando de la posición 1 a la 2 un resorte que está unido al bloque. El resorte tiene masa despreciable y constante de fuerza k. El extremo del resorte describe un arco de radio a. Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$.

7.69. Un bloque de hielo de 0.150 kg se coloca contra un resorte horizontal comprimido montado en una mesa horizontal que está a 1.20 m sobre el piso. El resorte tiene una constante de fuerza de 1900 N/m y masa despreciable, y está comprimido inicialmente 0.045 m. El resorte se suelta y el bloque se desliza sobre la mesa, cae por el borde y se sigue deslizando por el piso. Si la fricción entre el hielo y la mesa es despreciable, ¿qué rapidez tiene el bloque al llegar al piso?

7.70. Un bloque de 3.00 kg está unido a dos resortes ideales horizontales, cuyas constantes de fuerza son $k_1 = 25.0$ N/cm y $k_2 = 20.0$ N/cm (figura 7.42). El sistema está inicialmente en equilibrio sobre una superficie horizontal sin fricción. Ahora el bloque se empuja 15.0 cm a la derecha y se suelta del reposo. *a*) ¿Cuál es la rapidez máxima del bloque? ¿En qué parte del movimiento ocurre la rapidez máxima? *b*) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte 1?

Figura 7.42 Problema 7.70.



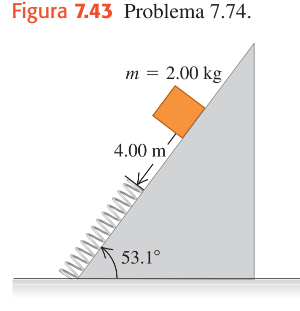
7.71. Un aparato experimental de masa m se coloca sobre un resorte vertical de masa despreciable y se empuja hasta comprimirlo una distancia x. El aparato se suelta y alcanza su altura máxima a una distancia h sobre el punto donde se soltó. El aparato no está unido al resorte, y ya no está en contacto con éste al alcanzar la altura h. La magnitud de aceleración que el aparato resiste sin dañarse es a, donde $a > g$. *a*) ¿Qué constante de fuerza debe tener el resorte? *b*) ¿Qué distancia x debe comprimirse el resorte inicialmente?

7.72. Si un pez se sujeta a un resorte vertical y se baja suavemente a su posición de equilibrio, estira el resorte una distancia d. Si el mismo pez se sujeta al resorte no estirado y se deja caer desde el reposo, ¿cuánto llega a estirar el resorte? (*Sugerencia:* calcule la constante de fuerza del resorte en términos de d y la masa m del pez.)

7.73. Un bloque de madera con masa de 1.50 kg se coloca contra un resorte comprimido en la base de una pendiente de 30.0° (punto A). Al soltarse el resorte, el bloque sube por la pendiente. En el punto B, 6.00 m pendiente arriba de A, el bloque tiene una rapidez de 7.00 m/s dirigida pendiente arriba y ya no está en contacto con el resorte. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la pendiente es $\mu_k = 0.50$. La masa del resorte es despreciable. Calcule la energía potencial almacenada inicialmente en el resorte.

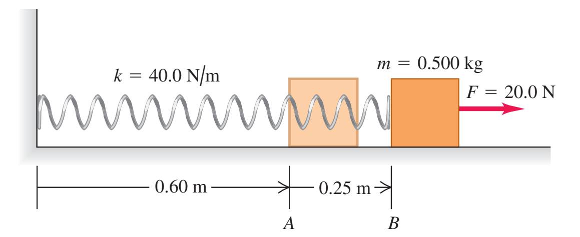
7.74. Un paquete de 2.00 kg se suelta en una pendiente de 53.1°, a 4.00 m de un resorte largo, cuya constante de fuerza es de 120 N/m y está sujeto a la base de la pendiente (figura 7.43). Los coeficientes de fricción entre el paquete y la pendiente son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.20$. La masa del resorte es despreciable. *a*) ¿Qué rapidez tiene el paquete justo antes de llegar al resorte? *b*) ¿Cuál es la compresión máxima del resorte? *c*) Al rebotar el paquete hacia arriba, ¿qué tanto se acerca a su posición inicial?

Figura 7.43 Problema 7.74.



7.75. Un bloque de 0.500 kg unido a un resorte de 0.60 m con constante de fuerza $k = 40.0$ N/m está en reposo con su cara trasera en el punto A de una mesa horizontal sin fricción (figura 7.44). La masa del resorte es despreciable. Se tira del bloque a la derecha de la superficie con una fuerza horizontal constante de 20.0 N. *a*) ¿Qué rapidez tiene el bloque cuando su cara trasera llega al punto B, que está 0.25 m a la derecha de A? *b*) En ese punto, se suelta el bloque. En el movimiento subsecuente, ¿qué tanto se acerca el bloque a la pared a la que está sujeto el extremo izquierdo del resorte?

Figura 7.44 Problema 7.75.



7.76. Física estudiantil. Los miembros del club universitario Iota Eta Pi construyen una plataforma apoyada en 4 resortes verticales en las esquinas, en el sótano del club. Usando un casco protector un miembro valiente se para en medio de la plataforma; su peso comprime los resortes 0.18 m. Otros cuatro estudiantes, empujando hacia abajo las esquinas de la plataforma, comprimen los resortes 0.53 m más, hasta que la parte superior del casco del valiente queda 0.90 m abajo del techo del sótano, y simultáneamente sueltan la plataforma. Ignore las masas de los resortes y la plataforma. *a*) Calcule la rapidez del valiente justo antes de que su casco choque contra el frágil techo. *b*) Si no hubiera techo, ¿qué altura habría alcanzado el estudiante? *c*) El decano de estudiantes, después de castigar a los implicados, les sugiere que la próxima vez lo intenten en exteriores y en otro planeta. ¿Cambiaría su respuesta al inciso *b*) si la travesura se hubiera efectuado en otro planeta con un valor de g distinto? Suponga que los estudiantes empujan la plataforma 0.53 m hacia abajo igual que antes. Explique su razonamiento.

7.77. Una fuerza conservativa actúa sobre una partícula de masa m que se mueve en una trayectoria dada por $x = x_0\cos\omega_0 t$ y $y = y_0\operatorname{sen}\omega_0 t$, donde x_0, y_0 y ω_0 son constantes. *a*) Determine las componentes de la fuerza que actúa sobre la partícula. *b*) Determine la energía potencial de la partícula en función de x y y. Tome $U = 0$ cuando $x = 0$ y $y = 0$. *c*) Calcule la energía total de la partícula cuando: i) $x = x_0$, $y = 0$; ii) $x = 0$, $y = y_0$.

7.78. Al quemarse, un galón de gasolina produce 1.3×10^8 J de energía. Un automóvil de 1500 kg acelera desde el reposo hasta 37 m/s en 10 s. Su motor tiene una eficiencia de sólo el 15% (lo cual es común), lo cual significa que sólo el 15% de la energía obtenida de la combustión de la gasolina se usa para acelerar el vehículo. El resto se convierte en energía cinética interna de las piezas del motor, y se invierte en calentar los gases de escape y el motor. *a*) ¿Cuántos galones de gasolina gasta este automóvil durante la aceleración? *b*) ¿Cuántas de esas aceleraciones se requerirán para quemar un galón de gasolina?

7.79. Una presa hidroeléctrica tiene tras de sí un lago con área superficial de 3.0×10^6 m^2 y costados verticales abajo del nivel del agua, el cual está 150 m arriba de la base de la presa. Cuando el agua pasa por turbinas en la base de la presa, su energía mecánica se convierte en

energía eléctrica con eficiencia del 90%. *a*) Si la energía potencial gravitacional se toma como cero en la base de la presa, ¿cuánta energía hay almacenada en el metro superior del agua del lago? La densidad del agua es de 1000 kg/m^3. *b*) ¿Qué volumen de agua deberá pasar por la presa para producir 1000 kilowatts-hora de energía eléctrica? ¿Qué distancia baja el nivel de agua del lago cuando esa cantidad de agua pasa por la presa?

7.80. ¿Cuánta energía total está almacenada en el lago del problema 7.79? Igual que en ese problema, sea cero la energía potencial gravitacional en la base de la presa. Exprese su respuesta en joules y en kilowatts-hora. (*Sugerencia:* divida el lago en capas horizontales infinitesimales con espesor dy e integre para obtener la energía potencial total.)

7.81. Gravedad en tres dimensiones. Una masa puntual m_1 se fija en el origen, y otra masa puntual m_2 tiene libertad para moverse una distancia r en un punto P con coordenadas x, y y z. La energía potencial gravitacional de estas masas es $U(r) = -Gm_1m_2/r$, donde G es la constante gravitacional (véanse los ejercicios 7.34 y 7.35). *a*) Demuestre que las componentes de la fuerza sobre m_2 debida a m_1 son

$$F_x = -\frac{Gm_1m_2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad F_y = -\frac{Gm_1m_2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$F_z = -\frac{Gm_1m_2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

(*Sugerencia:* escriba primero r en términos de x, y y z.) *b*) Demuestre que la magnitud de la fuerza sobre m_2 es $F = Gm_1m_2/r^2$. *c*) ¿m_1 atrae o repele a m_2? ¿Cómo lo sabe?

7.82. *a*) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{j}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2, es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta. *b*) ¿La fuerza $\vec{F} = Cy^2\hat{\imath}$, donde C es una constante negativa dada en N/m^2, es conservativa o no conservativa? Justifique su respuesta.

7.83. Varias fuerzas actúan sobre una cortadora controlada por microprocesador. Una es $\vec{F} = -\alpha xy^2\hat{j}$, que tiene la dirección $-y$ y cuya magnitud depende de la posición de la cortadora. La constante es $\alpha = 2.50$ N/m^3. Considere el desplazamiento de la cortadora desde el origen hasta el punto $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. *a*) Calcule el trabajo efectuado sobre la cortadora por $\vec{F}$ si el desplazamiento sigue la recta $y = x$ que conecta los dos puntos. *b*) Calcule el trabajo efectuado sobre la cortadora por $\vec{F}$ suponiendo ahora que ésta primero se mueve sobre el eje x hasta $x = 3.00$ m, $y = 0$ y, luego, se mueve paralela al eje y hasta $x = 3.00$ m, $y = 3.00$ m. *c*) Compare el trabajo hecho por $\vec{F}$ siguiendo las dos trayectorias. ¿$\vec{F}$ es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.84. Varias fuerzas actúan sobre un objeto. Una es $\vec{F} = \alpha xy\hat{\imath}$, que tiene la dirección x y cuya magnitud depende de la posición del objeto. (Véase el problema 6.96.) La constante es $\alpha = 2.00$ N/m^2. El objeto sigue esta trayectoria: 1) Parte del origen y se mueve por el eje y hasta el punto $x = 0$, $y = 1.50$ m; 2) se mueve paralelo al eje x hasta el punto $x = 1.50$ m, $y = 1.50$ m; 3) se mueve paralelo al eje y hasta el punto $x = 1.50$ m, $y = 0$; 4) se mueve paralelo al eje x volviendo al origen. *a*) Dibuje la trayectoria en el plano xy. *b*) Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}$ sobre el objeto en cada tramo y en el viaje completo "de ida y vuelta". *c*) ¿$\vec{F}$ es conservativa o no conservativa? Explique su respuesta.

7.85. Una fuerza de ley de Hooke $-kx$ y una fuerza conservativa constante F en la dirección $+x$ actúan sobre un ion atómico. *a*) Demuestre que una posible función de energía potencial para esta combinación de fuerzas es $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - Fx - F^2/2k$. ¿Es ésta la *única* función posible? Explique su respuesta. *b*) Encuentre la posición de equilibrio estable. *c*) Grafique $U(x)$ (en unidades de F^2/k) contra x (en unidades de F/k) para valores de x entre $-5F/k$ y $5F/k$. *d*) ¿Hay posiciones de equilibrio inestable? *e*) Si la energía total es $E = F^2/k$, qué valores máximos y mínimos de x alcanza el ion en su movimiento? *f*) Si el ion tiene masa m, calcule su rapidez máxima si la energía total es $E = F^2/k$. ¿En qué valor de x es máxima la rapidez?

Figura 7.45 Problema 7.86.

7.86. Una partícula se mueve en el eje x y sobre ella actúa una sola fuerza conservativa paralela al eje x. Tal fuerza corresponde a la función de energía potencial graficada en la figura 7.45. La partícula se suelta del reposo en el punto A. *a*) ¿Qué dirección tiene la fuerza sobre la partícula en A? *b*) ¿Y en B? *c*) ¿En qué valor de x es máxima la energía cinética de la partícula? *d*) ¿Qué fuerza actúa sobre la partícula en C? *e*) ¿Qué valor máximo de x alcanza la partícula durante su movimiento? *f*) ¿Qué valor o valores de x corresponden a puntos de equilibrio estable? *g*) ¿Y de equilibrio inestable?

Problema de desafío

7.87. Un protón de masa m se mueve en una dimensión. La función de energía potencial es $U(x) = \alpha/x^2 - \beta/x$, donde α y β son constantes positivas. El protón se libera del reposo en $x_0 = \alpha/\beta$. *a*) Demuestre que $U(x)$ puede escribirse como

$$U(x) = \frac{\alpha}{x_0^2}\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^2 - \frac{x_0}{x}\right]$$

Grafique $U(x)$. Calcule $U(x_0)$, ubicando así el punto x_0 en la gráfica. *b*) Calcule $v(x)$, la rapidez del protón en función de la posición. Grafique $v(x)$ y describa el movimiento cualitativamente. *c*) ¿Para qué valor de x es máxima la rapidez del protón? ¿Cuál es el valor de esa rapidez máxima? *d*) ¿Qué fuerza actúa sobre el protón en ese punto? *e*) Si ahora el protón se libera en $x_1 = 3\alpha/\beta$, ubique x_1 en la gráfica de $U(x)$. Calcule $v(x)$ y describa cualitativamente el movimiento. *f*) En cada caso de protón liberado ($x = x_0$ y $x = x_1$), ¿qué valores máximos y mínimos de x se alcanzan durante el movimiento?

MOMENTO LINEAL, IMPULSO Y CHOQUES

8



? ¿Qué podría causar una lesión más grave: ser tacleado por un jugador ligero que corre rápidamente, o ser tacleado por un jugador con el doble de masa, pero que corre con una rapidez que equivale a la mitad de la del primero?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de momento lineal de una partícula y cómo el impulso de la fuerza neta que actúa sobre una partícula hace que su momento lineal varíe.
- Las condiciones en las que el momento lineal total de un sistema de partículas es constante (es decir, se conserva).
- A resolver problemas en los que dos cuerpos chocan entre sí.
- La importante distinción entre choques elásticos, inelásticos y totalmente inelásticos.
- La definición del centro de masa de un sistema y qué determina la forma en que se mueve el centro de masa.
- A analizar situaciones, como la propulsión de un cohete, en las que la masa de un cuerpo cambia conforme se mueve.

Hay muchas preguntas relacionadas con fuerzas que no pueden contestarse aplicando directamente la segunda ley de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$. Por ejemplo, si un camión de 18 ruedas choca de frente con un auto compacto, ¿qué determina hacia dónde se mueven los restos después del choque? Cuando usted juega billar, ¿cómo decide la dirección que debe dar a la bola blanca para meter la bola 8 en una buchaca? Y cuando un meteorito choca contra la Tierra, ¿qué tanta de la energía cinética del meteorito se libera en el impacto?

Algo que tienen en común todas estas preguntas es que implican fuerzas acerca de las que sabemos muy poco: las fuerzas que actúan entre el auto y el camión, entre las dos bolas de billar o entre el meteorito y la Tierra. Lo curioso es que en este capítulo veremos que ¡no necesitamos saber *nada* acerca de esas fuerzas para contestar preguntas de este tipo!

Nuestro enfoque utiliza dos conceptos nuevos, *momento lineal* e *impulso*, y una nueva ley de conservación, la de *conservación del momento lineal*, tan importante como la de conservación de la energía. La ley de conservación del momento lineal es válida aun en situaciones en las que las leyes de Newton son inadecuadas, tales como cuerpos que se mueven con una rapidez muy alta (cercana a la de la luz) u objetos muy pequeños (como las partículas que constituyen los átomos). En el ámbito de la mecánica newtoniana, la conservación del momento lineal nos permite analizar muchas situaciones que serían muy difíciles si tratáramos de aplicar las leyes de Newton directamente. Entre ellas están los *choques*, en los que dos cuerpos ejercen, uno sobre el otro, fuerzas muy grandes durante un lapso muy breve.

8.1 Momento lineal e impulso

En el capítulo 6 reexpresamos la segunda ley de Newton para una partícula, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, en términos del teorema del trabajo y la energía, el cual nos ayudó a resolver muchos problemas y nos llevó a la ley de conservación de la energía. Volvamos a $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ y veamos otra forma útil de replantear esta ley fundamental.

Segunda ley de Newton en términos del momento lineal

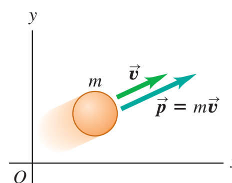
Consideremos una partícula de masa constante m. (Más adelante, en este mismo capítulo, veremos cómo manejar situaciones en las que la masa de un cuerpo cambia.) Puesto que $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, podemos escribir la segunda ley de Newton para esta partícula así:

$$\Sigma\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad (8.1)$$

Podemos introducir m en la derivada porque es constante. Así, la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio de la combinación $m\vec{v}$, el producto de la masa y la velocidad de la partícula. Llamamos a esta combinación **momento lineal** de la partícula. Si usamos el símbolo $\vec{p}$ para el momento lineal, tenemos

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{(definición de momento lineal)} \quad (8.2)$$

8.1 Los vectores de velocidad y de momento lineal de una partícula.



Cuanto mayor es la masa m y la rapidez v de una partícula, mayor es la magnitud de su momento lineal mv. Sin embargo, tenga en mente que el momento lineal es una cantidad vectorial con la misma dirección que la velocidad de la partícula (figura 8.1). De esta forma, un automóvil que viaja al norte a 20 m/s y un automóvil idéntico que viaja al este a 20 m/s tienen la misma *magnitud* de momento lineal (mv), pero diferentes *vectores* de momento lineal $(m\vec{v})$ porque sus direcciones son distintas.

A menudo expresamos el momento lineal de una partícula en términos de sus componentes. Si la partícula tiene componentes de velocidad v_x, v_y y v_z, entonces sus componentes de momento lineal p_x, p_y y p_z (a las que también llamamos *momento lineal x*, *momento lineal y* y *momento lineal z*) están dadas por

$$p_x = mv_x \qquad p_y = mv_y \qquad p_z = mv_z \quad (8.3)$$

Estas tres ecuaciones de componentes son equivalentes a la ecuación (8.2).

Las unidades de la magnitud del momento lineal son las de masa por rapidez; las unidades del SI para momento lineal son kg · m/s.

Si sustituimos la ecuación (8.2), la definición de momento lineal, en la ecuación (8.1), tenemos

$$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(segunda ley de Newton en términos de momento lineal)} \quad (8.4)$$

La fuerza neta (la suma vectorial de todas las fuerzas) que actúa sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio del momento lineal de la partícula. Ésta, y no $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, es la forma en que Newton planteó originalmente su segunda ley (aunque él llamó *momentum* al momento lineal), y sólo es válida en marcos de referencia inerciales.

Según la ecuación (8.4), un cambio rápido de momento lineal requiere una fuerza neta grande, mientras que un cambio gradual de momento lineal requiere una fuerza neta menor. Este principio se usa en el diseño de dispositivos de seguridad para automóviles como las bolsas de aire (figura 8.2).

8.2 Si un automóvil que se desplaza con gran rapidez se detiene súbitamente, el momento lineal del conductor (masa por velocidad) se reduce de un valor alto a cero en un breve lapso. Una bolsa de aire hace que el conductor pierda momento lineal más gradualmente que si se impactara en forma abrupta contra el volante; de esta forma, la fuerza ejercida sobre el conductor y, por lo tanto, la posibilidad de resultar lesionado, se reducen.



Teorema del impulso y el momento lineal

El momento lineal de una partícula $\vec{p} = m\vec{v}$ y su energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ dependen de la masa y la velocidad de la partícula. ¿Qué diferencia fundamental hay entre estas cantidades? Una respuesta puramente matemática es que el momento lineal es un vector cuya magnitud es proporcional a la rapidez, mientras que la energía cinética es un escalar proporcional al cuadrado de la rapidez. Sin embargo, para ver la diferencia *física* entre momento lineal y energía cinética, necesitamos definir una cantidad íntimamente relacionada con el momento lineal: el *impulso*.

Consideremos primero una partícula sobre la que actúa una fuerza neta *constante* $\Sigma\vec{F}$ durante un tiempo Δt, de t_1 a t_2. (Veremos el caso de fuerzas variables dentro de

poco.) El **impulso** de la fuerza neta, denotado con $\vec{J}$, se define como el producto de la fuerza neta y el intervalo de tiempo:

$$\vec{J} = \Sigma\vec{F}(t_2 - t_1) = \Sigma\vec{F}\,\Delta t \quad \text{(suponiendo una fuerza neta contante)} \tag{8.5}$$

El impulso es una cantidad vectorial; su dirección es la de la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ y su magnitud es el producto de la magnitud de la fuerza neta y el tiempo en que ésta actúa. Las unidades de impulso en el SI son newton-segundo $(\text{N}\cdot\text{s})$. Dado que $1\ \text{N} = 1\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$, las unidades también son $\text{kg}\cdot\text{m/s}$, idénticas a las del momento lineal.

Para ver para qué nos sirve el impulso, volvamos a la segunda ley de Newton planteada en términos de momento lineal, la ecuación 8.4. Si la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ es constante, $d\vec{p}/dt$ también es constante. En tal caso, $d\vec{p}/dt$ es igual al cambio *total* de momento lineal $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ durante el lapso $t_2 - t_1$, dividido entre el lapso:

$$\Sigma\vec{F} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}$$

Si multiplicamos esta ecuación por $(t_2 - t_1)$, tenemos

$$\Sigma\vec{F}(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Al comparar esto con la ecuación (8.5) obtenemos un resultado conocido como **teorema del impulso y el momento lineal**:

$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad \text{(teorema del impulso y el momento lineal)} \tag{8.6}$$

El cambio del momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre la partícula durante ese intervalo.

El teorema del impulso y el momento lineal también se cumple si las fuerzas no son constantes. Para comprobarlo, integramos los dos miembros de la segunda ley de Newton $\Sigma\vec{F} = d\vec{p}/dt$ con respecto al tiempo entre los límites t_1 y t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

La integral de la izquierda es, por definición, el impulso $\vec{J}$ de la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ durante este intervalo:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\vec{F}\,dt \quad \text{(definición general de impulso)} \tag{8.7}$$

Con esta definición, el teorema del impulso y el momento lineal $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, ecuación (8.6), es válido aun si la fuerza neta $\Sigma\vec{F}$ varía con el tiempo.

Podemos definir una fuerza neta *media* $\vec{F}_{\text{med}}$ tal que, aun si $\Sigma\vec{F}$ no es constante, el impulso $\vec{J}$ esté dado por

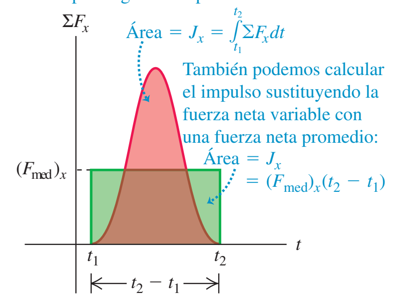
$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{med}}(t_2 - t_1) \tag{8.8}$$

Si $\Sigma\vec{F}$ es constante, $\Sigma\vec{F} = \vec{F}_{\text{med}}$ y la ecuación (8.8) se reduce a la ecuación (8.5).

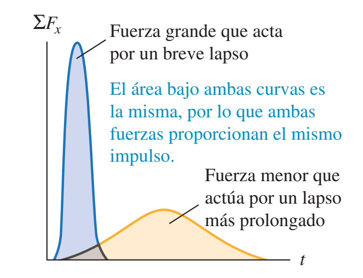
La figura 8.3a muestra una gráfica de la componente x de la fuerza neta ΣF_x en función del tiempo durante un choque. Esto podría representar la fuerza sobre un balón que está en contacto con el pie de un futbolista entre los tiempos t_1, y t_2. La componente x del impulso durante ese intervalo está representada por el área roja bajo la curva entre t_1 y t_2, que es igual al área rectangular delimitada por t_1, t_2, y $(F_{\text{med}})_x$, así que $(F_{\text{med}})_x(t_2 - t_1)$ es igual al impulso de la fuerza variable real durante el mismo

8.3 El significado del área roja bajo una gráfica de ΣF_x contra t.

a)



b)



intervalo. Observe que una fuerza grande que actúa durante un breve tiempo puede tener el mismo impulso que una fuerza menor que actúa por un tiempo más prolongado si las áreas bajo las curvas fuerza-tiempo son iguales (figura 8.3b). En esos términos, una bolsa de aire de un automóvil (figura 8.2) provee el mismo impulso al conductor que el volante o el tablero pero aplicando una fuerza menos intensa y menos dañina durante un tiempo más prolongado.

Tanto el impulso como el momento lineal son vectores, y las ecuaciones (8.5) a (8.8) son vectoriales. En problemas específicos suele ser más fácil usarlas en su forma de componentes:

$$J_x = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = (F_{\text{med}})_x (t_2 - t_1) = p_{2x} - p_{1x} = mv_{2x} - mv_{1x}$$
$$J_y = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y \, dt = (F_{\text{med}})_y (t_2 - t_1) = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y} \quad (8.9)$$

y lo mismo para la componente z.

Comparación de momento lineal y energía cinética



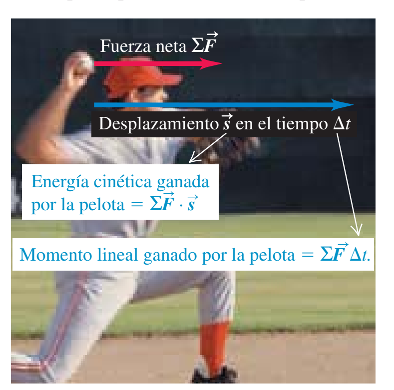
6.1 Momento lineal y cambio de energía

Ahora podemos ver la diferencia fundamental entre momento lineal y energía cinética. El teorema del impulso y el momento lineal $\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ dice que los cambios en el momento lineal de una partícula se deben al impulso, que depende del *tiempo* durante el que actúa la fuerza neta. En cambio, el teorema del trabajo y la energía $W_{\text{tot}} = K_2 - K_1$ nos dice que la energía cinética cambia cuando se realiza trabajo sobre una partícula; el trabajo total depende de la *distancia* en la que actúa la fuerza neta. Considere una partícula que parte del reposo en t_1, de manera que $\vec{v}_1 = \mathbf{0}$. Su momento lineal inicial es $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = \mathbf{0}$, y su energía cinética inicial es $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 0$. Ahora, una fuerza neta constante igual a $\vec{F}$ actúa sobre el cuerpo del tiempo t_1 al tiempo t_2. En este intervalo, la partícula se mueve una distancia s en la dirección de la fuerza. Por la ecuación (8.6), el momento lineal del cuerpo en el instante t_2 es

$$\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \vec{J} = \vec{J}$$

donde $\vec{J} = \vec{F}(t_2 - t_1)$ es el impulso que actúa sobre la partícula. Así, *el momento lineal de una partícula es igual al impulso que la aceleró desde el reposo hasta su rapidez actual*; el impulso es el producto de la fuerza neta que aceleró el cuerpo y el *tiempo* requerido para la aceleración. En cambio, la energía cinética del cuerpo en t_2 es $K_2 = W_{\text{tot}} = Fs$, el *trabajo* total efectuado sobre el cuerpo para acelerarlo desde el reposo. El trabajo total es igual al producto de la fuerza neta y la *distancia* necesaria para acelerar la partícula (figura 8.4).

8.4 La *energía cinética* de una pelota de béisbol lanzada es igual al trabajo que realiza el pitcher sobre ella (la fuerza multiplicada por la distancia que recorre la pelota durante el lanzamiento). El *momento lineal* de la pelota es igual al impulso que le imparte el pitcher (la fuerza multiplicada por el tiempo que le llevó hacer que la pelota alcanzara su rapidez).



Apliquemos la distinción entre momento lineal y energía cinética. Suponga que puede elegir entre atrapar una pelota de 0.50 kg que se mueve a 4.0 m/s o una de 0.10 kg que se mueve a 20 m/s. ¿Cuál es más fácil de atrapar? Ambas tienen la misma magnitud de momento lineal, $p = mv = (0.50 \text{ kg})(4.0 \text{ m/s}) = (0.10 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, pero valores muy diferentes de energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$; la bola grande y lenta tiene $K = 4.0$ J, mientras que la pequeña y rápida tiene $K = 20$ J. Puesto que el momento lineal es igual para ambas bolas, las dos requieren el mismo *impulso* para detenerse. Pero detener la bola de 0.10 kg con la mano requiere cinco veces más *trabajo* que detener la de 0.50 kg, porque la primera tiene cinco veces más energía cinética. Por lo tanto, para una fuerza dada que ejerzamos con la mano, tardaremos el mismo tiempo en detener cualquiera de las bolas, pero nuestra mano será empujada cinco veces más hacia atrás si decidimos atrapar la bola pequeña y rápida. Para minimizar el esfuerzo, debemos optar por atrapar la bola de 0.50 kg con su menor energía cinética.

Los teoremas del impulso y el momento lineal y del trabajo y la energía son relaciones entre fuerza y movimiento, y ambos se basan en las leyes de Newton; son principios *integrales* que relacionan el movimiento en dos instantes separados por un intervalo finito. En cambio, la segunda ley de Newton misma (en cualquiera las formas $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ o $\Sigma\vec{F} = d\vec{p}/dt$) es un principio *diferencial* que relaciona las fuerzas con la rapidez del cambio de velocidad o momento lineal en cada instante.

Ejemplo conceptual 8.1 Momento lineal contra energía cinética

Considere otra vez la carrera descrita en el ejemplo conceptual 6.5 (sección 6.2) entre dos veleros en un lago helado sin fricción. Los botes tienen masas m y $2m$, y el viento ejerce la misma fuerza horizontal constante $\vec{F}$ sobre cada uno (véase la figura 6.14). Los dos botes parten del reposo y cruzan la meta que está a una distancia s. ¿Cuál bote llega a la meta con mayor momento lineal?

SOLUCIÓN

En el ejemplo conceptual 6.5 pedimos comparar las *energías cinéticas* de los veleros al cruzar la meta. La forma de hacerlo no fue usando la fórmula $K = \frac{1}{2}mv^2$, sino recordando que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo total efectuado para acelerarlo desde el reposo. Los dos veleros partieron del reposo, y el trabajo total efectuado entre la salida y la meta fue el mismo para ambos (porque la fuerza neta y el desplazamiento fueron iguales). Por lo tanto, los dos veleros cruzan la meta con la misma energía cinética.

De manera similar, la mejor forma de comparar los *momentos lineales* de los veleros *no* es usar la fórmula $\vec{p} = m\vec{v}$. pues ésta no basta para decidir cuál velero tiene mayor momento lineal en la meta. El velero de masa $2m$ tiene mayor masa, lo que sugiere mayor momento lineal, pero cruza la meta más lentamente que el otro, lo que sugiere menor momento lineal.

Más bien, usamos la idea de que el momento lineal de cada velero es igual al impulso que lo aceleró desde el reposo. Para cada velero, la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza normal hacia arriba suman cero, así que la fuerza neta es la fuerza horizontal constante del viento, $\vec{F}$. Sea Δt el tiempo en que un velero tarda en llegar a la meta, de manera que el impulso sobre el velero en ese tiempo es $\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t$. El velero parte del reposo, así que esto es el momento lineal $\vec{p}$ del velero en la meta:

$$\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t$$

Ambos veleros están sujetos a la misma $\vec{F}$, pero *no* tardan lo mismo en llegar a la meta. El bote de masa $2m$ acelera más lentamente y tarda más tiempo en recorrer la distancia s; por lo tanto, hay mayor impulso sobre este velero entre la salida y la meta. Así que el velero de masa $2m$ cruza la meta con mayor magnitud de momento lineal que el de masa m (pero con la misma energía cinética). ¿Puede el lector demostrar que el velero de masa $2m$ tiene $\sqrt{2}$ veces más momento lineal en la meta que el de masa m?

Ejemplo 8.2 Una pelota golpea una pared

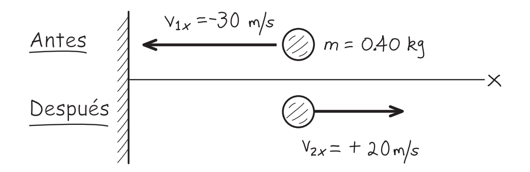
Suponga que lanza una pelota de 0.40 kg contra una pared, a la cual golpea moviéndose horizontalmente hacia la izquierda a 30 m/s y rebotando horizontalmente a la derecha con rapidez de 20 m/s. *a*) Calcule el impulso de la fuerza neta sobre la pelota durante el choque. *b*) Si la pelota está en contacto con la pared durante 0.010 s, calcule la fuerza horizontal media que la pared ejerce sobre la pelota durante el impacto.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nos dan suficiente información para determinar los valores inicial y final del momento lineal de la pelota, así que podemos usar el teorema del impulso y el momento lineal para calcular el impulso. Luego, usaremos la definición de impulso para determinar la fuerza media.

PLANTEAR: La figura 8.5 ilustra la situación. El movimiento es puramente horizontal, así que sólo necesitamos un eje. Tomaremos la horizontal como el eje x, con la dirección positiva a la derecha. La incógnita en el inciso *a*) es la componente x del impulso, J_x, que obtendremos de las componentes x del momento lineal antes y después del impacto, empleando las ecuaciones (8.9). En el inciso *b*), la incógnita es la componente x media de la fuerza, $(F_{med})_x$; una vez que conozcamos J_x, podremos obtener esa fuerza utilizando las ecuaciones (8.9).

8.5 Bosquejo para este problema.



EJECUTAR: *a*) Con el eje x que elegimos, las componentes x inicial y final del momento lineal de la pelota son

$$p_{1x} = mv_{1x} = (0.40\text{ kg})(-30\text{ m/s}) = -12\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$
$$p_{2x} = mv_{2x} = (0.40\text{ kg})(+20\text{ m/s}) = +8.0\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

De acuerdo con la ecuación para x de las ecuaciones (8.9), la componente x del impulso es igual al *cambio* en la componente x del momento lineal:

$$\begin{aligned} J_x &= p_{2x} - p_{1x} \\ &= 8.0\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (-12\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = 20\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 20\text{ N}\cdot\text{s} \end{aligned}$$

b) El choque dura $t_2 - t_1 = \Delta t = 0.010$ s. De acuerdo con la ecuación para x de las ecuaciones (8.9), $J_x = (F_{med})_x(t_2 - t_1) = (F_{med})_x\,\Delta t$, así que

$$(F_{med})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = \frac{20\text{ N}\cdot\text{s}}{0.010\text{ s}} = 2000\text{ N}$$

EVALUAR: La componente x del impulso es positiva; es decir, hacia la derecha en la figura 8.5. Tal como debe ser: el impulso representa el "empujón" que la pared da a la pelota, y es obvio que tal "empujón" es hacia la derecha.

CUIDADO **El momento lineal es un vector** Puesto que el momento lineal es un vector, tuvimos que incluir el signo negativo en p_{1x}. Si por descuido lo hubiéramos omitido, habríamos obtenido $8.0\text{ kg}\cdot\text{m/s} - (12\text{ kg}\cdot\text{m/s}) = -4\text{ kg}\cdot\text{m/s}$, para el impulso. Esta respuesta es a todas luces absurda, pues dice que la pared le habría dado a la pelota un empujón a la *izquierda*. Asegúrese de considerar la *dirección* del momento lineal al efectuar sus cálculos.

La fuerza media que la pared ejerce sobre la pelota es considerable, 2000 N (aproximadamente el peso de un objeto de 200 kg). La magnitud

continúa

de esta fuerza debe ser grande para cambiar el momento lineal de la pelota en un lapso de tiempo tan corto. Las otras fuerzas que actúan sobre la pelota durante el choque son muy débiles en comparación; por ejemplo, la fuerza gravitacional es de sólo 3.9 N. Así, durante el breve lapso que dura el choque, podemos ignorar las demás fuerzas sobre la pelota y obtener una aproximación muy buena. La figura 8.6 es una fotografía que muestra el choque de una pelota de tenis y una raqueta.

Observe que el valor de 2000 N que calculamos es sólo la fuerza horizontal *media* que la pared ejerce sobre la pelota durante el impacto, y corresponde a la línea horizontal $(F_{med})_x$ de la figura 8.3a. La fuerza horizontal es cero antes del impacto, sube hasta un máximo y luego disminuye hasta cero cuando la pelota deja de estar en contacto con la pared. Si la pelota es relativamente rígida, como una de béisbol o de golf, el choque dura poco tiempo y la fuerza máxima es grande, como en la curva azul de la figura 8.3b. Si la pelota es más blanda, como una de tenis, el choque dura más tiempo y la fuerza máxima es menor, como en la curva anaranjada en la figura 8.3b.

8.6 Por lo regular, una pelota de tenis está en contacto con la raqueta cerca de 0.01 s, y se aplana perceptiblemente por la tremenda fuerza que sobre ella ejerce la raqueta.





Ejemplo 8.3 Pateo de un balón

Un balón de soccer tiene una masa de 0.40 kg e inicialmente se mueve hacia la izquierda a 20 m/s, pero luego es pateado de manera que adquiere una velocidad con magnitud de 30 m/s y dirección de 45° hacia arriba y a la derecha (figura 8.7a). Calcule el impulso de la fuerza neta y la fuerza neta media, suponiendo que el choque dura $\Delta t = 0.010$ s.

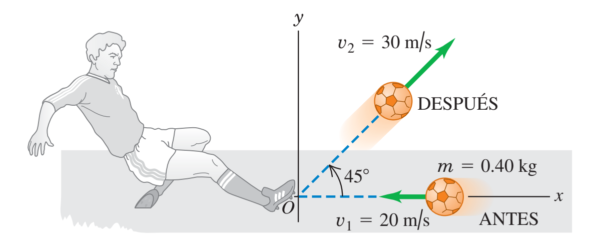
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza los mismos principios que el ejemplo 8.2. La diferencia clave es que las velocidades inicial y final no están alineadas, así que debemos tener cuidado de tratar el momento lineal y el impulso como cantidades vectoriales, usando sus componentes *x* y *y*.

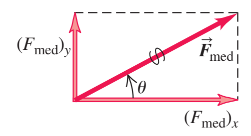
PLANTEAR: Tomamos el eje *x* horizontal hacia la derecha, y el *y*, vertical hacia arriba. Las incógnitas son las componentes del impulso neto sobre el balón, J_x y J_y, y las componentes de la fuerza neta media sobre el balón, $(F_{med})_x$ y $(F_{med})_y$. Las obtendremos usando las componentes *x* y *y* de las ecuaciones (8.9).

8.7 a) Pateo de un balón de fútbol. b) Cálculo de la fuerza media a partir de sus componentes.

a) Diagrama antes y después



b) Fuerza media sobre el balón



EJECUTAR: Con los ejes que elegimos, obtenemos las siguientes componentes de velocidad para antes (subíndice 1) y después (subíndice 2) de patear el balón:

$$v_{1x} = -20 \text{ m/s} \qquad v_{1y} = 0$$
$$v_{2x} = v_{2y} = (30 \text{ m/s})(0.707) = 21.2 \text{ m/s}$$
$$(\text{dado que } \cos 45° = \text{sen } 45° = 0.707)$$

La componente *x* del impulso es igual a la componente *x* del cambio de el momento lineal, y lo mismo para las componentes *y*:

$$J_x = p_{2x} - p_{1x} = m(v_{2x} - v_{1x})$$
$$= (0.40 \text{ kg})[21.2 \text{ m/s} - (-20 \text{ m/s})] = 16.5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$
$$J_y = p_{2y} - p_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y})$$
$$= (0.40 \text{ kg})(21.2 \text{ m/s} - 0) = 8.5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Las componentes de la fuerza neta media sobre el balón son

$$(F_{med})_x = \frac{J_x}{\Delta t} = 1650 \text{ N} \qquad (F_{med})_y = \frac{J_y}{\Delta t} = 850 \text{ N}$$

La magnitud y dirección de la fuerza media son

$$F_{med} = \sqrt{(1650 \text{ N})^2 + (850 \text{ N})^2} = 1.9 \times 10^3 \text{ N}$$
$$\theta = \arctan\frac{850 \text{ N}}{1650 \text{ N}} = 27°$$

donde θ se mide hacia arriba desde el eje $+x$ (figura 8.7b). Observe que, como el balón no estaba inicialmente en reposo, su velocidad final *no* tiene la misma dirección que la fuerza media que actúa sobre él.

EVALUAR: La fuerza neta media $\vec{F}_{med}$ incluye los efectos de la gravedad, aunque sean pequeños; el peso del balón es de sólo 3.9 N. Al igual que en el ejemplo 8.2, la fuerza media que actúa durante el choque es ejercida casi totalmente por el objeto que el balón golpea (en este caso el pie del futbolista).

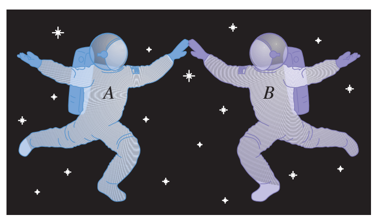
Evalúe su comprensión de la sección 8.1 Clasifique las siguientes situaciones de acuerdo con la magnitud del impulso de la fuerza neta, en orden decreciente. En cada situación un automóvil de 1000 kg se desplaza a lo largo de una carretera recta de este a oeste. i) El automóvil se desplaza inicialmente hacia el este a 25 m/s y se detiene en 10 s. ii) El automóvil se desplaza inicialmente hacia el este a 25 m/s y se detiene en 5 s. iii) El automóvil está inicialmente en reposo, y se le aplica una fuerza neta de 2000 N con dirección al este durante 10 s. iv) El automóvil se desplaza inicialmente hacia el este a 25 m/s y se le aplica una fuerza neta de 2000 N con dirección al oeste durante 10 s. v) El automóvil se desplaza inicialmente hacia el este a 25 m/s. Durante un lapso de 30 s, el automóvil invierte su sentido y termina desplazándose hacia el oeste a 25 m/s.

8.2 Conservación del momento lineal

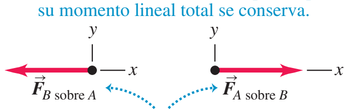
El concepto de momento lineal tiene especial importancia en situaciones en las que dos o más cuerpos *interactúan*. Para ver por qué, consideremos primero un sistema idealizado de dos cuerpos que interactúan entre sí, y con nada más; por ejemplo, dos astronautas que se tocan mientras flotan libremente en el espacio exterior en un ambiente de gravedad cero (figura 8.8). Consideremos a los astronautas como partículas. Cada partícula ejerce una fuerza sobre la otra; según la tercera ley de Newton, las dos fuerzas siempre son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Por lo tanto, los *impulsos* que actúan sobre las dos partículas son iguales y opuestos, y los cambios de momento lineal de las dos partículas serán iguales y opuestos.

Repasemos esto a la luz de ciertos términos nuevos. En cualquier sistema, las fuerzas que las partículas del sistema ejercen entre sí se denominan **fuerzas internas**; las ejercidas sobre cualquier parte del sistema por algún objeto externo son **fuerzas externas**. En el sistema de la figura 8.8, las fuerzas internas son $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$, ejercida por la partícula B sobre la A, y $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ ejercida por la partícula A sobre la B. *No hay* fuerzas externas, así que tenemos un **sistema aislado**.

8.8 Dos astronautas se empujan mutuamente mientras flotan libres en el entorno de gravedad cero del espacio exterior.



No hay fuerzas externas que actúen sobre el sistema de los dos astronautas, por lo que su momento lineal total se conserva.



Las fuerzas que los astronautas ejercen uno sobre el otro constituyen un par acción-reacción.

La fuerza neta sobre la partícula A es $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ y sobre la partícula B, $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$, así que, por la ecuación (8.3), las razones de cambio del momento lineal de ambas partículas son

$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \qquad \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \tag{8.10}$$

El momento lineal de cada partícula cambia, pero estos cambios están relacionados entre sí por la tercera ley de Newton: las dos fuerzas, $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ y $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ siempre son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Es decir, $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$, así que $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \mathbf{0}$. Sumando las dos ecuaciones de la ecuación (8.10), tenemos

$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} = \frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = \mathbf{0} \tag{8.11}$$



6.3 Conservación del momento lineal y choques
6.7 Problemas de explosión
6.10 Péndulo persona-proyectil, boliche

Las razones de cambio de los dos momentos lineales son iguales y opuestas, así que la razón de cambio de la suma vectorial $\vec{p}_A + \vec{p}_B$ es cero. Ahora definimos el **momento lineal total** $\vec{P}$ del sistema de dos partículas como la suma vectorial de los momentos lineales de las partículas individuales. Esto es,

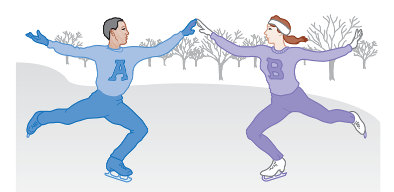
$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B \tag{8.12}$$

Así, la ecuación (8.11) se convierte finalmente en

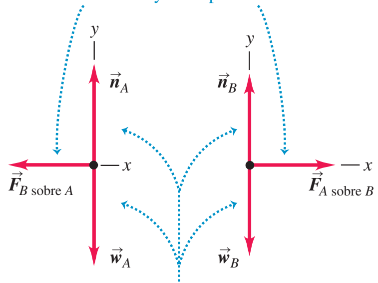
$$\vec{F}_{B \text{ sobre } A} + \vec{F}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \mathbf{0} \tag{8.13}$$

La razón de cambio del momento lineal *total* $\vec{P}$ es cero. Por lo tanto, el momento lineal total del sistema es constante, aunque los momentos lineales individuales de las partículas que constituyen el sistema pueden cambiar.

8.9 Dos patinadores se tocan mientras patinan en una superficie horizontal sin fricción. (Compare con la figura 8.8.)



Las fuerzas que los patinadores ejercen uno sobre otro constituyen un par acción-reacción.



Aunque las fuerzas normales y gravitacionales son fuerzas externas, su suma vectorial es cero, por lo que el momento lineal total se conserva.

Si también hay fuerzas externas, deben incluirse en el lado izquierdo de la ecuación (8.13), junto con las internas. En general, el momento lineal total no será constante, pero si la suma vectorial de las fuerzas externas es cero, como en la figura 8.9, éstas no contribuirán a la suma, y $d\vec{P}/dt$ será otra vez cero. Así, tenemos el resultado general:

Si la suma vectorial de las fuerzas externas sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema es constante.

Ésta es la forma más sencilla del **principio de conservación del momento lineal**, el cual es una consecuencia directa de la tercera ley de Newton. La utilidad de este principio radica en que no depende de la naturaleza detallada de las fuerzas internas que actúan entre miembros del sistema, así que podemos aplicarlo incluso si (como suele suceder) sabemos muy poco acerca de las fuerzas internas. Usamos la segunda ley de Newton para deducir este principio, así que debemos tener cuidado de usarlo sólo en marcos de referencia inerciales.

Podemos generalizar este principio para un sistema con cualquier número de partículas A, B, C, … que sólo interactúan entre sí. El momento lineal total del sistema es

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \quad \text{(momento lineal total de un sistema de partículas)} \tag{8.14}$$

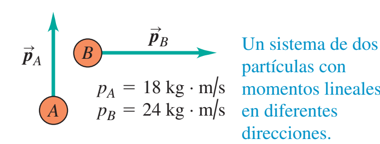
Nuestro argumento es el mismo: la razón total de cambio del momento lineal del sistema debido a cada par acción-reacción de fuerzas internas es cero. Así, la razón total de cambio del momento lineal del sistema entero es cero siempre que la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre él es cero. Las fuerzas internas pueden cambiar los momentos lineales de las partículas individuales del sistema, pero no el momento lineal *total* del sistema.

CUIDADO **Conservación del momento lineal significa conservación de sus componentes** Al aplicar la conservación del momento lineal a un sistema, es indispensable recordar que el momento lineal es una cantidad *vectorial*. Por lo tanto, *debemos* efectuar una suma vectorial para calcular el momento lineal total de un sistema (figura 8.10). Por lo regular, el empleo de componentes es el método más sencillo. Si p_{Ax}, p_{Ay} y p_{Az} son las componentes del momento lineal de la partícula A, y de manera similar para las demás partículas, la ecuación (8.14) equivale a las ecuaciones de componentes

$$\begin{aligned} P_x &= p_{Ax} + p_{Bx} + \cdots \\ P_y &= p_{Ay} + p_{By} + \cdots \\ P_z &= p_{Az} + p_{Bz} + \cdots \end{aligned} \tag{8.15}$$

Si la suma vectorial de las fuerzas externas sobre el sistema es cero, entonces P_x, P_y y P_z son constantes. ▮

8.10 Cuando se aplica la conservación del momento lineal, recuerde que ¡ésta es una cantidad vectorial!

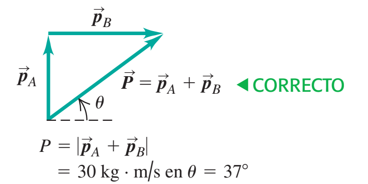


Un sistema de dos partículas con momentos lineales en diferentes direcciones.

NO podemos calcular la magnitud del momento lineal total sumando las magnitudes de los momentos lineales individuales.

$P = p_A + p_B = 42$ kg · m/s ◀ INCORRECTO

En vez de ello, usamos la suma vectorial:



$P = |\vec{p}_A + \vec{p}_B|$
$= 30$ kg · m/s en $\theta = 37°$

En ciertos aspectos, el principio de conservación del momento lineal es más general que el de conservación de la energía mecánica. Por ejemplo, la energía mecánica se conserva sólo si las fuerzas internas son *conservativas* —es decir, si permiten la conversión bidireccional entre energía cinética y energía potencial—, pero la conservación del momento lineal es válida aun si las fuerzas internas *no* son conservativas. En este capítulo analizaremos situaciones en las que se conservan tanto el momento lineal como la energía mecánica, y otras en que sólo el momento lineal se conserva. Estos dos principios desempeñan un papel fundamental en todas las áreas de la física, y los encontraremos durante todo nuestro estudio.

Estrategia para resolver problemas 8.1 Conservación del momento lineal



IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* Antes de aplicar la conservación del momento lineal a un problema, debemos decidir si el momento lineal *se conserva*. Esto sólo es cierto si la suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de partículas es cero. Si no es así, no podemos usar la conservación del momento lineal.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Defina un sistema de coordenadas y muéstrelo en un dibujo, indicando la dirección positiva de cada eje. A menudo es más fácil elegir el eje x en la dirección de una de las velocidades iniciales. Asegúrese de usar un marco de referencia inercial. Casi todos los problemas del capítulo tratan situaciones bidimensionales, donde los vectores sólo tienen componentes x y y, pero esta estrategia puede generalizarse para incluir componentes z si es necesario.
2. Trate cada cuerpo como partícula. Haga dibujos de "antes" y "después", incluyendo vectores para representar todas las velocidades conocidas. Rotule los vectores con magnitudes, ángulos, componentes y demás información dada, asignando símbolos algebraicos a las magnitudes, los ángulos o las componentes desconocidas. Es conveniente usar los subíndices 1 y 2 para las velocidades antes y después de la interacción, respectivamente; utilice letras (no números) para designar las partículas.
3. Como siempre, identifique la(s) variable(s) buscada(s) entre las incógnitas.

EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Escriba una ecuación en términos de símbolos, igualando la componente x total *inicial* del momento lineal (es decir, antes de la interacción) con la componente x total *final* (después de la interacción), usando $p_x = mv_x$ para cada partícula. Escriba otra ecuación para las componentes y, usando $p_y = mv_y$ para cada partícula. (*Nunca* sume las componentes x y y de velocidad y el momento lineal en la misma ecuación.) Incluso si todas las velocidades están alineadas (digamos, sobre el eje x), las componentes de velocidad en esta línea pueden ser positivas o negativas; ¡cuidado con los signos!
2. Resuelva estas ecuaciones para determinar los resultados requeridos. En algunos problemas, tendrá que convertir las componentes de una velocidad a su magnitud y dirección, o viceversa.
3. En algunos problemas, las consideraciones de energía dan relaciones adicionales entre las diversas velocidades, como veremos más adelante.

EVALUAR *la respuesta:* ¿Es lógica la respuesta desde el punto de vista de la física? Si la incógnita es el momento lineal de un cuerpo dado, verifique que la dirección del momento lineal sea razonable.

Ejemplo 8.4 Retroceso de un rifle

Un tirador sostiene holgadamente un rifle de masa $m_R = 3.00$ kg, de manera que pueda retroceder libremente al hacer un disparo. Dispara una bala de masa $m_B = 5.00$ g con una velocidad horizontal relativa al suelo de $v_{Bx} = 300$ m/s. ¿Qué velocidad de retroceso v_{Rx} tiene el rifle? ¿Qué momento lineal y energía cinética finales tiene la bala? ¿Y el rifle?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideramos un modelo idealizado en el que las fuerzas horizontales que el tirador ejerce sobre el rifle son insignificantes, así que no hay fuerza horizontal neta sobre el sistema (bala y rifle) durante el disparo, y el momento lineal horizontal total del sistema es el mismo antes y después del disparo (es decir, se conserva).

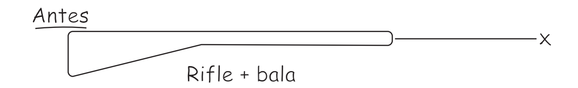
PLANTEAR: La figura 8.11 ilustra el caso. Sea el eje $+x$ la dirección en que apunta el rifle. Inicialmente, el rifle y la bala están en reposo, así que la componente x inicial del momento lineal total es cero. Una vez disparada la bala, su componente x de momento lineal es $p_{Bx} = m_B v_{Bx}$, y la del rifle, $p_{Rx} = m_R v_{Rx}$. Las incógnitas son v_{Rx}, p_{Bx}, p_{Rx}, $K_B = \frac{1}{2} m_B v_{Bx}^2$ y $K_R = \frac{1}{2} m_R v_{Rx}^2$ (las energías cinéticas finales de la bala y el rifle, respectivamente).

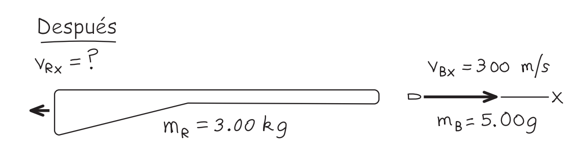
EJECUTAR: La conservación de la componente x del momento lineal total da

$$P_x = 0 = m_B v_{Bx} + m_R v_{Rx}$$

$$v_{Rx} = -\frac{m_B}{m_R} v_{Bx} = -\left(\frac{0.00500 \text{ kg}}{3.00 \text{ kg}}\right)(300 \text{ m/s}) = -0.500 \text{ m/s}$$

8.11 Bosquejo para este problema..





El signo negativo implica que el retroceso es en la dirección opuesta a la de la bala. Si una culata con esta rapidez golpeara el hombro, usted lo sentiría. Es más cómodo apoyar bien el rifle en el hombro al dispararlo; así, m_R es sustituida por la suma de la masa del tirador y la del rifle, y la rapidez de retroceso es mucho menor.

El momento lineal y la energía cinética de la bala al final son

$$p_{Bx} = m_B v_{Bx} = (0.00500 \text{ kg})(300 \text{ m/s}) = 1.50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$
$$K_B = \tfrac{1}{2} m_B v_{Bx}^2 = \tfrac{1}{2}(0.00500 \text{ kg})(300 \text{ m/s})^2 = 225 \text{ J}$$

Para el rifle, el momento lineal y la energía cinética finales son

$$p_{Rx} = m_R v_{Rx} = (3.00 \text{ kg})(-0.500 \text{ m/s}) = -1.50 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$
$$K_R = \tfrac{1}{2} m_R v_{Rx}^2 = \tfrac{1}{2}(3.00 \text{ kg})(-0.500 \text{ m/s})^2 = 0.375 \text{ J}$$

continúa

EVALUAR: La bala y el rifle tienen *momentos lineales* iguales y opuestas después de la interacción porque se sometieron a fuerzas iguales y opuestas durante el mismo *tiempo* (es decir, impulsos iguales y opuestos). La bala adquiere una *energía cinética* mucho mayor porque viaja una *distancia* mucho más grande que el rifle durante la interacción. Por ello, la fuerza que actúa sobre la bala realiza mucho más trabajo que la fuerza que actúa sobre el rifle. La razón de las dos energías cinéticas, 600:1, es igual al inverso de la razón de las masas; de hecho, puede demostrarse que esto siempre sucede en situaciones de retroceso. Dejamos la demostración como problema (ejercicio 8.22).

Observe que el cálculo no depende de los detalles del funcionamiento del rifle. En un rifle real, la bala es impulsada por una carga explosiva; si en vez de ello se usara un resorte muy rígido para impartirle la misma velocidad, las respuestas serían idénticas.

Ejemplo 8.5 Choque en línea recta

Dos deslizadores se acercan uno al otro sobre un riel de aire sin fricción (figura 8.12a). Después de chocar (figura 8.12b), el deslizador B se aleja con velocidad final de $+2.0 \text{ m/s}$ (figura 8.12c). ¿Qué velocidad final tiene el deslizador A? Compare los cambios del momento lineal y velocidad de los dos deslizadores.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fuerza vertical total sobre los deslizadores es cero; la fuerza neta sobre cada uno es la fuerza horizontal que cada deslizador ejerce sobre el otro. La fuerza *externa* neta sobre los dos deslizadores juntos es cero, así que el momento lineal total se conserva. (Compare la figura 8.9.)

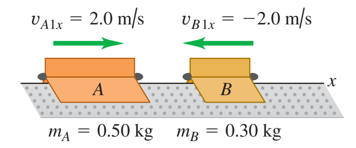
PLANTEAR: Tomamos el eje x sobre el riel, con la dirección positiva a la derecha. Nos dan las masas y las velocidades iniciales de los dos deslizadores, así como la velocidad final del deslizador B. Las incógnitas son v_{A2x}, la componente x final de la velocidad del deslizador A, y los cambios en el momento lineal y la velocidad de los dos deslizadores (es decir, el valor después del choque menos el valor antes del choque).

EJECUTAR: La componente x del momento lineal total antes del choque es

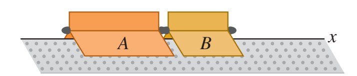
$$\begin{aligned} P_x &= m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} \\ &= (0.50 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) + (0.30 \text{ kg})(-2.0 \text{ m/s}) \\ &= 0.40 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

8.12 Dos deslizadores chocan en un riel de aire.

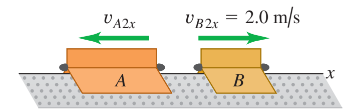
a) Antes del choque



b) Choque



c) Después del choque



Ésta es positiva (a la derecha en la figura 8.12) porque el deslizador A tiene mayor magnitud de momento lineal que el B antes del choque. La componente x del momento lineal total vale lo mismo después del choque, así que

$$P_x = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Despejando v_{A2x}, la componente x final de la velocidad de A, tenemos

$$\begin{aligned} v_{A2x} &= \frac{P_x - m_B v_{B2x}}{m_A} = \frac{0.40 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - (0.30 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s})}{0.50 \text{ kg}} \\ &= -0.40 \text{ m/s} \end{aligned}$$

El cambio en la componente x del momento lineal del deslizador A es

$$\begin{aligned} m_A v_{A2x} - m_A v_{A1x} &= (0.50 \text{ kg})(-0.40 \text{ m/s}) \\ &\quad - (0.50 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) = -1.2 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

y el cambio en la componente x del momento lineal del deslizador B es

$$\begin{aligned} m_B v_{B2x} - m_B v_{B1x} &= (0.30 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) \\ &\quad - (0.30 \text{ kg})(-2.0 \text{ m/s}) = +1.2 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

Los dos deslizadores en interacción sufren cambios de momento lineal, que son iguales en magnitud y opuestos en dirección, pero los cambios de velocidad *no* son iguales y opuestos. Para A, $v_{A2x} - v_{A1x} = (-0.40 \text{ m/s}) - 2.0 \text{ m/s} = -2.4 \text{ m/s}$; para B, $v_{B2x} - v_{B1x} = 2.0 \text{ m/s} - (-2.0 \text{ m/s}) = +4.0 \text{ m/s}$.

EVALUAR: ¿Por qué los cambios del momento lineal tienen la misma magnitud para los dos deslizadores, no así los cambios de velocidad? Por la tercera ley de Newton, sobre ambos deslizadores actuó una fuerza de interacción de la misma magnitud durante el mismo tiempo; por lo tanto, ambos deslizadores experimentaron impulsos de la misma magnitud, así como cambios de la misma magnitud en el momento lineal. Sin embargo, por la segunda ley de Newton, el deslizador con menos masa (B) tuvo mayor magnitud de aceleración y, por consiguiente, un mayor cambio de velocidad.

He aquí una aplicación de estas ideas. Cuando una vagoneta choca con un automóvil de tamaño normal, ambos vehículos sufren el mismo cambio en su momento lineal. Sin embargo, los ocupantes del automóvil se someten a una aceleración considerablemente mayor (y una probabilidad considerablemente mayor de sufrir lesiones) que los de la vagoneta. Un ejemplo aún más extremo es lo que sucede cuando una vagoneta choca con un insecto; el conductor no notará la aceleración resultante, ¡pero el insecto sí!

Ejemplo 8.6 Choque en un plano horizontal

La figura 8.13a muestra dos robots combatientes que se deslizan sobre una superficie sin fricción. El robot A, con masa de 20 kg, se mueve inicialmente a 2.0 m/s paralelo al eje x. Choca con el robot B, cuya masa es de 12 kg y está inicialmente en reposo. Después del choque, el robot A se mueve a 1.0 m/s en una dirección que forma un ángulo $\alpha = 30°$ con su dirección inicial (figura 8.13b). ¿Qué velocidad final tiene el robot B?

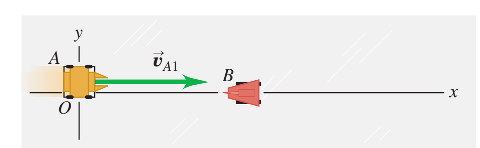
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: No hay fuerzas externas horizontales (x o y), así que ambas componentes, x y y, del momento lineal total del sistema se conservan en el choque.

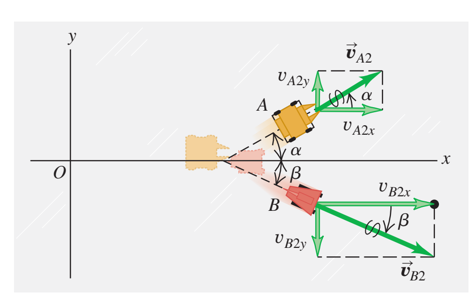
PLANTEAR: Los ejes de coordenadas se muestran en la figura 8.13. Las velocidades no están alineadas, así que debemos tratar el momento lineal como vector. La conservación del momento lineal exige que la suma de las componentes x *antes* del choque (subíndice 1) sea igual a la suma *después* del choque (subíndice 2), y lo mismo con las componentes y. Escribimos una ecuación para cada componente. La incógnita es $\vec{v}_{B2}$, la velocidad final del robot B.

8.13 Vista superior de las velocidades a) antes b) después del choque.

a) Antes del choque



b) Después del choque



EJECUTAR: La conservación de la componente x del momento lineal total indica que

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$v_{B2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} - m_A v_{A2x}}{m_B}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}(20\text{ kg})(2.0\text{ m/s}) + (12\text{ kg})(0)\\ -(20\text{ kg})(1.0\text{ m/s})(\cos 30°)\end{bmatrix}}{12\text{ kg}}$$

$$= 1.89\text{ m/s}$$

De manera similar, para la conservación de la componente y del momento lineal total tenemos

$$m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$v_{B2y} = \frac{m_A v_{A1y} + m_B v_{B1y} - m_A v_{A2y}}{m_B}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix}(20\text{ kg})(0) + (12\text{ kg})(0)\\ -(20\text{ kg})(1.0\text{ m/s})(\text{sen } 30°)\end{bmatrix}}{12\text{ kg}}$$

$$= -0.83\text{ m/s}$$

Después del choque, el robot B se mueve en las direcciones $+x$ y $-y$ (figura 8.13b). La magnitud de $\vec{v}_{B2}$ es

$$v_{B2} = \sqrt{(1.89\text{ m/s})^2 + (-0.83\text{ m/s})^2} = 2.1\text{ m/s}$$

y el ángulo de su dirección con respecto al eje $+x$ es

$$\beta = \arctan\frac{-0.83\text{ m/s}}{1.89\text{ m/s}} = -24°$$

EVALUAR: Una forma de comprobar la respuesta es examinar los valores de las componentes de momento lineal antes y después del choque. En un principio, todo el momento lineal está en el robot A, la componente x es $m_A v_{A1x}$ = (20 kg) (2.0 m/s) = 40 kg · m/s y la componente y es cero. Después del choque, el momento lineal en x del robot A es $m_A v_{A2x}$ = (20 kg) (1.0 m/s) (cos 30°) = 17 kg · m/s, mientras que el momento lineal en x del robot B es $m_B v_{B2x}$ = (12 kg) (1.89 m/s) = 23 kg · m/s; el momento lineal total en x es de 40 kg · m/s, igual que antes del choque (como debe ser). En la dirección y, el momento lineal del robot A después del choque es $m_A v_{A2y}$ = (20 kg) (1.0 m/s) (sen 30°) = 10 kg · m/s, mientras que la del robot B tiene la misma magnitud, pero dirección opuesta: $m_B v_{B2y}$ = (12 kg)(−0.83 m/s) = −10 kg · m/s. Así, la componente y *total* del momento lineal después del choque tiene el mismo valor (cero) que antes del choque.

Evalúe su comprensión de la sección 8.2 Un juguete accionado por un resorte está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando se suelta el resorte, el juguete se divide en tres piezas con masas iguales, A, B y C, que se deslizan por la superficie. La pieza A se aleja en la dirección $-x$, mientras que la B se aleja en la dirección $-y$. *a*) ¿Cuáles son los signos de las componentes de velocidad de la pieza C? *b*) ¿Cuál de las tres piezas se mueve más rápido?

MP

8.3 Conservación del momento lineal y choques

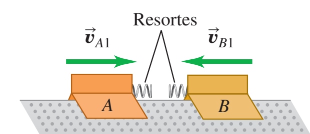
El término *choque* hace que una persona común piense en un percance de tráfico. Usaremos el término en ese sentido, pero además ampliaremos su significado para incluir cualquier interacción vigorosa entre cuerpos con duración relativamente corta.



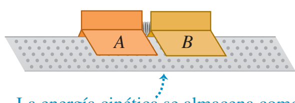
6.4 Problemas de choques
6.8 Deslizador y carrito

8.14 Dos deslizadores experimentan un choque elástico sobre una superficie sin fricción. Cada deslizador tiene un protector de resorte de acero que ejerce una fuerza conservativa sobre el otro deslizador.

a) Antes del choque

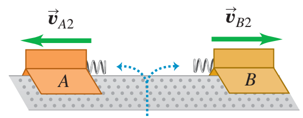


b) Choque elástico



La energía cinética se almacena como energía potencial en los resortes comprimidos.

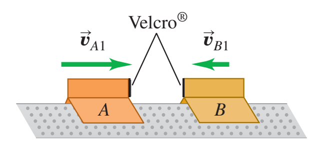
c) Después del choque



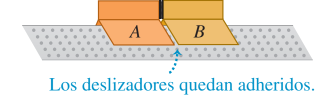
El sistema de los dos deslizadores tiene la misma energía cinética después del choque que antes de éste.

8.15 Dos deslizadores experimentan un choque totalmente inelástico. Los protectores de resorte de los deslizadores se sustituyeron por cintas Velcro®, de manera que los deslizadores quedan pegados después del choque.

a) Antes del choque

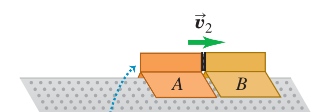


b) Choque totalmente inelástico



Los deslizadores quedan adheridos.

c) Después del choque



El sistema de los dos deslizadores tiene menos energía cinética después del choque que antes de éste.

Así que no sólo incluimos accidentes automovilísticos, sino también bolas que chocan en una mesa de billar, neutrones que inciden sobre núcleos en un reactor atómico y el impacto de un meteorito sobre el desierto de Arizona.

Si las fuerzas entre los cuerpos son mucho mayores que las externas, como suele suceder en los choques, podemos ignorar las fuerzas externas y tratar los cuerpos como un sistema *aislado*. Entonces, el momento lineal se conserva y el momento lineal total del sistema tendrá el mismo valor antes y después del choque. Dos autos que chocan en un cruce cubierto de hielo son un buen ejemplo. Incluso dos autos que chocan en pavimento seco se pueden tratar como sistema aislado durante el choque si, como es frecuente, las fuerzas entre los autos son mucho mayores que las fuerzas de fricción del pavimento contra los neumáticos.

Choques elásticos e inelásticos

Si las fuerzas entre los cuerpos son *conservativas*, de manera que no se pierde ni gana energía mecánica en el choque, la energía *cinética* total del sistema es la misma antes y después. Esto se denomina **choque elástico**. Un choque entre dos canicas o dos bolas de billar es casi totalmente elástico. La figura 8.14 muestra un modelo de choque elástico. Al chocar los deslizadores, los resortes se comprimen momentáneamente y parte de la energía cinética original se convierte por un momento en energía potencial elástica. Luego los deslizadores rebotan, los resortes se expanden y la energía potencial se convierte en cinética.

Un choque en el que la energía cinética total final es *menor* que la inicial es un **choque inelástico**. Una albóndiga que cae en un plato de espagueti y una bala que se incrusta en un bloque de madera son ejemplos de choques inelásticos. Un choque inelástico en el que los cuerpos se pegan y se mueven como uno solo después del choque es un **choque totalmente inelástico**. En la figura 8.15 se presenta un ejemplo; reemplazamos los protectores de resorte de la figura 8.14 por una cinta Velcro® que hace que los dos cuerpos se adhieran.

CUIDADO **Un choque inelástico no tiene que ser *totalmente* inelástico** Es un error común pensar que los *únicos* choques inelásticos son aquellos en que los cuerpos quedan pegados. En realidad, los choques inelásticos incluyen muchas situaciones en que los cuerpos *no* se pegan. Si dos autos chocan violentamente y rebotan, el trabajo efectuado para deformar las defensas no puede recuperarse como energía cinética de los autos, de manera que el choque es inelástico (figura 8.16).

Recuerde esta regla: **En todo choque en el que se pueden ignorar las fuerzas externas, el momento lineal se conserva y el momento lineal total es el mismo antes y después. La energía cinética total *sólo* es igual antes y después si el choque es elástico**.

Choque totalmente inelásticos

Veamos qué sucede con el momento lineal y la energía cinética en un choque *totalmente* inelástico de dos cuerpos A y B, como en la figura 8.15. Dado que los cuerpos quedan pegados después del choque, tienen la misma velocidad final $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

La conservación del momento lineal da la relación

$$m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\vec{v}_2 \quad \text{(choque totalmente inelástico)} \quad (8.16)$$

Si conocemos las masas y las velocidades iniciales, podremos calcular la velocidad final común $\vec{v}_2$.

Suponga, por ejemplo, que un cuerpo con masa m_A y componente x inicial de velocidad v_{A1x} choca inelásticamente con un cuerpo de masa m_B en reposo ($v_{B1x} = 0$). Por

la ecuación (8.16), la componente x de velocidad después del choque v_{2x}, común a ambos cuerpos, es

$$v_{2x} = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_{A1x} \quad \text{(choque totalmente inelástico, } B \text{ en reposo)} \tag{8.17}$$

Verifiquemos que la energía cinética total después de este choque totalmente inelástico es menor que antes. El movimiento es sólo sobre el eje x, por lo que las energías cinéticas K_1 y K_2 antes y después del choque, respectivamente, son

$$K_1 = \tfrac{1}{2} m_A v_{A1x}{}^2$$

$$K_2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B) v_{2x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)\left(\frac{m_A}{m_A + m_B}\right)^2 v_{A1x}{}^2$$

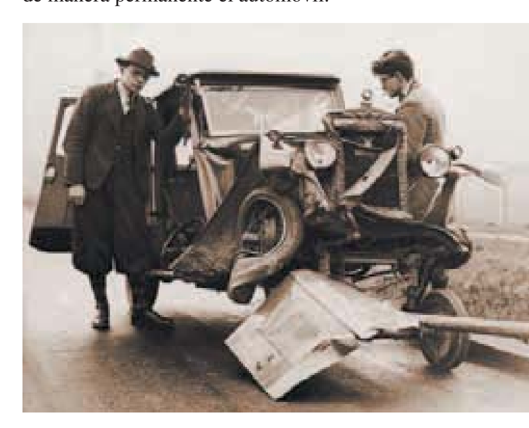
El cociente de las energías cinéticas final e inicial es

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \quad \text{(choque totalmente inelástico, } B \text{ en reposo)} \tag{8.18}$$

El lado derecho siempre es menor que la unidad porque el denominador siempre es mayor que el numerador. Aun si la velocidad inicial de m_B no es cero, no es difícil verificar que la energía cinética después de un choque totalmente inelástico siempre es menor que antes.

Atención: No se recomienda memorizar las ecuaciones (8.17) y (8.18). Sólo se dedujeron para demostrar que siempre se pierde energía cinética en un choque totalmente inelástico.

8.16 Los automóviles se diseñan de tal manera que los choques que sufran sean inelásticos, para que su estructura absorba la mayor cantidad posible de la energía del choque. Esta energía absorbida no puede recuperarse, pues se invierte en deformar de manera permanente el automóvil.



Ejemplo 8.7 Choque totalmente inelástico

Suponga que, en el choque descrito en el ejemplo 8.5 (sección 8.2), los deslizadores no rebotan, sino que quedan pegados después del choque. Las masas y velocidades iniciales son las mismas que en el ejemplo 8.5. Calcule la velocidad final común v_{2x} y compare las energías cinéticas inicial y final del sistema.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: No hay fuerzas externas en la dirección x, así que la componente x del momento lineal se conserva.

PLANTEAR: La figura 8.17 ilustra la situación. Como en el ejemplo 8.5, tomamos el eje x positivo hacia la derecha. Las incógnitas son la velocidad final v_{2x} y las energías cinéticas inicial y final del sistema.

EJECUTAR: Por la conservación de la componente x del momento lineal,

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = (m_A + m_B) v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x}}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{(0.50\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s}) + (0.30\ \text{kg})(-2.0\ \text{m/s})}{0.50\ \text{kg} + 0.30\ \text{kg}}$$

$$= 0.50\ \text{m/s}$$

Puesto que v_{2x} es positiva, los deslizadores se mueven juntos a la derecha (dirección $+x$) después del choque. Antes del choque, las energías cinéticas de los deslizadores A y B son

$$K_A = \tfrac{1}{2} m_A v_{A1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(2.0\ \text{m/s})^2 = 1.0\ \text{J}$$

$$K_B = \tfrac{1}{2} m_B v_{B1x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0.30\ \text{kg})(-2.0\ \text{m/s})^2 = 0.60\ \text{J}$$

(Observe que la energía cinética del deslizador B es positiva, aunque las componentes x de su velocidad v_{B1x} y de su momento lineal $m_B v_{B1x}$ son negativas.) La energía cinética *total* antes del choque es de 1.6 J. La energía cinética después del choque es

$$\tfrac{1}{2}(m_A + m_B) v_{2x}{}^2 = \tfrac{1}{2}(0.50\ \text{kg} + 0.30\ \text{kg})(0.50\ \text{m/s})^2 = 0.10\ \text{J}$$

EVALUAR: La energía cinética final es sólo $\frac{1}{16}$ de la cantidad original; $\frac{15}{16}$ se convierten de energía mecánica a otras diversas formas. Si hay una bola de goma de mascar entre los deslizadores, se aplasta y se calienta. Si hay un resorte entre los deslizadores que se comprime cuando éstos se enganchan, la energía se almacena como energía potencial del resorte. En ambos casos, la energía *total* del sistema se conserva, aunque la energía *cinética* no lo hace. Sin embargo, en un sistema aislado, el momento lineal *siempre* se conserva, sin importar que el choque sea elástico o no.

8.17 Bosquejo que ilustra el problema.

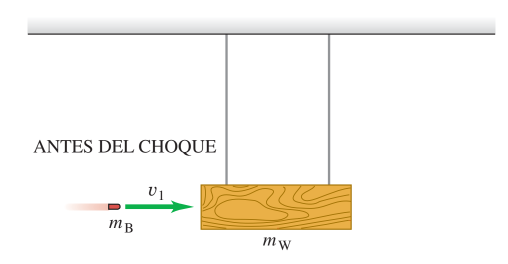
Antes: A, $v_{A1x} = 2.0$ m/s, $m_A = 0.50$ kg; B, $v_{B1x} = -2.0$ m/s, $m_B = 0.30$ kg; x

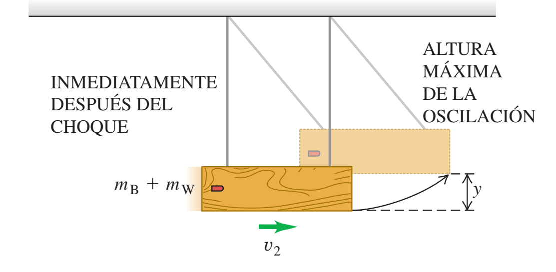
Después: A B, $v_{2x} = ?$; x

Ejemplo 8.8 El péndulo balístico

La figura 8.18 muestra un péndulo balístico, un sistema para medir la rapidez de una bala. La bala, con masa m_B, se dispara contra un bloque de madera de masa m_W que cuelga como péndulo, y tiene un choque totalmente inelástico con él. Después del impacto de la bala, el bloque oscila hasta una altura máxima y. Dados los valores de y, m_B y m_W, ¿qué rapidez inicial v_1 tiene la bala?

8.18 Un péndulo balístico.





SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Analizaremos el suceso en dos etapas: 1) la incrustación de la bala en el bloque y 2) la posterior oscilación del bloque sostenido por los cordeles.

Durante la primera etapa, la bala se incrusta en el bloque con tal rapidez que éste no tiene tiempo de moverse casi respecto a su posición inicial. Durante este impacto de corta duración, los hilos de soporte permanecen casi verticales, así que la fuerza externa horizontal que actúa sobre el sistema formado por la bala más el bloque es insignificante y la *componente horizontal del momento lineal* se conserva. La energía mecánica *no* se conserva en esta etapa porque hay una fuerza no conservativa (la fuerza de fricción entre la bala y el bloque) que realiza trabajo.

En la segunda etapa, después del choque, el bloque y la bala se mueven juntos. Las únicas fuerzas que actúan sobre esta unidad son la gravedad (una fuerza conservativa) y las tensiones de los hilos (que no efectúan trabajo). Por lo tanto, cuando el péndulo oscila hacia arriba y a la derecha, la *energía mecánica* se conserva. El momento lineal *no* se conserva durante esta etapa porque hay una fuerza externa neta (la fuerza de gravedad y las tensiones en los hilos no se cancelan cuando los hilos están inclinados).

PLANTEAR: Tomamos el eje x positivo hacia la derecha y el eje y positivo hacia arriba como en la figura 8.18. Nuestra incógnita es v_1. Otra incógnita es la rapidez v_2 del bloque y la bala juntos inmediatamente después del choque (es decir, al final de la primera etapa). Usaremos la conservación del momento lineal en la primera etapa para relacionar v_1 con v_2, y la conservación de la energía en la segunda etapa para relacionar v_2 con la altura máxima y (que nos dan).

EJECUTAR: En la primera etapa, todas las velocidades tienen la dirección x positiva. La conservación del momento lineal da

$$m_B v_1 = (m_B + m_W)v_2 \qquad v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B}v_2$$

Al principio de la segunda etapa, la energía cinética del sistema bala-bloque es $K = \frac{1}{2}(m_B + m_W)v_2^2$. [Igual que en la ecuación (8.18), ésta es menor que la energía cinética antes del choque porque el choque es inelástico.] La unidad bloque-bala oscila hacia arriba y se detiene momentáneamente a una altura y, donde su energía cinética es cero y su energía potencial es $(m_B + m_W)gy$, y luego baja. La conservación de energía da

$$\tfrac{1}{2}(m_B + m_W)v_2^2 = (m_B + m_W)gy \qquad v_2 = \sqrt{2gy}$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación de momento lineal y obtenemos una expresión para la variable buscada v_1:

$$v_1 = \frac{m_B + m_W}{m_B}\sqrt{2gy}$$

Midiendo m_B, m_W y y podemos calcular la rapidez original de la bala.

EVALUAR: Verifiquemos nuestras respuestas insertando algunas cifras realistas. Si $m_B = 5.00\text{ g} = 0.00500\text{ kg}$, $m_W = 2.00\text{ kg}$ y $y = 3.00\text{ cm} = 0.0300\text{ m}$, la velocidad inicial de la bala es

$$v_1 = \frac{0.00500\text{ kg} + 2.00\text{ kg}}{0.00500\text{ kg}}\sqrt{2(9.80\text{ m/s}^2)(0.0300\text{ m})}$$
$$= 307\text{ m/s}$$

La rapidez v_2 del bloque justo después del impacto es

$$v_2 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2(9.80\text{ m/s}^2)(0.0300\text{ m})}$$
$$= 0.767\text{ m/s}$$

Justo antes del impacto, la energía cinética de la bala es $\frac{1}{2}(0.00500\text{ kg})(307\text{ m/s})^2 = 236\text{ J}$, y la del bloque y la bala justo después del impacto es $\frac{1}{2}(2.005\text{ kg})(0.767\text{ m/s})^2 = 0.589\text{ J}$. Casi toda la energía cinética desaparece al astillarse la madera y calentarse la bala y el bloque.

Ejemplo 8.9 Análisis de un choque de autos

Un automóvil compacto de 1000 kg viaja al norte a 15 m/s, y en un cruce choca con una enorme vagoneta de 2000 kg que viaja al este a 10 m/s. Por suerte, todos los ocupantes usan cinturones de seguridad y no hay lesionados, pero los dos autos quedan enganchados y se alejan del punto de impacto como una sola masa. El ajustador de la aseguradora necesita calcular la velocidad de los restos después del impacto. ¿Cómo puede hacerlo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Supondremos que podemos tratar los autos como sistema aislado durante el choque. Podemos hacerlo porque las fuerzas horizontales que los vehículos ejercen uno sobre el otro durante el choque tienen magnitudes muy grandes, lo suficiente para plegar las carrocerías. En comparación con esas fuerzas, las externas, como la

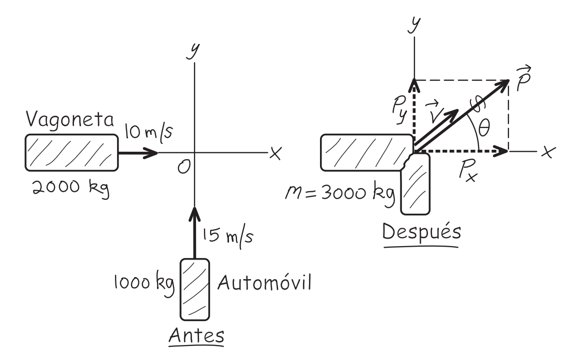
fricción, son insignificantes. (Más adelante justificaremos esta suposición.) Por lo tanto, el momento lineal del sistema de dos vehículos tiene el mismo valor inmediatamente antes e inmediatamente después del choque.

PLANTEAR: La figura 8.19 ilustra la situación. Podemos calcular el momento lineal total antes del choque, $\vec{P}$, con las ecuaciones (8.15) y los ejes coordenados de la figura 8.19. El momento lineal tiene el mismo valor inmediatamente después del choque; por lo tanto, una vez que obtengamos $\vec{P}$, podremos calcular la velocidad $\vec{V}$ justo después del choque (la segunda incógnita) empleando la relación $\vec{P} = M\vec{V}$, donde M es la masa combinada de los vehículos. Usaremos los subíndices C y T para el automóvil y la vagoneta, respectivamente.

EJECUTAR: De acuerdo con las ecuaciones (8.15), las componentes del momento lineal total $\vec{P}$ son

$$\begin{aligned} P_x &= p_{Cx} + p_{Tx} = m_C v_{Cx} + m_T v_{Tx} \\ &= (1000\text{ kg})(0) + (2000\text{ kg})(10\text{ m/s}) \\ &= 2.0 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} \\ P_y &= p_{Cy} + p_{Ty} = m_C v_{Cy} + m_T v_{Ty} \\ &= (1000\text{ kg})(15\text{ m/s}) + (2000\text{ kg})(0) \\ &= 1.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

8.19 Bosquejo para este problema.



La magnitud de $\vec{P}$ es

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(2.0 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2 + (1.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s})^2} \\ &= 2.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s} \end{aligned}$$

y su dirección está dada por el ángulo θ indicado en la figura 8.19, donde

$$\tan\theta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{1.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{2.0 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}} = 0.75 \qquad \theta = 37°$$

El momento lineal total justo después del choque es el mismo que inmediatamente antes. Si no se desprenden piezas, la masa total de los restos es $M = m_C + m_T = 3000$ kg. Utilizando $\vec{P} = M\vec{V}$, la dirección de la velocidad $\vec{V}$ justo después del choque es la que tiene el momento lineal, y su magnitud es

$$V = \frac{P}{M} = \frac{2.5 \times 10^4\text{ kg}\cdot\text{m/s}}{3000\text{ kg}} = 8.3\text{ m/s}$$

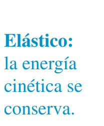
EVALUAR: El choque es inelástico, por lo que cabe esperar que la energía cinética total después del choque sea menor que antes. Realice el cálculo; encontrará que la energía cinética inicial es 2.1×10^5 J, y la final, 1.0×10^5 J. Más de la mitad de la energía cinética inicial se convirtió en otras formas.

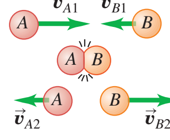
Todavía necesitamos justificar nuestra suposición de que podemos despreciar las fuerzas externas que actúan sobre los vehículos durante el choque. Para ello, advierta que la masa de la vagoneta es de 2000 kg, su peso es de unos 20,000 N y, si el coeficiente de fricción cinética es del orden de 0.5, la fuerza de fricción al deslizarse sobre el pavimento es de unos 10,000 N. La energía cinética de la vagoneta justo antes del impacto es $\frac{1}{2}(2000\text{ kg})(10\text{ m/s})^2 = 1.0 \times 10^5$ J. Digamos que el vehículo se aplasta 0.2 m; para efectuar el trabajo de -1.0×10^5 J necesario para detener el auto en una distancia de 0.2 m se requiere una fuerza de 5.0×10^5 N, 50 veces mayor que la de fricción. Por lo tanto, es razonable despreciar las fuerzas de fricción externas y sólo ocuparnos de las internas que los vehículos ejercen uno sobre el otro.

Clasificación de los choques

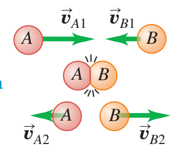
Es importante recordar que los choques se clasifican de acuerdo con consideraciones de energía (figura 8.20). Un choque en el que la energía cinética se conserva se considera *elástico*. (Examinaremos esto con mayor profundidad en la siguiente sección.) Un choque en el que la energía cinética total disminuye se llama *inelástico*. Cuando dos cuerpos tienen una velocidad final común, decimos que el choque es *totalmente inelástico*. También hay casos en los que la energía cinética final es *mayor* que el valor inicial. El retroceso de los rifles o "culatazo", analizado en el ejemplo 8.4 (sección 8.2), es un caso ilustrativo.

8.20 Los choques se clasifican de acuerdo con consideraciones de energía.

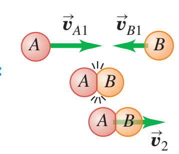

Elástico: la energía cinética se conserva.



Inelástico: parte de la energía cinética se pierde.



Totalmente inelástico: los cuerpos tienen la misma velocidad final.



Por último, hacemos hincapié una vez más en que, en ocasiones, podemos utilizar la conservación del momento lineal incluso cuando hay fuerzas externas que actúan sobre el sistema, si la fuerza externa neta que actúa sobre los cuerpos que chocan es pequeña en comparación con las fuerzas internas durante el choque (como en el ejemplo 8.9).

Evalúe su comprensión de la sección 8.3 Para cada situación, indique si el choque es elástico o inelástico. Si es inelástico, indique si es totalmente inelástico. *a*) Usted deja caer una pelota de su mano que choca contra el piso, rebota y casi alcanza a regresar a su mano. *b*) Usted deja caer otra pelota de su mano y deja que choque con el suelo. La pelota rebota y llega a la mitad de la altura de la que fue soltada. *c*) Usted deja caer una bola de arcilla de su mano. Cuando choca con el suelo, se detiene.

8.4 Choques elásticos

Como vimos en la sección 8.3, un *choque elástico* en un sistema aislado es uno en el que se conserva la energía cinética (al igual que el momento lineal). Estos choques ocurren cuando las fuerzas entre los cuerpos que chocan son *conservativas*. Si chocan dos bolas de billar, se aplastan un poco cerca del punto de contacto, pero luego rebotan. Parte de la energía cinética se almacena temporalmente como energía potencial elástica, pero al final se convierte una vez más en energía cinética (figura 8.21).

ActivPhysics ONLINE
6.2 Choques y elasticidad
6.7 Choque de autos: dos dimensiones
6.9 Péndulo que golpea una caja

Examinemos un choque elástico entre dos cuerpos A y B. Comencemos con un choque en una dimensión, con todas las velocidades en la misma línea, a la que llamamos eje x. Así, los momentos lineales y velocidades sólo tienen componentes x. Llamamos v_{A1x} y v_{B1x} a las componentes x de velocidad antes del choque, y v_{A2x} y v_{B2x} a las componentes x después del choque. Por la conservación de la energía cinética tenemos

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B1x}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2x}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2x}^2$$

y la conservación del momento lineal da

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

Si conocemos las masas m_A y m_B y las velocidades iniciales v_{A1x} y v_{B1x}, podremos resolver las ecuaciones para obtener las velocidades finales v_{A2x} y v_{B2x}.

8.21 Las bolas de billar casi no se deforman al chocar, y pronto recuperan su forma original. Por ello, la fuerza de interacción entre las bolas es casi perfectamente conservativa, y el choque es casi perfectamente elástico.



Choques elásticos, un cuerpo inicialmente en reposo

La solución general de las ecuaciones anteriores es algo complicada, así que nos concentraremos en el caso especial en que el cuerpo B está en reposo antes del choque (es decir, $v_{B1x} = 0$). Piense que el cuerpo B es el blanco que A debe golpear. Las ecuaciones de conservación de energía cinética y el momento lineal son, respectivamente,

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1x}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2x}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2x}^2 \tag{8.19}$$

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} \tag{8.20}$$

Podemos despejar v_{A2x} y v_{B2x} en términos de las masas y la velocidad inicial v_{A1x}. Esto implica operaciones algebraicas algo complicadas, pero vale la pena. El enfoque más sencillo es un tanto indirecto, pero de pasada revela otra característica interesante de los choques elásticos.

Reacomodemos primero las ecuaciones (8.19) y (8.20) así:

$$m_B v_{B2x}^2 = m_A(v_{A1x}^2 - v_{A2x}^2) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})(v_{A1x} + v_{A2x}) \tag{8.21}$$

$$m_B v_{B2x} = m_A(v_{A1x} - v_{A2x}) \tag{8.22}$$

Ahora dividimos la ecuación (8.21) entre la (8.22) para obtener

$$v_{B2x} = v_{A1x} + v_{A2x} \tag{8.23}$$

Sustituimos esto en la ecuación (8.22) para eliminar v_{B2x}, y luego despejamos v_{A2x}:

$$m_B(v_{A1x} + v_{A2x}) = m_A(v_{A1x} - v_{A2x})$$

$$v_{A2x} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}v_{A1x} \tag{8.24}$$

Por último, sustituimos este resultado en la ecuación (8.23) para obtener

$$v_{B2x} = \frac{2m_A}{m_A + m_B}v_{A1x} \tag{8.25}$$

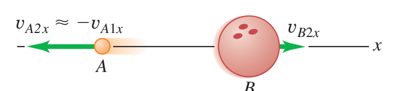
Ahora podemos interpretar los resultados. Suponga que A es una pelota de ping-pong y B es una bola de boliche. Esperaremos que A rebote después del choque con una velocidad casi igual a la original pero en la dirección opuesta (figura 8.22a), y que la velocidad de B sea mucho menor. Eso es precisamente lo que las ecuaciones predicen. Si m_A es mucho menor que m_B, la fracción de la ecuación (8.24) es aproximadamente igual a -1, y v_{A2x} es casi igual a $-v_{A1x}$. La fracción de la ecuación (8.25) es mucho menor que 1, así que v_{B2x} es mucho menor que v_{A1x}. La figura 8.22b muestra el caso opuesto, en el que A es la bola de boliche y B la de ping-pong, y m_A es mucho mayor que m_B. ¿Qué esperaría el lector que suceda? Verifique sus predicciones con las ecuaciones (8.24) y (8.25).

Otro caso interesante se presenta cuando las masas son iguales (figura 8.23). Si $m_A = m_B$, las ecuaciones (8.24) y (8.25) dan $v_{A2x} = 0$ y $v_{B2x} = v_{A1x}$. Es decir, el cuerpo que se movía se para en seco, comunicando todo el momento lineal y energía cinética al cuerpo que estaba en reposo. Este comportamiento es conocido para quienes juegan billar.

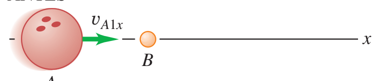
8.22 Choque entre a) una pelota de ping-pong y una bola de boliche inicialmente en reposo, y b) una bola de boliche y una pelota de ping-pong inicialmente estacionaria.

a) La pelota de ping-pong golpea una bola de boliche

ANTES

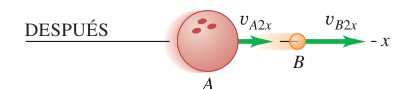


DESPUÉS



b) Una bola de boliche golpea una pelota de ping-pong

ANTES



DESPUÉS

Choques elásticos y velocidad relativa

Volvamos ahora al caso general en que A y B tienen diferente masa. La ecuación (8.23) puede reescribirse así:

$$v_{A1x} = v_{B2x} - v_{A2x} \tag{8.26}$$

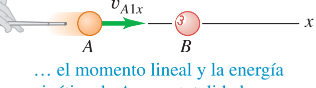
Aquí, $v_{B2x} - v_{A2x}$ es la velocidad de B relativa a A *después* del choque; según la ecuación (8.26), esto es igual a v_{A1x}, el *negativo* de la velocidad de B relativa a A *antes* del choque. (Tratamos las velocidades relativas en la sección 3.5.) La velocidad relativa tiene la misma magnitud, pero signo opuesto, antes y después del choque. El signo cambia porque los cuerpos se están acercando antes del choque y alejándose después. Si vemos el choque desde otro sistema de coordenadas que se mueve con velocidad constante relativa al primero, las velocidades de los cuerpos son diferentes pero las velocidades *relativas* son las mismas. Así, lo que dijimos acerca de las velocidades relativas se cumple en general para *cualquier* choque elástico rectilíneo, aun si ningún cuerpo está en reposo inicialmente. *En un choque rectilíneo elástico de dos cuerpos, las velocidades relativas antes y después del choque tienen la misma magnitud pero signo opuesto*. Esto significa que si B se está moviendo antes del choque, la ecuación (8.26) se convierte en

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -(v_{B1x} - v_{A1x}) \tag{8.27}$$

Resulta que una relación *vectorial* similar a la ecuación (8.27) es una propiedad general de *todos* los choques elásticos, aun si ambos cuerpos se mueven inicialmente y las velocidades no están alineadas. Este resultado ofrece una definición alternativa y equivalente de choque elástico: *en un choque elástico, la velocidad relativa de los dos cuerpos tiene la misma magnitud antes y después del choque*. Siempre que se satisface esta condición, se conserva la energía cinética total.

Si un choque elástico de dos cuerpos no es de frente, las velocidades no están alineadas. Si todas están en el mismo plano, cada velocidad final tiene dos componentes desconocidas y hay cuatro incógnitas en total. La conservación de la energía y la conservación de las componentes x y y del momento lineal sólo dan tres ecuaciones. Para determinar las velocidades finales sin ambigüedad, necesitamos información adicional, como la dirección o la magnitud de una de esas velocidades.

8.23 Choque elástico unidimensional entre cuerpos de igual masa.



Ejemplo 8.10 Choque rectilíneo elástico

Repetiremos el experimento del riel de aire del ejemplo 8.5 (sección 8.2), pero agregando defensas de resorte ideal a los deslizadores para que el choque sea elástico. ¿Cuáles son las velocidades de A y B después del choque?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 8.5, la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema de dos deslizadores es cero y el momento lineal del sistema se conserva.

PLANTEAR: La figura 8.24 ilustra la situación. Una vez más, elegimos el eje $+x$ de manera que apunte a la derecha. Obtendremos las incógnitas, v_{A2x} y v_{B2x}, empleando la ecuación (8.27) y la conservación del momento lineal.

EJECUTAR: Por la conservación del momento lineal,

$$m_A v_{A1x} + m_B v_{B1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

$$(0.50 \text{ kg})(2.0 \text{ m/s}) + (0.30 \text{ kg})(-2.0 \text{ m/s}) = (0.50 \text{ kg})v_{A2x} + (0.30 \text{ kg})v_{B2x}$$

$$0.50 v_{A2x} + 0.30 v_{B2x} = 0.40 \text{ m/s}$$

(Dividimos la última ecuación entre la unidad "kg".) De acuerdo con la ecuación (8.27), la relación de velocidades relativas para un choque elástico,

$$v_{B2x} - v_{A2x} = -(v_{B1x} - v_{A1x}) = -(-2.0 \text{ m/s} - 2.0 \text{ m/s}) = 4.0 \text{ m/s}$$

8.24 Bosquejo de esta situación.

Antes del choque, la velocidad de B relativa a A es a la izquierda a 4.0 m/s; después del choque, la velocidad de B relativa a A es a la derecha a 4.0 m/s. Resolviendo las ecuaciones simultáneamente, tenemos

$$v_{A2x} = -1.0 \text{ m/s} \qquad v_{B2x} = 3.0 \text{ m/s}$$

EVALUAR: Ambos cuerpos invierten sus direcciones; A se mueve a la izquierda a 1.0 m/s y B lo hace a la derecha a 3.0 m/s. Esto difiere del resultado del ejemplo 8.5 porque ese choque *no* era elástico.

Observe que, a diferencia de las situaciones de la figura 8.22, *los dos* deslizadores se mueven uno hacia el otro antes del choque. Nuestros resultados indican que A (el deslizador con mayor masa) se mueve más lentamente después del choque que antes, así que pierde energía cinética. En contraste, B (el deslizador con menor masa) gana energía cinética, ya que se mueve más rápido después del choque que antes. La energía cinética *total* después del choque elástico es

$$\tfrac{1}{2}(0.50 \text{ kg})(-1.0 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0.30 \text{ kg})(3.0 \text{ m/s})^2 = 1.6 \text{ J}$$

Como esperábamos, esto es igual a la energía cinética total *antes* del choque (calculada en el ejemplo 8.7, sección 8.3). Por lo tanto, la energía cinética se transfiere de A a B en el choque, sin que nada de ella se pierda en el proceso. Lo mismo sucede cuando un jugador de béisbol batea una pelota que se aproxima. El choque es casi elástico, y el bate, que tiene mayor masa, transfiere energía cinética a la pelota, cuya masa es menor. La pelota deja el bate con una rapidez mucho mayor, quizá suficiente para anotar un *home run*.

CUIDADO ¡Atención a las ecuaciones de choques elásticos! Tal vez el lector pensó en resolver este problema empleando las ecuaciones (8.24) y (8.25). Estas ecuaciones *sólo* son válidas en situaciones en las que el cuerpo B inicialmente está en reposo, lo cual no sucede aquí. Si tiene dudas, siempre resuelva el problema en cuestión empleando ecuaciones que sean válidas en una amplia variedad de casos.

Ejemplo 8.11 Moderador en un reactor nuclear

En un reactor nuclear se producen neutrones de alta rapidez durante procesos de fisión nuclear del uranio. Para que un neutrón pueda provocar fisiones adicionales, debe ser frenado por choques con núcleos en el *moderador* del reactor. El primer reactor nuclear (construido en 1942 en la Universidad de Chicago) y el reactor implicado en el accidente de Chernobyl en 1986 usaban carbono (grafito) como material moderador. Un neutrón (masa = 1.0 u) que viaja a 2.6×10^7 m/s sufre un choque elástico de frente con un núcleo de carbono (masa = 12 u) que inicialmente está en reposo. Las fuerzas externas durante el choque son despreciables. Calcule las velocidades después del choque. (1 u es la *unidad de masa atómica*, igual a 1.66×10^{-27} kg.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nos dicen que las fuerzas externas pueden despreciarse (así que el momento lineal se conserva en el choque) y que el choque es elástico (de manera que también la energía cinética se conserva).

PLANTEAR: La figura 8.25 ilustra la situación. Tomamos el eje x en la dirección en que el neutrón se mueve inicialmente. Puesto que el choque es de frente, tanto el neutrón como el núcleo de carbono se moverán en este mismo eje después del choque. Además, dado que un cuerpo está inicialmente en reposo, podemos usar las ecuaciones (8.24) y (8.25) reemplazando A por n (para el neutrón) y B por C (el núcleo del carbono). Tenemos $m_n = 1.0$ u, $m_C = 12$ u, y $v_{n1x} = 2.6 \times 10^7$ m/s, y necesitamos despejar las incógnitas v_{n2x} y v_{C2x} (las velocidades finales del neutrón y el núcleo de carbono, respectivamente).

EJECUTAR: La figura 8.25 ilustra la situación. Dejaremos que usted realice los cálculos; los resultados son

$$v_{n2x} = -2.2 \times 10^7 \text{ m/s} \qquad v_{C2x} = 0.4 \times 10^7 \text{ m/s}$$

EVALUAR: El neutrón termina con $\frac{11}{13}$ de su rapidez inicial, y la rapidez del núcleo de carbono en retroceso es $\frac{2}{13}$ de la rapidez inicial del neu-

trón. [Estas razones son los factores $(m_n - m_C)/(m_n + m_C)$ y $2m_n/(m_n + m_C)$ que aparecen en las ecuaciones (8.24) y (8.25) con los subíndices modificados para este problema.] La energía cinética es proporcional a la rapidez al cuadrado, así que la energía cinética final del neutrón es $\left(\frac{11}{13}\right)^2$, esto es, cerca de 0.72 de su valor original. Si el neutrón sufre un segundo choque como éste, su energía cinética será $(0.72)^2$, es decir, cerca de la mitad de su valor original, y así sucesivamente. Después de varios choques, el neutrón se estará moviendo muy lentamente y podrá provocar una reacción de fisión en un núcleo de uranio.

8.25 Bosquejo de esta situación.

Ejemplo 8.12 Choque elástico bidimensional

La figura 8.23 muestra un choque elástico de dos discos de hockey en una mesa sin fricción. El disco A tiene masa $m_A = 0.500$ kg, y el B, $m_B = 0.300$ kg. El disco A tiene velocidad inicial de 4.00 m/s en la dirección $+x$ y velocidad final de 2.00 m/s en dirección desconocida. El disco B está inicialmente en reposo. Calcule la rapidez final v_{B2} del disco B y los ángulos α y β de la figura.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aunque el choque es elástico, *no* es unidimensional, así que no podemos usar las fórmulas para una dimensión obtenidas en esta sección. En vez de ello, usaremos las ecuaciones de conservación de la energía, conservación del momento lineal en x y conservación del momento lineal en y.

PLANTEAR: Las variables buscadas se indican en el enunciado del problema. Tenemos tres ecuaciones, las cuales bastarán para encontrar las tres incógnitas.

EJECUTAR: Puesto que el choque el elástico, las energías cinéticas inicial y final son iguales:

$$\tfrac{1}{2}m_A v_{A1}{}^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_{A2}{}^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_{B2}{}^2$$

$$v_{B2}{}^2 = \frac{m_A v_{A1}{}^2 - m_A v_{A2}{}^2}{m_B}$$

$$= \frac{(0.500\text{ kg})(4.00\text{ m/s})^2 - (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})^2}{0.300\text{ kg}}$$

$$v_{B2} = 4.47\text{ m/s}$$

Por la conservación de la componente x del momento lineal total:

$$m_A v_{A1x} = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x}$$

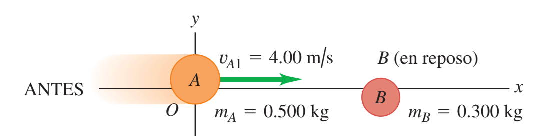
$$(0.500\text{ kg})(4.00\text{ m/s}) = (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})(\cos\alpha) + (0.300\text{ kg})(4.47\text{ m/s})(\cos\beta)$$

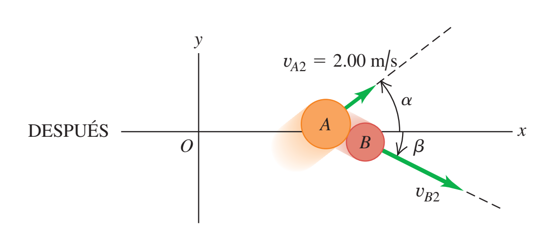
y por la conservación de la componente y:

$$0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y}$$

$$0 = (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})(\operatorname{sen}\alpha) - (0.300\text{ kg})(4.47\text{ m/s})(\operatorname{sen}\beta)$$

8.26 Choque elástico que no es de frente.





Tenemos dos ecuaciones simultáneas para α y β. Lo más sencillo es eliminar β así: despejamos cos β de la primera ecuación y sen β de la segunda; luego elevamos al cuadrado las ecuaciones y las sumamos. Como $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, esto elimina β y deja una ecuación de la que podemos despejar cos α y, por lo tanto, α. Luego sustituimos este valor en cualquiera de las dos ecuaciones y despejamos β. Dejamos que el lector resuelva los detalles en el ejercicio 8.44; los resultados son

$$\alpha = 36.9° \qquad \beta = 26.6°$$

EVALUAR: Una forma rápida de comprobar las respuestas es asegurarse de que el momento lineal y, que era cero antes del choque, siga siendo cero después. Los momentos lineales y de los discos son

$$p_{A2y} = (0.500\text{ kg})(2.00\text{ m/s})(\operatorname{sen}36.9°) = +0.600\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

$$p_{B2y} = -(0.300\text{ kg})(4.47\text{ m/s})(\operatorname{sen}26.6°) = -0.600\text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

La suma de estos valores es cero, como debe ser.

Evalúe su comprensión de la sección 8.4 Casi todos los reactores nucleares modernos usan agua como moderador (véase el ejemplo 8.11). ¿Las moléculas de agua (masa $m_w = 18.0$ u) son mejores moderadores que los átomos de carbono? (Una ventaja del agua es que también actúa como refrigerante del centro radiactivo del reactor.)

8.5 Centro de masa

Podemos replantear el principio de conservación del momento lineal en una forma útil usando el concepto de **centro de masa**. Supongamos que tenemos varias partículas con masas m_1, m_2, etcétera. Las coordenadas de m_1 son (x_1, y_1), las de m_2, (x_2, y_2), y así sucesivamente. Definimos el centro de masa del sistema como el punto con coordenadas (x_{cm}, y_{cm}) dadas por

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i} \qquad \text{(centro de masa)} \quad (8.28)$$

El vector de posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa se puede expresar en términos de los vectores de posición $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ de las partículas como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad \text{(centro de masa)} \quad (8.29)$$

En la terminología estadística, el centro de masa es una posición *media ponderada por la masa* de las partículas.

Ejemplo 8.13 Centro de masa de una molécula de agua

La figura 8.27 ilustra un modelo simple de la estructura de una molécula de agua. La separación entre los átomos es $d = 9.57 \times 10^{-11}$ m. Cada átomo de hidrógeno tiene masa de 1.0 u, y el de oxígeno, 16.0 u. Determine la posición del centro de masa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Casi toda la masa de los átomos se concentra en el núcleo, cuyo radio es apenas 10^{-5} veces el radio del átomo, así que podemos representar los átomos como partículas puntuales.

PLANTEAR: El sistema de coordenadas se muestra en la figura 8.27. Usaremos las ecuaciones (8.28) para determinar las coordenadas x_{cm} y y_{cm}.

EJECUTAR: La coordenada x de cada átomo de hidrógeno es $d \cos(105°/2)$; las coordenadas y de los átomos de hidrógeno superior e inferior son $+d \operatorname{sen}(105°/2)$ y $-d \operatorname{sen}(105°/2)$, respectivamente. Las coordenadas del átomo de oxígeno son $x = 0$, $y = 0$. De acuerdo con las ecuaciones (8.28), la coordenada x del centro de masa es

$$x_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{l}(1.0\text{ u})(d\cos 52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times (d\cos 52.5°) + (16.0\text{ u})(0)\end{array}\right]}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}}$$

$$= 0.068d$$

y la coordenada y es

$$y_{cm} = \frac{\left[\begin{array}{l}(1.0\text{ u})(d\operatorname{sen} 52.5°) + (1.0\text{ u}) \\ \times (-d\operatorname{sen} 52.5°) + (16.0\text{ u})(0)\end{array}\right]}{1.0\text{ u} + 1.0\text{ u} + 16.0\text{ u}}$$

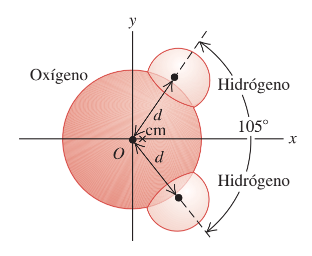
$$= 0$$

Al sustituir el valor $d = 9.57 \times 10^{-11}$ m, obtenemos

$$x_{cm} = (0.068)(9.57 \times 10^{-11}\text{ m}) = 6.5 \times 10^{-12}\text{ m}$$

EVALUAR: El centro de masa está mucho más cerca del átomo de oxígeno que de cualquiera de los átomos de hidrógeno porque su masa es mucho mayor. Observe que el centro de masa está en el eje x, el *eje de simetría* de la molécula. Si la molécula se gira 180° sobre este eje, se verá exactamente igual que antes. La rotación no puede afectar la posición del centro de masa, así que debe estar en el eje de simetría.

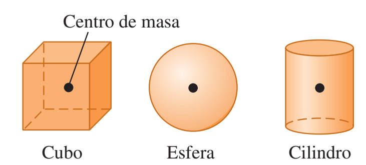
8.27 ¿Dónde está el centro de masa de una molécula de agua?



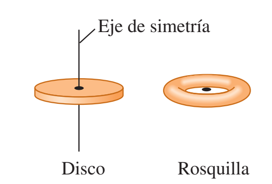
En el caso de cuerpos sólidos, que tienen (al menos en el nivel macroscópico) una distribución continua de materia, las sumas de las ecuaciones (8.28) deben sustituirse por integrales. Los cálculos suelen ser complicados, pero podemos decir algo en general acerca de tales problemas (figura 8.28). Primero, si un cuerpo homogéneo tiene un centro geométrico, como una bola de billar, un terrón de azúcar o una lata de jugo congelado, el centro de masa está en el centro geométrico. Segundo, si un cuerpo tiene un eje de simetría, como una rueda o una polea, el centro de masa está sobre ese eje. Tercero, ninguna ley dice que el centro de masa debe estar dentro del cuerpo. Por ejemplo, el centro de masa de una rosquilla está en el centro del agujero.

Hablaremos un poco más acerca de la localización del centro de masa en el capítulo 11, cuando veamos el concepto relacionado de *centro de gravedad*.

8.28 Localización del centro de masa de un objeto simétrico.



Si un objeto homogéneo tiene un centro geométrico, es ahí donde se localiza el centro de masa.



Si un objeto tiene un eje de simetría, el centro de masa estará a lo largo de éste. El centro de masa no siempre está dentro del objeto, como en el caso de una rosquilla.

Movimiento del centro de masa

Para comprender la importancia del centro de masa de un conjunto de partículas, debemos preguntar qué le sucede cuando las partículas se mueven. Las componentes x y y de velocidad del centro de masa, $v_{cm\text{-}x}$ y $v_{cm\text{-}y}$ son las derivadas de x_{cm} y y_{cm} respecto al tiempo. Asimismo, dx_1/dt es la componente x de velocidad de la partícula 1 (v_{1x}), y así sucesivamente, por lo que $dx_1/dt = v_{1x}$, etcétera. Al derivar las ecuaciones (8.28) respecto al tiempo, obtenemos

$$v_{cm\text{-}x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}$$
$$v_{cm\text{-}y} = \frac{m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + m_3 v_{3y} + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \quad (8.30)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación de un solo vector que se obtiene al derivar la ecuación (8.29) respecto al tiempo:

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \quad (8.31)$$

Denotamos la masa *total* $m_1 + m_2 + \cdots$ con M. Así, podemos reescribir la ecuación (8.31) como

$$M\vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = \vec{P} \quad (8.32)$$

El lado derecho es el momento lineal total $\vec{P}$ del sistema. Así, hemos demostrado que *el momento lineal total es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa*. Al atrapar una pelota, realmente estamos atrapando un conjunto de un gran número de moléculas de masas $m_1, m_2, m_3, \ldots$ El impulso que sentimos se debe al momento lineal total de ese conjunto, pero es el mismo que si estuviéramos atrapando una sola partícula de masa $M = m_1 + m_2 + m_3 \ldots$ que se mueve con velocidad $\vec{v}_{cm}$, la velocidad del centro de masa del conjunto. Así, la ecuación (8.32) ayuda a justificar la representación de un cuerpo extendido como partícula.

En un sistema de partículas sobre el que la fuerza neta externa que actúa es cero, de manera que el momento lineal total $\vec{P}$ es constante, la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm} = \vec{P}/M$ también es constante. Suponga que marcamos el centro de masa de una llave ajustable, que está en algún punto del mango, y deslizamos la masa con cierto giro sobre una mesa lisa horizontal (figura 8.29). El movimiento global parece complicado, pero el centro de masa sigue una línea recta, como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto.

8.29 El centro de masa de esta llave se marca con un punto blanco. La fuerza externa neta que actúa sobre la llave es casi cero. Cuando la llave gira en una superficie horizontal lisa, el centro de masa se mueve en línea recta con velocidad constante.



Ejemplo 8.14 Tira y afloja en el hielo

Santiago y Ramón están de pie, con una separación de 20.0 m, sobre la resbalosa superficie de un estanque helado. Ramón tiene una masa de 60.0 kg, y Santiago, de 90.0 kg. A medio camino entre ellos está un tarro de su bebida favorita. Los dos tiran de los extremos de una cuerda ligera que hay entre ellos. Cuando Santiago se ha movido 6.0 m hacia el tarro, ¿cuánto y en qué dirección se ha movido Ramón?

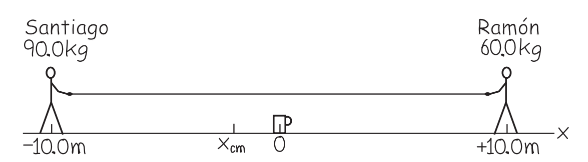
continúa

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La superficie congelada es horizontal y casi sin fricción, así que la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema de Santiago, Ramón y la cuerda es cero, y se conserva su momento lineal total. Inicialmente, no hay movimiento, así que el momento lineal total es cero y la velocidad del centro de masa es cero, pues está en reposo. Podemos usar esto para relacionar las posiciones de Santiago y Ramón.

PLANTEAR: Tomemos el origen en la posición del tarro, con el eje $+x$ hacia Ramón. Puesto que la cuerda es ligera, podemos despreciar su masa al calcular la posición del centro de masa con la ecuación (8.28).

8.30 Bosquejo para esta situación.



EJECUTAR: Las coordenadas x iniciales de Santiago y Ramón son -10.0 m y $+10.0$ m, respectivamente, así que la coordenada x del centro de masa es

$$x_{cm} = \frac{(90.0\text{ kg})(-10.0\text{ m}) + (60.0\text{ kg})(10.0\text{ m})}{90.0\text{ kg} + 60.0\text{ kg}} = -2.0\text{ m}$$

Al moverse Santiago 6.0 m hacia el tarro, su nueva coordenada x es -4.0 m; llamaremos a la nueva coordenada x de Ramón x_2. El centro de masa no se mueve, así que

$$x_{cm} = \frac{(90.0\text{ kg})(-4.0\text{ m}) + (60.0\text{ kg})x_2}{90.0\text{ kg} + 60.0\text{ kg}} = -2.0\text{ m}$$

$$x_2 = 1.0\text{ m}$$

Santiago se ha movido 6.0 m en la dirección $+x$ y aún está a 4.0 m del tarro, pero Ramón se movió 9.0 m en la dirección $-x$ y está a sólo 1.0 m de él.

EVALUAR: La razón de las distancias que los hombres se mueven, $(6.0\text{ m})/(9.0\text{ m}) = \frac{2}{3}$, es igual a la razón inversa de sus masas. ¿Puede decir por qué? Si los dos hombres siguen moviéndose (y, si la superficie no tiene fricción, así será), Ramón llegará primero al tarro. Este resultado es totalmente independiente de la fuerza con que ellos tiran; si Santiago tira con más fuerza, sólo logrará que Ramón apague su sed antes.

Fuerzas externas y movimiento del centro de masa

Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema de partículas no es cero, el momento lineal total no se conserva y la velocidad del centro de masa cambia. Veamos la relación entre el movimiento del centro de masa y las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Las ecuaciones (8.31) y (8. 32) dan la *velocidad* del centro de masa en términos de las velocidades de las partículas individuales. Dando un paso más, derivamos las ecuaciones respecto al tiempo para demostrar que las aceleraciones están relacionadas de la misma forma. Sea $\vec{a}_{cm} = d\vec{v}_{cm}/dt$ la aceleración del centro de masa; entonces,

$$M\vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots \tag{8.33}$$

Ahora, $m_1\vec{a}_1$ es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la primera partícula, y así sucesivamente, por lo que el lado derecho de la ecuación (8.33) es igual a la suma vectorial $\sum\vec{F}$ de *todas* las fuerzas que actúan sobre *todas* las partículas. Igual que en la sección 8.2, podemos clasificar cada fuerza como *interna* o *externa*. La suma de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas es entonces

$$\sum\vec{F} = \sum\vec{F}_{ext} + \sum\vec{F}_{int} = M\vec{a}_{cm}$$

Por la tercera ley de Newton, todas las fuerzas internas se cancelan en pares, y $\sum\vec{F}_{int} = \mathbf{0}$. Lo que queda en el lado izquierdo es la suma sólo de las fuerzas *externas*:

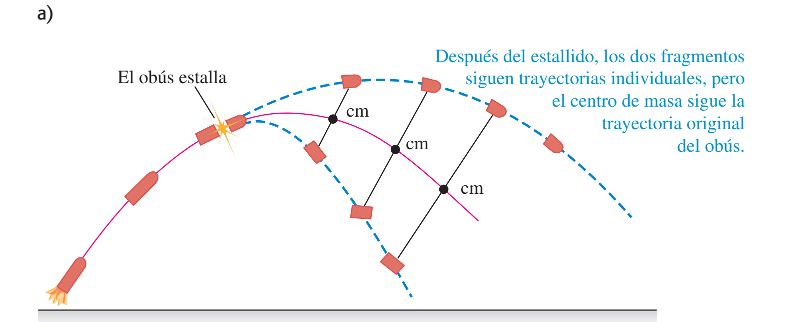
$$\sum\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad \text{(cuerpo o conjunto de partículas)} \tag{8.34}$$

Cuando fuerzas externas actúan sobre un cuerpo o un conjunto de partículas, el centro de masa se mueve como si toda la masa estuviera concentrada en ese punto y sobre ella actuara una fuerza neta igual a la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema.

Este resultado quizá no suene muy impresionante, pero es básico en mecánica. De hecho, hemos estado usándolo todo el tiempo; sin él, no podríamos representar un cuerpo extendido como una partícula puntual al aplicar las leyes de Newton. Este resultado explica por qué sólo fuerzas *externas* pueden afectar el movimiento de un cuerpo extendido. Si usted tira de su cinturón hacia arriba, éste ejercerá una fuerza igual hacia abajo sobre sus manos; éstas son fuerzas *internas* que se cancelan y no afectan el movimiento global del cuerpo.

8.31 a) Un obús estalla en vuelo produciendo dos fragmentos. Si la resistencia del aire es despreciable, el centro de masa sigue la misma trayectoria que tenía el obús antes de estallar. b) El mismo efecto se da cuando estallan juegos pirotécnicos.

a)



b)



Suponga que un obús con una trayectoria parabólica (ignorando la resistencia del aire) estalla en vuelo dividiéndose en dos fragmentos de igual masa (figura 8.31a). Los fragmentos siguen nuevas trayectorias parabólicas, pero el centro de masa sigue la trayectoria parabólica original, igual que si la masa aún estuviera concentrada ahí. Un cohete que estalla (figura 8.31b) es un ejemplo espectacular de este efecto.

Esta propiedad del centro de masa es importante al analizar el movimiento de cuerpos rígidos. Describimos el movimiento de un cuerpo extendido como una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por ese centro. Volveremos a este tema en el capítulo 10. Esta propiedad también es importante en el movimiento de objetos astronómicos. No es correcto decir que la Luna está en órbita alrededor de la Tierra; más bien, ambos cuerpos se mueven en órbitas alrededor de su centro de masa.

Hay otra forma útil de describir el movimiento de un sistema de partículas. Usando $\vec{a}_{cm} = d\vec{v}_{cm}/dt$, podemos reescribir la ecuación (8.33) como

$$M\vec{a}_{cm} = M\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{cm})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \tag{8.35}$$

La masa total del sistema M es constante, así que podemos incluirla en la derivada. Sustituyendo la ecuación (8.35) en la (8.34) tenemos

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \text{(cuerpo extendido o sistema de partículas)} \tag{8.36}$$

Ésta se parece a la ecuación (8.4). La diferencia es que la ecuación (8.36) describe un *sistema* de partículas, como un cuerpo extendido, y la ecuación (8.4) describe una sola partícula. Las interacciones entre las partículas del sistema pueden alterar los momentos lineales individuales de las partículas, pero el momento lineal *total* $\vec{P}$ del sistema sólo puede cambiar si fuerzas externas actúan sobre el sistema.

Por último, observamos que, si la fuerza externa neta es cero, la ecuación (8.34) dice que la aceleración $\vec{a}_{cm}$ del centro de masa es cero. Así que la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$ es constante, como en el caso de la llave de la figura 8.29. Por la ecuación (8.36), el momento lineal total $\vec{P}$ también es constante. Esto reafirma nuestro planteamiento del principio de conservación del momento lineal que hicimos en la sección 8.3.

Evalúe su comprensión de la sección 8.5 ¿El centro de masa en la figura 8.31a continuará en la misma trayectoria parabólica incluso después de que uno de los fragmentos golpee el suelo? ¿Por qué?

*8.6 Propulsión a reacción



6.6 Rescate de un astronauta

Las consideraciones de momento lineal son especialmente útiles para analizar un sistema en el que las masas de partes del sistema cambian con el tiempo. No es posible usar la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ directamente porque m cambia. La propulsión de un cohete es un ejemplo típico e interesante de este tipo de análisis. Un cohete es impulsado hacia delante por la expulsión hacia atrás de combustible quemado que inicialmente estaba en la nave (por esa razón el combustible del cohete también se llama *propelente*). La fuerza hacia delante que actúa sobre el cohete es la reacción a la fuerza hacia atrás que actúa sobre el material expulsado. La masa total del sistema es constante, pero la del cohete disminuye al expulsarse material.

Como ejemplo sencillo, consideremos un cohete encendido en el espacio, donde no hay fuerza gravitacional ni resistencia del aire. Denotamos con m la masa del cohete, que cambiará al irse consumiendo el combustible. Elegimos el eje x en la dirección de movimiento del cohete. La figura 8.32a muestra el cohete en el instante t, cuando su masa es m y la componente x de su velocidad relativa a nuestro sistema de coordenadas es v. (Por sencillez, omitiremos el subíndice x en este análisis.) La componente x del momento lineal total en este instante es $P_1 = mv$. En un lapso corto dt, la masa del cohete cambia en dm. Esta cantidad es inherentemente negativa porque m *disminuye* con el tiempo. Durante dt, se expulsa una masa *positiva* $-dm$ de combustible quemado. Sea v_{esc} la *rapidez* de escape de este material *relativa al cohete*; el combustible quemado se expulsa en dirección opuesta al movimiento, así que su componente x de *velocidad* relativa al cohete es $-v_{esc}$. La componente x de velocidad v_{cq} del combustible quemado con respecto a nuestro sistema de coordenadas es entonces

$$v_{cq} = v + (-v_{esc}) = v - v_{esc}$$

y la componente x del momento lineal de la masa expulsada ($-dm$) es

$$(-dm)v_{cq} = (-dm)(v - v_{esc})$$

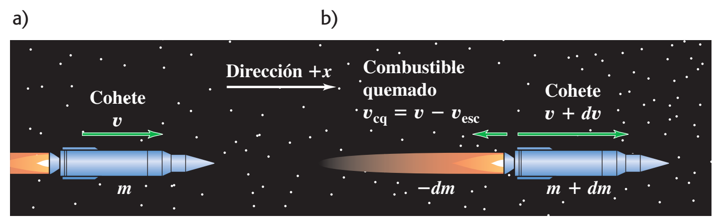
Como se indica en la figura 8.32b, al término del intervalo de tiempo dt, la componente x de velocidad del cohete y el combustible no quemado ha aumentado a $v + dv$, y su masa ha disminuido a $m + dm$ (recuerde que dm es negativo). El momento lineal del cohete ahora es

$$(m + dm)(v + dv)$$

Por lo tanto, la componente x total de momento lineal P_2 del cohete más el combustible quemado en el instante $t + dt$ es

$$P_2 = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{esc})$$

8.32 Un cohete se mueve en el espacio exterior sin gravedad a) en el instante t y b) en el instante $t + dt$.



En el tiempo t, el cohete tiene masa m y una componente x de velocidad v.

En el tiempo $t + dt$, el cohete tiene masa $m + dm$ (donde dm es inherentemente *negativo*) y la componente x de la velocidad $v + dv$. El combustible quemado tiene componente x de velocidad $v_{cq} = v - v_{esc}$ y masa $-dm$. (Se necesita el signo menos para hacer $-dm$ *positivo* porque dm es negativo.)

De acuerdo con nuestra suposición inicial, el cohete y el combustible son un sistema aislado, así que el momento lineal se conserva y la componente x del momento lineal del sistema debe ser el mismo en t y en $t + dt$: $P_1 = P_2$. Por lo tanto,

$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{esc})$$

Esto puede simplificarse a

$$m\,dv = -dm\,v_{esc} - dm\,dv$$

Podemos despreciar el término $(-dm\,dv)$ porque es el producto de dos cantidades pequeñas y, por lo tanto, mucho menor que los otros términos. Al desechar este término, dividiendo el resto entre dt y reordenando, obtenemos

$$m\frac{dv}{dt} = -v_{esc}\frac{dm}{dt} \tag{8.37}$$

Ahora dv/dt es la aceleración del cohete, así que el primer miembro de la ecuación (masa por aceleración) es igual a la fuerza neta F, o *empuje*, que actúa sobre el cohete,

$$F = -v_{esc}\frac{dm}{dt} \tag{8.38}$$

El empuje es proporcional tanto a la rapidez relativa v_{esc} del combustible expulsado como a la masa de combustible expulsado por unidad de tiempo, $-dm/dt$. (Recuerde que dm/dt es negativo porque es la tasa de cambio de la masa del cohete, así que F es positiva.)

La componente x de la aceleración del cohete es

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_{esc}}{m}\frac{dm}{dt} \tag{8.39}$$

Ésta es positiva porque v_{esc} es positiva (recuerde, es la *rapidez* de escape) y dm/dt es negativo. La masa del cohete m disminuye continuamente al consumirse el combustible. Si v_{esc} y dm/dt son constantes, la aceleración aumenta hasta agotarse el combustible.

La ecuación (8.38) nos dice que un cohete eficaz quema combustible rápidamente ($-dm/dt$ grande) y lo expulsa con rapidez relativa alta (v_{esc} grande), como en la figura 8.33. En los albores de la propulsión a reacción, quienes no entendían la conservación del momento lineal pensaban que un cohete no funcionaría en el espacio porque "no tendría contra qué empujar". Al contrario, los cohetes funcionan de manera *óptima* en el espacio ¡porque no hay resistencia del aire! El cohete de la figura 8.33 no está "empujando contra el suelo" para elevarse.

Si la rapidez de escape v_{esc} es constante, podemos integrar la ecuación (8.39) para obtener una relación entre la velocidad v en cualquier instante y la masa restante m. En el tiempo $t = 0$, sea la masa m_0 y la velocidad v_0. Reescribimos la ecuación (8.39) como

$$dv = -v_{esc}\frac{dm}{m}$$

Cambiamos las variables de integración a v' y m', para poder usar v y m como límites superiores (rapidez y masa finales). Integramos ambos lados usando los límites v_0 a v y m_0 a m, y sacamos la constante v_{esc} de la integral:

$$\int_{v_0}^{v} dv' = -\int_{m_0}^{m} v_{esc}\frac{dm'}{m'} = -v_{esc}\int_{m_0}^{m}\frac{dm'}{m'}$$

$$v - v_0 = -v_{esc}\ln\frac{m}{m_0} = v_{esc}\ln\frac{m_0}{m} \tag{8.40}$$

La razón m_0/m es la masa original dividida entre la masa al agotarse el combustible. En naves espaciales prácticas, esta razón se hace lo más grande posible para tener una ganancia máxima de rapidez. Esto implica que la masa inicial del cohete es casi puro

8.33 Con la finalidad de proveer suficiente empuje para elevar su carga en el espacio, el vehículo de lanzamiento Atlas V expele más de 1000 kg de combustible quemado por segundo con una rapidez de casi 4000 m/s.



combustible. La rapidez final del cohete será mayor (a menudo *mucho* mayor) que la rapidez relativa v_{esc} si $\ln(m_0/m) > 1$, es decir, $m_0/m > e = 2.11828\ldots$.

Hemos supuesto en todo este análisis que el cohete está en el espacio exterior, sin gravedad. Sin embargo, la gravedad debe tenerse en cuenta si el cohete se lanza desde la superficie de un planeta, como en la figura 8.33 (véase el problema 8.110).

Ejemplo 8.15 Aceleración de un cohete

Un cohete está en el espacio exterior, lejos de cualquier planeta, cuando enciende su motor. En el primer segundo de encendido, el cohete expulsa $\frac{1}{120}$ de su masa con rapidez relativa de 2400 m/s. ¿Cuál es la aceleración inicial del cohete?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Conocemos la rapidez de escape del cohete, v_{esc}, pero no conocemos su masa m ni la tasa de cambio de su masa dm/dt. Sin embargo, nos dicen qué fracción de la masa inicial se pierde durante un intervalo dado de tiempo, lo que es suficiente información.

PLANTEAR: Emplearemos la ecuación (8.39) para calcular la aceleración del cohete.

EJECUTAR: Inicialmente, la tasa de cambio de la masa es

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m_0/120}{1\text{ s}} = -\frac{m_0}{120\text{ s}}$$

donde m_0 es la masa inicial ($t = 0$) del cohete. De acuerdo con la ecuación (8.39), la aceleración inicial es

$$a = -\frac{v_{esc}}{m_0}\frac{dm}{dt} = -\frac{2400\text{ m/s}}{m_0}\left(-\frac{m_0}{120\text{ s}}\right) = 20\text{ m/s}^2$$

EVALUAR: Observe que la respuesta no depende del valor de m_0. Si v_{esc} es la misma, la aceleración es la misma para una nave de 120,000 kg que expulsa 1000 kg/s y para un astronauta de 60 kg equipado con un cohete pequeño que expulsa 0.5 kg/s.

Ejemplo 8.16 Rapidez de un cohete

Suponga que $\frac{3}{4}$ de la masa inicial m_0 del cohete del ejemplo 8.15 es combustible, de manera que la masa final es $m = m_0/4$, y el combustible se consume totalmente a ritmo constante en un tiempo $t = 90$ s. Si el cohete parte del reposo en nuestro sistema de coordenadas, calcule su rapidez final al cabo de ese tiempo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nos dan la velocidad inicial v_0 (igual a cero), la velocidad de escape v_{esc} y la masa final m en términos de la masa inicial m_0.

PLANTEAR: Podemos usar la ecuación (8.40) directamente para obtener la rapidez final v.

EJECUTAR: Tenemos $m_0/m = 4$, así que por la ecuación (8.40),

$$v = v_0 + v_{esc}\ln\frac{m_0}{m} = 0 + (2400\text{ m/s})(\ln 4) = 3327\text{ m/s}$$

EVALUAR: Veamos qué sucede a medida que el cohete adquiere rapidez. Al principio, cuando la velocidad del cohete es cero, el combustible expulsado se mueve a la izquierda, relativo a nuestro sistema de coordenadas, a 2400 m/s. Al término del primer segundo ($t = 1$ s), el cohete se mueve a 20 m/s y la rapidez del combustible relativa a nuestro sistema es de 2380 m/s. Durante el siguiente segundo, la aceleración, dada por la ecuación (8.39), es un poco mayor. En $t = 2$ s, el cohete se mueve a un poco más de 40 m/s, y el combustible, a poco menos de 2360 m/s. Un cálculo detallado indica que en $t = 75.6$ s la velocidad del cohete v en nuestro sistema de coordenadas es de 2400 m/s. El combustible expulsado posteriormente se mueve *hacia delante*, no hacia atrás, en nuestro sistema. Como la velocidad final del cohete es de 3327 m/s y la velocidad relativa es de 2400 m/s, lo último del combustible expulsado tiene una velocidad hacia delante (relativa a nuestro marco de referencia) de $(3327 - 2400)$ m/s = 927 m/s. (Hemos usado más cifras de las significativas para ilustrar el asunto.)

Evalúe su comprensión de la sección 8.6 *a*) Si un cohete en el espacio exterior, sin gravedad, tiene el mismo empuje en todo momento, ¿su aceleración es constante, creciente o decreciente? Si el cohete tiene la misma aceleración en todo momento, ¿el empuje es constante, creciente o decreciente?

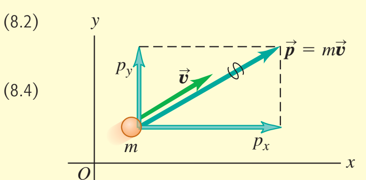
MP

CAPÍTULO 8 RESUMEN

El momento lineal de una partícula: El momento lineal $\vec{p}$ de una partícula es una cantidad vectorial igual al producto de la masa m de la partícula y su velocidad $\vec{v}$. La segunda ley de Newton dice que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la tasa de cambio del momento lineal de la partícula.

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{8.2}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{8.4}$$

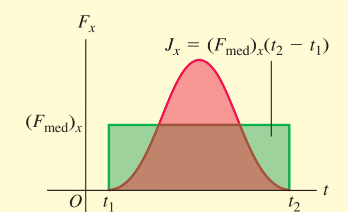


Impulso y momento lineal: Si una fuerza neta constante $\sum \vec{F}$ actúa sobre una partícula durante un intervalo de tiempo Δt de t_1 a t_2, el impulso $\vec{J}$ de la fuerza neta es el producto de la fuerza neta y el intervalo de tiempo. Si $\sum \vec{F}$ varía con el tiempo, $\vec{J}$ es la integral de la fuerza neta en el intervalo de tiempo. En cualquier caso, el cambio en el momento lineal de una partícula durante un intervalo de tiempo es igual al impulso de la fuerza neta que actúa sobre tal partícula durante ese intervalo. El momento lineal de una partícula es igual al impulso que la aceleró desde el reposo hasta su rapidez actual. (Véanse los ejemplos 8.1 a 8.3.)

$$\vec{J} = \sum \vec{F}(t_2 - t_1) = \sum \vec{F}\,\Delta t \tag{8.5}$$

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\,dt \tag{8.7}$$

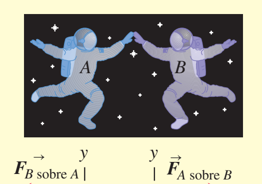
$$\vec{J} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{8.6}$$



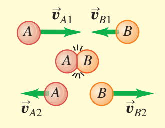
Conservación del momento lineal: Una fuerza interna es una fuerza ejercida por una parte de un sistema sobre otra. Una fuerza externa es una fuerza ejercida sobre cualquier parte del sistema por algún elemento externo al sistema. Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal total $\vec{P}$ (la suma vectorial de los momentos lineales de las partículas individuales que constituyen el sistema) es constante, esto es, se conserva. Cada componente del momento lineal total se conserva individualmente. (Véanse los ejemplos 8.4 a 8.6.)

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \cdots$$
$$= m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + \cdots \tag{8.14}$$

Si $\sum \vec{F} = \mathbf{0}$, entonces $\vec{P} =$ constante.



Choques: En todo tipo de choques, los momentos lineales totales inicial y final son iguales. En un choque elástico entre dos cuerpos, las energías cinéticas totales inicial y final también son iguales y las velocidades relativas inicial y final tienen la misma magnitud. En un choque inelástico entre dos cuerpos, la energía cinética total final es menor que la inicial. Si los dos cuerpos tienen la misma velocidad final, el choque es totalmente inelástico. (Véanse los ejemplos 8.7 a 8.12.)

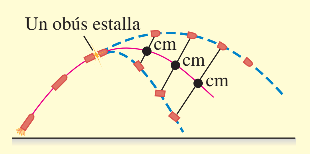


Centro de masa: El vector de posición del centro de masa de un sistema de partículas, $\vec{r}_{cm}$, es un promedio ponderado de las posiciones $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots$ de las partículas. El momento lineal total $\vec{P}$ de un sistema es igual a su masa total M multiplicada por la velocidad $\vec{v}_{cm}$ de su centro de masa. El centro de masa de un sistema se mueve como si toda la masa M estuviera concentrada en ese punto. Si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero, la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$ es constante. Si la fuerza externa neta no es cero, el centro de masa se acelera como si fuera una partícula de masa M sobre la que actúa la misma fuerza externa neta. (Véanse los ejemplos 8.13 y 8.14.)

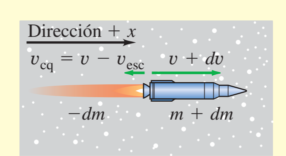
$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{8.29}$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots = M\vec{v}_{cm} \tag{8.32}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \tag{8.34}$$



Propulsión de un cohete: En la propulsión de cohetes, la masa de un cohete cambia al quemarse el combustible y ser expulsado de la nave. El análisis del movimiento del cohete debe incluir el momento lineal que se lleva el combustible quemado, así como la del cohete mismo. (Véanse los ejemplos 8.15 y 8.16.)



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Los dos jugadores tienen la misma magnitud de momento lineal $p = mv$ (el producto de la masa y la rapidez), pero el jugador ligero tiene dos veces más energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. Por lo tanto, el jugador ligero puede efectuar dos veces más trabajo sobre usted (y causar dos veces más daños) en el proceso de detenerse (véase la sección 8.1).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

8.1 Respuesta: v), i) y ii) (empate en segundo lugar), iii) y iv) (empate en tercer lugar) Usamos dos interpretaciones del impulso de la fuerza neta: 1) la fuerza neta multiplicada por el tiempo durante el que actúa la fuerza neta, y 2) el cambio en el momento lineal de la partícula sobre el que actúa la fuerza neta. Nuestra elección de la interpretación depende de qué información se nos dé. Tomamos la dirección $+x$ hacia el este. i) La fuerza no se conoce, así que usamos la interpretación 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x} = (1000\text{ kg})(0) - (1000\text{ kg})(25\text{ m/s}) = -25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s}$, por lo que la magnitud del impulso es $25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 25{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. ii) Por la misma razón que en i), usamos la interpretación 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x} = (1000\text{ kg})(0) - (1000\text{ kg})(25\text{ m/s}) = -25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s}$, y la magnitud del impulso, una vez más, es $25{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 25{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. iii) La velocidad final no se conoce, así que usamos la interpretación 1: $J_x = (\sum F_x)_{\text{med}}(t_2 - t_1) = (2000\text{ N})(10\text{ s}) = 20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$, por lo que la magnitud del impulso es $20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. iv) Por la misma razón que en iii), empleamos la interpretación 1: $J_x = (\sum F_x)_{\text{med}}(t_2 - t_1) = (-2000\text{ N})(10\text{ s}) = -20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$, por lo que la magnitud del impulso es $20{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$. v. La fuerza no se conoce, así que usamos la interpretación 2: $J_x = mv_{2x} - mv_{1x} = (1000\text{ kg})(-25\text{ m/s}) - (1000\text{ kg})(25\text{ m/s}) = -50{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s}$, y la magnitud del impulso es $50{,}000\text{ kg}\cdot\text{m/s} = 50{,}000\text{ N}\cdot\text{s}$.

8.2 Respuestas: *a*) $v_{C2x} > 0$, $v_{C2y} > 0$, *b*) pieza *C* No hay fuerzas horizontales externas, así que las componentes x y y del momento lineal total del sistema se conservan. Las dos componentes son cero antes de soltarse el resorte, así que también después deberán ser cero. Por lo tanto,

$$P_x = 0 = m_A v_{A2x} + m_B v_{B2x} + m_C v_{C2x}$$
$$P_y = 0 = m_A v_{A2y} + m_B v_{B2y} + m_C v_{C2y}$$

Nos dicen que $m_A = m_B = m_C$, $v_{A2x} < 0$, $v_{A2y} = 0$, $v_{B2x} = 0$, y $v_{B2y} < 0$. Podemos resolver las ecuaciones anteriores para demostrar que $v_{C2x} = -v_{A2x} > 0$ y $v_{C2y} = -v_{B2y} > 0$, por lo que las componentes de velocidad de la pieza *C* son positivas. La pieza *C* tiene una rapidez $\sqrt{v_{C2x}^2 + v_{C2y}^2} = \sqrt{v_{A2x}^2 + v_{B2y}^2}$, que es mayor que la rapidez de cualquiera de las piezas *A* o *B*.

8.3 Respuestas: *a*) inelástico, *b*) elástico, *c*) totalmente inelástico En cada caso, la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética conforme la pelota cae, y el choque es entre la pelota y el suelo. En *a*) toda la energía inicial se convierte a energía potencial gravitacional, así que no se pierde energía cinética en el rebote y el choque es elástico. En *b*) hay menos energía potencial gravitacional al final que al principio, por lo que algo de energía cinética se pierde en el rebote. Por lo tanto, el choque es inelástico. En *c*) la pelota pierde toda la energía cinética que tiene para dar, la pelota queda pegada al suelo, y el choque es totalmente inelástico.

8.4 Respuesta: peores Después del choque con una molécula de agua inicialmente en reposo, la rapidez del neutrón es $|(m_n - m_w)/(m_n + m_w)| = |(1.0\text{ u} - 18\text{ u})/(1.0\text{ u} + 18\text{ u})| = \frac{17}{19}$ de su rapidez inicial, y su energía cinética es $(\frac{17}{19})^2 = 0.80$ del valor inicial. Por lo tanto, una molécula de agua no es tan buen moderador como un átomo de carbono, cuyos valores son $\frac{11}{13}$ y $(\frac{11}{13})^2 = 0.72$.

8.5 Respuesta: no Si la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el sistema de dos fragmentos, el centro de masa seguirá la trayectoria parabólica de un objeto que cae libremente. Sin embargo, una vez que el fragmento toca tierra, el suelo ejerce una fuerza normal sobre ese fragmento. Por lo tanto, la fuerza neta sobre el sistema cambia, y la trayectoria del centro de masa cambia en respuesta a ello.

8.6 Respuestas: *a*) creciente, *b*) decreciente Por las ecuaciones (8.37) y (8.38), el empuje F es igual a $m\,dv/dt$, donde m es la masa del cohete y dv/dt es su aceleración. Como m disminuye con el tiempo, si el empuje F es constante, la aceleración deberá aumentar con el tiempo (la misma fuerza actúa sobre una masa menor); si la aceleración dv/dt es constante, el empuje deberá disminuir con el tiempo (se requiere una fuerza menor para acelerar una masa más pequeña).

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para discusión

P8.1. Al partir leños con martillo y cuña, ¿es más efectivo un martillo pesado que uno ligero? ¿Por qué?

P8.2. Suponga que usted atrapa una pelota de béisbol y después alguien le ofrece la opción de atrapar una bola de boliche con el mismo momento lineal o bien con la misma energía cinética que la pelota. ¿Qué elegiría? ¿Por qué?

P8.3. Al caer la lluvia, ¿qué pasa con su momento lineal al golpear el suelo? ¿Es válida su respuesta para la famosa manzana de Newton?

P8.4. Un auto tiene la misma energía cinética si viaja al sur a 30 m/s que si lo hace al noroeste a 30 m/s. ¿Su momento lineal es el mismo en ambos casos? Explique.

P8.5. Un camión acelera en una autopista. Un marco de referencia inercial está fijo al suelo con su origen en un poste. Otro marco está fi-

jo a un auto de policía que viaja en la autopista con velocidad constante. ¿El momento lineal del camión es el mismo en ambos marcos? Explique. ¿La tasa de cambio del momento lineal del camión es el mismo en los dos marcos? Explique.

P8.6. Si un camión grande y pesado choca con un auto, es más probable que se lesionen los ocupantes del auto que el conductor del camión. ¿Por qué?

P8.7. Una mujer parada en una capa de hielo horizontal sin fricción lanza una roca grande con rapidez v_0 y ángulo α sobre la horizontal. Considere el sistema formado por ella y la roca. ¿Se conserva el momento lineal del sistema? ¿Por qué? ¿Se conserva cualquier componente del momento lineal del sistema? ¿Por qué?

P8.8. En el ejemplo 8.7 (sección 8.3), donde los deslizadores de la figura 8.15 quedan pegados después de chocar, el choque es inelástico, ya que $K_2 < K_1$. En el ejemplo 8.5 (sección 8.2), ¿es inelástico el choque? Explique.

P8.9. En un choque totalmente inelástico entre dos objetos que se pegan después del choque, ¿es posible que la energía cinética final del sistema sea cero? De ser así, cite un ejemplo. En tal caso, ¿qué momento lineal inicial debe tener el sistema? ¿Es cero la energía cinética inicial del sistema? Explique.

P8.10. Puesto que la energía cinética de una partícula está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$ y su momento lineal por $\vec{p} = m\vec{v}$, es fácil demostrar que $K = p^2/2m$. ¿Cómo es posible entonces tener un suceso durante el cual el momento lineal total del sistema sea constante pero la energía ciné-tica total cambie?

P8.11. En los ejemplos 8.10 a 8.12 (sección 8.4), verifique que el vector de velocidad relativa de los dos cuerpos tiene la misma magnitud antes y después del choque. En cada caso, ¿qué sucede con la *dirección* de ese vector?

P8.12. Si un vidrio cae al piso, es más probable que se rompa si el piso es de concreto que si es de madera. ¿Por qué? (Remítase a la figura 8.3b.)

P8.13. En la figura 8.22b, la energía cinética de la pelota de ping-pong es mayor después de su interacción con la bola de boliche que antes. ¿De dónde proviene la energía adicional? Describa el suceso en términos de la conservación de energía.

P8.14. Se dispara una ametralladora hacia una placa de acero. ¿La fuerza media que actúa sobre la placa por los impactos es mayor si las balas rebotan o si se aplastan y pegan a la placa? Explique.

P8.15. Una fuerza neta de 4 N actúa durante 0.25 s sobre un objeto en reposo y le imprime una rapidez final de 5 m/s. ¿Cómo podría una fuerza de 2 N producir esa rapidez final?

P8.16. Una fuerza neta cuya componente x es $\sum F_x$ actúa sobre un objeto desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2. La componente x del momento lineal del objeto es el mismo en ambos instantes, pero $\sum F_x$ no siempre es cero en ese lapso. ¿Qué puede decir usted acerca de la gráfica de $\sum F_x$ contra t?

P8.17. Un tenista golpea la pelota con la raqueta. Considere el sistema de la bola y la raqueta. ¿El momento lineal total del sistema es el mismo justo antes y justo después del golpe? ¿El momento lineal total justo después del golpe es el mismo que 2 s después, cuando la bola está en el punto más alto de su trayectoria? Explique cualquier diferencia entre ambos casos.

P8.18. En el ejemplo 8.4 (sección 8.2), considere el sistema del rifle y la bala. ¿Qué rapidez tiene el centro de masa del sistema después del disparo? Explique.

P8.19. Se deja caer un huevo desde una azotea hasta la acera. Al caer el huevo, ¿qué pasa con el momento lineal del sistema formado por el huevo y la Tierra?

P8.20. Una mujer está parada en el centro de un lago congelado perfectamente liso y sin fricción. Puede ponerse en movimiento aventando cosas, pero suponga que no tiene nada que lanzar. ¿Puede llegar a la orilla *sin* lanzar nada?

P8.21. En un entorno con gravedad cero, ¿puede una nave impulsada por cohetes alcanzar una rapidez mayor que la rapidez relativa con que se expulsa el combustible quemado?

P8.22. Cuando un objeto se rompe en dos (por ejemplo, mediante explosión o desintegración radiactiva), el fragmento más ligero adquiere más energía cinética que el más pesado. Esto es una consecuencia de la conservación del momento lineal, pero, ¿puede explicarla también empleando las leyes de Newton del movimiento?

P8.23. Una manzana cae de un árbol sin experimentar resistencia del aire. Conforme cae, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca de ella es verdadero? *a*) Sólo su momento lineal se conserva; *b*) sólo su energía mecánica se conserva; *c*) tanto su momento lineal como su energía mecánica se conservan; *d*) su energía cinética se conserva.

P8.24. Dos trozos de arcilla chocan y quedan pegados. Durante el choque, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? *a*) Sólo el momento lineal de la arcilla se conserva; *b*) sólo la energía mecánica de la arcilla se conserva; *c*) tanto el momento lineal como la energía mecánica de la arcilla se conservan; *d*) la energía cinética de la arcilla se conserva.

P8.25. Dos canicas se presionan entre sí mediante un ligero resorte ideal entre ellas, sin que estén unidas al resorte de ninguna forma. Luego se les libera sobre una mesa horizontal sin fricción y pronto se mueven libremente del resorte. Conforme las canicas se alejan entre sí, ¿cuál de los siguientes enunciados acerca de ellas es verdadero? *a*) Sólo el momento lineal de las canicas se conserva; *b*) sólo la energía mecánica de las canicas se conserva; *c*) tanto el momento lineal como la energía mecánica de las canicas se conservan; *d*) la energía cinética de las canicas se conserva.

P8.26. Una vagoneta muy pesada choca de frente con un auto compacto muy ligero. ¿Cuál de los siguientes enunciados acerca del choque es correcto? *a*) La cantidad de energía cinética que pierde la vagoneta es igual a la cantidad de energía cinética que gana el auto compacto; *b*) el momento lineal que pierde la vagoneta es igual al momento lineal que gana el auto compacto; *c*) el auto compacto experimenta una fuerza considerablemente mayor durante el choque que la vagoneta; *d*) ambos vehículos pierden la misma cantidad de energía cinética.

Ejercicios

Sección 8.1 Momento lineal e impulso

8.1. *a*) ¿Qué magnitud tiene el momento lineal de un camión de 10,000 kg que viaja con rapidez de 12.0 m/s? *b*) ¿Con qué rapidez tendría que viajar una vagoneta de 2000 kg para tener i) el mismo momento lineal? ii) ¿la misma energía cinética?

8.2. En el ejemplo conceptual 8.1 (sección 8.1), demuestre que el velero de hielo con masa $2m$ tiene $\sqrt{2}$ veces más momento lineal en la meta que el de masa m.

8.3. *a*) Demuestre que la energía cinética K y la magnitud del momento lineal p de una partícula de masa m están relacionadas por la expresión $K = p^2/2m$. *b*) Un cardenal (*Richmondena cardinalis*) de 0.040 kg y una pelota de béisbol de 0.145 kg tienen la misma energía cinética. ¿Cuál tiene mayor magnitud de momento lineal? ¿Cuál es la razón entre las magnitudes del momento lineal del cardenal y de la pelota? *c*) Un hombre de 700 N y una mujer de 450 N tienen el mismo momento lineal. ¿Quién tiene mayor energía cinética? ¿Cuál es la razón entre las energías cinéticas del hombre y de la mujer?

8.4. En una competencia varonil de pista y campo, la bala tiene una masa de 7.30 kg y se lanza con una rapidez de 15.0 m/s a 40.0° por encima de la horizontal ubicada sobre la pierna izquierda extendida de un hombre. ¿Cuáles son las componentes iniciales horizontal y vertical del momento lineal de esa bala?

8.5. Un defensor de línea de fútbol americano de 110 kg va corriendo hacia la derecha a 2.75 m/s, mientras otro defensor de línea de 125 kg corre directamente hacia el primero a 2.60 m/s. ¿Cuáles son *a*) la

magnitud y dirección del momento lineal neto de estos dos deportistas, y *b*) su energía cinética total?

8.6. Dos vehículos se aproximan a una intersección. Uno es una camioneta *pickup* que viaja a 14.0 m/s con dirección este-oeste (la dirección $-x$), y el otro es un auto sedan de 1500 kg que va de sur a norte (la dirección $+y$ a 23.0 m/s). *a*) Determine las componentes x y y del momento lineal neto de este sistema. *b*) ¿Cuáles son la magnitud y dirección del momento lineal neto?

8.7. Fuerza de un golpe de golf. Una pelota de golf de 0.0450 kg en reposo adquiere una rapidez de 25.0 m/s al ser golpeada por un palo. Si el tiempo de contacto es de 2.00 ms, ¿qué fuerza media actúa sobre la pelota? ¿Es significativo el efecto del peso de la pelota durante el tiempo de contacto? ¿Por qué?

8.8. Fuerza de un batazo. Una pelota de béisbol tiene masa de 0.145 kg. *a*) Si se lanza con una velocidad de 45.0 m/s y después de batearla su velocidad es de 55.0 m/s en la dirección opuesta, ¿qué magnitud tienen el cambio de momento lineal de la bola y el impulso aplicado a ella con el bate? *b*) Si la pelota está en contacto con el bate durante 2.00 ms, calcule la magnitud de la fuerza media aplicada por el bate.

8.9. Un disco de hockey de 0.160 kg se mueve en una superficie cubierta de hielo horizontal y sin fricción. En $t = 0$, su velocidad es de 3.00 m/s a la derecha. *a*) Calcule la velocidad (magnitud y dirección) del disco después de que se aplica una fuerza de 25.0 N hacia la derecha durante 0.050 s. *b*) Si, en vez de ello, se aplica una fuerza de 12.0 N dirigida a la izquierda, entre $t = 0$ y $t = 0.050$ s, ¿cuál es la velocidad final del disco?

8.10. Un motor del sistema de maniobras orbitales (OMS) del transbordador espacial ejerce una fuerza de $(26{,}700\ \text{N})\hat{\jmath}$ durante 3.90 s, expulsando una masa insignificante de combustible en comparación con la masa de 95,000 kg de la nave. *a*) ¿Qué impulso tiene la fuerza en el lapso de 3.90 s? *b*) ¿Cómo cambia el momento lineal de la nave por este impulso? *c*) ¿Y su velocidad? *d*) ¿Por qué no podemos calcular el cambio resultante de la energía cinética del transbordador?

8.11. En el tiempo $t = 0$, un cohete de 2150 kg en el espacio exterior enciende un motor que ejerce una fuerza creciente sobre él en la dirección $+x$. Esta fuerza obedece la ecuación $F_x = At^2$ (donde t es el tiempo) y tiene una magnitud de 781.25 N cuando $t = 1.25$ s. *a*) Calcule el valor en el SI de la constante A, incluyendo sus unidades. *b*) ¿Qué impulso ejerce el motor sobre el cohete durante el lapso de 1.50 s que comienza 2.00 s después de encender el motor? *c*) ¿Cuánto cambia la velocidad del cohete durante ese lapso?

8.12. Un bate golpea una pelota de 0.145 kg. Justo antes del impacto, la bola viaja horizontalmente hacia la derecha a 50.0 m/s, y pierde contacto con el bate viajando hacia la izquierda a 65.0 m/s con un ángulo de 30° por arriba de la horizontal. Si la pelota y el bate están en contacto durante 1.75 ms, calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza media que actúa sobre la pelota.

8.13. Una piedra de 2.00 kg se desliza hacia la derecha por una superficie horizontal sin fricción a 5.00 m/s, cuando de repente es golpeada por un objeto que ejerce una gran fuerza horizontal sobre ella por un breve lapso. La gráfica en la figura 8.34 indica la magnitud de esa fuerza como función del tiempo. *a*) ¿Qué impulso ejerce esa fuerza sobre la piedra? *b*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad de la piedra inmediatamente después de que la fuerza deja de actuar si esa fuerza actúa i) hacia la derecha o ii) hacia la izquierda.

Figura 8.34 Ejercicio 8.13.

Sección 8.2 Conservación del momento lineal

8.14. Un astronauta de 68.5 kg está haciendo una reparación en el espacio en la estación espacial en órbita. El astronauta tira una herramienta de 2.25 kg con una rapidez de 3.20 m/s en relación con la estación espacial. ¿Con qué rapidez y dirección comenzará el astronauta a moverse?

8.15. Propulsión animal. Los calamares y pulpos se impulsan a sí mismos expeliendo agua. Para hacer esto, guardan agua en una cavidad y luego contraen repentinamente esa cavidad para forzar la salida del agua a través de una abertura. Un calamar de 6.50 kg (incluyendo el agua en la cavidad) está en reposo, cuando de pronto ve un peligroso depredador. *a*) Si el calamar tiene 1.75 kg de agua en su cavidad, ¿con qué rapidez debe expeler esa agua para alcanzar una rapidez de 2.50 m/s y escapar así del depredador? Desprecie cualquier efecto de arrastre del agua circundante. *b*) ¿Cuánta energía cinética genera el calamar con esta maniobra?

8.16. Suponga que usted está de pie en una plancha de hielo que cubre el estacionamiento del estadio de fútbol americano de Buffalo; la fricción entre sus pies y el hielo es insignificante. Un amigo le lanza un balón de fútbol americano de 0.400 kg que viaja horizontalmente a 10.0 m/s. La masa de usted es de 70.0 kg. *a*) Si atrapa el balón, ¿con qué rapidez se moverán usted y el balón después? *b*) Si el balón lo golpea en el pecho y rebota moviéndose horizontalmente a 8.0 m/s en la dirección opuesta, ¿qué rapidez tendrá usted después del choque?

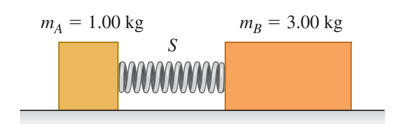
8.17. En una mesa de aire horizontal sin fricción, el disco A (con masa de 0.250 kg) se mueve hacia el B (con masa de 0.350 kg) que está en reposo. Después del choque, A se mueve a 0.120 m/s a la izquierda, y B lo hace a 0.650 m/s a la derecha. *a*) ¿Qué rapidez tenía A antes del choque? *b*) Calcule el cambio de energía cinética total del sistema durante el choque.

8.18. Cuando los automóviles están equipados con parachoques flexibles, rebotan durante los choques a baja rapidez, provocando daños menores. En un accidente de este tipo, un auto de 1750 kg viaja hacia la derecha a 1.50 m/s y choca con un auto de 1450 kg que va hacia la izquierda a 1.10 m/s. Las mediciones indican que la rapidez del auto más pesado inmediatamente después del choque era de 0.250 m/s en su dirección original. Podemos ignorar la fricción de la carretera durante el choque. *a*) ¿Cuál era la rapidez del auto más ligero inmediatamente después del choque? *b*) Calcule el cambio en la energía cinética combinada del sistema de los dos vehículos durante este choque.

8.19. Los gases en expansión que salen por el cañón de un rifle también contribuyen al retroceso. Una bala de calibre .30 tiene una masa de 0.00720 kg y una rapidez de 601 m/s relativa al cañón del rifle, cuya masa es de 2.80 kg. El rifle, sostenido sin firmeza, retrocede a 1.85 m/s en relación con el suelo. Calcule el momento lineal de los gases al salir del cañón, en un sistema de coordenadas fijo al suelo.

8.20. El bloque A de la figura 8.35 tiene una masa de 1.00 kg, y el B, de 3.00 kg. A y B se juntan a la fuerza, comprimiendo un resorte S entre ellos; luego, el sistema se suelta del reposo en una superficie plana sin fricción. El resorte, de masa despreciable, está suelto y cae a la superficie después de extenderse. El bloque B adquiere una rapidez de 1.20 m/s. *a*) ¿Qué rapidez final tiene A? *b*) ¿Cuánta energía potencial se almacenó en el resorte comprimido?

Figura 8.35 Ejercicio 8.20.



8.21. Un cazador que se encuentra sobre un estanque congelado y sin fricción utiliza un rifle que dispara balas de 4.20 g a 965 m/s. La masa del cazador (incluyendo su rifle) es de 72.5 kg; el hombre sostiene con

fuerza el arma después de disparar. Calcule la velocidad de retroceso del cazador si dispara el rifle *a*) horizontalmente y *b*) a 56.0° por encima de la horizontal.

8.22. Un núcleo atómico súbitamente se fisiona (se divide) en dos. El fragmento *A*, de masa m_A, viaja hacia la izquierda con una rapidez v_A. El fragmento *B*, de masa m_B, viaja hacia la derecha con una rapidez v_B. *a*) Con base en la conservación del momento lineal, despeje v_B en términos de m_A, m_B y v_A. *b*) Utilice los resultados del inciso *a*) para demostrar que $K_A/K_B = m_B/m_A$, donde K_A y K_B son las energías cinéticas de los dos fragmentos.

8.23. El núcleo de ^{214}Po decae radiactivamente emitiendo una partícula alfa (masa 6.65×10^{-27} kg) con una energía cinética 1.23×10^{-12} J, medida en el marco de referencia del laboratorio. Suponiendo que el núcleo estaba inicialmente en reposo en este marco, calcule la velocidad de retroceso del núcleo que queda después del decaimiento.

8.24. Usted está de pie sobre una gran plancha de hielo sin fricción, sosteniendo una gran roca. Para salir del hielo, usted avienta la roca de manera que ésta adquiere una velocidad relativa a la Tierra de 12.0 m/s, a 35.0° por arriba de la horizontal. Si su masa es de 70.0 kg y la masa de la roca es de 15.0 kg, ¿qué rapidez tiene usted después de lanzar la roca? (Véase la pregunta para análisis P8.7.)

8.25. Dos patinadores, Daniel (65.0 kg) y Rebeca (45.0 kg) están practicando. Daniel se detiene para atar su agujeta y es golpeado por Rebeca, quien se desplazaba a 13.0 m/s antes de chocar con él. Después del choque, Rebeca se mueve a 8.00 m/s con un ángulo de 53.1° respecto a su dirección original. La superficie de patinaje es horizontal y no tiene fricción. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad de Daniel después del choque. *b*) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética total de los dos patinadores como resultado del choque?

8.26. Un astronauta en el espacio no puede utilizar una báscula o balanza para pesar los objetos porque no hay gravedad. Pero cuenta con dispositivos para medir la distancia y el tiempo de manera exacta. El astronauta sabe que su masa es de 78.4 kg, pero no está seguro de la masa de un enorme tanque de gas en el interior del cohete sin aire. Cuando el tanque se aproxima a él a 3.50 m/s, empuja su cuerpo contra éste, lo que disminuye la rapidez del tanque a 1.20 m/s (pero no invierte su dirección) y le da al astronauta una rapidez de 2.40 m/. ¿Cuál es la masa del tanque?

8.27. Masa cambiante. Un vagón abierto de 24,000 kg viaja sin fricción ni impulso sobre una vía horizontal. Está lloviendo muy fuerte, y la lluvia cae verticalmente. El vagón originalmente está vacío y tiene una rapidez de 4.00 m/s. ¿Qué rapidez tiene después de acumular 3000 kg de agua de lluvia?

8.28. Choque de asteroides. Dos asteroides de igual masa pertenecientes al cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter chocan de refilón. El asteroide *A*, que inicialmente viajaba a 40.0 m/s, se desvía 30.0° con respecto a su dirección original, mientras que el asteroide *B* viaja a 45.0° con respecto a la dirección original de *A* (figura 8.36). *a*) Calcule la rapidez de cada asteroide después del choque. *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética original del asteroide *A* se disipa durante el choque?

Figura 8.36 Ejercicio 8.28.

Sección 8.3 Conservación del momento lineal y choques

8.29. Un pez de 15.0 kg, que nada a 1.10 m/s, de repente engulle un pez de 4.50 kg que estaba estacionario. Desprecie los efectos de arrastre del agua. *a*) Calcule la rapidez del pez grande inmediatamente después de haberse comido al pequeño. *b*) ¿Cuánta energía mecánica se disipó durante esta comida?

8.30. Dos amorosas nutrias se acercan una a la otra deslizándose por una superficie horizontal lodosa (y sin fricción). Una de ellas, con masa de 7.50 kg, se desliza hacia la izquierda a 5.00 m/s, mientras que la otra, con masa de 5.75 kg se desliza hacia la derecha a 6.00 m/s. Las nutrias quedan unidas después de chocar. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad de estas nutrias después del choque. *b*) ¿Cuánta energía mecánica se disipa durante este juego?

8.31. Misión de profundo impacto. En julio de 2005, en la misión "Impacto Profundo" de la NASA, una sonda de 372 kg, que se desplazaba a 37,000 km/h, chocó directamente contra la superficie del cometa Tempel 1. La rapidez original del cometa en ese momento era de 40,000 km/h y su masa se estimó en el intervalo de $(0.10\text{-}2.5) \times 10^{14}$ kg. Utilice el menor valor de la masa estimada. *a*) ¿Qué cambio en la velocidad del cometa produjo el choque? ¿Será perceptible ese cambio? *b*) Suponga que este cometa fuera a chocar contra la Tierra para fusionarse con ella. ¿En cuánto cambiaría la velocidad de nuestro planeta? ¿Sería apreciable ese cambio? (La masa de la Tierra es de 5.97×10^{24} kg.)

8.32. Un auto deportivo de 1050 kg se desplaza hacia el oeste a 15.0 m/s por una carretera horizontal cuando choca con un camión de 6320 kg, que viaja hacia el este por el mismo camino a 10.0 m/s. Los dos vehículos quedan pegados después del choque. *a*) ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tendrán los dos vehículos inmediatamente después del choque? *b*) ¿Qué rapidez debe llevar el camión para que ambos vehículos se detengan por el choque? *c*) Encuentre el cambio de energía cinética del sistema de los dos vehículos en las situaciones del inciso *a*) y *b*). ¿En cuál situación tiene mayor magnitud el cambio de energía cinética?

8.33. En un campo de fútbol americano muy lodoso, un apoyador de 110 kg taclea a un corredor de 85 kg. Justo antes del choque, el apoyador resbala con una velocidad de 8.8 m/s hacia el norte, y el corredor lo hace con una velocidad de 7.2 m/s hacia el este. ¿Con qué velocidad (magnitud y dirección) se mueven juntos los dos jugadores inmediatamente después del choque?

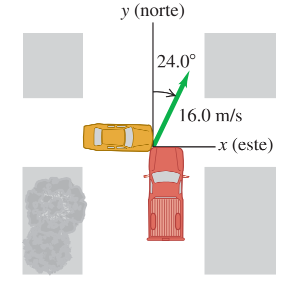
8.34. Dos patinadores chocan y quedan agarrados sobre una pista de hielo sin fricción. Uno de ellos, cuya masa es de 70.0 kg, se movía hacia la derecha a 2.00 m/s, mientras que el otro, cuya masa es de 65.0 kg, se movía hacia la izquierda a 2.50 m/s. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la velocidad de estos patinadores inmediatamente después de que chocan?

8.35. Dos automóviles, uno compacto con masa de 1200 kg y otro un "devorador de gasolina" de 3000 kg, chocan de frente a velocidades típicas de autopista. *a*) ¿Cuál experimenta un cambio de mayor magnitud en su momento lineal? ¿Cuál experimenta un mayor cambio de velocidad? *b*) Si el auto más grande cambia su velocidad en Δv, calcule el cambio en la velocidad del auto pequeño en términos de Δv. *c*) ¿Los ocupantes de cuál auto esperaría usted que sufran lesiones más graves? Explique.

8.36. Defensa de las aves. Para proteger a sus crías en el nido, los halcones peregrinos vuelan tras las aves de rapiña (como los cuervos) con gran rapidez. En uno de tales episodios, un halcón de 600 g que vuela a 20.0 m/s choca con un cuervo de 1.50 kg que vuela a 9.0 m/s. El halcón choca con el cuervo en ángulo recto con respecto a su trayectoria original y rebota a 5.0 m/s. (Estas cifras son estimaciones del autor, quien presenció este ataque en el norte de Nuevo México.) *a*) ¿En qué ángulo cambió el halcón la dirección del vuelo del cuervo? *b*) ¿Cuál era la rapidez del cuervo inmediatamente después del choque?

8.37. En el cruce de la Avenida Texas y el Paseo Universitario, un auto subcompacto amarillo de 950 kg que viaja al este por el Paseo choca con una camioneta *pickup* color rojo de 1900 kg que viaja al norte por la Avenida Texas y se pasó el alto de un semáforo (figura 8.37). Los dos vehículos quedan pegados después del choque, y se deslizan a 16.0 m/s en dirección 24.0° al este del norte. Calcule la rapidez de cada vehícu-

Figura 8.37 Ejercicio 8.37.



lo antes del choque. El choque tiene lugar durante una tormenta; las fuerzas de fricción entre los vehículos y el pavimento húmedo son despreciables.

8.38. Una bala de 5.00 g se dispara horizontalmente a un bloque de madera de 1.20 kg que descansa en una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0.20. La bala queda incrustada en el bloque, que se desliza 0.230 m por la superficie antes de detenerse. ¿Qué rapidez tenía inicialmente la bala?

8.39. Péndulo balístico. Una bala de rifle de 12.0 g se dispara a 380 m/s contra un péndulo balístico de 6.00 kg suspendido de un cordón de 70.0 cm de longitud (véase el ejemplo 8.8, sección 8.3). Calcule *a*) la distancia vertical que sube el péndulo, *b*) la energía cinética inicial de la bala y *c*) la energía cinética de la bala y el péndulo inmediatamente después de que la bala se incrusta en el péndulo.

8.40. Usted y sus amigos efectúan experimentos de física en un estanque helado que sirve como superficie horizontal sin fricción. Samuel, de 80.0 kg, recibe un empujón y se desliza hacia el este. Abigail, de 50.0 kg, recibe también un empujón y se desliza hacia el norte. Los dos chocan. Después del choque, Samuel se mueve a 37.0° al norte del este con rapidez de 6.00 m/s, y Abigail, a 23.0° al sur del este con rapidez de 9.00 m/s. *a*) ¿Qué rapidez tenía cada uno antes del choque? *b*) ¿Cuánto disminuyó la energía cinética total de las dos personas durante el choque?

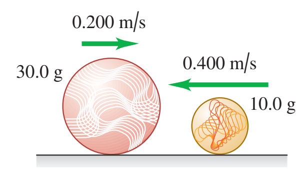
Sección 8.4 Choques elásticos

8.41. Los bloques *A* (masa 2.00 kg) y *B* (masa 10.00 kg) se mueven en una superficie horizontal sin fricción. En un principio, el bloque *B* está en reposo y el *A* se mueve hacia él a 2.00 m/s. Los bloques están equipados con protectores de resorte ideal, como en el ejemplo 8.10. El choque es de frente, así que todos los movimientos antes y después del choque están en una línea recta. *a*) Calcule la energía máxima almacenada en los protectores de resorte y la velocidad de cada bloque en ese momento. *b*) Calcule la velocidad de cada bloque una vez que se han separado.

8.42. Un deslizador de 0.150 kg se mueve a la derecha a 0.80 m/s en un riel de aire horizontal sin fricción y choca de frente con un deslizador de 0.300 kg que se mueve a la izquierda a 2.20 m/s. Calcule la velocidad final (magnitud y dirección) de cada deslizador si el choque es elástico.

8.43. Una canica de 10.0 g se desliza a la izquierda a 0.400 m/s sobre una acera horizontal de Nueva York cubierta de hielo y sin fricción, y tiene un choque elástico de frente con una canica de 30.0 g que se desliza a la derecha a 0.200 m/s (figura 8.38). *a*) Determine la velocidad (magnitud y dirección) de cada canica después del choque. (Puesto que el choque es de frente, los movimientos son en una línea.) *b*) Calcule el *cambio en el momento lineal* (es decir, el momento lineal después del choque menos el momento lineal antes del choque) para cada canica. Compare los valores obtenidos. *c*) Calcule el *cambio de energía* cinética (es decir, la energía cinética después del choque menos la energía cinética antes del choque) para cada canica. Compare los valores obtenidos.

Figura 8.38 Ejercicio 8.43.



8.44. Detalle el cálculo de α y β en el ejemplo 8.12 (sección 8.4).

8.45. Moderadores. Los reactores nucleares canadienses usan moderadores de *agua pesada* en los que se dan choques elásticos entre neutrones y deuterones de masa 2.0 u (véase el ejemplo 8.11 en la sección 8.4). *a*) ¿Qué rapidez tiene un neutrón, expresada como fracción de su rapidez original, después de un choque elástico de frente con un deuterón inicialmente en reposo? *b*) ¿Qué energía cinética tiene, expresada como fracción de su energía cinética original? *c*) ¿Cuántos choques sucesivos como éste reducirán la rapidez de un neutrón a 1/59,000 de su valor original?

8.46. Imagine que controla un acelerador de partículas que envía un haz de protones (masa *m*) a 1.50×10^7 m/s contra un objetivo gaseoso de un elemento desconocido. El detector indica que algunos protones rebotan en la misma línea después de chocar con uno de los núcleos del elemento desconocido. Todos esos protones tienen una rapidez de 1.20×10^7 m/s. Suponga que la rapidez inicial del núcleo objetivo es despreciable y que el choque es elástico. *a*) Calcule la masa del núcleo del elemento desconocido. Exprese su respuesta en términos de la masa *m* del protón. *b*) ¿Qué rapidez tiene el núcleo desconocido inmediatamente después de semejante choque?

Sección 8.5 Centro de masa

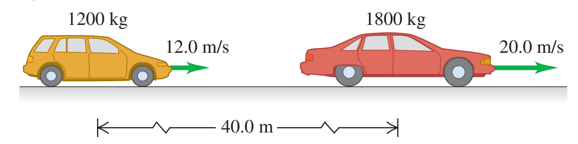
8.47. Tres bloques de chocolate de forma rara tienen las siguientes masas y coordenadas del centro de masa: 1) 0.300 kg (0.200 m, 0.300 m); 2) 0.400 kg (0.100 m, −0.400 m); 3) 0.200 kg (−0.300 m, 0.600 m). Determine las coordenadas del centro de masa del sistema formado por los tres bloques.

8.48. Calcule la posición del centro de masa del sistema formado por el Sol y Júpiter. (Como Júpiter tiene mayor masa que el resto de los planetas juntos, se obtendrá básicamente la posición del centro de masa del Sistema Solar.) ¿El centro de masa está dentro o fuera del Sol? Use los datos del Apéndice F.

8.49. Plutón y Caronte. El diámetro de Plutón mide aproximadamente 2370 km, y el diámetro de su satélite Caronte mide 1250 km. Aunque la distancia varía, sus centros a menudo están separados unos 19,700 km. Suponiendo que tanto Plutón como Caronte tienen la misma composición y, por consiguiente, la misma densidad media, determine la ubicación del centro de masa de este sistema en relación con el centro de Plutón.

8.50. Una camioneta de 1200 kg avanza en una autopista recta a 12.0 m/s. Otro auto, de masa 1800 kg y rapidez 20.0 m/s, tiene su centro de masa 40.0 m adelante del centro de masa de la camioneta (figura 8.39). *a*) Determine la posición del centro de masa del sistema formado por los dos vehículos. *b*) Calcule la magnitud del momento lineal total del sistema, a partir de los datos anteriores. *c*) Calcule la rapidez del centro de masa del sistema. *d*) Calcule el momento lineal total del sistema, usando la rapidez del centro de masa. Compare su resultado con el del inciso *b*).

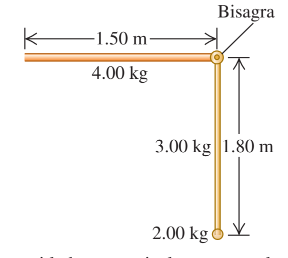
Figura 8.39 Ejercicio 8.50.





8.51. Una parte de una máquina consiste en una barra delgada y uniforme de 4.00 kg y 1.50 m de longitud, unida en forma perpendicular mediante una bisagra a una barra vertical similar cuya masa es de 3.00 kg y que mide 1.80 m de longitud. La barra más larga tiene una bola pequeña pero densa de 2.00 kg unida a uno de sus extremos (figura 8.40). ¿Qué distancia se mueve horizontal y verticalmente el centro de masa de la primera parte si la barra vertical se mueve alrededor del pivote en sentido antihorario 90° para formar una parte completa horizontal?

Figura 8.40 Ejercicio 8.51.



8.52. En un instante dado, el centro de masa de un sistema de dos partículas está sobre el eje x en $x = 2.0$ m y tiene una velocidad de $(5.0 \text{ m/s})\hat{\imath}$. Una partícula está en el origen. La otra tiene masa de 0.10 kg y está en reposo en el eje x en $x = 8.0$ m. *a*) ¿Qué masa tiene la partícula que está en el origen? *b*) Calcule el momento lineal total del sistema. *c*) ¿Qué velocidad tiene la partícula que está en el origen?

8.53. En el ejemplo 8.14 (sección 8.5), Ramón tira de la cuerda para adquirir una rapidez de 0.70 m/s. ¿Qué rapidez adquiere Santiago?

8.54. Un sistema consta de dos partículas. En $t = 0$ una partícula está en el origen; la otra, cuya masa es de 0.50 kg, está en el eje y en $y = 6.0$ m. En $t = 0$ el centro de masa del sistema está en el eje y en $y = 2.4$ m. La velocidad del centro de la masa está dada por $(0.75 \text{ m/s}^3)t^2\hat{\imath}$. *a*) Calcule la masa total del sistema. *b*) Calcule la aceleración del centro de la masa en cualquier instante t. *c*) Calcule la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema en $t = 3.0$ s.

8.55. El momento lineal de un modelo de avión controlado por radio está dada por $[(-0.75 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^3)t^2 + (3.0 \text{ kg}\cdot\text{m/s})]\ \hat{\imath} + (0.25 \text{ kg}\cdot\text{m/s}^2)t\hat{\jmath}$. Determine las componentes x, y y z de la fuerza neta que actúa sobre el avión.

*Sección 8.6 Propulsión a reacción

***8.56.** Un cohete pequeño quema 0.0500 kg de combustible cada segundo, expulsándolo como gas con una velocidad de 1600 m/s relativa al cohete. *a*) ¿Qué empuje tiene el cohete? *b*) ¿Funcionaría el cohete en el espacio exterior donde no hay atmósfera? En tal caso, ¿cómo se podría guiar? ¿Se le podría frenar?

***8.57.** Un astronauta de 70 kg flota en el espacio en una unidad de maniobras tripulada (MMU, por las siglas de *manned maneuvering unit*) de 110 kg y sufre una aceleración de 0.029 m/s^2 al disparar uno de sus impulsores. *a*) Si la rapidez del gas N_2 que escapa, relativa al astronauta, es de 490 m/s, ¿cuánto gas se gasta en 5.0 s? *b*) ¿Qué empuje tiene el impulsor?

***8.58.** Un cohete se enciende en el espacio profundo, donde la gravedad es despreciable. Si su masa inicial es de 6000 kg y expulsa gas con velocidad relativa de 2000 m/s, ¿cuánto gas deberá expulsar en el primer segundo para adquirir una aceleración inicial de 25.0 m/s^2?

***8.59.** Un cohete se enciende en el espacio profundo, donde la gravedad es despreciable, y en el primer segundo expulsa $\frac{1}{160}$ de su masa como gas de escape, adquiriendo una aceleración de 15.0 m/s^2. ¿Qué rapidez relativa al cohete tiene el gas?

***8.60.** Un modelo de motor a reacción C6-5 tiene un impulso de 10.0 N · s durante 1.70 s mientras quema 0.0125 kg de combustible. El empuje máximo es de 13.3 N. La masa inicial del motor más combustible es de 0.0258 kg. *a*) ¿Qué fracción del empuje máximo es el empuje medio? *b*) Calcule la rapidez relativa de los gases de escape, suponiéndola constante. *c*) Suponiendo que la rapidez relativa de los gases de escape es constante, calcule la rapidez final del motor si está sujeto a una armazón muy ligera y se enciende estando en reposo en el espacio exterior, sin gravedad.

***8.61.** Un cohete de una etapa se enciende desde el reposo en una plataforma espacial donde la gravedad es despreciable. Si el combustible se quema en 50.0 s y la rapidez relativa de los gases de escape es $v_{esc} = 2100$ m/s, ¿cuál debe ser la razón de masas m_0/m para adquirir una rapidez final v de 8.00 km/s (similar a la rapidez orbital de un satélite terrestre)?

***8.62.** Obviamente, los cohetes pueden alcanzar gran rapidez, pero ¿qué rapidez máxima es razonable? Suponga que un cohete se enciende desde el reposo en una estación espacial donde la gravedad es despreciable. *a*) Si el cohete expulsa gas con rapidez relativa de 2000 m/s y se desea que el cohete alcance una rapidez final de $1.00 \times 10^{-3}c$, donde c es la rapidez de la luz, ¿qué fracción de la masa total inicial del cohete *no* es combustible? *b*) ¿Cuál es está fracción si se desea alcanzar una rapidez final de 3000 m/s?

Problemas

8.63. Una esfera de acero de 40.0 kg se deja caer desde una altura de 2.00 m sobre una plancha de acero horizontal, rebotando a una altura de 1.60 m. *a*) Calcule el impulso que se da a la esfera en el impacto. *b*) Si el contacto dura 2.00 ms, calcule la fuerza media que actúa sobre la esfera durante el impacto.

8.64. En una erupción volcánica, una roca de 2400 kg es lanzada verticalmente hacia arriba. Al alcanzar su altura máxima, estalla súbitamente (a causa de los gases atrapados) y se divide en dos fragmentos, uno de los cuales tiene una masa tres veces mayor que el otro. El fragmento más liviano comenzó con una velocidad horizontal y tocó tierra 274 m directamente al norte del punto del estallido. ¿Dónde caerá el otro fragmento? Desprecie la resistencia del aire.

8.65. Una pelota de tenis de 0.560 N tiene una velocidad de (20.0m/s) $(20.0 \text{ m/s})\hat{\imath} - (4.0 \text{ m/s})\hat{\jmath}$. Justo antes de ser golpeada por una raqueta. Durante los 3.00 ms que la raqueta y la pelota están en contacto, la fuerza neta que actúa sobre la pelota es constante e igual a $-(380 \text{ N})\hat{\imath} + (110 \text{ N})\hat{\jmath}$. *a*) ¿Qué componentes x y y tiene el impulso de la fuerza neta aplicada a la pelota? *b*) ¿Qué componentes x y y tiene la velocidad final de la pelota?

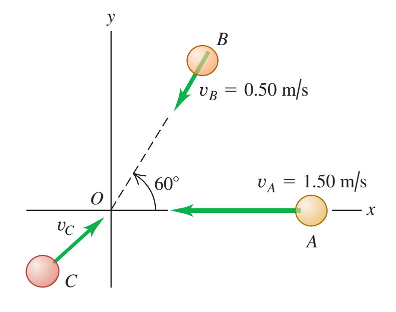
8.66. Tres vagones de ferrocarril en movimiento se acoplan con un cuarto vagón que está en reposo. Los cuatro continúan en movimiento y se acoplan con un quinto vagón en reposo. El proceso continúa hasta que la rapidez del tren formado es la quinta parte de la rapidez de los tres vagones iniciales. Los vagones son idénticos. Sin tomar en cuenta la fricción, ¿cuántos vagones tiene el tren final?

8.67. Un convertible azul de 1500 kg viaja al sur, y una vagoneta roja de 2000 kg viaja al oeste. Si el momento lineal total del sistema formado por los dos vehículos es de 800 kg · m/s dirigida 60.0° al oeste del sur, ¿qué rapidez tiene cada vehículo?

8.68. Tres discos idénticos en una mesa horizontal de hockey de aire tienen imanes repelentes. Se les junta y luego se les suelta simultáneamente. Todos tienen la misma rapidez en cualquier instante. Un disco se mueve al oeste. ¿Qué dirección tienen los otros dos discos?

8.69. Las esferas A, de 0.020 kg, B, de 0.030 kg y C, de 0.050 kg, se acercan al origen deslizándose sobre una mesa de aire sin fricción (figura 8.41). Las velocidades iniciales de A y B se indican en la figura. Las tres esferas llegan al origen simultáneamente y se pegan. *a*) ¿Qué componentes x y y debe tener la velocidad inicial de C si después del choque los tres objetos tienen una velocidad de 0.50 m/s en la dirección $+x$? *b*) Si C tiene la velocidad obtenida en el inciso *a*), ¿cuál es el cambio de la energía cinética del sistema de las tres esferas como resultado del choque?

Figura 8.41 Problema 8.69.



8.70. Un vagón de ferrocarril se mueve sobre vías rectas sin fricción con resistencia despreciable del aire. En los casos que siguen, el vagón tiene inicialmente una masa total (vehículo y contenido) de 200 kg y viaja hacia el este a 5.00 m/s. Suponiendo que no se sale

de la vía, calcule su *velocidad final* si: *a*) una masa de 25.0 kg se lanza lateralmente desde el vagón con velocidad de 2.00 m/s relativa a la velocidad inicial del vagón; *b*) una masa de 25.0 kg se lanza hacia atrás con velocidad de 5.00 m/s relativa al movimiento inicial del vagón; *c*) una masa de 25.0 kg se avienta al interior del vagón con velocidad de 6.00 m/s relativa al suelo y opuesta en dirección a la velocidad inicial del armón.

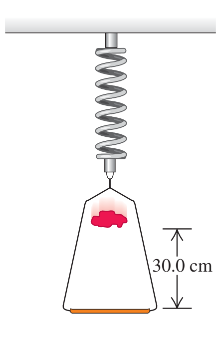
8.71. Masa cambiante. Un vagón tolva lleno de arena rueda con rapidez inicial de 15.0 m/s sobre vías horizontales rectas. Ignore las fuerzas de fricción que actúan sobre el vagón. La masa total del vagón y la arena es de 85,000 kg. La puerta de la tolva no cierra bien, por lo que se fuga arena por el fondo. Después de 20 minutos, se han perdido 13,000 kg de arena. ¿Qué rapidez tiene entonces el vagón? (Compare su análisis con el que usó para resolver el ejercicio 8.27.)

8.72. En una exhibición de autos antiguos, un Nash Metropolitan modelo 1955 de 840 kg avanza a 9.0 m/s seguido de un Packard Clipper modelo 1957 de 1620 kg que avanza a 5.0 m/s. *a*) ¿Qué auto tiene mayor energía cinética? ¿Cuál es la razón entre las energías cinéticas del Nash y el Packard? *b*) ¿Qué auto tiene mayor magnitud del momento lineal? ¿Cuál es la razón entre las magnitudes de momento lineal del Nash y el Packard? *c*) Sean F_N y F_P las fuerzas netas requeridas para detener en un tiempo t el Nash y el Packard, respectivamente. ¿Cuál fuerza es mayor: F_N o F_P? ¿Cuánto vale la razón F_N/F_P? *d*) Sean ahora F_N y F_P las fuerzas netas requeridas para detener en una distancia d el Nash y el Packard, respectivamente. ¿Cuál fuerza es mayor: F_N o F_P? ¿Cuánto vale la razón F_N/F_P?

8.73. Un soldado en un campo de tiro dispara una ráfaga de 8 tiros con un rifle de asalto a razón de 1000 balas por minuto. Cada bala tiene masa de 7.45 g y rapidez de 293 m/s relativa al suelo al salir del cañón del arma. Calcule la fuerza de retroceso media ejercida sobre el arma durante la ráfaga.

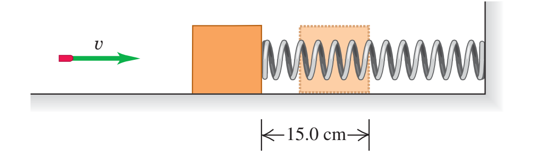
8.74. Un marco de 0.150 kg, suspendido de un resorte, lo estira 0.050 m. Un trozo de masilla de 0.200 kg en reposo se deja caer sobre el marco desde una altura de 30.0 cm (figura 8.42). ¿Qué distancia máxima baja el marco con respecto a su posición inicial?

Figura 8.42 Problema 8.74.



8.75. Una bala de rifle de 8.00 g se incrusta en un bloque de 0.992 kg que descansa en una superficie horizontal sin fricción sujeto a un resorte (figura 8.43). El impacto comprime el resorte 15.0 cm. La calibración del resorte indica que se requiere una fuerza de 0.750 N para comprimirlo 0.250 cm. *a*) Calcule la velocidad del bloque inmediatamente después del impacto. *b*) ¿Qué rapidez tenía inicialmente la bala?

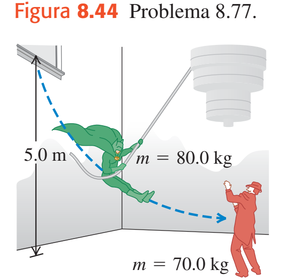
Figura 8.43 Problema 8.75.



8.76. Rebote de bala. Una piedra de 0.100 kg descansa en una superficie horizontal sin fricción. Una bala de 6.00 g que viaja horizontalmente a 350 m/s golpea la piedra y rebota horizontalmente a 90° de su dirección original, con rapidez de 250 m/s. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad de la piedra después del golpe. *b*) ¿Es perfectamente elástico el choque?

8.77. Un doble de cine de 80.0 kg se para en un alféizar 5.0 m sobre el piso (figura 8.44). Sujetando una cuerda atada a un candelabro, oscila hacia abajo para pelear con el villano de 70.0 kg, quien está de pie exactamente abajo del candelabro. (Suponga que el centro de masa del doble baja 5.0 m, y él suelta la cuerda justo al chocar con el villano.) *a*) ¿Con qué rapidez comienzan a deslizarse los contrincantes entrelazados sobre el piso? *b*) Si el coeficiente de fricción cinética entre sus cuerpos y el piso es $\mu_k = 0.250$, ¿qué distancia se deslizan?

Figura 8.44 Problema 8.77.



8.78. Dos masas idénticas se sueltan del reposo en un tazón hemisférico liso de radio R, desde las posiciones que se muestran en la figura 8.45. Se puede despreciar la fricción entre las masas y la superficie del tazón. Si se pegan cuando chocan, ¿qué altura arriba del fondo del tazón alcanzarán las masas después de chocar?

Figura 8.45 Problema 8.78.

R

8.79. Una pelota con masa M, que se mueve horizontalmente a 5.00 m/s, choca elásticamente con un bloque de masa $3M$ que inicialmente está en reposo y cuelga del techo por medio de un alambre de 50.0 cm. Determine el ángulo máximo de oscilación del bloque después del impacto.

8.80. Una esfera de plomo de 20.00 kg cuelga de un gancho atado a un alambre delgado de 3.50 m de longitud, y puede oscilar en un círculo completo. De repente, un dardo de acero de 5.00 kg la golpea horizontalmente, incrustándose en ella. ¿Qué rapidez inicial mínima debe tener el dardo para que la combinación describa un círculo completo después del choque?

8.81. Una pelota de 8.00 kg, que cuelga del techo atada a un alambre de 135 cm de longitud, sufre un choque elástico con una pelota de 2.00 kg que se mueve horizontalmente con rapidez de 5.00 m/s justo antes del choque. Calcule la tensión en el alambre inmediatamente después del choque.

8.82. Una pelota de goma con masa m se libera desde el reposo a una altura h por encima del piso. Después de su primer rebote, se eleva al 90% de su altura original. ¿Qué impulso (magnitud y dirección) ejerce el piso sobre esta pelota durante su primer rebote? Exprese su respuesta en términos de las variables m y h.

8.83. Una bala de 4.00 g viaja horizontalmente con velocidad de 400 m/s y choca con un bloque de madera de 0.800 kg que estaba en reposo en una superficie plana. La bala atraviesa el bloque y sale con su rapidez reducida a 120 m/s. El bloque se desliza una distancia de 45.0 m sobre la superficie con respecto a su posición inicial. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción cinética hay entre el bloque y la superficie? *b*) ¿En cuánto se reduce la energía cinética de la bala? *c*) ¿Qué energía cinética tiene el bloque en el instante en que la bala sale de él?

8.84. Una bala de 5.00 g se dispara *contra* un bloque de madera de 1.00 kg suspendido de un hilo de 2.00 m de longitud, atravesándolo. El centro de masa del bloque se eleva 0.45 cm. Calcule la rapidez de la bala al salir del bloque si su rapidez inicial es de 450 m/s.

8.85. Un neutrón de masa m sufre un choque elástico de frente con un núcleo de masa M en reposo. *a*) Demuestre que si la energía cinética inicial del neutrón es K_0, la energía cinética que pierde durante el choque es $4mMK_0/(M + m)^2$. *b*) ¿Con qué valor de M pierde más energía el neutrón incidente? *c*) Si M tiene el valor calculado en el inciso *b*), ¿qué rapidez tiene el neutrón después del choque?

8.86. División de energía en choques elásticos. Un objeto estacionario con masa m_B es golpeado de frente por un objeto con masa m_A que se mueve con rapidez inicial v_0. *a*) Si el choque es elástico, ¿qué porcentaje de la energía original tendrá cada objeto después del choque? *b*) Aplique el resultado del inciso *a*) a los siguientes casos especiales: i) $m_A = m_B$, ii) $m_A = 5m_B$. *c*) ¿Con qué valores, si existen, de la razón de masas m_A/m_B la energía cinética original se divide equitativamente entre los dos objetos después del choque?

8.87. En el centro de distribución de una compañía de embarques, un carrito abierto de 50.0 kg está rodando hacia la izquierda con rapidez de 5.00 m/s (figura 8.46). La fricción entre el carrito y el piso es despreciable. Un paquete de 15.0 kg baja deslizándose por una rampa inclinada 37.0° sobre la horizontal y sale proyectado con una rapidez de 3.00 m/s. El paquete cae en el carrito y siguen avanzando juntos. Si el extremo inferior de la rampa está a una altura de 4.00 m sobre el fondo del carrito, *a*) ¿qué rapidez tendrá el paquete inmediatamente antes de caer en el carrito? *b*) ¿Qué rapidez final tendrá el carrito?

Figura 8.46 Problema 8.87.

8.88. Un disco azul con masa de 0.0400 kg, que se desliza con rapidez de 0.200 m/s sobre una mesa de aire horizontal sin fricción, sufre un choque perfectamente elástico de frente con un disco rojo de masa m, inicialmente en reposo. Después del choque, la velocidad del disco azul es de 0.050 m/s en la misma dirección que su velocidad inicial. Calcule *a*) la velocidad (magnitud y dirección) del disco rojo después del choque; *b*) la masa m del disco rojo.

8.89. Dos asteroides con masas m_A y m_B se mueven con velocidades $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ con respecto a un astrónomo en una nave espacial. *a*) Demuestre que la energía cinética total medida por el astrónomo es

$$K = \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \tfrac{1}{2}\left(m_A v_A'^2 + m_B v_B'^2\right)$$

donde $\vec{v}_{cm}$ y M están definidos como en la sección 8.5, $\vec{v}_A' = \vec{v}_A - \vec{v}_{cm}$, y $\vec{v}_B' = \vec{v}_B - \vec{v}_{cm}$. En esta expresión, la energía cinética total de los dos asteroides es la energía asociada a su centro de masa mas la asociada al movimiento interno relativo al centro de masa. *b*) Si los asteroides chocan, ¿qué energía cinética *mínima* pueden tener después del choque, según las mediciones del astrónomo? Explique.

8.90. Imagine que sostiene una pelota pequeña en contacto con y directamente arriba del centro de una pelota grande. Si deja caer la pelota pequeña un tiempo corto después de dejar caer la grande, la pelota pequeña rebotará con rapidez sorprendente. Para ver el caso extremo, ignore la resistencia del aire y suponga que la pelota grande choca elásticamente con el piso y luego rebota para chocar elásticamente con la pelota pequeña en descenso. Justo antes del choque entre las dos pelotas, la grande se mueve hacia arriba con velocidad $\vec{v}$, y la pequeña tiene velocidad $-\vec{v}$. (¿Entiende por qué?) Suponga que la masa de la pelota grande es mucho mayor que la de la pequeña. *a*) ¿Qué velocidad tiene la pelota pequeña justo después del choque con la grande? *b*) Use la respuesta al inciso *a*) para calcular la razón entre la distancia de rebote de la pelota pequeña y la distancia que cayó antes del choque.

8.91. Juan y Gilberto están parados en una caja en reposo en la superficie horizontal sin fricción de un estanque congelado. La masa de Juan es de 75.0 kg, la de Gilberto es de 45.0 kg y la de la caja es de 15.0 kg. De repente, se acuerdan de que deben ir por un cubo de agua, así que los dos saltan horizontalmente desde encima de la caja. Inmediatamente después de saltar, cada uno se aleja de la caja con rapidez de 4.00 m/s relativa a la caja. *a*) ¿Qué rapidez final tiene la caja si Juan y Gilberto saltan simultáneamente y en la misma dirección? (*Sugerencia*: use un sistema de coordenadas inercial fijo al suelo.) *b*) ¿Cuál es la rapidez final de la caja si Juan salta primero y Gilberto lo hace unos segundos después, en la misma dirección? *c*) ¿Qué rapidez final tiene la caja si Gilberto salta primero y luego Juan, en la misma dirección?

8.92. División de energía. Un objeto con masa m, que inicialmente está en reposo, hace explosión y produce dos fragmentos, uno con masa m_A y otro con masa m_B, donde $m_A + m_B = m$. *a*) Si se libera una energía Q en la explosión, ¿cuánta energía cinética tendrá cada fragmento inmediatamente después de la explosión? *b*) ¿Qué porcentaje de la energía total liberada recibirá cada fragmento si la masa de uno es cuatro veces la del otro?

8.93. Desintegración de neutrones. Un neutrón en reposo se desintegra (se rompe) para producir un protón y un electrón. En el decaimiento se libera energía, la cual aparece como energía cinética del protón y del electrón. La masa de un protón es 1836 veces la de un electrón. ¿Qué fracción de la energía total liberada se convertirá en energía cinética del protón?

8.94. Un núcleo de ^{232}Th (torio) en reposo se desintegra para producir un núcleo de ^{228}Ra (radio) y una partícula alfa. La energía cinética total de los productos de la desintegración es de 6.54×10^{-13} J. La masa de una partícula alfa es el 1.76% de la masa de un núcleo de ^{228}Ra. Calcule la energía cinética de: *a*) el núcleo de ^{228}Ra en retroceso y *b*) la partícula alfa emitida.

8.95. Antineutrino. En la desintegración beta, un núcleo emite un electrón. Un núcleo de ^{210}Bi (bismuto) en reposo sufre desintegración beta para producir ^{210}Po (polonio). Suponga que el electrón emitido se mueve hacia la derecha con un momento lineal de 5.60×10^{-22} kg · m/s. El núcleo de ^{210}Po, cuya masa es de 3.50×10^{-25} kg, retrocede hacia la izquierda con rapidez de 1.14×10^{-3} m/s. La conservación del momento lineal requiere la emisión de una segunda partícula, llamada antineutrino. Calcule la magnitud y dirección del momento lineal del antineutrino emitido en esta desintegración.

8.96. Un protón que se mueve con rapidez v_{A1} en la dirección $+x$ choca elásticamente pero no de frente con un protón idéntico que está en reposo. Después del impacto, el primer protón se mueve con rapidez v_{A2} en el primer cuadrante, con un ángulo α con respecto al eje x, y el segundo se mueve con rapidez v_{B2} en el cuarto cuadrante, con un ángulo β con respecto al eje x (figura 8.13). *a*) Escriba las ecuaciones de conservación del momento lineal lineal en las direcciones x y y. *b*) Eleve al cuadrado las ecuaciones del inciso *a*) y súmelas. *c*) Introduzca ahora el hecho de que el choque es elástico. *d*) Demuestre que $\alpha + \beta = \pi/2$. (Habrá demostrado que esta ecuación se obedece en cualquier choque elástico descentrado entre objetos de igual masa, cuando uno de ellos estaba inicialmente en reposo.)

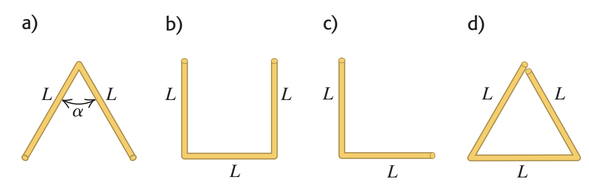
8.97. El disco de hockey B descansa sobre una superficie de hielo liso y es golpeado por otro disco A de la misma masa. A viaja inicialmente a 15.0 m/s y es desviado 25.0° con respecto a su dirección original. Suponga un choque perfectamente elástico. Calcule la rapidez final de cada disco y la dirección de la velocidad de B después del choque. (*Sugerencia*: use la relación que dedujo en el inciso *d*) del problema 8.96.)

8.98. Jonathan y Julia están sentados en un trineo en reposo sobre hielo sin fricción. Jonathan pesa 800 N, Julia pesa 600 N y el trineo pesa 1000 N. Las dos personas ven una araña venenosa en el piso del trineo y saltan hacia fuera. Jonathan salta a la izquierda con velocidad (relativa

al hielo) de 5.00 m/s a 30.0° por arriba de la horizontal, y Julia salta a la derecha a 7.00 m/s (relativa al hielo) a 36.9° por arriba de la horizontal. Calcule la velocidad horizontal (magnitud y dirección) del trineo después del salto.

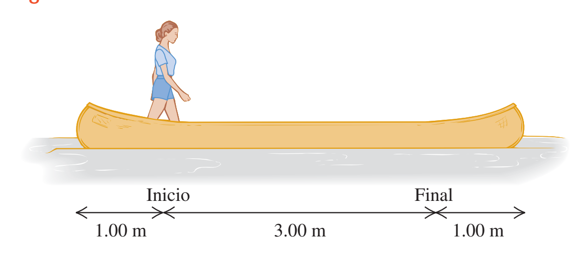
8.99. Los objetos de la figura 8.47 están hechos de alambre uniforme doblado. Encuentre la posición del centro de masa de cada uno.

Figura 8.47 Problema 8.99.



8.100. Una mujer de 45.0 kg está de pie en una canoa de 60.0 kg y 5.00 m de longitud, y comienza a caminar desde un punto a 1.00 m de un extremo hacia un punto a 1.00 m del otro extremo (figura 8.48). Si se desprecia la resistencia al movimiento de la canoa en el agua, ¿qué distancia se mueve la canoa durante este proceso?

Figura 8.48 Problema 8.100.



8.101. Imagine que está de pie en una plancha de concreto que descansa sobre un lago congelado. Suponga que no hay fricción entre la plancha y el hielo. La plancha pesa cinco veces más que usted. Si usted comienza a caminar a 2.00 m/s en relación con el hielo, ¿con qué rapidez relativa al hielo se moverá la plancha?

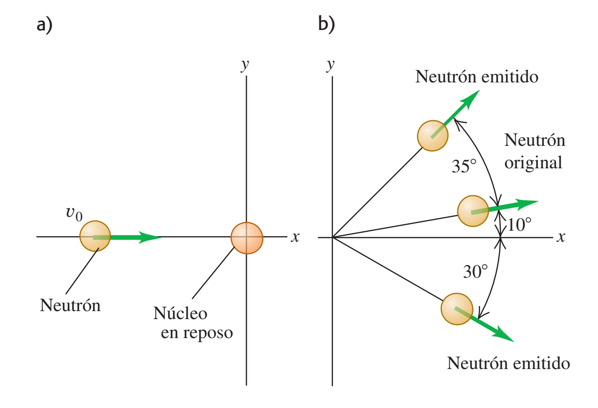
8.102. Un proyectil de 20.0 kg se dispara con un ángulo de 60.0° sobre la horizontal y rapidez de 80.0 m/s. En el punto más alto de la trayectoria el proyectil estalla en dos fragmentos de igual masa; uno cae verticalmente con rapidez inicial cero. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿A qué distancia del punto de disparo cae el otro fragmento si el terreno es plano? *b*) ¿Cuánta energía se libera en la explosión?

8.103. Un cohete de fuegos artificiales se dispara verticalmente hacia arriba. En su altura máxima de 80.0 m, estalla y se divide en dos fragmentos, uno con masa de 1.40 kg y otro con masa de 0.28 kg. En la explosión, 860 J de energía química se convierte en energía cinética de los dos fragmentos. *a*) ¿Qué rapidez tiene cada fragmento inmediatamente después de la explosión? *b*) Se observa que los dos fragmentos caen al suelo al mismo tiempo. ¿Qué distancia hay entre los puntos en los que caen? Suponga que el suelo es horizontal y que la resistencia del aire es despreciable.

8.104. Un obús de 12.0 kg es disparado con un ángulo de 55.0° sobre la horizontal con una rapidez inicial de 150 m/s. En el punto más alto de la trayectoria, el obús estalla en dos fragmentos, uno con tres veces más masa que el otro. Los dos fragmentos llegan al suelo al mismo tiempo. Suponga que la resistencia del aire es despreciable. Si el fragmento más pesado cae en el punto desde el cual se lanzó el obús, ¿dónde caerá el fragmento más ligero y cuánta energía se habrá liberado en la explosión?

8.105. Reacción nuclear. La fisión, el proceso que suministra la energía en las plantas nucleares, ocurre cuando un núcleo pesado se divide en dos núcleos medianos. Una reacción así ocurre cuando un neutrón choca con un núcleo de ^{235}U (uranio) y lo divide en un núcleo de ^{141}Ba (bario) y uno de ^{92}Kr (kriptón). Además, salen despedidos dos neutrones del ^{235}U original. Antes del choque tenemos la situación de la figura 8.49a; después, el ^{141}Ba se mueve en la dirección $+z$, y el ^{92}Kr, en la dirección $-z$. Los tres neutrones se mueven en el plano xy como se ilustra en la figura 8.49b. Si el neutrón incidente tiene velocidad inicial de magnitud 3.0×103 m/s y velocidad final de 2.0×10^3 m/s en las direcciones indicadas, ¿qué rapidez tienen los otros dos neutrones, y qué puede decirse de la rapidez de los núcleos de ^{141}Ba y ^{92}Kr? (La masa aproximada del núcleo de ^{141}Ba es 2.3×10^{-25} kg, y la del ^{92}Kr es de 1.5×10^{-25} kg.)

Figura 8.49 Problema 8.105.



8.106. Sistema de coordenadas del centro de masa. El disco A (masa m_A) se desplaza sobre una mesa de aire horizontal sin fricción con velocidad $\vec{v}_{A1}$ en la dirección $+x$ y choca de frente elásticamente con el disco B (masa m_B) en reposo. Después del choque, ambos discos se mueven a lo largo del eje $+x$. *a*) Calcule la velocidad del centro de masa del sistema de los dos discos antes del choque. *b*) Considere un sistema de coordenadas con origen en el centro de masa y que se mueve con él. ¿Es inercial este marco de referencia inercial? *c*) ¿Qué velocidades iniciales $\vec{u}_{A1}$ y $\vec{u}_{B1}$ tienen los discos en este marco de referencia? ¿Cuál es el momento lineal total en este marco? *d*) Use la conservación del momento lineal y de la energía, aplicadas en el marco de referencia en cuestión, para relacionar el momento lineal final de cada disco con el momento lineal inicial y, por consiguiente, la velocidad final de cada disco con la velocidad inicial. Sus resultados deberán mostrar que un choque elástico unidimensional tiene una descripción muy simple en el marco de referencia del centro de masa. *e*) Sean $m_A = 0.400$ kg, $m_B = 0.200$ kg y $v_{A1} = 6.00$ m/s. Calcule las velocidades $\vec{u}_{A1}$ y $\vec{u}_{B1}$, aplique el resultado del inciso *d*), y transfórmelas en velocidades en un marco estacionario para obtener las velocidades finales de los discos. ¿Concuerda su resultado con las ecuaciones (8.24) y (8.25)?

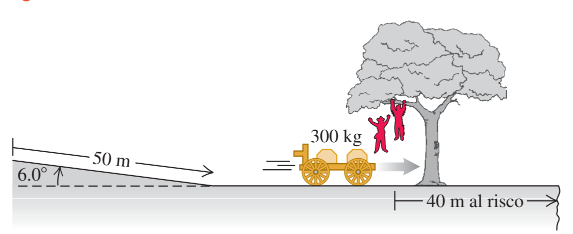
8.107. El *coeficiente de restitución* ϵ en un choque de frente se define como la razón entre las rapideces relativas después y antes del choque.

a) ¿Cuánto vale ϵ en un choque totalmente inelástico? *b*) ¿Y en un choque elástico? *c*) Una pelota se deja caer desde una altura h sobre una superficie estacionaria y rebota a una altura H_1. Demuestre que $\epsilon = \sqrt{H_1/h}$. *d*) Un balón de baloncesto bien inflado debe tener un coeficiente de restitución de 0.85. Si se le deja caer desde 1.2 m sobre un piso de madera sólida, ¿a qué altura debe rebotar? *e*) La altura del primer rebote es H_1. Demuestre que, si ϵ es constante, la altura del n-ésimo rebote es $H_n = \epsilon^{2n}h$. *f*) Si ϵ es constante, ¿qué altura tiene el octavo rebote del balón bien inflado que se soltó desde una altura de 1.2 m?

8.108. Energía de enlace de la molécula de hidrógeno. Al combinarse dos átomos de hidrógeno de masa m para formar una molécula diatómica (H_2), la energía potencial final del sistema es $-\Delta$, donde Δ es una cantidad positiva llamada *energía de enlace* de la molécula. *a*) Demuestre que, en un choque en el que sólo intervienen dos átomos de H, es *imposible* formar una molécula de H_2 porque no se pueden conservar simultáneamente el momento lineal y la energía. (*Sugerencia*: si puede demostrar que esto se cumple en un marco de referencia, será verdad en todos los marcos de referencia. ¿Comprende por qué?) *b*) Una molécula de H_2 puede formarse en un choque en el que intervienen *tres* átomos de hidrógeno. Suponga que, antes del choque, cada átomo tiene rapidez de 1.00×10^3 m/s y que los tres se acercan con ángulos de 120°, de manera que en todo momento están en los vértices de un triángulo equilátero. Calcule la rapidez de la molécula de H_2 y del átomo de H restante después del choque. La energía de enlace del H_2 es $\Delta = 7.23 \times 10^{-19}$ J, y la masa del átomo de H es de 1.67×10^{-27} kg.

8.109. Un bandido suelta una carreta con dos cajas de oro (masa total = 300 kg) que estaba en reposo 50 m cuesta arriba de una pendiente de 6.0° (figura 8.50). El plan es que la carreta baje la cuesta, ruede por terreno plano y luego caiga en un cañón donde sus cómplices esperan. Sin embargo, en un árbol a 40 m del borde del cañón están el Llanero Solitario (masa 75.0 kg) y Toro (masa 60.0 kg), quienes se dejan caer verticalmente sobre la carreta al pasar ésta. *a*) Si nuestros héroes necesitan 5.0 s para tomar el oro y saltar, ¿lo lograrán antes de que la carreta llegue al borde del risco? La carreta rueda con fricción despreciable. *b*) Cuando los héroes caen en la carreta, ¿se conserva la energía cinética del sistema de los héroes más la carreta? Si no, ¿aumenta o disminuye, y por cuánto?

Figura 8.50 Problema 8.109.



***8.110.** En la sección 8.6 consideramos un cohete que se dispara en el espacio exterior donde no hay resistencia del aire y la gravedad es despreciable. Suponga ahora que el cohete acelera verticalmente desde el reposo en la superficie terrestre. Siga ignorando la resistencia del aire y considere sólo la parte del movimiento en la que la altura del cohete es pequeña y g puede suponerse constante. *a*) ¿Cómo se modifica la ecuación (8.37) cuando se toma en cuenta la fuerza de gravedad? *b*) Deduzca una expresión para la aceleración a del cohete, análoga a la ecuación (8.39). *c*) ¿Qué aceleración tiene el cohete del ejemplo 8.15 (sección 8.6) si está cerca de la superficie terrestre en vez de en el espacio? Ignore la resistencia del aire. *d*) Calcule la rapidez del cohete del ejemplo 8.16 (sección 8.6) después de 90 s si parte de la superficie terrestre y no del espacio exterior. Puede despreciar la resistencia del aire. Compare su respuesta con la rapidez calculada en el ejemplo 8.16.

***8.111. Cohete de múltiples etapas.** Suponga que la primera etapa de un cohete de dos etapas tiene masa total de 12,000 kg, de los cuales 9000 kg son de combustible. La masa total de la segunda etapa es 1000 kg, de los cuales 700 kg corresponden al combustible. Suponga que la rapidez relativa v_{esc} del material expulsado es constante, e ignore los efectos gravitacionales (que son pequeños durante el periodo de encendido si la tasa de consumo de combustible es alta). *a*) Suponga que todo el combustible de este cohete de dos etapas se utiliza en un cohete de una sola etapa con la misma masa total de 13,000 kg. En términos de v_{esc}, ¿qué rapidez tendría el cohete, partiendo del reposo, al agotarse el combustible? *b*) En cuanto al cohete de dos etapas, ¿qué rapidez tiene al agotarse el combustible de la primera etapa si ésta transporta la segunda etapa hasta este punto? Esta rapidez es ahora la rapidez inicial de la segunda etapa, que en este punto se separa de la primera. *c*) ¿Qué rapidez final tiene la segunda etapa? *d*) ¿Qué valor de v_{esc} se requiere para impartir a la segunda etapa del cohete una rapidez de 7.00 km/s?

***8.112.** Para el cohete descrito en los ejemplos 8.15 y 8.16 (sección 8.6), la masa del cohete en función del tiempo es

$$m(t) = \begin{cases} m_0 & \text{para } t < 0 \\ m_0\left(1 - \dfrac{t}{120\text{ s}}\right) & \text{para } 0 \leq t \leq 90\text{ s} \\ m_0/4 & \text{para } t \geq 90\text{ s} \end{cases}$$

a) Calcule y grafique la velocidad del cohete en función del tiempo desde $t = 0$ a $t = 100$ s. *b*) Calcule y grafique la aceleración del cohete en función del tiempo desde $t = 0$ a $t = 100$ s. *c*) Una astronauta de 75 kg yace en una silla reclinada durante el lanzamiento del cohete. ¿Qué fuerza neta máxima ejerce la silla sobre la astronauta? Compare su respuesta con el peso de la astronauta en la Tierra.

Problemas de desafío

8.113. En la sección 8.5, calculamos el centro de masa considerando objetos constituidos por un número *finito* de masas puntuales u objetos que, por simetría, pueden representarse con un número finito de masas puntuales. Si la distribución de masa de un objeto sólido no permite una determinación simple del centro de masa por simetría, las sumas de las ecuaciones (8.28) deben generalizarse a integrales:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm$$

donde x y y son las coordenadas de un fragmento pequeño del objeto con masa dm. Se integra sobre todo el objeto. Considere una varilla delgada de longitud L, masa M y área transversal A dispuesta sobre el eje $+x$, con el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la varilla. *a*) Si la densidad $\rho = M/V$ del objeto es uniforme, realice la integración anterior para demostrar que la coordenada x del centro de masa está en el centro geométrico de la varilla. *b*) Si la densidad del objeto varía linealmente con x según $\rho = \alpha x$ (donde α es una constante positiva), calcule la coordenada x del centro de masa.

8.114. Use los métodos del problema de desafío 8.113 para calcular las coordenadas x y y del centro de masa de una placa metálica semi-

circular con densidad uniforme ρ, espesor t y radio a. La masa de la placa es entonces $M = \frac{1}{2}\rho\pi a^2 t$. Use el sistema de coordenadas de la figura 8.51.

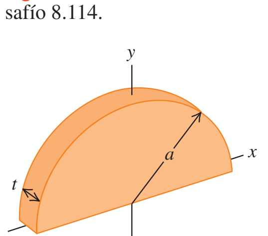


Figura 8.51 Problema de desafío 8.114.

8.115. Una cuarta parte de una cuerda de longitud l cuelga del borde de una mesa sin fricción. La cuerda tiene densidad lineal (masa por unidad de longitud) uniforme λ, y el extremo que está sobre la mesa es sostenido por una persona. ¿Cuánto trabajo realiza esa persona si tira de la cuerda para subir lentamente a la mesa el resto de la cuerda? Resuelva el problema de dos maneras: *a*) Calcule la fuerza que debe ejercer la persona para subir la cuerda, y con esto calcule el trabajo efectuado. La fuerza es variable porque en cada instante el tramo de cuerda que cuelga es diferente. *b*) Suponga que el segmento de cuerda que originalmente cuelga tiene toda su masa concentrada en su centro de masa. Calcule el trabajo necesario para elevar éste a la altura de la mesa. Quizá este enfoque le parezca más sencillo que el del inciso *a*). ¿Hay diferencias en sus respuestas? ¿Por qué?

***8.116 Gota de lluvia de masa variable.** En un problema de propulsión de cohetes, la masa es variable. Un problema similar es una gota de lluvia que cae a través de una nube de gotitas de agua, algunas de las cuales se adhieren a la gota *aumentando* su masa al caer. La fuerza sobre la gota es

$$F_{\text{ext}} = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

Suponga que la masa de la gota depende de la distancia x que ha caído. Entonces, $m = kx$, donde k es constante, y $dm/dt = kv$. Puesto que $F_{\text{ext}} = mg$, esto da

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v(kv)$$

O bien, dividiendo entre k,

$$xg = x\frac{dv}{dt} + v^2$$

Ésta es una ecuación diferencial con solución de la forma $v = at$, donde a es la aceleración constante. Suponga que la velocidad inicial de la gota es cero. *a*) Usando la solución propuesta para v, calcule la aceleración a. *b*) Calcule la distancia que la gota cae en $t = 3.00$ s. *c*) Con $k = 2.00$ g/m, calcule la masa de la gota en $t = 3.00$ s. Otros aspectos interesantes del problema pueden consultarse en K. S. Krane, *Amer. Jour. Phys*., vol. 49 (1981), pp. 113-117.

ROTACIÓN DE CUERPOS RÍGIDOS





? Todos los segmentos del aspa de una hélice en rotación de un helicóptero tienen el mismo valor de la velocidad y aceleración angulares? En comparación con un segmento dado de la aspa, ¿cuántas veces mayor será la rapidez lineal de un segundo segmento si se duplica su distancia con respecto al eje de rotación? ¿Cuántas veces mayor será su aceleración lineal?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir la rotación de un cuerpo rígido en términos de coordenada angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Cómo analizar la rotación de un cuerpo rígido cuando la aceleración angular es constante.
- Cómo relacionar la rotación de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración lineales de un punto en el cuerpo.
- El significado del momento de inercia del cuerpo en torno a un eje y cómo se relaciona con la energía cinética rotacional.
- Cómo calcular el momento de inercia de varios cuerpos.

¿Qué tienen en común los movimientos de un disco compacto, una rueda de la fortuna (sillas voladoras), una sierra circular y un ventilador de techo? Ninguno puede representarse adecuadamente como un *punto* en movimiento; todos implican un cuerpo que *gira* sobre un eje que está fijo en algún marco de referencia inercial.

La rotación se da en todos los niveles, desde el movimiento de los electrones en los átomos hasta los movimientos de las galaxias enteras. Necesitamos desarrollar métodos generales para analizar el movimiento de un cuerpo en rotación. En este capítulo y en el siguiente consideraremos los cuerpos con tamaño y forma definidos que, en general, pueden tener movimiento rotacional además de traslacional.

Los cuerpos reales llegan a ser muy complejos; las fuerzas que actúan sobre ellos pueden deformarlos: estirarlos, torcerlos y aplastarlos. Por el momento ignoraremos tales deformaciones y supondremos que el cuerpo tiene forma y tamaño perfectamente definidos e inmutables. Llamamos a este modelo idealizado **cuerpo rígido**. Este capítulo y el siguiente tratan principalmente del movimiento rotacional de un cuerpo rígido.

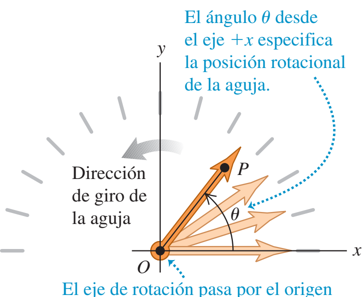
Comenzaremos con el lenguaje de la cinemática para *describir* el movimiento rotacional. Luego veremos la energía cinética de la rotación, la clave para usar los métodos de energía en el movimiento rotacional. En el capítulo 10 deduciremos los principios dinámicos que relacionan las fuerzas sobre un cuerpo con su movimiento rotacional.

9.1 Velocidad y aceleración angulares

Al analizar el movimiento rotacional, pensemos primero en un cuerpo rígido que gira sobre un *eje fijo*, es decir, un eje que está en reposo en algún marco de referencia inercial y no cambia de dirección relativa al marco. El cuerpo podría ser una flecha de motor, un trozo de asado en una brocheta o un carrusel.

La figura 9.1 muestra un cuerpo rígido (en este caso, la aguja indicadora de un velocímetro) que gira sobre un eje fijo, el cual pasa por el punto O y es perpendicular al

9.1 Aguja de velocímetro (un ejemplo de cuerpo rígido) que gira en sentido antihorario sobre un eje fijo.



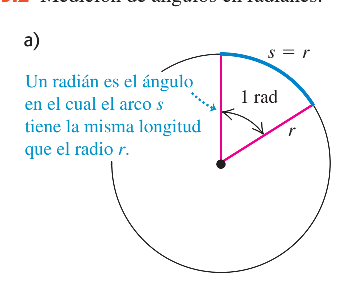
plano del diagrama, que llamamos plano xy. Una forma de describir la rotación de este cuerpo sería elegir un punto específico P del cuerpo y seguir la pista a sus coordenadas x y y. Este método no es el más conveniente, pues requiere dos números (las dos coordenadas) para especificar la posición rotacional del cuerpo. En vez de ello, observamos que la línea OP está fija en el cuerpo y gira con él. El ángulo θ que esta línea forma con el eje $+x$ describe la posición rotacional del cuerpo; usaremos sólo esta cantidad θ como *coordenada* de rotación.

La coordenada angular θ de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo puede ser positiva o negativa. Si hacemos que los ángulos positivos se midan en sentido antihorario desde el eje $+x$, entonces el ángulo θ en la figura 9.1 es positivo. En cambio, si elegimos la dirección horaria como la rotación positiva, θ será negativo en la figura 9.1. Cuando consideramos el movimiento rectilíneo de una partícula, fue indispensable especificar la dirección del desplazamiento positivo sobre esa línea; al analizar la rotación sobre un eje fijo, es igualmente indispensable especificar la dirección de rotación positiva.

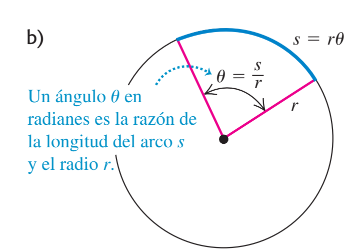
Al describir un movimiento rotacional, la forma más natural de medir el ángulo θ no es en grados, sino en **radianes**. Como se muestra en la figura 9.2a, un radián (1 rad) es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco cuya longitud es igual al radio del círculo. En la figura 9.2b, un ángulo θ es subtendido por un arco de longitud s en un círculo de radio r. El valor de θ (en radianes) es igual a s entre r:

9.2 Medición de ángulos en radianes.

a)



b)



$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{o bien,} \qquad s = r\theta \tag{9.1}$$

Un ángulo en radianes es la razón de dos longitudes, así que es un número puro, sin dimensiones. Si $s = 3.0$ m y $r = 2.0$ m, entonces $\theta = 1.5$, pero a menudo escribiremos esto como 1.5 rad para distinguirlo de un ángulo medido en grados o revoluciones.

La circunferencia de un círculo (es decir, la longitud del arco que rodea el círculo) es 2π veces el radio, así que hay 2π (unos 6.283) radianes en una revolución completa (360°). Por lo tanto,

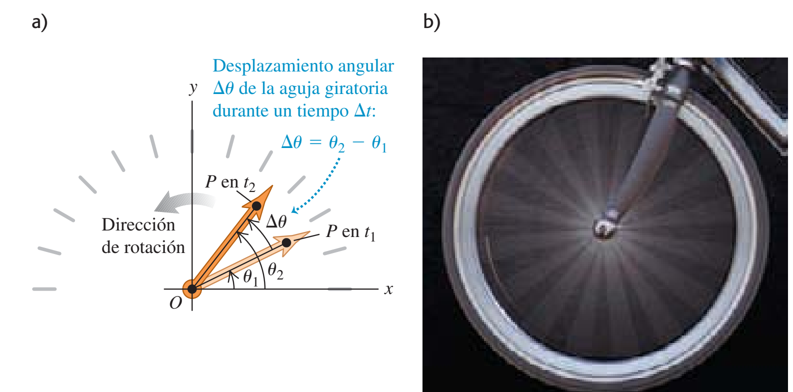
$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = 57.3°$$

Asimismo, $180° = \pi$ rad, $90° = \pi/2$ rad, etcétera. Si insistiéramos en medir θ en grados, tendríamos que haber incluido un factor más $(2\pi/360)$ en el lado derecho de $s = r\theta$ en la ecuación (9.1). Al medir ángulos en radianes, mantenemos la relación entre el ángulo y la distancia a lo largo de un arco lo más sencilla posible.

Velocidad angular

La coordenada θ de la figura 9.1 especifica la posición rotacional de un cuerpo rígido en un instante dado. Podemos describir el *movimiento* rotacional del cuerpo en términos de la razón de cambio de θ, de forma análoga a como describimos el movimiento rectilíneo en el capítulo 2. En la figura 9.3a una línea de referencia OP en un cuerpo que gira forma un ángulo θ_1 con el eje $+x$ en el instante t_1, En un instante posterior t_2, el ángulo cambió a θ_2. Definimos la **velocidad angular media** $\omega_{\text{med-}z}$ (con la letra griega omega) del cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como la razón del **desplazamiento angular** $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ en Δt:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{9.2}$$



9.3 *a*) Desplazamiento angular $\Delta\theta$ de un cuerpo en rotación. *b*) Cada parte de un cuerpo rígido en rotación tiene la misma velocidad angular $\Delta\theta/\Delta t$.

El subíndice z indica que el cuerpo de la figura 9.3a está girando en torno al eje z, que es perpendicular al plano del diagrama. La **velocidad angular instantánea** ω_z es el límite de $\omega_{\text{med-}z}$ cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada de θ con respecto a t:

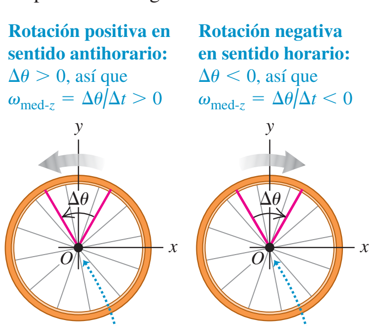
$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{(definición de velocidad angular)} \qquad (9.3)$$

Cuando nos referimos simplemente a "velocidad angular" hablamos de la velocidad angular instantánea, no de la velocidad angular media.

La velocidad angular ω_z puede ser positiva o negativa, dependiendo de la dirección en que gire el cuerpo rígido (figura 9.4). La *rapidez* angular ω, que usaremos mucho en las secciones 9.3 y 9.4, es la magnitud de la velocidad angular. Al igual que la rapidez ordinaria (lineal) v, la rapidez angular nunca es negativa.

CUIDADO **Velocidad angular contra velocidad lineal** Tenga presente la distinción entre velocidad angular ω_z y velocidad ordinaria, o *velocidad lineal*, v_x (véase la sección 2.2). Si un objeto tiene una velocidad v_x, el objeto en su totalidad se *mueve* a lo largo del eje x. En contraste, si un objeto tiene una velocidad angular ω_z, está *girando* en torno al eje z. *No* quiere decir que el objeto se mueve a lo largo del eje z.

9.4 La velocidad angular media de un cuerpo rígido (que aquí se muestra) y la velocidad angular instantánea pueden ser positivas o negativas.



Diferentes puntos de un cuerpo rígido en rotación recorren diferentes distancias en un tiempo dado, dependiendo de la distancia con respecto al eje de rotación. No obstante, dado que el cuerpo es rígido, *todos* los puntos giran el mismo ángulo en el mismo tiempo (figura 9.3b). Por lo tanto, *en cualquier instante, todas las partes de un cuerpo rígido en rotación tienen la misma velocidad angular*. La velocidad angular es positiva si el cuerpo gira en la dirección de θ creciente, y negativa si lo hace en la dirección de θ decreciente.

Si el ángulo de θ está en radianes, la unidad de velocidad angular es el radián por segundo (rad/s). Suelen usarse otras unidades, como revoluciones por minuto (rev/min o rpm). Puesto que 1 rev = 2π rad, dos conversiones útiles son

$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

Es decir, 1 rad/s es alrededor de 10 rpm.

Ejemplo 9.1 Cálculo de la velocidad angular

El volante de un automóvil prototipo se somete a prueba. La posición angular θ del volante está dada por

$$\theta = (2.0\ \text{rad/s}^3)t^3$$

El diámetro del volante es de 0.36 m. *a*) Calcule el ángulo θ, en radianes y en grados, en $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule la distancia que recorre una partícula en el borde durante ese intervalo. *c*) Calcule la velocidad angular media, en rad/s y en rev/min (rpm), entre $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *d*) Calcule la velocidad angular instantánea al $t = t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitamos calcular los valores θ_1 y θ_2 de la posición angular en los instantes t_1 y t_2, el desplazamiento angular $\Delta\theta$ entre t_1 y t_2, la distancia recorrida y la velocidad angular media entre t_1 y t_2, y la velocidad angular instantánea en t_2.

PLANTEAR: Nos dan la posición angular θ en función del tiempo. Por lo tanto, es fácil obtener las dos primeras incógnitas, los valores θ_1 y θ_2; el desplazamiento angular $\Delta\theta$ es la diferencia entre θ_1 y θ_2. Con $\Delta\theta$ calcularemos la distancia y la velocidad angular media empleando las ecuaciones (9.1) y (9.2), respectivamente. Para calcular la velocidad angular instantánea, derivaremos θ con respecto al tiempo, como en la ecuación (9.3).

EJECUTAR: *a*) Sustituimos los valores de t en la ecuación dada:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= (2.0\ \text{rad/s}^3)(2.0\ \text{s})^3 = 16\ \text{rad}\\ &= (16\ \text{rad})\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} = 920°\\ \theta_2 &= (2.0\ \text{rad/s}^3)(5.0\ \text{s})^3 = 250\ \text{rad}\\ &= (250\ \text{rad})\frac{360°}{2\pi\ \text{rad}} = 14{,}000°\end{aligned}$$

b) El volante tiene un desplazamiento angular de $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 250\ \text{rad} - 16\ \text{rad} = 234$ rad. El radio r es 0.18 m (la mitad del diámetro). La ecuación (9.1) da

$$s = r\theta = (0.18\ \text{m})(234\ \text{rad}) = 42\ \text{m}$$

Para usar la ecuación (9.1), el ángulo *debe* expresarse en radianes. Omitimos "radianes" de la unidad de s porque θ en realidad es un número adimensional; s es una distancia y se mide en metros, igual que r.

c) En la ecuación (9.2) tenemos

$$\begin{aligned}\omega_{\text{med-}z} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{250\ \text{rad} - 16\ \text{rad}}{5.0\ \text{s} - 2.0\ \text{s}} = 78\ \text{rad/s}\\ &= \left(78\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right)\left(\frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}}\right) = 740\ \text{rev/min}\end{aligned}$$

d) Usamos la ecuación (9.3):

$$\begin{aligned}\omega_z &= \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}[(2.0\ \text{rad/s}^3)t^3] = (2.0\ \text{rad/s}^3)(3t^2)\\ &= (6.0\ \text{rad/s}^3)t^2\end{aligned}$$

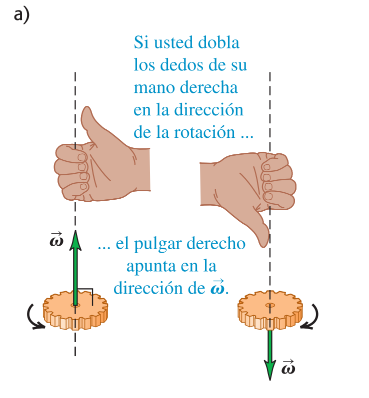
En el instante $t = 5.0$ s,

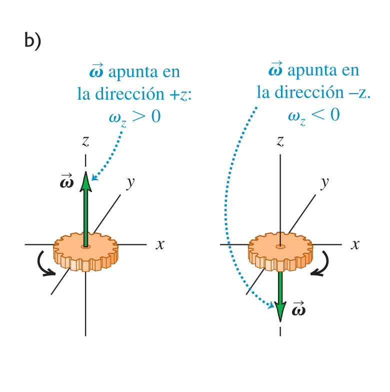
$$\omega_z = (6.0\ \text{rad/s}^3)(5.0\ \text{s})^2 = 150\ \text{rad/s}$$

EVALUAR: Nuestro resultado en el inciso *d*) muestra que ω_z es proporcional a t^2 y, por lo tanto, aumenta con el tiempo. Nuestros resultados numéricos son congruentes con este resultado: la velocidad angular instantánea de 150 rad/s en $t = 5.0$ s es mayor que la velocidad angular media de 78 rad/s para el intervalo de 3.0 s previo a ese instante (de $t_1 = 2.0$ s a $t_2 = 5.0$ s).

Velocidad angular como un vector

Como hemos visto, nuestra notación para la velocidad angular ω_z en torno al eje z recuerda la notación v_x, para la velocidad ordinaria a lo largo del eje x (véase la sección 2.2). Así como v_x es la componente x del vector de velocidad $\vec{v}$, ω_z es la componente z de un *vector* de velocidad angular $\vec{\omega}$ dirigido a lo largo del eje de rotación. Como





9.5 a) Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si se invierte el sentido de la rotación, se invierte la dirección de $\vec{\omega}$. b) El signo de ω_z de la rotación a lo largo del eje z.

muestra la figura 9.5a, la dirección de $\vec{\omega}$ está dada por la regla de la mano derecha que empleamos al definir el producto vectorial en la sección 1.10. Si la rotación es sobre el eje z, $\vec{\omega}$ sólo tiene componente z, la cual es positiva si $\vec{\omega}$ apunta en la dirección $+z$ y negativa si $\vec{\omega}$ apunta en la dirección $-z$ (figura 9.5b).

La formulación vectorial tiene especial utilidad en situaciones donde *cambia* la dirección del eje de rotación. Examinaremos brevemente tales situaciones al final del capítulo 10. En este capítulo, sin embargo, sólo consideraremos situaciones en las que el eje de rotación es fijo. Por lo tanto, en el resto del capítulo, el término "velocidad angular" se referirá a ω_z, la componente del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ a lo largo del eje.

Aceleración angular

Si cambia la velocidad angular de un cuerpo rígido, tiene una *aceleración angular*. Cuando una persona pedalea una bicicleta con más vigor para hacer que las ruedas giren más rápidamente, o aplica los frenos para detener las ruedas, se produce una aceleración angular sobre éstas. También se produce una aceleración angular cuando alteramos la rapidez de rotación de una pieza giratoria de una maquinaria, como el cigüeñal del motor de un automóvil.

Si ω_{1z} y ω_{2z} son las velocidades angulares instantáneas en t_1 y t_2, definimos la **aceleración angular media** $\alpha_{\text{med-}z}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como el cambio de la velocidad angular dividido entre Δt (figura 9.6):

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} \tag{9.4}$$

La **aceleración angular instantánea** α_z es el límite de $\alpha_{\text{med-}z}$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} \quad \text{(definición de aceleración angular)} \tag{9.5}$$

La unidad que se suele utilizar para la aceleración angular es el radián por segundo por segundo (rad/s^2). De ahora en adelante, emplearemos el término "aceleración angular" para referirnos a la aceleración angular instantánea, no a la aceleración angular media.

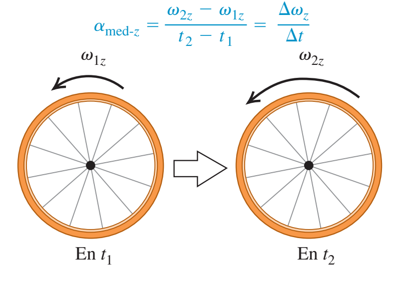
Dado que $\omega_z = d\theta/dt$, también podemos expresar la aceleración angular como la segunda derivada de la coordenada angular:

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{9.6}$$

Seguramente el lector ya se percató de que estamos usando letras griegas para las cantidades de la cinemática angular: θ para la posición, ω_z para la velocidad y α_z para la aceleración angulares. Éstas son análogas a x para la posición, v_x para la velocidad y a_x para la aceleración, respectivamente, en el movimiento rectilíneo. En ambos casos, la velocidad es la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo; en tanto que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. A veces, usaremos los términos velocidad *lineal y* aceleración *lineal* para referirnos a las cantidades que ya definimos en los capítulos 2 y 3, haciendo una distinción clara entre éstas y las cantidades *angulares* presentadas en este capítulo.

En el movimiento rotacional, si la aceleración angular α_z es positiva, aumenta la velocidad angular ω_z; si α_z es negativa, ω_z disminuye. La rotación se está acelerando si α_z y ω_z tienen el mismo signo, y frenándose si tienen signos opuestos. (Estas relaciones son idénticas a las que existen entre la aceleración *lineal* a_x y la velocidad *lineal* v_x en el movimiento rectilíneo; véase la sección 2.3.)

9.6 Cálculo de la aceleración angular media de un cuerpo rígido que gira.



Ejemplo 9.2 Cálculo de la aceleración angular

En el ejemplo 9.1, vimos que la velocidad angular instantánea ω_z del volante en cualquier instante t está dada por

$$\omega_z = (6.0 \text{ rad/s}^3)t^2$$

a) Calcule la aceleración angular media entre $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 5.0$ s. *b*) Calcule la aceleración angular instantánea en el instante $t_2 = 5.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo requiere las definiciones de aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ y aceleración angular instantánea α_z.

PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (9.4) y (9.5) para obtener el valor de $\alpha_{\text{med-}z}$ entre t_1 y t_2, así como el valor de α_z en $t = t_2$.

EJECUTAR: *a*) Los valores de ω_z en los dos instantes son

$$\omega_{1z} = (6.0 \text{ rad/s}^3)(2.0 \text{ s})^2 = 24 \text{ rad/s}$$
$$\omega_{2z} = (6.0 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s})^2 = 150 \text{ rad/s}$$

Por la ecuación (9.4), la aceleración angular media es

$$\alpha_{\text{med-}z} = \frac{150 \text{ rad/s} - 24 \text{ rad/s}}{5.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = 42 \text{ rad/s}^2$$

b) Por la ecuación (9.5), la aceleración angular instantánea en cualquier instante t es

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}[(6.0 \text{ rad/s}^3)(t^2)] = (6.0 \text{ rad/s}^3)(2t)$$
$$= (12 \text{ rad/s}^3)t$$

En el instante $t = 5.0$ s,

$$\alpha_z = (12 \text{ rad/s}^3)(5.0 \text{ s}) = 60 \text{ rad/s}^2$$

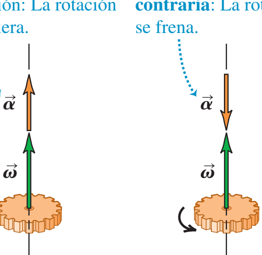
EVALUAR: Observe que la aceleración angular *no* es constante en esta situación. La velocidad angular ω_z siempre aumenta porque α_z siempre es positiva; además, la razón con que aumenta la velocidad angular también está creciendo, ya que α_z aumenta con el tiempo.

Aceleración angular como un vector

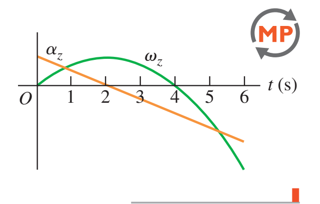
Así como hicimos con la velocidad angular, resulta útil definir un *vector* de aceleración angular $\vec{\alpha}$. Matemáticamente, $\vec{\alpha}$ es la derivada con respecto al tiempo del vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el objeto gira en torno al eje z fijo, $\vec{\alpha}$ sólo tiene componente z; la cantidad α_z es precisamente esa componente. En este caso, $\vec{\alpha}$ apunta en la misma dirección que $\vec{\omega}$ si la rotación se está acelerando, y en la dirección opuesta si se está frenando (figura 9.7).

El vector de aceleración angular nos será muy útil en el capítulo 10 cuando veamos lo que sucede cuando el eje de rotación puede cambiar de dirección. En este capítulo el eje de rotación siempre estará fijo y sólo necesitaremos usar la componente z: α_z.

9.7 Cuando el eje de rotación es fijo, los vectores de aceleración angular y velocidad angular están sobre ese eje.



Evalúe su comprensión de la sección 9.1 La figura muestra una gráfica de ω_z y α_z contra el tiempo para un cuerpo giratorio específico. *a*) ¿En qué instantes la rotación se acelera? i) $0 < t < 2$ s; ii) $2 \text{ s} < t < 4$ s; iii) $4 \text{ s} < t < 6$ s. *b*) ¿En qué instantes la rotación se frena? i) $0 < t < 2$ s; ii) $2 \text{ s} < t < 4$ s; iii) $4 \text{ s} < 5 < 6$ s.



9.2 Rotación con aceleración angular constante

En el capítulo 2, vimos que el movimiento rectilíneo es muy sencillo cuando la aceleración es constante. Lo mismo sucede con el movimiento rotacional sobre un eje fijo. Si la aceleración angular es constante, podemos deducir ecuaciones para la velocidad y la posición angulares siguiendo el mismo procedimiento que usamos para el movimiento rectilíneo en la sección 2.4. De hecho, las ecuaciones que vamos a deducir son idénticas a las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14), si sustituimos x por θ, v_x por ω_z y a_x por α_z. Sugerimos repasar la sección 2.4 antes de continuar.

Sea ω_{0z} la velocidad angular de un cuerpo rígido en $t = 0$ y sea ω_z su velocidad angular en cualquier instante posterior t. La aceleración angular α_z es constante e

igual al valor medio en cualquier intervalo. Usando la ecuación (9.4) en el intervalo de 0 a t, tenemos

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0}, \qquad \text{es decir,}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \qquad (9.7)$$

El producto $\alpha_z t$ es el cambio total de ω_z entre $t = 0$ y el instante posterior t; la velocidad angular ω_z en el instante t es la suma del valor inicial ω_{0z} y este cambio total.

Con aceleración angular constante, la velocidad angular cambia a una razón uniforme, así que su valor medio entre 0 y t es la media de los valores inicial y final:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2} \qquad (9.8)$$

También sabemos que $\omega_{\text{med-}z}$ es el desplazamiento angular total $(\theta - \theta_0)$ dividido entre el intervalo de tiempo $(t - 0)$:

$$\omega_{\text{med-}z} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0} \qquad (9.9)$$

Si igualamos las ecuaciones (9.8) y (9.9), y multiplicamos el resultado por t, obtenemos

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \qquad (9.10)$$

Para obtener una relación entre θ y t que no incluya a ω_z, sustituimos la ecuación (9.7) en la ecuación (9.10):

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t \qquad \text{o bien,}$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \qquad (9.11)$$

Es decir, si en el tiempo inicial $t = 0$ el cuerpo tiene una posición angular θ_0 y una velocidad angular ω_{0z}, entonces su posición angular θ en cualquier instante posterior t será la suma de tres términos: su posición angular inicial θ_0, más la rotación $\omega_{0z}t$ que tendría si la velocidad angular fuera constante, más una rotación adicional $\frac{1}{2}\alpha_z t^2$ causada por el cambio en la velocidad angular.

Siguiendo el mismo procedimiento que para el movimiento rectilíneo de la sección 2.4, combinamos las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener una relación entre θ y ω_z que no contenga t. Lo invitamos a efectuarlo, siguiendo el procedimiento que empleamos para obtener la ecuación (2.13). (Véase el ejercicio 9.12.) De hecho, dada la analogía perfecta entre las cantidades rectilíneas y rotacionales, podemos tomar la ecuación (2.13) y sustituir cada cantidad rectilínea por su contraparte rotacional. Así que,

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \qquad \text{(sólo aceleración angular constante)} \qquad (9.12)$$

CUIDADO **Aceleración angular constante** Tenga presente que estos resultados son válidos *sólo* si la aceleración angular α_z es *constante*; no trate de aplicarlos a problemas donde α_z *no* sea constante. En la tabla 9.1 se muestra la analogía entre las ecuaciones (9.7), (9.10), (9.11) y (9.12), para rotación sobre un eje fijo y aceleración angular constante, y las ecuaciones correspondientes para el movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante. ∎



7.7 Cinemática rotacional

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante	Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante
$a_x = \text{constante}$	$\alpha_z = \text{constante}$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_x + v_{0x})t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t$

Ejemplo 9.3 Rotación con aceleración angular constante

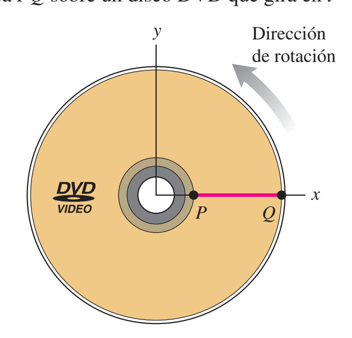
Imagine que usted acaba de ver una película en DVD y el disco se está deteniendo. La velocidad angular del disco en $t = 0$ es de 27.5 rad/s y su aceleración angular constante es de $-10.0\ \text{rad/s}^2$. Una línea PQ en la superficie del disco está a lo largo del eje $+x$ en $t = 0$ (figura 9.8). *a*) ¿Qué velocidad angular tiene el disco en $t = 0.3$ s? *b*) ¿Qué ángulo forma la línea PQ con el eje $+x$ en ese instante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La aceleración angular del disco es constante, así que podemos usar cualquiera de las ecuaciones que dedujimos en esta sección. Las incógnitas son la velocidad angular y el desplazamiento angular en $t = 0.300$ s.

PLANTEAR: Nos dan la velocidad angular inicial $\omega_{0z} = 27.5$ rad/s, el ángulo inicial $\theta_0 = 0$ entre la línea PQ y el eje $+x$, la aceleración angular $\alpha_z = -10.0\ \text{rad/s}^2$ y el tiempo $t = 0.300$ s. Con esta información, lo más fácil es usar las ecuaciones (9.7) y (9.11) para obtener las incógnitas ω_z, y θ, respectivamente.

9.8 La línea PQ sobre un disco DVD que gira en $t = 0$.



EJECUTAR: *a*) Por la ecuación (9.7), en $t = 0.300$ s tenemos

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t = 27.5\ \text{rad/s} + (-10.0\ \text{rad/s}^2)(0.300\ \text{s}) = 24.5\ \text{rad/s}$$

b) Por la ecuación (9.11),

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$$
$$= 0 + (27.5\ \text{rad/s})(0.300\ \text{s}) + \frac{1}{2}(-10.0\ \text{rad/s}^2)(0.300\ \text{s})^2$$
$$= 7.80\ \text{rad} = 7.80\ \text{rad}\left(\frac{1\ \text{rev}}{2\pi\ \text{rad}}\right) = 1.24\ \text{rev}$$

El DVD ha girado una revolución completa más 0.24 de revolución, es decir, un ángulo adicional de (0.24 rev) (360°/rev) = 87°. Por lo tanto, la línea PQ forma un ángulo de 87° con el eje $+x$.

EVALUAR: Nuestra respuesta al inciso *a*) nos indica que disminuyó la velocidad angular, lo cual es natural dado que α_z es negativa. También podemos usar el valor de ω_z, que obtuvimos en el inciso *a*) para comprobar nuestro resultado θ del inciso *b*). Para ello, despejamos el ángulo θ de la ecuación (9.12), $\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$,

$$\theta = \theta_0 + \left(\frac{\omega_z^2 - \omega_{0z}^2}{2\alpha_z}\right)$$
$$= 0 + \frac{(24.5\ \text{rad/s})^2 - (27.5\ \text{rad/s})^2}{2(-10.0\ \text{rad/s}^2)} = 7.80\ \text{rad}$$

Esto coincide con el resultado que obtuvimos antes.

Evalúe su comprensión de la sección 9.2 Suponga que el DVD del ejemplo 9.3 originalmente estaba girando al doble de la tasa (55.0 rad/s en vez de 27.5 rad/s) y que frenó al doble de la tasa ($-20.0\ \text{rad/s}^2$ en vez de $-10.0\ \text{rad/s}^2$). *a*) En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuánto tiempo le tomaría al DVD llegar al reposo? i) la misma cantidad de tiempo; ii) el doble de tiempo; iii) 4 veces más tiempo; iv) $\frac{1}{2}$ del tiempo; v) $\frac{1}{4}$ del tiempo. *b*) En comparación con la situación del ejemplo 9.3, ¿cuántas revoluciones giraría el DVD antes de detenerse? i) el mismo número de revoluciones; ii) el doble de revoluciones; iii) 4 veces más revoluciones; iv) $\frac{1}{2}$ de las revoluciones; v) $\frac{1}{4}$ de las revoluciones.

MP

9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

¿Cómo obtenemos la velocidad y aceleración lineales de un punto dado de un cuerpo rígido en rotación? Necesitamos la respuesta para continuar con nuestro estudio de la rotación. Para obtener la energía cinética de un cuerpo en rotación, por ejemplo, debemos partir de $K = \frac{1}{2}mv^2$ para una partícula, y esto requiere conocer v para cada partícula del cuerpo. Por lo tanto, vale la pena deducir relaciones generales entre la velocidad y aceleración *angulares* de un cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo, y la velocidad y aceleración *lineales* de un punto o partícula específicos del cuerpo.

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, todas sus partículas se mueven en una trayectoria circular. El círculo yace en un plano perpendicular al eje y está centrado en el eje. La rapidez de una partícula es directamente proporcional a la velocidad angular del cuerpo; cuanto más rápidamente gire el cuerpo, mayor será la rapidez de cada partícula. En la figura 9.9, el punto P está a una distancia constante r del eje de rotación, así que se mueve en un círculo de radio r. En cualquier instante, el ángulo θ (en rad) y la longitud de arco s están relacionados por

$$s = r\theta$$

Derivamos esto con respecto al tiempo, observando que r es constante para una partícula específica, y obtenemos el valor absoluto de ambos lados:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

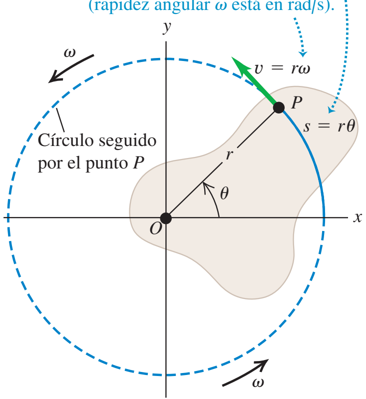
Ahora, $|ds/dt|$ es el valor absoluto de la razón de cambio de la longitud de arco, que es igual a la rapidez *lineal* instantánea v de la partícula. De manera análoga, $|d\theta/dt|$, es el valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, que es la **rapidez angular** instantánea ω, es decir, la magnitud de la velocidad angular instantánea en rad/s. Así,

$$v = r\omega \qquad \text{(relación entre rapideces lineal y angular)} \qquad (9.13)$$

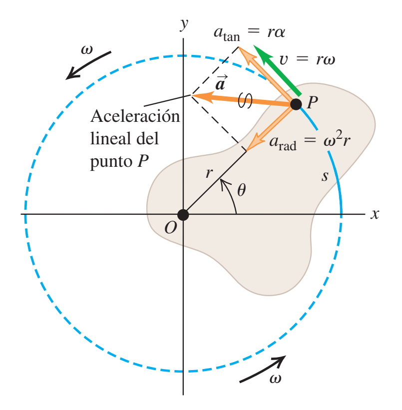
Cuanto más lejos del eje esté del eje un punto, mayor será su rapidez lineal. La *dirección* del *vector* de velocidad lineal es siempre tangente a la trayectoria circular (figura 9.9).

CUIDADO **Rapidez contra velocidad** Tenga presente la distinción entre las *rapideces* lineal y angular v y ω (que aparecen en la ecuación (9.13) y las *velocidades* lineal y angular v_x y ω_z. Las cantidades sin subíndices, v y ω, nunca son negativas; son las magnitudes de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{\omega}$, respectivamente, y sus valores sólo nos dicen con qué rapidez se está moviendo la partícula (v) o qué tan rápido está girando (ω). Las cantidades correspondientes con subíndice, v_x y ω_z, pueden ser positivas o negativas; su signo indica la dirección del movimiento.

9.9 Cuerpo rígido que gira sobre un eje fijo que pasa por el punto O.



9.10 Cuerpo rígido cuya rotación está acelerando. La aceleración del punto P tiene una componente a_{rad} hacia el eje de rotación (perpendicular a $\vec{v}$) y una componente a_{tan} a lo largo del círculo que sigue el punto P (paralela a $\vec{v}$).



Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Podemos representar la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo en términos de sus componentes centrípeta y tangencial, a_{rad} y a_{tan} (figura 9.10), como hicimos en la sección 3.4. Le recomendamos repasar esa sección ahora. Vimos que la **componente tangencial de aceleración** a_{tan}, la componente paralela a la velocidad instantánea, actúa cambiando la *magnitud* de la velocidad de la partícula (su rapidez) y es igual a la razón de cambio de la rapidez. Derivando la ecuación (9.13), obtenemos

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \qquad \text{(aceleración tangencial de un punto en un cuerpo en rotación)} \qquad (9.14)$$

Esta componente de la aceleración de una partícula siempre es tangente a la trayectoria circular de la partícula.

La cantidad $\alpha = d\omega/dt$ de la ecuación (9.14) es la razón de cambio de la *rapidez* angular. No es idéntica a $\alpha_z = d\omega_z/dt$, que es la razón de cambio de la *velocidad* angular. Por ejemplo, consideremos un cuerpo que gira de modo que su vector de velocidad angular apunta en la dirección $-z$ (figura 9.5b). Si la rapidez angular del cuerpo está aumentando a razón de 10 rad/s por segundo, entonces $\alpha = 10 \text{ rad/s}^2$. Sin embargo, ω_z es negativa y se está volviendo más negativa a medida que la rotación se acelera, así que $\alpha_z = -10 \text{ rad/s}^2$. La regla para la rotación en torno a un eje fijo es que α es igual a α_z si ω_z es positiva e igual a $-\alpha_z$ si ω_z es negativa.

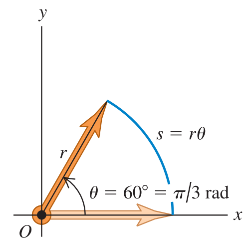
La componente de la aceleración de la partícula que está dirigida hacia el eje de rotación, la **componente centrípeta de aceleración** a_{rad}, está asociada con el cambio de *dirección* de la velocidad de la partícula. En la sección 3.4 dedujimos la relación $a_{rad} = v^2/r$. Podemos expresar esto en términos de ω usando la ecuación (9.13):

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(aceleración centrípeta de un punto de un cuerpo en rotación)} \quad (9.15)$$

Esto se cumple en todo instante *aun si ω y v no son constantes*. La componente centrípeta siempre apunta hacia el eje de rotación.

La suma vectorial de las componentes centrípeta y tangencial de la aceleración de una partícula en un cuerpo en rotación es la aceleración lineal $\vec{a}$ (figura 9.10).

9.11 Al relacionar cantidades lineales y angulares, utilice siempre radianes.



CUIDADO **Utilice ángulos en radianes en todas las ecuaciones** Es importante recordar que la ecuación (9.1), $s = r\theta$, es válida *sólo* si θ se mide en radianes. Lo mismo sucede con todas las ecuaciones derivadas de ella, incluidas las ecuaciones (9.13), (9.14) y (9.15). Al usar estas ecuaciones, *debemos* expresar los ángulos en radianes, no revoluciones ni grados (figura 9.11).

Las ecuaciones (9.1), (9.13) y (9.14) también son válidas para cualquier partícula que tenga la misma velocidad tangencial que un punto de un cuerpo rígido en rotación. Por ejemplo, si una cuerda enrollada en un cilindro se desenrolla sin estirarse ni deslizarse, su rapidez y aceleración en cualquier instante son iguales a la rapidez y aceleración tangencial del punto en el cual es tangente al cilindro. El mismo principio se aplica a las cadenas y ruedas dentadas de una bicicleta, a correas y poleas que giran sin deslizarse, etcétera. Más adelante en este capítulo y en el capítulo 10, tendremos varias oportunidades de usar estas relaciones. Cabe señalar que la ecuación (9.15) para la componente centrípeta a_{rad} es aplicable a la cuerda o cadena *sólo* en los puntos de contacto con el cilindro o la rueda. Los demás puntos no tienen la misma aceleración hacia el centro del círculo que tienen los puntos del cilindro o la rueda.

Ejemplo 9.4 Lanzamiento del disco

Un lanzador de disco gira el disco en un círculo con radio de 80.0 cm. En cierto instante, el lanzador gira con rapidez angular de 10.0 rad/s y la rapidez angular está aumentando a 50 rad/s². Calcule las componentes de aceleración tangencial y centrípeta del disco en ese instante, así como la magnitud de esa aceleración.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Modelamos el disco como una partícula que sigue una trayectoria circular (figura 9.12a), así que podemos usar las ideas que desarrollamos en esta sección.

PLANTEAR: Nos dan el radio $r = 0.800$ m, la rapidez angular $\omega = 10.0$ rad/s y la razón de cambio de la rapidez angular $\alpha = 50.0 \text{ rad/s}^2$ (figura 9.12b). Las primeras dos incógnitas son las componentes de aceleración a_{tan} y a_{rad}, que obtendremos con las ecuaciones (9.14) y (9.15), respectivamente. Una vez que tengamos esas componentes del vector de aceleración, obtendremos la magnitud de a (la tercera incógnita) aplicando el teorema de Pitágoras.

EJECUTAR: De las ecuaciones (9.14) y (9.15):

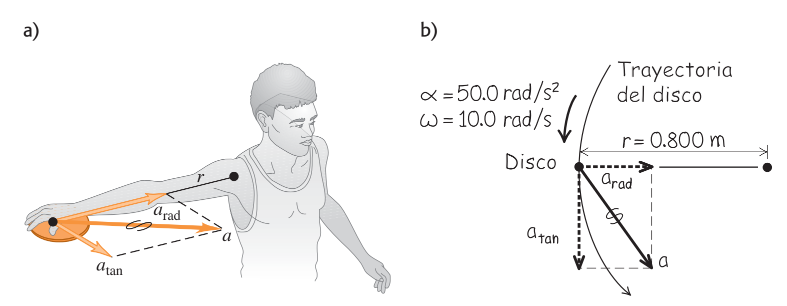
$$a_{tan} = r\alpha = (0.800 \text{ m})(50.0 \text{ rad/s}^2) = 40.0 \text{ m/s}^2$$

$$a_{rad} = \omega^2 r = (10.0 \text{ rad/s})^2(0.800 \text{ m}) = 80.0 \text{ m/s}^2$$

La magnitud del vector de aceleración es

$$a = \sqrt{a_{tan}{}^2 + a_{rad}{}^2} = 89.4 \text{ m/s}^2$$

9.12 a) Lanzamiento de disco con giro circular. b) Nuestro diagrama muestra las componentes de la aceleración para el disco.



EVALUAR: Observe que omitimos la unidad "radián" de nuestros resultados para a_{tan}, a_{rad} y a. Podemos hacerlo porque el "radián" es una cantidad adimensional.

La magnitud a es unas nueve veces g, la aceleración debida a la gravedad. ¿Puede usted demostrar que, si la rapidez angular se duplica a 20.0 rad/s pero α no cambia, la magnitud de la aceleración, a, aumenta a 322 m/s² (casi 33g)?

Ejemplo 9.5 Diseño de una hélice

Imagine que le piden diseñar una hélice de avión que gire a 2400 rpm. La rapidez de avance del avión en el aire debe ser de 75.0 m/s (270 km/h o unas 168 mi/h), y la rapidez de las puntas de las aspas de la hélice en el aire no debe exceder de 270 m/s (figura 9.13a). (Esto es cerca de 0.80 veces la rapidez del sonido en aire. Si tales puntas se movieran con una rapidez cercana a la del sonido, producirían un ruido enorme.) *a*) ¿Qué radio máximo puede tener la hélice? *b*) Con este radio, ¿qué aceleración tiene la punta de la hélice?

SOLUCIÓN

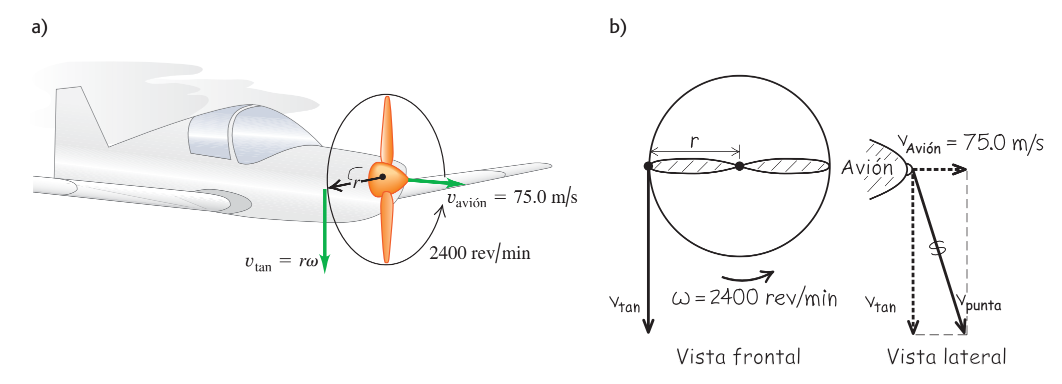
IDENTIFICAR: El objeto de interés en este ejemplo es una partícula en la punta de la hélice; las incógnitas son la distancia entre esa partícula y el eje, y su aceleración. Observe que la rapidez de esta partícula con respecto al aire (la cual no puede exceder de 270 m/s) se debe *tanto* a la rotación de la hélice *como* al movimiento hacia adelante del avión.

PLANTEAR: Como indica la figura 9.13b, la velocidad $\vec{v}_{punta}$ de una partícula en la punta de la hélice es la suma vectorial de su velocidad tangencial debida a la rotación de la hélice (magnitud v_{tan}, dada por la ecuación (9.13)) y la velocidad hacia adelante del avión (magnitud $v_{avión} = 75.0$ m/s). El plano de rotación de la hélice es perpendicular a la dirección del vuelo, así que los dos vectores mencionados son perpendiculares y podemos usar el teorema de Pitágoras para relacionar v_{tan} y $v_{avión}$ con v_{punta}. Entonces, igualaremos v_{punta} a 270 m/s y despejaremos el radio r. Observe que la rapidez angular de la hélice es constante, de manera que la aceleración de la punta de la hélice sólo tiene una componente radial, la cual obtendremos con la ecuación (9.15).

EJECUTAR: Primero convertimos ω a rad/s (véase la figura 9.11):

$$\omega = 2400 \text{ rpm} = \left(2400 \frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right)$$
$$= 251 \text{ rad/s}$$

9.13 a) Avión impulsado por hélice en el aire. b) Nuestro esquema presenta las componentes de la velocidad para la punta de la hélice.



continúa

a) Según la figura 9.13b y la ecuación (9.13), la magnitud de la velocidad v_{total} está dada por

$$v_{punta}{}^2 = v_{avión}{}^2 + v_{tan}{}^2 = v_{avión}{}^2 + r^2\omega^2 \quad \text{así que}$$

$$r^2 = \frac{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}{\omega^2} \quad \text{y} \quad r = \frac{\sqrt{v_{punta}{}^2 - v_{avión}{}^2}}{\omega}$$

Si $v_{punta} = 270$ m/s, el radio de la hélice es

$$r = \frac{\sqrt{(270\text{ m/s})^2 - (75.0\text{ m/s})^2}}{251\text{ rad/s}} = 1.03\text{ m}$$

b) La aceleración centrípeta es

$$a_{rad} = \omega^2 r$$
$$= (251\text{ rad/s})^2(1.03\text{ m}) = 6.5 \times 10^4\text{ m/s}^2$$

La aceleración *tangencial* es cero porque la rapidez angular es constante.

EVALUAR: De $\sum\vec{F} = m\vec{a}$, ¡la hélice debe ejercer una fuerza de 6.5×10^4 N sobre cada kilogramo de material en la punta! Por ello, las hélices se fabrican con materiales resistentes (por lo general, una aleación de aluminio).

Ejemplo conceptual 9.6 Engranes de bicicleta

¿Qué relación hay entre las rapideces angulares de las dos ruedas dentadas de bicicleta de la figura 9.14 y el número de dientes en cada una?

SOLUCIÓN

La cadena no se desliza ni se estira, así que se mueve con la misma rapidez tangencial v en ambas ruedas dentadas. Por la ecuación (9.13),

$$v = r_{frontal}\omega_{frontal} = r_{trasera}\omega_{trasera} \quad \text{así que} \quad \frac{\omega_{trasera}}{\omega_{frontal}} = \frac{r_{frontal}}{r_{trasera}}$$

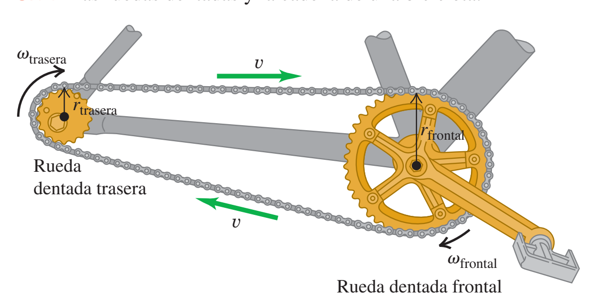
La rapidez angular es inversamente proporcional al radio. Esto se cumple también para poleas conectadas mediante una correa, siempre que ésta no se deslice. En el caso de las ruedas dentadas, los dientes deben estar equidistantes en sus circunferencias para que la cadena embone correctamente. Sean $N_{frontal}$ y $N_{trasera}$ los números de dientes; la condición de que el espaciado de los dientes sea igual en ambas ruedas es

$$\frac{2\pi r_{frontal}}{N_{frontal}} = \frac{2\pi r_{trasera}}{N_{trasera}} \quad \text{así que} \quad \frac{r_{frontal}}{r_{trasera}} = \frac{N_{frontal}}{N_{trasera}}$$

Combinando esto con la otra ecuación, tenemos

$$\frac{\omega_{trasera}}{\omega_{frontal}} = \frac{N_{frontal}}{N_{trasera}}$$

9.14 Las ruedas dentadas y la cadena de una bicicleta.



La rapidez angular de cada rueda dentada es inversamente proporcional al número de dientes. En una bicicleta de varias velocidades, obtenemos la máxima rapidez angular $\omega_{trasera}$ de la rueda trasera para un pedaleo dado $\omega_{frontal}$, cuando el cociente $N_{frontal}/N_{trasera}$ es máximo; esto implica usar la rueda dentada delantera de mayor radio ($N_{frontal}$ máximo) y la rueda dentada trasera de menor radio ($N_{trasera}$ mínimo).

Evalúe su comprensión de la sección 9.3 En los CD y los DVD (véase la figura 9.8), la información se almacena en un patrón codificado de agujeros diminutos, los cuales están dispuestos en una pista que forma una espiral del centro al borde del disco. Cuando el disco gira dentro de un reproductor, la pista se escanea con rapidez *lineal* constante. ¿Cómo debe cambiar la rapidez de rotación del disco mientras la cabeza lectora del reproductor sigue la pista? i) La rapidez de rotación debe aumentar. ii) La rapidez de rotación debe disminuir. iii) La rapidez de rotación debe permanecer igual.

MP

9.4 Energía en el movimiento rotacional

ActivPhysics ONLINE
7.7 Inercia rotacional

Un cuerpo rígido en rotación es una masa en movimiento, así que tiene energía cinética que podemos expresar en términos de la rapidez angular del cuerpo y una nueva cantidad llamada *momento de inercia*, que depende de la masa del cuerpo y de la forma en que se distribuye tal masa.

Para deducir esta relación, consideramos que el cuerpo está formado por un gran número de partículas, con masas m_1, m_2, ..., a distancias r_1, r_2, ... del eje de rotación. Rotulamos las partículas con el subíndice i: la masa de la i-ésima partícula es m_i y su distancia con respecto al eje de rotación es r_i. Las partículas no tienen que estar todas

en el mismo plano, así que especificamos que r_i es la distancia *perpendicular* de la partícula *i*-ésima al eje.

Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo, la rapidez v_i de la *i*-ésima partícula está dada por la ecuación (9.13), $v_i = r_i\omega$, donde ω es la rapidez angular del cuerpo. Diferentes partículas tienen distintos valores de r, pero ω es igual para todas (si no, el cuerpo no sería rígido). La energía cinética de la *i*-ésima partícula es

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

La energía cinética *total* del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$K = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \omega^2 + \cdots = \sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2 \omega^2$$

Sacando el factor común $\omega^2/2$ de esta expresión:

$$K = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

La cantidad entre paréntesis, que se obtiene multiplicando la masa de cada partícula por el cuadrado de su distancia al eje de rotación y sumando los productos, se denota con I y es el **momento de inercia** del cuerpo para este eje de rotación:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{(definición de momento de inercia)} \tag{9.16}$$

La palabra "momento" implica que I depende de la distribución espacial de la masa del cuerpo; nada tiene que ver con el tiempo. Para un cuerpo con un eje de rotación dado y una masa total dada, cuanto mayor sea la distancia del eje a las partículas que constituyen el cuerpo, mayor será el momento de inercia. En un cuerpo rígido, las distancias r_i son constantes, en tanto que I es independiente de cómo gira el cuerpo en torno al eje dado. La unidad del momento de inercia en el SI es el kilogramo-metro cuadrado (kg · m^2).

En términos del momento de inercia I, la **energía cinética rotacional** K de un cuerpo rígido es

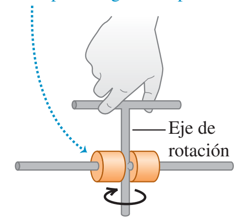
$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{(energía cinética rotacional de un cuerpo rígido)} \tag{9.17}$$

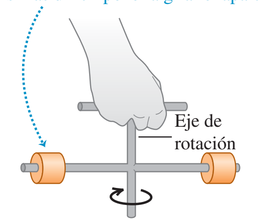
La energía cinética dada por la ecuación (9.17) *no* es una nueva forma de energía; es simplemente la suma de las energías cinéticas de las partículas que constituyen el cuerpo rígido en rotación. Al usar la ecuación (9.17), ω *debe* medirse en radianes por segundo, no revoluciones ni grados por segundo, con la finalidad de obtener K en joules; la razón es que usamos $v_i = r_i\omega$ en la deducción.

La ecuación (9.17) ofrece una interpretación física sencilla del momento de inercia: *cuanto mayor sea el momento de inercia, mayor será la energía cinética de un cuerpo rígido que gira con una rapidez angular* ω. En el capítulo 6 vimos que la energía cinética de un cuerpo es igual al trabajo efectuado para acelerar ese cuerpo desde el reposo. De esta manera, cuanto mayor sea el momento de inercia de un cuerpo, más difícil será ponerlo a girar si está en reposo, y más difícil será detener su rotación si ya está girando (figura 9.15). Por esta razón, I también se denomina *inercia rotacional*.

El siguiente ejemplo muestra cómo el *cambio* del eje de rotación afecta el valor de I.

9.15 Aparato que gira libremente en torno a un eje vertical. El momento de inercia se puede variar fijando los dos cilindros de igual masa en diferentes posiciones en la varilla horizontal.





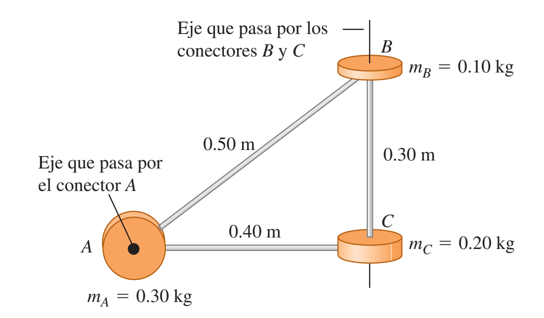
Ejemplo 9.7 Momentos de inercia para diferentes ejes de rotación

Un ingeniero está diseñando una pieza mecánica formada por tres conectores circulares gruesos unidos por puntales ligeros moldeados (figura 9.16). *a*) ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro del disco *A* y es perpendicular al plano del diagrama? *b*) ¿Qué momento de inercia tiene alrededor de un eje que pasa por el centro de los discos *B* y *C*? *c*) Si el cuerpo gira sobre el eje que pasa por *A* y es perpendicular al plano del diagrama, con rapidez angular $\omega = 4.0$ rad/s, ¿qué energía cinética tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideraremos los conectores circulares como partículas masivas; y los puntales ligeros, como varillas sin masa. Así, podremos usar las ideas de esta sección para calcular el momento de inercia de este conjunto de tres partículas.

9.16 Pieza mecánica de forma inusual.



PLANTEAR: En los incisos *a*) y *b*), usaremos la ecuación (9.16) para obtener el momento de inercia con cada uno de los dos ejes. Dado el momento de inercia para el eje *A*, usaremos la ecuación (9.17) en el inciso *c*) para calcular la energía cinética de rotación.

EJECUTAR: *a*) La partícula en el punto *A* está *sobre* el eje; su distancia *r* con respecto al eje es cero, así que no contribuye al momento de inercia. La ecuación (9.16) da

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.10\ \text{kg})(0.50\ \text{m})^2 + (0.20\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2 = 0.057\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Las partículas en *B* y C están *sobre* el eje, así que para ellas $r = 0$, y ninguna contribuye al momento de inercia. Sólo *A* contribuye, y tenemos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.30\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2 = 0.048\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

c) Por la ecuación (9.17),

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(0.057\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(4.0\ \text{rad/s})^2 = 0.46\ \text{J}$$

EVALUAR: Nuestros resultados indican que el momento de inercia para el eje que pasa por *A* es mayor que para el eje que pasa por *B* y *C*. Por lo tanto, de los dos ejes, es más fácil hacer girar la pieza sobre el eje *B* y *C*.

CUIDADO El momento de inercia depende de la elección del eje Los resultados de los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 9.7 muestran que el momento de inercia de un cuerpo depende de la ubicación y orientación del eje. No basta con decir “el momento de inercia de este cuerpo es de 0.048 kg · m^2”. Debemos ser específicos y decir “el momento de inercia de este cuerpo *alrededor del eje BC* es de 0.048 kg · m^2”.

En el ejemplo 9.7, representamos el cuerpo como varias masas puntuales, y evaluamos la sumatoria directamente de la ecuación (9.16). Si el cuerpo es una distribución *continua* de materia, como un cilindro sólido o una placa, la sumatoria se convertirá en una integral y necesitaremos usar cálculo para determinar el momento de inercia. Daremos varios ejemplos de estos cálculos en la sección 9.6; mientras tanto, en la tabla 9.2 se dan los momentos de inercia de varias formas comunes, en términos de las masas y dimensiones. Todos los cuerpos mostrados en la tabla 9.2 son *uniformes*; es decir, la densidad tiene el mismo valor en todos los puntos dentro de las partes sólidas del cuerpo.

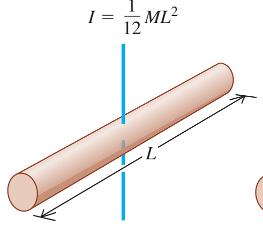
CUIDADO Cálculo del momento de inercia Es posible que el lector se sienta tentado a calcular el momento de inercia de un cuerpo suponiendo que toda la masa está concentrada en el centro de masa, multiplicando después la masa total por el cuadrado de la distancia del centro de masa al eje. Resista la tentación, ¡sería un error hacerlo! Por ejemplo, si una varilla delgada uniforme de longitud *L* y masa *M* pivotea sobre un eje que pasa por un extremo, perpendicular a la varilla, el momento de inercia es $I = ML^2/3$ (caso (*b*) en la tabla 9.2). Si tomáramos la masa como si estuviera concentrada en el centro, a una distancia $L/2$ del eje, obtendríamos el resultado *incorrecto* $I = M(L/2)^2 = ML^2/4$.

Ahora que sabemos calcular la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación, podemos aplicar los principios de energía del capítulo 7 al movimiento rotacional. Veamos la estrategia y algunos ejemplos.

Tabla 9.2 Momentos de inercia de diversos cuerpos

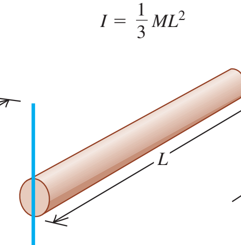
a) Varilla delgada, eje por el centro

$I = \frac{1}{12}ML^2$



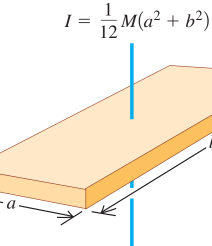
b) Varilla delgada, eje por un extremo

$I = \frac{1}{3}ML^2$



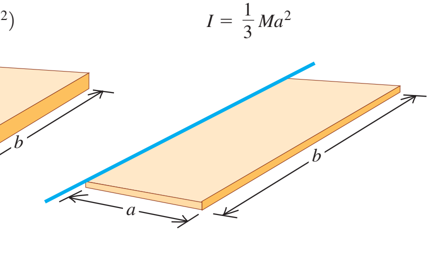
c) Placa rectangular, eje por el centro

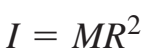
$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



d) Placa rectangular delgada, eje en un borde

$I = \frac{1}{3}Ma^2$



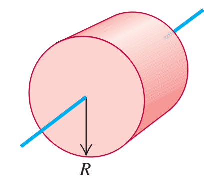


e) Cilindro hueco

$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

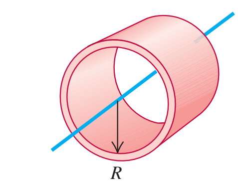
f) Cilindro sólido

$I = \frac{1}{2}MR^2$



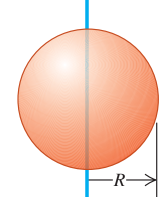
g) Cilindro hueco de pared delgada

$I = MR^2$



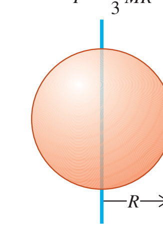
h) Esfera sólida

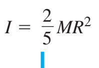
$I = \frac{2}{5}MR^2$

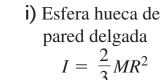


i) Esfera hueca de pared delgada

$I = \frac{2}{3}MR^2$







Estrategia para resolver problemas 9.1 Energía rotacional



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Podemos usar relaciones del trabajo, energía y la conservación de la energía, para obtener relaciones entre la posición y el movimiento de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo. Como vimos en el capítulo 7, el método de energía generalmente no resulta útil para resolver problemas en los que interviene el tiempo. En el capítulo 10 veremos cómo abordar problemas de rotación de ese tipo.

PLANTEAR *el problema* siguiendo los mismos pasos de la Estrategia para resolver problemas de la sección 7.1, con la adición siguiente:

5. Muchos problemas implican una cuerda o un cable enrollado en un cuerpo rígido giratorio que funciona como polea. En estos casos, recuerde que el punto de la polea que toca la cuerda tiene la misma rapidez lineal que la cuerda, siempre que ésta no resbale sobre la polea. Así, podemos aprovechar las ecuaciones (9.13) y (9.14), que relacionan la rapidez lineal y la aceleración tangencial de un punto de un cuerpo rígido con la velocidad y la aceleración angulares del cuerpo. Los ejemplos 9.8 y 9.9 ilustran esto.

EJECUTAR *la solución:* Al igual que en el capítulo 7, escribimos expresiones para las energías cinética y potencial iniciales y finales (K_1, K_2, U_1 y U_2) y para el trabajo no conservativo W_{otras} (si lo hay). La novedad es la energía cinética rotacional, que se expresa en términos del momento de inercia I del cuerpo con respecto al eje dado y la rapidez angular ω $\left(K = \frac{1}{2}I\omega^2\right)$, en vez de su masa m y su rapidez v. Sustituya estas expresiones en $K_1 + U_1 + W_{otros} = K_2 + U_2$ (si se efectúa trabajo no conservativo), o bien, en $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$ (si sólo se efectúa trabajo conservativo), y despeje la(s) incógnita(s). Al igual que en el capítulo 7, resulta útil dibujar gráficas de barras que muestren los valores iniciales y finales de K, U y $E = K + U$.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, verifique que su respuesta sea lógica físicamente.

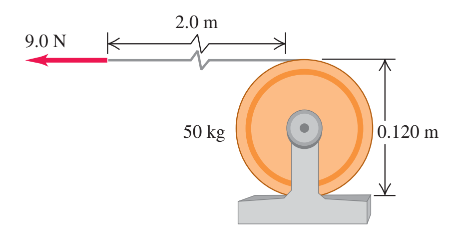
Ejemplo 9.8 Cable que se desenrolla I

Un cable ligero, flexible y que no se estira está enrollado varias vueltas en el tambor de un malacate, un cilindro sólido con masa de 50 kg y 0.120 m de diámetro, que gira sobre un eje fijo horizontal montado en cojinetes sin fricción (figura 9.17). Una fuerza constante de magnitud de 9.0 N tira del extremo libre del cable a lo largo de una distancia de 2.0 m. El cable no resbala y hace girar el cilindro cuando desenrolla. Si el cilindro estaba inicialmente en reposo, calcule su rapidez angular final y la rapidez final del cable.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Resolveremos este problema empleando métodos de energía. El punto 1 es donde el cilindro comienza a moverse y el punto 2 es donde el cable se ha desenrollado 2.0 m. Puesto que el cable es ligero, supondremos que no tiene masa y que sólo el cilindro tiene energía cinética. La posición vertical del cilindro no cambia, así que no hay cambios en la energía potencial gravitacional. Hay fricción entre el cable y el cilindro; esto es lo que hace girar al cilindro cuando se tira del cable. Sin embargo, como el cable no resbala, no hay movimiento del cable relativo al cilindro y no se pierde energía mecánica por la fricción. Dado que el cable no tiene masa, la fuerza que el cable ejerce sobre el borde del cilindro es igual a la fuerza aplicada F.

9.17 Un cable se desenrolla de un cilindro (vista lateral).



PLANTEAR: El cilindro inicialmente está en reposo, así que la energía cinética inicial es $K_1 = 0$. Entre los puntos 1 y 2, la fuerza F efectúa trabajo sobre el cilindro a lo largo de una distancia $s = 2.0$ m. El resultado es que la energía cinética en el punto 2 es $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$. Una de las incógnitas es ω; la otra es la rapidez del cable en el punto 2, que es igual a la rapidez tangencial v del cilindro en ese punto. Obtendremos v a partir de ω con la ecuación (9.13).

EJECUTAR: El trabajo efectuado sobre el cilindro es $W_{otras} = Fs = (9.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 18$ J. Según la tabla 9.2, el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}(50\text{ kg})(0.060\text{ m})^2 = 0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(El radio R es la mitad del diámetro del cilindro.) La relación $K_1 + U_1 + W_{otras} = K_2 + U_2$ da

$$0 + 0 + W_{otras} = \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{otras}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18\text{ J})}{0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2}}$$

$$= 20\text{ rad/s}$$

La rapidez tangencial final del cilindro y, por ende, la rapidez final del cable es

$$v = R\omega = (0.060\text{ m})(20\text{ rad/s}) = 1.2\text{ m/s}$$

EVALUAR: Si no podemos despreciar esa masa, una parte del trabajo efectuado se convertirá en energía cinética del cable. De manera que el cilindro adquiriría menos energía cinética y tendría menor rapidez angular que las calculadas aquí.

Ejemplo 9.9 Cable que se desenrolla II

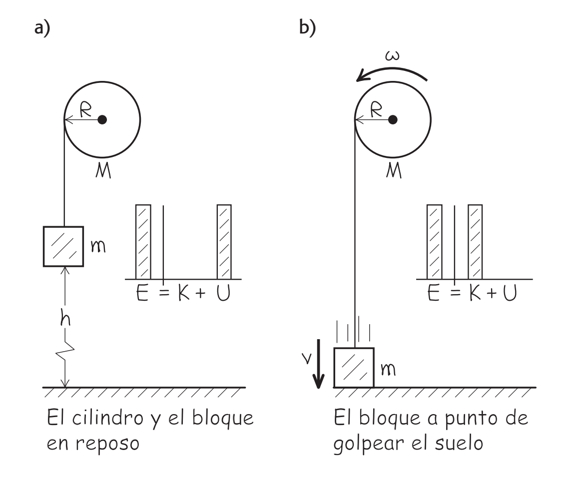
Enrollamos un cable ligero y flexible en un cilindro sólido de masa M y radio R. El cilindro gira con fricción despreciable sobre un eje horizontal estacionario. Atamos el extremo libre del cable a un bloque de masa m y soltamos el objeto sin velocidad inicial a una distancia h sobre el piso. Conforme el bloque cae, el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, haciendo girar al cilindro. Calcule la rapidez del bloque que cae y la rapidez angular del cilindro, justo cuando el bloque golpea el piso.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 9.8, el cable no resbala y la fricción no efectúa trabajo. El cable no efectúa trabajo *neto*; en su extremo superior, la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección; mientras que en su extremo inferior tienen direcciones opuestas. Por lo tanto, el trabajo total efectuado por ambos extremos del cable es cero. El único trabajo efectuado es el de la gravedad, así que se conserva la energía mecánica.

PLANTEAR: La figura 9.18a muestra la situación justo antes de que el bloque empiece a caer. En este punto, el sistema no tiene energía

9.18 Nuestro esquema para este problema.



cinética, así que $K_1 = 0$. El piso es nuestro nivel de energía potencial cero; así, $U_1 = mgh$ y $U_2 = 0$. (Podemos ignorar la energía potencial gravitacional del cilindro que gira, ya que su altura no cambia.) Justo antes de que el bloque golpee el piso (figura 9.18b), tanto el bloque como el cilindro tienen energía cinética. En ese momento, la energía cinética total K_2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

El momento de inercia del cilindro (tabla 9.2) es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Además, v y ω están relacionadas por $v = R\omega$, ya que la rapidez del bloque que cae debe ser igual a la rapidez tangencial en la superficie del cilindro. Usaremos estas relaciones para despejar las incógnitas v y ω que se muestran en la figura 9.18b.

EJECUTAR: Utilizando nuestras expresiones para K_1, U_1, K_2 y U_2 y la relación $\omega = v/R$ en la ecuación de conservación de la energía, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, despejamos v:

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

La rapidez angular final del cilindro ω se obtiene de $\omega = v/R$.

EVALUAR: Veamos algunos casos particulares. Si M es mucho mayor que m, v es muy pequeña, como esperaríamos. Si M es mucho menor que m, v es casi igual a $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez de un cuerpo en caída libre desde una altura h. ¿Le sorprende a usted que v no dependa del radio del cilindro?

Energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido

En el ejemplo 9.9, el cable tenía masa despreciable y podíamos ignorar su energía cinética y la energía potencial gravitacional asociada a él. Si la masa *no* es despreciable, necesitamos saber cómo calcular la energía *potencial gravitacional* asociada a tal cuerpo extendido. Si la aceleración de la gravedad g es la misma en todos los puntos del cuerpo, la energía potencial gravitacional sería la misma si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa del cuerpo. Tomemos el eje y hacia arriba. Para un cuerpo de masa total M, la energía potencial gravitacional U es simplemente

$$U = Mgy_{cm} \quad \text{(energía potencial gravitacional de un cuerpo extendido)} \quad (9.18)$$

donde y_{cm} es la coordenada y del centro de masa. Esta expresión es válida para cualquier cuerpo extendido, sea rígido o no (figura 9.19).

Para demostrar la ecuación (9.18), representamos otra vez el cuerpo como un conjunto de elementos de masa m_i. La energía potencial del elemento m_i es m_igy_i, y la energía potencial total es

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2 + \cdots = (m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots)g$$

Sin embargo, por la ecuación (8.28), que define las coordenadas del centro de masa,

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots)y_{cm} = My_{cm}$$

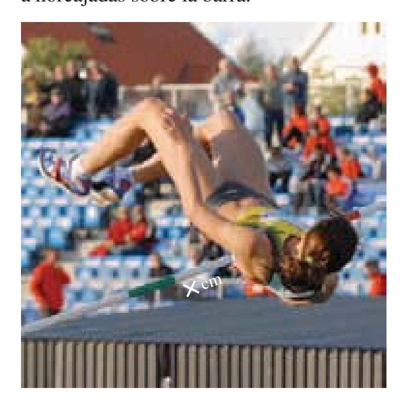
donde $M = m_1 + m_2 + \ldots$ es la masa total. Al combinar esto con la expresión anterior para U, tenemos $U = Mgy_{cm}$, que coincide con la ecuación (9.18).

Aplicaremos la ecuación (9.18) en los problemas. Usaremos esta relación en el capítulo 10 al analizar problemas de cuerpo rígido con eje de rotación móvil.



7.12 Mujeres y elevador de volante: enfoque de energía
7.13 Rotojuego: enfoque de energía

9.19 En la técnica de salto de altura ideada por Richard Fosbury, el atleta arquea el cuerpo al pasar sobre la barra. Como resultado, su centro de masa realmente pasa *bajo* la barra. Esta técnica requiere de un menor aumento en la energía potencial gravitacional [ecuación (9.18)], que el método antiguo de saltar a horcajadas sobre la barra.

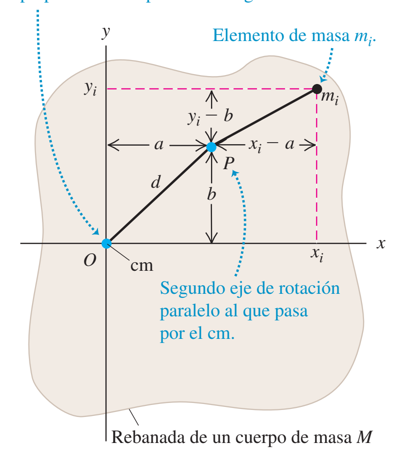


Evalúe su comprensión de la sección 9.4 Suponga que el cilindro y el bloque del ejemplo 9.9 tienen la misma masa, de modo que $m = M$. Justo antes de que el objeto golpee el piso, ¿qué enunciado es correcto acerca de la relación entre la energía cinética del bloque que cae y la energía cinética rotacional del cilindro? i) El bloque tiene más energía cinética que el cilindro. ii) El bloque tiene menos energía cinética que el cilindro. iii) El bloque y el cilindro tienen cantidades iguales de energía cinética.

MP

9.5 Teorema de los ejes paralelos

En la sección 9.4 apuntamos que un cuerpo no tiene un solo momento de inercia. De hecho, tiene un número infinito, porque el número de ejes sobre los que podría girar es infinito. No obstante, hay una relación simple entre el momento de inercia I_{cm} de un cuerpo de masa M alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y



9.20 El elemento de masa m_i tiene coordenadas (x_i, y_i) con respecto a un eje de rotación que pasa por el centro de masa (cm), y coordenadas $(x_i - a, y_i - b)$ con respecto al eje paralelo que pasa por el punto P.

el momento de inercia I_P alrededor de cualquier otro eje paralelo al original pero desplazado una distancia d. Esta relación, llamada **teorema de los ejes paralelos**, dice que

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \qquad \text{(teorema de los ejes paralelos)} \qquad (9.19)$$

Para demostrarlo, consideramos dos ejes paralelos al eje z; uno pasa por el centro de masa; y el otro, por un punto P (figura 9.20). Primero tomamos una rebanada muy delgada del cuerpo, paralela al plano xy y perpendicular al eje z. Tomamos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de masa del cuerpo; así, las coordenadas del centro de masa son $x_{cm} = y_{cm} = z_{cm} = 0$. El eje que pasa por el centro de masa atraviesa esta rebanada delgada en el punto O, y el eje paralelo la atraviesa en el punto P, cuyas coordenadas x y y son (a, b). La distancia entre este eje y el que pasa por el centro de masa es d, donde $d^2 = a^2 + b^2$.

Podemos escribir una expresión para el momento de inercia I_P alrededor del eje que pasa por P. Sea m_i un elemento de masa de nuestra rebanada, con coordenadas (x_i, y_i, z_i). El momento de inercia I_{cm} de la rebanada alrededor del eje que pasa por el centro de masa (en O) es

$$I_{cm} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

El momento de inercia de la rebanada alrededor del eje que pasa por P es

$$I_P = \sum_i m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

En estas expresiones no intervienen las coordenadas z_i, medidas perpendicularmente a las rebanadas, así que podemos extender las sumatorias para incluir *todas* las partículas de *todas* las rebanadas. Así, I_P será el momento de inercia de *todo* el cuerpo para un eje que pasa por P. Expandiendo los cuadrados y reagrupando:

$$I_P = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2)\sum_i m_i$$

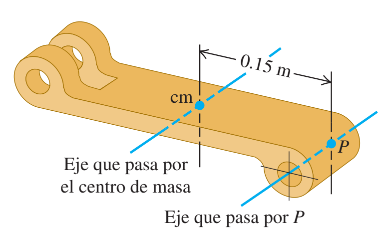
La primera sumatoria es I_{cm}. Por la definición de centro de masa [ecuación (8.28)], la segunda y la tercera sumatorias son proporcionales a x_{cm} y y_{cm}, que son cero porque tomamos el origen en el centro de masa. El último término es d^2 multiplicada por la masa total, es decir, Md^2. Queda demostrado que $I_P = I_{cm} + Md^2$.

Como muestra la ecuación (9.19), un cuerpo rígido tiene menor momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa que alrededor de cualquier otro eje paralelo. Por ello, es más fácil poner a girar un cuerpo si el eje de rotación pasa por el centro de masa. Esto sugiere que, de algún modo, es más natural que un cuerpo en rotación gire sobre un eje que pasa por su centro de masa; haremos más cuantitativa esta idea en el capítulo 10.

Ejemplo 9.10 Uso del teorema de ejes paralelos

Una pieza de un acoplamiento mecánico (figura 9.21) tiene una masa de 3.6 kg. Medimos su momento de inercia alrededor de un eje que pasa a 0.15 m de su centro de masa y obtenemos $I_P = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Calcule el momento de inercia I_{cm} alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

9.21 Cálculo de I_{cm} a partir de una medición de I_P.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El teorema de ejes paralelos nos permite relacionar los momentos de inercia I_{cm} e I_P a través de los dos ejes paralelos.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (9.19) para determinar la incógnita: I_{cm}.

EJECUTAR: Reacomodamos la ecuación y sustituimos los valores:

$$I_{cm} = I_P - Md^2 = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - (3.6\ \text{kg})(0.15\ \text{m})^2$$
$$= 0.051\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

EVALUAR: Nuestro resultado indica que I_{cm} es menor que I_P, como debe ser: ya vimos que el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es menor que para cualquier otro eje paralelo.

Evalúe su comprensión de la sección 9.5 Un taco de billar es una varilla de madera con una composición uniforme y que se estrecha de un diámetro grande en un extremo, hacia uno pequeño en el otro extremo. Utilice el teorema de los ejes paralelos para decidir si un taco tiene un momento de inercia mayor i) para un eje que pasa por el extremo más grueso de la varilla y es perpendicular a la longitud de ésta, o ii) para un eje que pasa por el extremo más delgado de la varilla y es perpendicular a la longitud de ésta.

*9.6 Cálculos de momento de inercia

***NOTA**: esta sección opcional es para estudiantes que están familiarizados con el cálculo integral.*

Si un cuerpo rígido es una distribución continua de masa —como un cilindro o una esfera sólidos— no puede representarse con unas cuantas masas puntuales. En este caso, la sumatoria de masas y distancias que define el momento de inercia [ecuación (9.16)] se vuelve una integral. Imagine que divide el cuerpo en elementos muy pequeños de masa dm, de modo que todos los puntos de un elemento estén prácticamente a la misma distancia perpendicular del eje de rotación. Llamamos r a esta distancia, como antes. El momento de inercia es, entonces,

$$I = \int r^2\, dm \tag{9.20}$$

Para evaluar la integral, debemos representar r y dm en términos de la misma variable de integración. Si tenemos un objeto prácticamente unidimensional, como las varillas delgadas *a*) y *b*) de la tabla 9.2, podemos usar una coordenada x a lo largo y relacionar dm con un incremento dx. Si el objeto es tridimensional, suele ser más fácil expresar dm en términos de un elemento de volumen dV y la *densidad* ρ del cuerpo. La densidad es masa por unidad de volumen, $\rho = dm/dV$, así que podemos escribir la ecuación (9.20) como

$$I = \int r^2 \rho\, dV$$

Esta expresión nos dice que el momento de inercia de un cuerpo depende de la forma en que su densidad varía dentro de su volumen (figura 9.22). Si la densidad del cuerpo es uniforme, podemos sacar ρ de la integral:

$$I = \rho \int r^2\, dV \tag{9.21}$$

Para usar esta ecuación, debemos expresar el elemento de volumen dV en términos de diferenciales de las variables de integración, como $dV = dx\, dy\, dz$. Siempre debemos elegir dV de modo que todos sus puntos estén casi a la misma distancia del eje de rotación. Los límites de la integral están determinados por la forma y las dimensiones del cuerpo. En el caso de cuerpos regulares, la integración suele ser muy sencilla.

9.22 Al medir las pequeñas variaciones en las órbitas de los satélites, los geofísicos pueden calcular el momento de inercia de la Tierra. Esto nos dice cómo está distribuida la masa de nuestro planeta dentro de su interior. Los datos indican que la Tierra es mucho más densa en el centro que en sus capas exteriores.



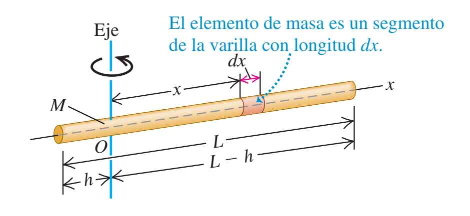
Ejemplo 9.11 Varilla delgada uniforme, eje perpendicular a la longitud

La figura 9.23 muestra una varilla uniforme con masa M y longitud L. Podría ser el bastón (sin las tapas de hule) de una bastonera que marcha al frente a una banda de músicos. Calcule su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por O, a una distancia arbitraria h de un extremo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La varilla es una distribución continua de masa, por lo que debemos emplear la integración para calcular el momento de inercia. Elegimos como elemento de masa una sección corta de la varilla con longitud dx, a una distancia x del punto O.

9.23 Cálculo del momento de inercia de una varilla delgada alrededor de un eje que pasa por O.



PLANTEAR: El cociente de la masa dm del elemento entre la masa total M es igual al cociente de su longitud dx entre la longitud total L:

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \qquad \text{así que} \qquad dm = \frac{M}{L}dx$$

Determinaremos I a partir de la ecuación (9.20), sustituyendo r por x (véase la figura 9.23).

EJECUTAR: La figura 9.23 indica que los límites de integración de x son $-h$ y $(L - h)$. Por lo tanto, obtenemos

$$I = \int x^2\,dm = \frac{M}{L}\int_{-h}^{L-h} x^2\,dx$$

$$= \left[\frac{M}{L}\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3}M\left(L^2 - 3Lh + 3h^2\right)$$

EVALUAR: Con esta expresión general podemos calcular el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por cualquier punto de la varilla. Por ejemplo, si el eje está en el extremo izquierdo, $h = 0$ y

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Si el eje está en el extremo derecho, deberemos obtener el mismo resultado. Haciendo $h = L$, obtenemos

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

Si el eje pasa por el centro, lo usual al girar un bastón, $h = L/2$ y

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

Esto concuerda con las expresiones de la tabla 9.2.

Ejemplo 9.12 Cilindro hueco o sólido que gira sobre el eje de simetría

La figura 9.24 muestra un cilindro hueco uniforme de longitud L, radio interior R_1 y radio exterior R_2. Podría ser un cilindro de una imprenta o una laminadora. Calcule el momento de inercia alrededor del eje de simetría del cilindro.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Otra vez debemos usar la integración para calcular el momento de inercia, pero ahora elegimos como elemento de volumen una capa cilíndrica delgada de radio r, espesor dr y longitud L; todas sus partes están prácticamente a la misma distancia del eje.

PLANTEAR: El volumen del elemento es casi igual al de una lámina plana de espesor dr, longitud L y anchura $2\pi r$ (la circunferencia de la capa). Entonces,

$$dm = \rho\,dV = \rho(2\pi rL\,dr)$$

Usaremos esta expresión en la ecuación (9.20) e integraremos de $r = R_1$ a $r = R_2$.

EJECUTAR: El momento de inercia está dado por

$$I = \int r^2\,dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2\rho(2\pi rL\,dr)$$

$$= 2\pi\rho L\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr$$

$$= \frac{2\pi\rho L}{4}\left(R_2^4 - R_1^4\right)$$

$$= \frac{\pi\rho L}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$$

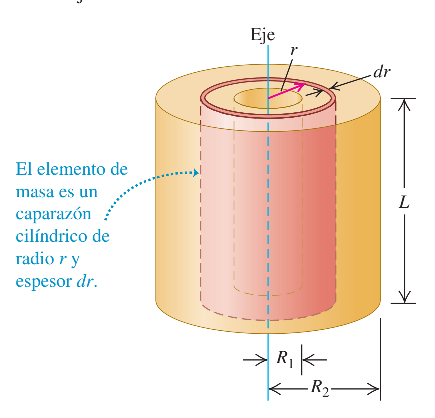
Suele ser más conveniente expresar el momento de inercia en términos de la masa total M del cuerpo, que es su densidad ρ multiplicada por el volumen total V, dado por

$$V = \pi L\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

así que la masa total M es

$$M = \rho V = \pi L\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$

9.24 Cálculo del momento de inercia de un cilindro hueco alrededor de su eje de simetría.



Y el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

EVALUAR: Esto concuerda con el caso *e*) de la tabla 9.2. Si el cilindro es sólido (digamos, una aplanadora), $R_1 = 0$. Llamemos al radio exterior R_2 simplemente R. El momento de inercia de un cilindro sólido de radio R es

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Si la pared del cilindro es muy delgada (como un conducto), R_1 y R_2 son casi iguales; si R representa este radio común,

$$I = MR^2$$

Podríamos haber predicho este resultado; en un cilindro de pared delgada, toda la masa está a la misma distancia $r = R$ del eje, por lo que $I = \int r^2\,dm = R^2\int dm = MR^2$.

Ejemplo 9.13 Esfera uniforme de radio *R*, eje por el centro

Calcule el momento de inercia de una esfera sólida uniforme (como una bola de billar o una bola de acero de un cojinete) alrededor de un eje que pasa por el centro de tal esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para calcular el momento de inercia, dividimos la esfera en discos delgados de espesor dx (figura 9.25), cuyo momento de inercia conocemos por el ejemplo 9.12. Integraremos en ellos para calcular el momento de inercia total. La única cuestión complicada es que el radio y la masa de un disco dependen de su distancia x con respecto al centro de la esfera.

PLANTEAR: El radio r del disco que se muestra en la figura 9.25 es

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Su volumen es

$$dV = \pi r^2\, dx = \pi(R^2 - x^2)\, dx$$

9.25 Cálculo del momento de inercia de una esfera alrededor de un eje que pasa por su centro.

El elemento de masa es un disco de radio r y espesor dx localizado a una distancia x del centro de la esfera.

R
r
x
dx
Eje

y su masa es

$$dm = \rho\, dV = \pi\rho(R^2 - x^2)\, dx$$

EJECUTAR: Del ejemplo 9.12, el momento de inercia de un disco de radio r y masa dm es

$$dI = \frac{1}{2}r^2\, dm = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 \left[\pi\rho(R^2 - x^2)\, dx\right]$$
$$= \frac{\pi\rho}{2}(R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando esta expresión de $x = 0$ a $x = R$, obtenemos el momento de inercia del hemisferio derecho. Por simetría, el I total para la esfera es el doble:

$$I = (2)\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R (R^2 - x^2)^2\, dx$$

Integrando:

$$I = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

La masa M de la esfera de volumen $V = 4\pi R^3/3$ es

$$M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

Comparando las expresiones para I y para M, vemos que

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

EVALUAR: Este resultado concuerda con la expresión de la tabla 9.2, caso *h*). Observe que el momento de inercia de una esfera sólida de masa M y radio R es menor que el de un *cilindro* sólido con los mismos valores de masa y radio, $I = \frac{1}{2}MR^2$. La explicación es que una proporción mayor de la masa de la esfera está cerca del eje.

Evalúe su comprensión de la sección 9.6 Dos cilindros huecos tienen los mismos radios interno y externo, así como la misma masa; sin embargo, tienen longitudes diferentes. Uno está hecho de madera de baja densidad y el otro de plomo de alta densidad. ¿Cuál cilindro tiene el mayor momento de inercia alrededor de su eje de simetría? i) El cilindro de madera; ii) el cilindro de plomo; iii) los dos momentos de inercia son iguales.

CAPÍTULO 9 RESUMEN

Cinemática rotacional: Cuando un cuerpo rígido gira sobre un eje fijo (que por lo general se llama eje z), su posición está descrita por una coordenada angular θ. La velocidad angular ω_z es la derivada con respecto al tiempo de θ. La aceleración angular α_z es la derivada con respecto al tiempo de ω_z o la segunda derivada de θ. (Véanse los ejemplos 9.1 y 9.2.) Si la aceleración angular es constante, entonces θ, ω_z y α_z están relacionadas por ecuaciones sencillas de cinemática análogas a las del movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante. (Véase el ejemplo 9.3.)

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.3)$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9.5)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (9.11)$$

(sólo α_z constante)

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t \quad (9.10)$$

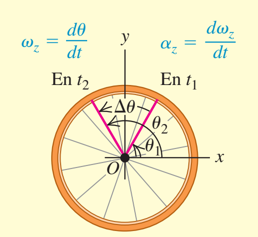
(sólo α_z constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (9.7)$$

(sólo α_z constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (9.12)$$

(sólo α_z constante)

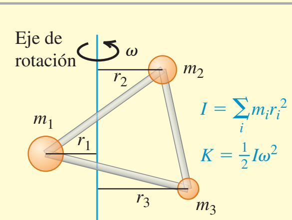


Relación entre cinemática angular y lineal: La rapidez angular ω de un cuerpo rígido es la magnitud de su velocidad angular. La razón de cambio de ω es $\alpha = d\omega/dt$. En el caso de una partícula de un cuerpo que está a una distancia r del eje de rotación, la rapidez v y las componentes de la aceleración $\vec{a}$ están relacionadas con ω y α. (Véanse los ejemplos 9.4 a 9.6.)

$$v = r\omega \quad (9.13)$$

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha \quad (9.14)$$

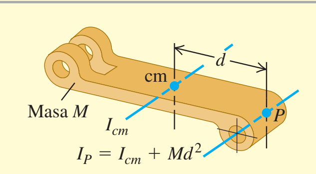
$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad (9.15)$$



Momento de inercia y energía cinética rotacional: El momento de inercia I de un cuerpo alrededor de un eje dado es una medida de su inercia rotacional: cuanto mayor sea el valor de I, más difícil será cambiar el estado de rotación del cuerpo. El momento de inercia se puede expresar como una sumatoria para las partículas m_i que constituyen el cuerpo, cada una de las cuales está a una distancia perpendicular r_i del eje. La energía cinética rotacional de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo depende de la rapidez angular ω y del momento de inercia I para ese eje de rotación. (Véanse los ejemplos 9.7 a 9.9.)

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \quad (9.16)$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (9.17)$$



Cálculo del momento de inercia: El teorema de los ejes paralelos relaciona los momentos de inercia de un cuerpo rígido de masa M alrededor de dos ejes paralelos: un eje que pasa por el centro de masa (momento de inercia I_{cm}) y un eje paralelo que está a una distancia d del primero (momento de inercia I_P). (Véase el ejemplo 9.10.) Si el cuerpo tiene una distribución continua de masa, el momento de inercia se calcula por integración. (Véanse los ejemplos 9.11 a 9.13.)

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad (9.19)$$

Términos clave

cuerpo rígido, *285*
radián, *286*
velocidad angular media, *286*
desplazamiento angular, *286*
velocidad angular instantánea, *287*
aceleración angular media, *289*
aceleración angular instantánea, *289*
rapidez angular, *293*
componente tangencial de la aceleración, *293*
componente centrípeta de la aceleración, *294*
momento de inercia, *297*
energía cinética rotacional, *297*
teorema de los ejes paralelos, *302*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Ambos segmentos del aspa rígida tienen la misma rapidez angular ω. De las ecuaciones (9.13) y (9.15), al duplicar la distancia r para la misma ω, se duplica la rapidez lineal $v = r\omega$ y se duplica la aceleración radial $a_{rad} = \omega^2 r$.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

9.1 Respuestas: a) i) y iii), b) ii) La rotación se está acelerando cuando la aceleración y la velocidad angulares tienen el mismo signo, y se está frenando cuando tienen signos opuestos. Por lo tanto, acelera para $0 < t < 2$ s (ω_z y α_z son positivas) y para $4 \text{ s} < t < 6$ s (ω_z y α_z son negativas); pero se está frenando para $2 \text{ s} < t < 4$ s (ω_z es positiva y α_z es negativa). Observe que el cuerpo gira en una dirección para $t < 4$ s (ω_z es positiva) y en la dirección opuesta para $t > 4$ s (ω_z es negativa).

9.2 Respuestas: a) i), b) ii) Cuando el DVD se detiene, $\omega_z = 0$. De la ecuación (9.7), esto sucede en el *instante* $t = (\omega_z - \omega_{0z})/\alpha_z = -\omega_{0z}/\alpha_z$ (éste es un tiempo positivo porque α_z es negativa). Si duplicamos la velocidad angular inicial ω_{0z} y duplicamos también la aceleración angular α_z, su cociente no cambia y la rotación se detiene en el mismo tiempo. El *ángulo* con el que gira el DVD está dado por la ecuación (9.10): $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t = \frac{1}{2}\omega_{0z}t$ (ya que la velocidad angular final es $\omega_z = 0$). La velocidad angular inicial ω_{0z} se ha duplicado, pero el tiempo t es el mismo, así que el desplazamiento angular $\theta - \theta_0$ (y por ende el número de revoluciones) se ha duplicado. Podemos usar la ecuación (9.12) para obtener la misma conclusión.

9.3 Respuesta: ii) De la ecuación (9.13), $v = r\omega$. Para mantener una rapidez lineal v constante, la rapidez angular ω debe disminuir a medida que la cabeza lectora se mueve hacia afuera (mayor r).

9.4 Respuesta: i) La energía cinética del objeto que cae es $\frac{1}{2}mv^2$, y la del cilindro que gira, $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2$. Por lo tanto, la energía cinética total del sistema es $\frac{3}{4}mv^2$, de la cual dos tercios están en el bloque y un tercio está en el cilindro

9.5 Respuesta: ii) Más de la masa del taco de billar está concentrada en el extremo más grueso, así que el centro de masa está más cercano a dicho extremo. El momento de inercia en un punto P en cualquiera de sus extremos es $I_p = I_{cm} + Md^2$; el extremo más delgado está más alejado del centro de masa, por lo que la distancia d y el momento de inercia I_P son mayores para el extremo más delgado.

9.6 Respuesta: iii) Nuestro resultado del ejemplo 9.12 no depende de la longitud del cilindro L. El momento de inercia depende sólo de la distribución *radial* de la masa, no de su distribución a lo largo del eje.

PROBLEMAS

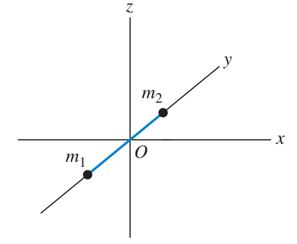
Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P9.1. ¿Cuál de las siguientes fórmulas es válida si la aceleración angular de un objeto *no* es constante? En cada caso, explique su razonamiento. *a)* $v = r\omega$; *b)* $a_{tan} = r\alpha$; *c)* $\omega = \omega_0 + \alpha t$; *d)* $a_{tan} = r\omega^2$; *e)* $K = \frac{1}{2}I\omega^2$.

P9.2. Una molécula diatómica puede modelarse como dos masas puntuales, m_1 y m_2, ligeramente separadas (figura 9.26). Si la molécula está orientada a lo largo del eje y, tiene energía cinética K cuando gira alrededor del eje x. ¿Cuál es su energía cinética (en términos de K) si gira con la misma rapidez angular alrededor del *a)* eje z y *b)* eje y?

Figura **9.26** Pregunta P9.2.



P9.3. ¿Qué diferencia hay entre aceleración tangencial y aceleración radial para un punto de un cuerpo que gira?

P9.4. En la figura 9.14, todos los puntos de la cadena tienen la misma rapidez lineal. ¿La magnitud de la aceleración lineal es también igual para todos esos puntos? ¿Qué relación hay entre las aceleraciones angulares de las dos ruedas dentadas? Explique su respuesta.

P9.5. En la figura 9.14, ¿qué relación hay entre las aceleraciones radiales de los puntos en los dientes de las dos ruedas? Justifique su respuesta.

P9.6. Un volante gira con velocidad angular constante. ¿Un punto en su borde tiene aceleración tangencial? ¿Y aceleración radial? ¿Estas aceleraciones tienen magnitud constante? ¿Y dirección constante? Justifique sus respuestas.

P9.7. ¿Para qué sirve el ciclo de centrifugado de una lavadora? Explique en términos de las componentes de aceleración.

P9.8. Aunque la velocidad y la aceleración angulares pueden tratarse como vectores, no sucede lo mismo con el desplazamiento angular θ, a pesar de tener magnitud y dirección, porque θ no obedece la ley conmutativa de la suma de vectores (ecuación 1.3). Demuestre esto

como sigue: coloque este libro sobre un escritorio con la portada hacia arriba y de modo que pueda leer las palabras. Gire el borde lejano 90° hacia arriba y hacia usted sobre un eje horizontal. Llame a este desplazamiento θ_1. Ahora gire el borde izquierdo 90° hacia usted sobre un eje vertical. Llame a este desplazamiento θ_2. El lomo del libro deberá mirar ahora hacia usted con las palabras orientadas de modo que pueda leerlas. Ahora comience otra vez desde el principio pero realice las rotaciones en orden inverso. ¿El resultado es diferente? Es decir, ¿$\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$? Ahora repita el experimento pero con un ángulo de 1° en vez de 90°. ¿Cree que el desplazamiento infinitesimal $d\vec{\theta}$ obedece la ley conmutativa de la suma y, por lo tanto, puede considerarse un vector? De ser así, ¿qué relación hay entre la dirección de $d\vec{\theta}$ y la dirección de $\vec{\omega}$?

P9.9. ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes posibles? Si es así, mencione un ejemplo; si no, explique por qué no es posible. ¿Puede imaginar un cuerpo que tenga el mismo momento de inercia para todos los ejes que pasan por cierto punto? Si es así, mencione un ejemplo e indique dónde está el punto.

P9.10. Para maximizar el momento de inercia de un volante mientras minimizamos su peso, ¿qué forma y distribución de masa debería tener? Explique su respuesta.

P9.11. ¿Cómo podría usted determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma irregular alrededor de un eje dado?

P9.12. Un cuerpo cilíndrico tiene masa M y radio R. ¿La masa puede estar distribuida dentro del cuerpo de modo tal que su momento de inercia alrededor de su eje de simetría sea mayor que MR^2? Explique su respuesta.

P9.13. Describa cómo podría usar el inciso *b*) de la tabla 9.2 para deducir el resultado del inciso *d*).

P9.14. Un caparazón esférico hueco de radio R que gira alrededor de un eje que pasa por su centro tiene energía cinética rotacional K. Si usted quiere modificar esta esfera de manera que tenga tres veces más energía cinética con la misma rapidez angular manteniendo la masa igual, ¿cuál debería ser el radio en términos de R?

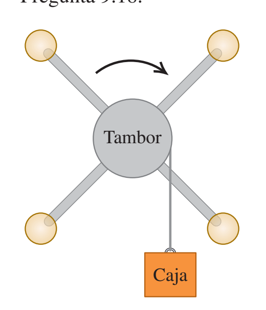
P9.15. Para que sean válidas las ecuaciones dadas en los incisos *a*) y *b*) de la tabla 9.2 para I, ¿la varilla debe tener sección transversal circular? ¿Hay alguna restricción sobre el tamaño de tal sección para que las ecuaciones sean válidas? Explique su respuesta.

P9.16. En el inciso *d*) de la tabla 9.2, el espesor de la placa debe ser mucho menor que a si se quiere que sea válida la expresión para I. En el inciso *c*), en cambio, la expresión para I es válida sin importar qué espesor tenga la placa. Explique su respuesta.

P9.17. Dos esferas idénticas A y B están unidas a un cordón muy delgado, y cada cordón está enrollado alrededor de una polea sin fricción de masa M. La única diferencia es que la polea para la esfera A es un disco sólido, en tanto que la polea para la esfera B es un disco hueco, como el del inciso *e*) de la tabla 9.2. Si ambas esferas se liberan desde el reposo y caen la misma distancia, ¿cuál tendrá mayor energía cinética? ¿O tendrán la misma? Explique su razonamiento.

P9.18. Una polea complicada consiste en cuatro esferas idénticas colocadas en los extremos de rayos que se prolongan desde un tambor giratorio (figura 9.27). Una caja está unida a una cuerda delgada y ligera que se enrolla en el borde del tambor. Cuando se libera del reposo, la caja adquiere una rapidez V después de caer una distancia d. Ahora las cuatro esferas se mueven hacia adentro más cerca del tambor, y de nuevo la caja se suelta del reposo. Después de caer una distancia d, ¿su rapidez será igual a V, mayor que V, o menor que V? Demuestre o explique por qué.

Figura 9.27 Pregunta 9.18.



P9.19. Podemos usar cualquier medida angular (radianes, grados o revoluciones) en algunas de las ecuaciones del capítulo 9; sin embargo, en otras sólo podemos usar radianes. Identifique las ecuaciones en las que es necesario usar radianes y en las que no es necesario. En cada caso, justifique sus respuestas.

P9.20. Al calcular el momento de inercia de un objeto, ¿podemos tratar toda su masa como si estuviera concentrada en el centro de masa del objeto? Justifique su respuesta.

P9.21. Una rueda gira en torno a un eje perpendicular al plano de la rueda y que pasa por el centro de la rueda. La rapidez angular de la rueda está aumentando con razón constante. El punto A está en el borde de la rueda; y el punto B, a la mitad de la distancia entre el borde y el centro. Para cada una de las cantidades siguientes, indique si su magnitud es mayor en el punto A, en el punto B o es igual en ambos puntos: *a*) rapidez angular, *b*) rapidez tangencial, *c*) aceleración angular, *d*) aceleración tangencial y *e*) aceleración radial. Justifique sus respuestas.

Ejercicios

Sección 9.1 Velocidad y aceleración angulares

9.1. *a*) ¿Qué ángulo en radianes es subtendido por un arco de 1.50 m en la circunferencia de un círculo con 2.50 m de radio? ¿Cuánto es esto en grados? *b*) Un arco de 14.0 cm de longitud en la circunferencia de un círculo subtiende un ángulo de 128°. ¿Qué radio tiene el círculo? *c*) El ángulo entre dos radios de un círculo con 1.50 m de radio es 0.700 rad. ¿Qué longitud tiene el arco delimitado en la circunferencia por estos dos radios?

9.2. Una hélice de avión gira a 1900 rpm (rev/min). *a*) Calcule su velocidad angular en rad/s. *b*) ¿Cuántos segundos tarda la hélice en girar 35°?

9.3. La velocidad angular de un volante obedece la ecuación $\omega_z(t) = A + Bt^2$, donde t está en segundos y A y B son constantes cuyos valores numéricos son 2.75 y 1.50, respectivamente. *a*) ¿Cuáles son las unidades de A y B si ω está en rad/s? *b*) ¿Cuál es la aceleración angular del volante en i) $t = 0.00$ y ii) $t = 5.00$ s? *c*) ¿Con qué ángulo gira el volante durante los primeros 2.00 s? (*Sugerencia*: véase la sección 2.6.)

9.4. Una aspa de ventilador gira con velocidad angular dada por $\omega_z(t) = \gamma - \beta t^2$, donde $\gamma = 5.00\ \text{rad/s}$ y $\beta = 0.800\ \text{rad/s}^3$. *a*) Calcule la aceleración angular en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular instantánea α_z en $t = 3.00$ s y la aceleración angular media $\alpha_{\text{med-}z}$ para el intervalo de $t = 0$ a $t = 3.00$ s. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?

9.5. Un niño está empujando un carrusel (tiovivo). El ángulo que describe el carrusel al girar varía con el tiempo según $\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$, donde $\gamma = 0.400\ \text{rad/s}$ y $\beta = 0.0120\ \text{rad/s}^3$. *a*) Calcule la velocidad angular del carrusel en función del tiempo. *b*) ¿Qué valor inicial tiene la velocidad angular? *c*) Calcule el valor instantáneo de la velocidad angular ω_z en $t = 5.00$ s y la velocidad angular media $\omega_{\text{med-}z}$ en el intervalo de $t = 0.00$ a $t = 5.00$ s. Demuestre que $\omega_{\text{med-}z}$ *no* es igual al promedio de las velocidades angulares instantáneas en $t = 0$ y $t = 5.00$ s, y explique por qué.

9.6. En $t = 0$, se invierte la corriente de un motor eléctrico de corriente continua, causando un desplazamiento angular del eje del motor dado por $\theta(t) = (250\ \text{rad/s})t - (20.0\ \text{rad/s}^2)t^2 - (1.50\ \text{rad/s}^3)t^3$. *a*) ¿En qué instante la velocidad angular del eje del motor es cero? *b*) Calcule la aceleración angular en ese instante. *c*) ¿Cuántas revoluciones gira el eje del motor entre el momento en que se invierte la

corriente y el instante en el que la velocidad angular es cero? *d*) ¿Con qué rapidez estaba girando el eje en $t = 0$, cuando se invirtió la corriente? *e*) Calcule la velocidad angular media para el periodo entre $t = 0$ y el instante calculado en el inciso *a*).

9.7. El ángulo θ que describe una unidad de disco al girar está dado por $\theta(t) = a + bt - ct^3$, donde *a*, *b* y *c* son constantes positivas, *t* está en segundos y θ está en radianes. Cuando $t = 0$, $\theta = \pi/4$ rad y la velocidad angular es 2.00 rad/s, y cuando $t = 1.50$ s, la aceleración angular es 1.25 rad/s^2. *a*) Calcule *a*, *b* y *c* con sus unidades. *b*) ¿Cuál es la aceleración angular cuando $\theta = \pi/4$ rad? *c*) ¿Cuáles son θ y la velocidad angular cuando la aceleración angular es 3.50 rad/s^2?

9.8. Una rueda gira en torno a un eje que está en la dirección *z*. La velocidad angular ω_z es de -6.00 rad/s en $t = 0.00$, aumenta linealmente con el tiempo y es de $+8.00$ m/s en $t = 7.00$ s. Se considera positiva la rotación antihoraria. *a*) ¿La aceleración angular durante este intervalo de tiempo es positiva o negativa? *b*) ¿Durante qué intervalo está aumentando la rapidez de la rueda? ¿Y disminuyendo? *c*) Determine el desplazamiento angular de la rueda en $t = 7.00$ s.

Sección 9.2 Rotación con aceleración angular constante

9.9. Una rueda de bicicleta tiene una velocidad angular inicial de 1.50 rad/s. *a*) Si su aceleración angular es constante e igual a 0.300 rad/s^2, ¿qué velocidad angular tiene en $t = 2.50$ s? *b*) ¿Qué ángulo gira la rueda entre $t = 0$ y $t = 2.50$ s?

9.10. Un ventilador eléctrico se apaga, y su velocidad angular disminuye uniformemente de 500 rev/min a 200 rev/min en 4.00 s. *a*) Calcule la aceleración angular en rev/s^2 y el número de revoluciones que el motor giró en el intervalo de 4.00 s. *b*) ¿Cuántos segundos más tardará el motor en parar, si la aceleración angular se mantiene constante en el valor calculado en el inciso *a*)?

9.11. Las aspas de una licuadora giran con aceleración angular constante de 1.50 rad/s^2. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar una velocidad angular de 36.00 rad/s, partiendo del reposo? *b*) ¿Cuántas revoluciones giran las aspas en este tiempo?

9.12. *a*) Deduzca la ecuación (9.12) combinando las ecuaciones (9.7) y (9.11) para eliminar *t*. *b*) La velocidad angular de la hélice de un avión aumenta de 12.0 rad/s a 16.0 rad/s mientras gira 7.00 rad. Calcule su aceleración angular en rad/s^2.

9.13. Una tornamesa gira con aceleración angular constante de 2.25 rad/s^2. Después de 4.00 s gira con un ángulo de 60.00 rad. ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda al empezar el intervalo de 4.00 s?

9.14. Una hoja de sierra circular de 0.200 m de diámetro parte del reposo y acelera con aceleración angular constante hasta una velocidad angular de 140 rad/s en 6.00 s. Calcule la aceleración angular y el ángulo que ha girado la hoja.

9.15. El volante de un motor de alta rapidez giraba a 500 rpm cuando se interrumpió la alimentación eléctrica. El volante tiene una masa de 40.0 kg y un diámetro de 75.0 cm. El motor no recibe electricidad durante 30.0 s y, durante ese lapso, el volante pierde rapidez por la fricción con los cojinetes de su eje, describiendo 200 revoluciones completas. *a*) ¿Con qué rapidez está girando el volante cuando se restablece la alimentación eléctrica? *b*) ¿En cuánto tiempo después de la interrupción del suministro se habría parado el volante, si el suministro no se hubiera restablecido, y cuántas revoluciones habría girado la rueda en ese tiempo?

9.16. Una unidad de disco de computadora se enciende partiendo del reposo y tiene aceleración angular constante. Si a la unidad le lleva 0.750 s realizar su *segunda* revolución completa, *a*) ¿cuánto tiempo le tomó efectuar su primera revolución completa?, y *b*) ¿cuál es su aceleración angular en rad/s^2?

9.17. Un dispositivo de seguridad detiene la hoja de una podadora eléctrica, que tenía una rapidez angular inicial ω_1, en 1.00 revolución. Con la misma aceleración constante, ¿cuántas revoluciones tardaría la hoja en parar, si la rapidez angular inicial ω_3 fuera el triple: $\omega_3 = 3\omega_1$?

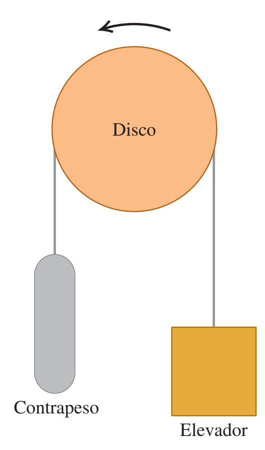
9.18. Un trozo recto de cinta reflejante se extiende del centro de una rueda a su borde. Imagine que oscurece el cuarto y usa una cámara y una lámpara estroboscópica con destellos cada 0.050 s para fotografiar la rueda que gira en sentido antihorario. Se acciona la lámpara de modo que el primer destello ($t = 0$) se da cuando la cinta está horizontal a la derecha con un desplazamiento angular de cero. Para las siguientes situaciones, dibuje la fotografía que obtendría después de cinco destellos (en $t = 0$, 0.050 s, 0.100 s, 0.150 s y 0.200 s) y grafique θ contra *t* y ω contra *t* para el intervalo entre $t = 0$ y $t = 0.200$ s. *a*) La velocidad angular es de 10.0 rev/s (constante). *b*) La rueda parte del reposo con aceleración angular constante de 25.0 rev/s^2. *c*) La rueda gira a 10.0 rev/s en $t = 0$ y cambia su velocidad angular a una razón constante de -50.0 rev/s^2.

9.19. En $t = 0$, la velocidad angular de una rueda de afilar era de 24.0 rad/s, y tuvo una aceleración angular constante de 30.0 rad/s^2, hasta que un interruptor de circuito se abrió en $t = 2.00$ s. A partir de ese momento, la rueda giró 432 rad con aceleración angular constante hasta parar. *a*) ¿Qué ángulo total giró la rueda entre $t = 0$ y el instante en que se detuvo? *b*) ¿En qué tiempo se detuvo? *c*) ¿Qué aceleración tenía al irse frenando?

Sección 9.3 Relación entre cinemática lineal y angular

9.20. En un encantador hotel del siglo XIX, un elevador antiguo está conectado a un contrapeso mediante un cable que pasa por un disco giratorio con 2.50 m de diámetro (figura 9.28). El elevador sube y baja al girar el disco, y el cable no se desliza en el borde del disco, más bien gira con él. *a*) ¿Con cuantas rpm debe girar el disco para subir 25.0 cm/s el elevador? *b*) Para empezar a mover el elevador, éste debe acelerarse a $\frac{1}{8}g$. ¿Cuál debe ser la aceleración angular del disco en rad/s^2? *c*) ¿Con qué ángulo (en radianes y grados) el disco gira cuando éste sube el elevador 3.25 m entre pisos?

Figura 9.28 Ejercicio 9.20.



9.21. Con los datos astronómicos del Apéndice F, junto con el hecho de que la Tierra gira sobre su propio eje una vez al día, calcule *a*) la rapidez angular orbital de la Tierra (en rad/s) debida a su movimiento alrededor del Sol, *b*) su rapidez angular (en rad/s) debida a su giro axial, *c*) la rapidez tangencial de la Tierra alrededor del Sol (suponiendo una órbita circular), *d*) la rapidez tangencial de un punto en el ecuador terrestre debido al giro, y *e*) las componentes de la aceleración radial y tangencial del punto del inciso *d*).

9.22. Disco compacto. Un disco compacto (CD) almacena música en un patrón codificado de hoyos diminutos de 10^{-7} m de profundidad, dispuestos en una pista espiral que va desde el centro hasta el borde del disco. Los radios interior y exterior de la espiral son de 25.0 mm y 58.0 mm, respectivamente. Dentro del reproductor de CD, mientras el disco

gira la pista es barrida con rapidez *lineal* constante de 1.25 m/s. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el CD cuando se barre la parte interior de la pista? ¿Y la parte exterior? *b*) La duración máxima de un CD es de 74.0 min. ¿Qué longitud tendría la pista de tal CD si se estirara en línea recta? *e*) ¿Qué aceleración angular media tiene un CD de máxima duración durante los 74.0 min? Tome la dirección de rotación del disco como positiva.

9.23. Una rueda con diámetro de 40.0 cm parte del reposo y gira con una aceleración angular constante de 3.00 rad/s^2. En el instante en que la rueda ha completado su segunda revolución, calcule la aceleración radial de un punto en el borde de dos maneras: *a*) usando la relación $a_{rad} = \omega^2 r$ y *b*) a partir de la relación $a_{rad} = v^2/r$.

9.24. Ultracentrífuga. Calcule la rapidez angular (en rpm) que debe tener una ultracentrífuga para que la aceleración radial en un punto a 2.50 cm del eje sea de 400,000 *g* (es decir, 400,000 veces la aceleración debida a la gravedad).

9.25. Un volante con radio de 0.300 m parte del reposo y acelera con aceleración angular constante de 0.600 rad/s^2. Calcule la magnitud de las aceleraciones tangencial y radial, así como de la aceleración resultante de un punto en su borde *a*) al principio; *b*) después de girar 60.0°; *c*) después de girar 120.0°.

9.26. Un ventilador eléctrico de 0.750 m de diámetro, instalado en el techo, gira sobre un eje fijo con velocidad angular inicial de 0.250 rev/s. La aceleración angular es constante de 0.900 rev/s^2. *a*) Calcule la velocidad angular del ventilador después de 0.200 s. *b*) ¿Cuántas revoluciones giró una aspa en este tiempo? *c*) ¿Qué rapidez tangencial tiene un punto en la punta del aspa en $t = 0.200$ s? *d*) ¿Qué magnitud tiene la aceleración *resultante* de un punto en la punta del aspa en $t = 0.200$ s?

9.27. Centrífuga. En un anuncio se asegura que una centrífuga sólo ocupa 0.127 m de espacio en una mesa, pero puede producir una aceleración radial de 3000 *g* a 5000 rpm. Calcule el radio que debe tener la centrífuga. ¿Es verosímil la afirmación del anuncio?

9.28. *a*) Deduzca una ecuación para la aceleración radial que incluya v y ω pero no r. *b*) Imagine que está diseñando un carrusel, donde un punto en el borde tendrá una aceleración radial de 0.500 m/s^2 cuando la velocidad tangencial en ese punto sea de 2.00 m/s. ¿Qué velocidad angular se necesita para lograr estos valores?

9.29. Perforación eléctrica. Según el manual del usuario, para hacer un agujero de 12.7 mm de diámetro en madera, plástico o aluminio, se recomienda una rapidez del taladro de 1250 rev/min. Para una broca de 12.7 mm de diámetro que gira a 1250 rev/min (constantes), calcule *a*) la rapidez lineal máxima de cualquier punto de la broca; *b*) la aceleración radial máxima de cualquier punto de la broca.

9.30. En $t = 3.00$ s, un punto en el borde de una rueda con radio de 0.200 m tiene una rapidez tangencial de 50.0 m/s, mientras la rueda se frena con aceleración tangencial de magnitud constante de 10.0 m/s^2. *a*) Calcule la aceleración angular constante de la rueda. *b*) Calcule las velocidades angulares en $t = 3.00$ s y $t = 0$. *c*) ¿Qué ángulo giró la rueda entre $t = 0$ y $t = 3.00$ s? *d*) ¿En qué instante la aceleración radial es igual a *g*?

9.31. Los ciclos de centrifugado de una lavadora tienen dos rapideces angulares, 423 rev/min y 640 rev/min. El diámetro interno del tambor es de 0.470 m. *a*) ¿Qué relación hay entre la fuerza radial máxima sobre la ropa para las dos rapideces angulares? *b*) ¿Y entre las rapideces tangenciales máximas de la ropa? *c*) Calcule la rapidez tangencial máxima de la ropa y la aceleración radial máxima en términos de *g*.

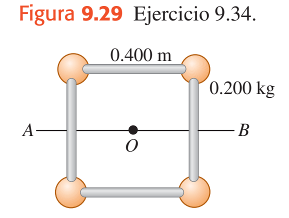
9.32. Imagine que usted debe diseñar un eje cilíndrico giratorio para levantar cubetas de cemento con un peso de 800 N, desde el suelo hasta una azotea a 78.0 m sobre el suelo. Las cubetas se colgarán de un gancho en el extremo libre de un cable que se enrolla en el eje; al girar este eje, las cubetas ascienden. *a*) ¿Qué diámetro debe tener el eje para levantar las cubetas con rapidez constante de 2.00 cm/s mientras gira a 7.5 rpm? *b*) Si el eje debe impartir a las cubetas una aceleración hacia arriba de 0.400 m/s^2, ¿qué aceleración angular deberá tener el eje?

9.33. Al montar una bicicleta de varias velocidades, el ciclista puede seleccionar el radio de la rueda dentada trasera, que está fija al eje trasero. La rueda dentada delantera tiene 12.0 cm de radio. Si la rapidez angular de la rueda dentada delantera es de 0.600 rev/s, ¿qué radio tiene la rueda dentada trasera con la que la rapidez tangencial de un punto en el borde del neumático trasero es de 5.00 m/s? El neumático tiene 0.330 m de radio.

Sección 9.4 Energía en el movimiento rotacional

9.34. Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0.200 kg cada una, están dispuestas en un cuadrado de 0.400 m de lado, conectadas por varillas muy ligeras (figura 9.29). Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje *a*) que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por *O* en la figura); *b*) que biseca el cuadrado (pasa por la línea *AB* en la figura); *c*) que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto *O*.

Figura 9.29 Ejercicio 9.34.



9.35. Calcule el momento de inercia de cada uno de los siguientes objetos uniformes en torno a los ejes indicados. Consulte la tabla 9.2 si lo requiere. *a*) Una varilla delgada de 2.50 kg con longitud de 75.0 cm, alrededor de un eje perpendicular a ella y que pasa por i) un extremo, ii) su centro y iii) alrededor de un eje paralelo a la varilla y que pasa por ella. *b*) Una esfera de 3.00 kg con diámetro de 38.0 cm, alrededor de un eje que pasa por su centro, si la esfera i) es sólida y ii) es un caparazón hueco de pared delgada. *c*) Un cilindro de 8.00 kg con longitud de 19.5 cm y diámetro de 12.0 cm, alrededor del eje central de un cilindro, si el cilindro es i) hueco de pared delgada y ii) sólido.

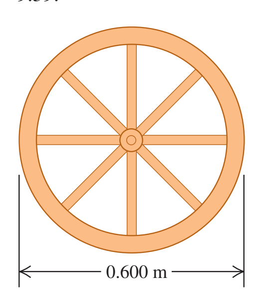
9.36. Bloques pequeños de masa *m* están sujetos en los extremos y el centro de una varilla ligera de longitud *L* y masa despreciable. Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular a la varilla y que pasa por *a*) el centro y *b*) un punto a un cuarto de su longitud.

9.37. Dos esferas pequeñas están pegadas a los extremos de una barra uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 4.00 kg. Las esferas tienen masa de 0.500 kg cada una y se pueden tratar como masas puntuales. Calcule el momento de inercia de esta combinación en torno a cada uno de los ejes siguientes: *a*) un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro; *b*) un eje perpendicular a la barra que pasa por una de las esferas; *c*) un eje paralelo a la barra que pasa por ambas esferas; *d*) un eje paralelo a la barra que está a 0.500 m de ella.

9.38. El bastón de una bastonera es un cilindro metálico delgado de masa *M* y longitud *L*. Cada extremo tiene una tapa de hule de masa *m*, que puede tratarse como partícula en este problema. Calcule el momento de inercia total del bastón alrededor del eje de giro usual (perpendicular al bastón y por su centro).

9.39. Una rueda de carreta (figura 9.30) tiene un radio de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg. Cada rayo, que está sobre un diámetro y tie-

Figura 9.30 Ejercicio 9.39.

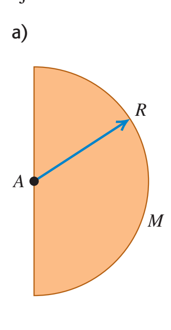


ne 0.300 m de longitud, tiene una masa de 0.280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano? (Use las fórmulas de la tabla 9.2.)

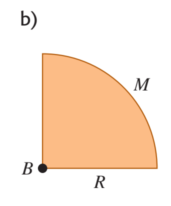
9.40. Un disco uniforme con radio R se corta a la mitad de manera que la mitad que queda tiene masa M (figura 9.31a). *a*) ¿Cuál es el momento de inercia de esta mitad alrededor de un eje perpendicular a su plano por el punto A? *b*) ¿Por qué su respuesta al inciso *a*) resultó igual que si se tratara de un disco completo de masa M? *c*) ¿Cuál sería el momento de inercia de un cuarto del disco de masa M y radio R alrededor de un eje perpendicular a su plano que pasa por el punto B (figura 9.31b)?

Figura 9.31 Ejercicio 9.40.

a)



b)



9.41. Un disco compuesto con diámetro exterior de 140.0 cm está hecho de un material sólido y uniforme de 50.0 cm de radio, con densidad de área de 3.00 g/cm^2 rodeada por un anillo concéntrico, cuyo radio interior es de 50.0 cm y radio exterior de 70.0 cm con densidad de área de 2.00 g/cm^2. Calcule el momento de inercia de este objeto alrededor de un eje perpendicular al plano del objeto y que pasa por su centro.

9.42. Una hélice de avión tiene un diámetro de 2.08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg, y gira a 2400 rpm (rev/min) alrededor de un eje que pasa por su centro. Trate la hélice como varilla delgada. *a*) ¿Qué energía cinética rotacional tiene? *b*) Suponga que, debido a restricciones de peso, usted tuviera que reducir la masa de la hélice a 75.0% de su masa original, pero siguiera requiriendo los mismos tamaño y energía cinética. ¿Cuál tendría que ser su rapidez angular en rpm?

9.43. ¿Energía proveniente de la Luna? Suponga que en algún momento en el futuro decidimos aprovechar la energía rotacional de la Luna para su uso en la Tierra. Además de los datos astronómicos del Apéndice F, tal vez usted necesite saber que la Luna gira sobre su eje una vez cada 27.3 días. Suponga que la Luna es completamente homogénea. *a*) ¿Cuánta energía total podríamos obtener de la rotación lunar? *b*) En la actualidad nuestro planeta utiliza aproximadamente 4.0×10^{20} J de energía anualmente. Si en el futuro la Tierra usara cinco veces más energía cada año, ¿cuántos años de rotación lunar nos abastecerían de energía? De acuerdo con su respuesta, ¿se trataría de una fuente de energía atractiva para invertir según la relación costo-beneficio?

9.44. Usted necesita diseñar una tornamesa industrial de 60.0 cm de diámetro con energía cinética de 0.250 J cuando gira a 45.0 rpm (rev/min). *a*) ¿Cuál debe ser el momento de inercia de la tornamesa alrededor de su eje de rotación? *b*) Si su taller elabora dicha tornamesa con la forma de un disco uniforme sólido, ¿cuál debe ser su masa?

9.45. El volante de un motor de gasolina debe ceder 500 J de energía cinética, cuando su velocidad angular se reduce de 650 rev/min a 520 rev/min. ¿Qué momento de inercia se requiere?

9.46. Una cuerda ligera y flexible se enrolla varias veces en un cilindro *hueco* con peso de 40.0 N y radio de 0.25 m, que gira sin fricción sobre un eje horizontal fijo. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable, e inicialmente está en reposo. Se tira del extremo libre de la cuerda con fuerza constante P una distancia de 5.00 m, punto en el cual la cuerda se está moviendo a 6.00 m/s. Si la cuerda no resbala sobre el cilindro, ¿cuánto vale P?

9.47. Se almacenará energía en un volante con forma de disco sólido uniforme con radio $R = 1.20$ m y masa de 70.0 kg. Para evitar que falle estructuralmente el volante, la aceleración radial máxima permitida de un punto en su borde es de 3500 m/s^2. ¿Qué energía cinética máxima puede almacenarse en el volante?

9.48. Suponga que el cilindro sólido del aparato del ejemplo 9.9 (sección 9.4) se sustituye por un cilindro hueco de paredes delgadas, con la misma masa M y radio R. El cilindro está unido al eje mediante rayos cuyo momento de inercia es despreciable. *a*) Calcule la rapidez de la masa colgante m justo antes de golpear el piso. *b*) Utilice los conceptos de energía para explicar por qué la respuesta al inciso *a*) es diferente de la rapidez calculada en el ejemplo 9.9.

9.49. Una polea sin fricción tiene la forma de un disco sólido uniforme de masa 2.50 kg y radio 20.0 cm. Una piedra de 1.50 kg se une a un alambre muy delgado que se enrolla alrededor del borde de la polea (figura 9.32), y el sistema se libera del reposo. *a*) ¿Qué tan lejos debe caer la piedra para que la polea tenga 4.50 J de energía cinética? *b*? ¿Qué porcentaje de la energía cinética total tiene la polea?

Figura 9.32 Ejercicio 9.49.

9.50. Una cubeta de masa m se ata a un cable sin masa que se enrolla alrededor del borde exterior de una polea uniforme sin fricción de radio R, similar al sistema que se presenta en la figura 9.32. En términos de las variables indicadas, ¿cuál debe ser el momento de inercia de la polea, de forma que siempre tenga la mitad de la energía cinética de la cubeta?

9.51. Cambio de escala de *I*. Si multiplicamos todas las dimensiones de diseño de un objeto por un factor de escala f, su volumen y masa se multiplicarán por f^3. *a*) ¿Por qué factor se multiplicará su momento de inercia? *b*) Si un modelo a escala $\frac{1}{48}$ tiene una energía cinética rotacional de 2.5 J, ¿cuánto valdrá la del objeto a escala normal hecho con el mismo material y girando con la misma velocidad angular?

9.52. Una escalera uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 9.00 kg está apoyada contra un muro vertical formando un ángulo de 53° con el piso. Un trabajador empuja la escalera contra la pared hasta que queda vertical. ¿Cuánto trabajo realizó esa persona contra la gravedad?

9.53. Una cuerda uniforme de 3.00 kg y 24.0 m de longitud está en el suelo en la cima de un risco vertical. En la cima un alpinista desciende hasta la mitad de la cuerda, para ayudar a su compañero a subir el acantilado. ¿Cuál fue el cambio en la energía potencial de la cuerda durante esta maniobra?

Sección 9.5 Teorema de los ejes paralelos

9.54. Calcule el momento de inercia de un aro (anillo hueco de paredes delgadas) con masa M y radio R, alrededor de un eje perpendicular al plano del aro y que pasa por un borde.

9.55. ¿Alrededor de qué eje tendrá una esfera uniforme de madera, el mismo momento de inercia que tiene una esfera hueca de plomo con los mismos valores de masa y radio alrededor de un eje que pasa por su diámetro?

9.56. Use el teorema de los ejes paralelos para demostrar que los momentos de inercia dados en los incisos *a*) y *b*) de la tabla 9.2 son congruentes.

9.57. Una lámina de acero rectangular delgada tiene lados que miden a y b y una masa de M. Use el teorema de los ejes paralelos para calcular el momento de inercia de la lámina alrededor de un eje perpendicular al plano de la lámina y que pasa por una esquina de ésta.

9.58. *a*) Para la lámina rectangular delgada que se muestra en el inciso *d*) de la tabla 9.2, calcule el momento de inercia en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de la placa y es paralelo al eje que se muestra en la figura. *b*) Calcule el momento de inercia de la placa en torno a un eje que está en el plano de la placa, pasa por el centro de la placa y es perpendicular al eje del inciso *a*).

9.59. Una varilla delgada uniforme de masa M y longitud L se dobla por su centro de manera que los dos segmentos son ahora perpendiculares entre sí. Encuentre el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a su plano y que pasa por *a*) el punto donde se cruzan los dos segmentos y *b*) el punto medio de la recta que conecta los dos extremos.

*Sección 9.6 Cálculos de momento de inercia

***9.60.** Utilizando la información de la tabla 9.2 y el teorema de los ejes paralelos, calcule el momento de inercia de la varilla delgada de masa M y longitud L de la figura 9.23 alrededor de un eje que pasa por O, a una distancia arbitraria h de un extremo. Compare su resultado con el obtenido por integración en el ejemplo 9.11 (sección 9.6).

***9.61.** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de un disco sólido uniforme de masa M y radio R alrededor de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por el centro.

***9.62.** Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de una varilla delgada uniforme con masa M y longitud L alrededor de un eje en un extremo, perpendicular a la varilla.

***9.63.** La masa por unidad de longitud de una varilla delgada de longitud L varía con la distancia al extremo izquierdo, donde $x = 0$, según $dm/dx = \gamma x$, donde γ tiene unidades de kg/m^2. *a*) Calcule la masa total de la varilla en términos de γ y L. *b*) Use la ecuación (9.20) para calcular el momento de inercia de la varilla para un eje en el extremo izquierdo, perpendicular a la varilla. Use la expresión que dedujo en el inciso *a*) para expresar I en términos de M y L. Compare su resultado con el de una varilla uniforme y explique las diferencias. *c*) Repita el inciso *b*) para un eje en el extremo derecho de la varilla y compare los resultados de los incisos *b*) y *c*). Explique las diferencias.

Problemas

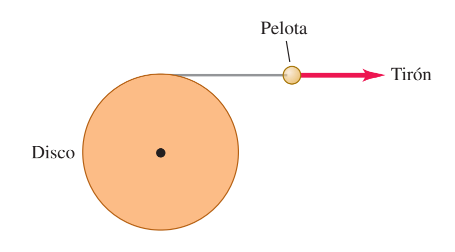
9.64. Dibuje una rueda que yace en el plano del papel y gira en sentido antihorario. Elija un punto en el borde y dibuje un vector $\vec{r}$ del centro de la rueda a ese punto. *a*) ¿Qué dirección tiene $\vec{\omega}$? *b*) Demuestre que la velocidad del punto es $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. *c*) Demuestre que la aceleración radial del punto es $\vec{a}_{\text{rad}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ (véase el ejercicio 9.28).

9.65. Viaje a Marte. Imagine que trabaja en un proyecto de la NASA para enviar un cohete a Marte. El cohete despegará de la Tierra cuando ésta y Marte estén alineados con el Sol. Si en este momento Marte está 60° adelante de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, ¿cuándo debería lanzarse el cohete? (*Nota*: todos los planetas giran en torno al Sol en la misma dirección, y 1 año marciano equivale a 1.9 años terrestres; suponga que los dos planetas tienen órbita circular.)

9.66. Un rodillo de una imprenta gira un ángulo dado por $\theta(t) = \gamma t^2 - \beta t^3$, donde $\gamma = 3.20\ \text{rad/s}^2$ y $\beta = 0.500\ \text{rad/s}^3$. *a*) Calcule la velocidad angular del rodillo en función del tiempo. *b*) Calcule la aceleración angular del rodillo en función del tiempo. *c*) ¿Cuál es la máxima velocidad angular positiva que alcanza, y en qué instante t ocurre esto?

***9.67.** Un disco con radio de 25.0 cm tiene libertad para girar en torno a un eje perpendicular a él que pasa por su centro. Tiene un cordel delgado pero fuerte enrollado alrededor de su borde, y el cordel está unido a una pelota de la que se tira tangencialmente para alejarla del borde del disco (figura 9.33). El tirón aumenta en magnitud y produce una aceleración de la pelota que obedece la ecuación $a(t) = At$, donde t está en segundos y A es constante. El cilindro parte del reposo y al final del tercer segundo, la aceleración de la pelota es de $1.80\ \text{m/s}^2$. *a*) Calcule A. *b*) Exprese la aceleración angular del disco en función del tiempo. *c*) ¿Cuánto tiempo después de que el disco comenzó a girar alcanzará una rapidez angular de 15.0 rad/s? *d*) ¿Con qué ángulo ha girado el disco justo cuando alcanza 15.0 rad/s? (*Sugerencia:* véase la sección 2.6.)

Figura 9.33 Problema 9.67.

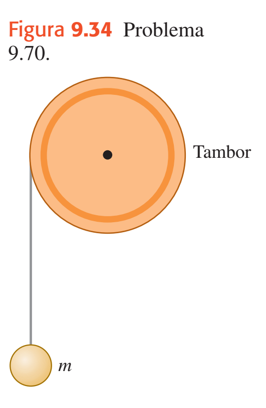


9.68. Cuando un coche de juguete de 0.180 kg y 15.0 cm de longitud es empujado rápidamente por el piso, almacena energía en su volante que tiene un momento de inercia de $4.00 \times 10^{-5}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. La publicidad asegura que el cochecito se puede hacer viajar con una rapidez a escala de hasta 700 km/h. La rapidez a escala es la rapidez del coche de juguete multiplicada por el cociente de la longitud de un automóvil real entre la longitud del juguete. Suponga que un automóvil real mide 3.0 m. *a*) Con una rapidez a escala de 700 km/h, ¿qué rapidez traslacional real tiene el coche? *b*) Si toda la energía cinética que está inicialmente en el volante se convierte en energía cinética traslacional del juguete, ¿cuánta energía se almacenó en el volante? *c*) ¿Qué velocidad angular inicial del volante se necesitó para almacenar la energía calculada en el inciso *b*)?

9.69. Un automóvil Chevrolet Corvette clásico modelo 1957, con masa de 1240 kg, parte del reposo y tiene una aceleración tangencial constante de $3.00\ \text{m/s}^2$ en una pista circular de prueba con radio de 60.0 m. Trate el auto como partícula. *a*) ¿Qué aceleración angular tiene? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene 6.00 s después de arrancar? *c*) ¿Qué aceleración radial tiene en este instante? *d*) Dibuje una vista superior de la pista circular, el auto, el vector de velocidad y las componentes del vector de la aceleración a los 6.00 s. *e*) ¿Qué magnitudes tienen la aceleración total y la fuerza neta del auto en este instante? *f*) ¿Qué ángulo forman estos vectores con la velocidad del auto a los 6.00 s?

9.70. Unos ingenieros están diseñando un sistema en el que una masa m, al caer, imparte energía cinética a un tambor uniforme giratorio, al cual está unida con un alambre delgado y muy ligero que está enrollado alrededor del borde del tambor (figura 9.34). No hay fricción considerable en el eje del tambor y todo el sistema parte del reposo. Este sistema se probó en la Tierra, pero debe utilizarse en Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es de $3.71\ \text{m/s}^2$. En las pruebas en la Tierra, cuando m es de 15.0 kg y se le permite caer una distancia de 5.00 m, imparte 250.0 J de energía cinética al tambor. *a*) Si el sistema se opera en Marte, ¿qué distancia tendría que caer la masa de 15.0 kg para impartir la misma cantidad de energía cinética al tambor? *b*) ¿Con qué rapidez se moverá la masa de 15.0 kg en Marte justo cuando el tambor gane 250.0 J de energía cinética?

Figura 9.34 Problema 9.70.



9.71. La banda de una aspiradora pasa por un eje con 0.45 cm de radio y una rueda con 2.00 cm de radio. La disposición de estas piezas es similar a la de la cadena y las ruedas dentadas de la figura 9.14. El motor gira el eje a 60.0 rev/s, y la banda gira la rueda, que se conecta mediante otro eje al rodillo que saca el polvo de la alfombra que se está limpiando. Suponga que la banda no resbala ni en el

eje ni en la rueda. *a*) ¿Qué rapidez tiene un punto en la banda? *b*) ¿Qué velocidad angular tiene la rueda en rad/s?

9.72. El motor de una sierra circular gira a 3450 rev/min. Una polea conectada al eje del motor impulsa una segunda polea con la mitad del diámetro mediante una correa en "V". Una hoja de 0.208 m de diámetro está montada en el mismo eje giratorio que la segunda polea. *a*) El operador se descuida y la hoja atrapa y lanza hacia atrás un trocito de madera, el cual se mueve con rapidez lineal igual a la rapidez tangencial del borde de la hoja. Calcule dicha rapidez. *b*) Calcule la aceleración radial de un punto en el borde exterior de la hoja para saber por qué el aserrín no se adhiere a los dientes.

9.73. Una rueda cambia su velocidad angular con una aceleración angular constante, al girar sobre un eje fijo que pasa por su centro. *a*) Demuestre que el cambio de magnitud de la aceleración radial de un punto de la rueda, durante cualquier lapso, es el doble del producto de la aceleración angular, el desplazamiento angular y la distancia perpendicular del punto al eje. *b*) La aceleración radial de un punto de la rueda a 0.250 m del eje cambia de 25.0 m/s^2 a 85.0 m/s^2 mientras la rueda gira 15.0 rad. Calcule la aceleración tangencial de este punto. *c*) Demuestre que el cambio de energía cinética de la rueda durante cualquier lapso es el producto del momento de inercia alrededor del eje, la aceleración angular y el desplazamiento angular. *d*) Durante el desplazamiento angular de 15.0 rad del inciso *b*), la energía cinética de la rueda aumenta de 20.0 J a 45.0 J. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda en torno al eje de rotación?

9.74. Una esfera consiste en un centro esférico sólido de madera con densidad de 800 kg/m^3 y radio de 0.20 m, cubierto por una capa delgada de plomo con densidad por área de 20 kg/m^2. Calcule el momento de inercia de esta esfera en torno a un eje que pasa por su centro.

9.75. Estime el momento de inercia de usted en torno a un eje vertical que pasa por el centro de la parte superior de la cabeza, estando parado en posición erguida y con los brazos extendidos a los lados. Haga aproximaciones razonables, y mida o estime las cantidades necesarias.

9.76. Una varilla uniforme de 50.0 cm de longitud y masa de 0.320 kg se dobla en su centro para darle forma de V, con un ángulo de 70.0° en su vértice. Calcule el momento de inercia de este objeto en torno a un eje perpendicular al plano de la V y que pasa por su vértice.

9.77. Se ha sugerido que las plantas eléctricas deberían aprovechar las horas de bajo consumo (por ejemplo, después de media noche) para generar energía mecánica y almacenarla hasta que se necesite durante los periodos de carga máxima, como a medio día. Una propuesta consiste en almacenar la energía en enormes volantes que giren sobre cojinetes casi sin fricción. Considere un volante de hierro (con densidad de 7800 kg/m^3) con forma de disco uniforme de 10.0 cm de espesor. *a*) ¿Qué diámetro debería tener semejante disco para almacenar 10.0 megajoules de energía cinética al girar a 90.0 rpm en torno a un eje perpendicular al disco y que pasa por su centro? *b*) ¿Qué aceleración centrípeta tendría un punto en su borde al girar con esta rapidez?

9.78. Al diseñar el motor para un cohete, usted desea reducir su peso remplazando una pieza esférica sólida con una coraza esférica hueca del mismo tamaño. Las piezas giran alrededor de un eje que pasa por su centro. Usted necesita asegurarse de que la pieza nueva siempre tenga la misma energía cinética de rotación que la pieza original tenía a cualquier tasa de rotación dada. Si la pieza original tenía una masa M, ¿cuál debe ser la masa de la pieza nueva?

9.79. La Tierra, que no es una esfera uniforme, tiene un momento de inercia de $0.3308MR^2$ alrededor de un eje que pasa por sus polos. La Tierra tarda 86,164 s en dar una revolución. Use el Apéndice F para calcular *a*) la energía cinética de la Tierra debida a esta rotación y *b*) la energía cinética de la Tierra debida a su movimiento orbital en torno al Sol. *c*) Explique cómo sabemos, por el valor el momento de inercia de la Tierra, que su masa está concentrada en su centro.

9.80. Un disco sólido uniforme de masa m y radio R pivotea sobre un eje horizontal que pasa por su centro, y un objeto pequeño con la misma masa m se sujeta al borde del disco. Si el disco se suelta del reposo con el objeto en el extremo de un radio horizontal, calcule la rapidez angular cuando el objeto esté directamente abajo del eje.

9.81. Un anuncio metálico de una concesionaria automotriz es un triángulo rectángulo delgado y uniforme con base de longitud b y altura h. La masa del anuncio es M. *a*) Calcule su momento de inercia para la rotación en torno al cateto de longitud h? *b*) Si $M = 5.40$ kg, $b = 1.60$ m y $h = 1.20$ m, ¿qué energía cinética tiene el letrero cuando está girando a 2.00 rev/s en torno a un eje que coincide con el cateto de 1.20 m?

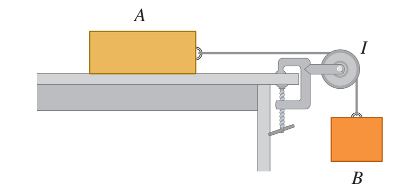
9.82. Medición de *I*. Imagine que trabaja como pasante en una empresa de ingenieros y le piden que mida el momento de inercia de una rueda grande, que gire en torno a un eje que pasa por su centro. Dado que usted fue buen estudiante de física, sabe lo que debe hacer. Mide la rueda y determina que su diámetro es de 0.740 m y que tiene un peso de 280 N. Luego monta la rueda, empleando cojinetes sin fricción, en un eje horizontal que pasa por el centro de la rueda. Enrolla una cuerda ligera en el borde de la rueda y cuelga una masa de 8.00 kg del extremo libre, como se muestra en la figura 9.18. Ahora suelta la masa desde el reposo; la masa desciende y la rueda gira mientras la cuerda se desenrolla. Usted determina que la masa tiene una rapidez de 5.00 m/s después de haber descendido 2.00 m. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda para un eje perpendicular que pasa por su centro? *b*) Su jefe le dice que se requiere un I más grande y le pide diseñar una rueda con la misma masa y radio que tenga $I = 19.0\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. ¿Qué le contesta usted?

9.83. Un metro de 0.160 kg pivotea sobre un extremo, de manera que puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal. El metro se sostiene en posición horizontal y se suelta. Al pasar por la vertical, calcule *a*) el cambio de energía potencial gravitacional que haya ocurrido; *b*) la rapidez angular del metro; *c*) la rapidez lineal del extremo opuesto al eje. *d*) Compare la respuesta del inciso *c*) con la rapidez de una partícula que ha caído 1.00 m desde el reposo.

9.84. Exactamente una vuelta de una cuerda flexible de masa m está enrollada en un cilindro uniforme de masa M y radio R, que gira sin fricción sobre un eje horizontal a lo largo del eje del cilindro. Un extremo de la cuerda está sujeto al cilindro, el cual inicia con rapidez angular ω_0. Después de una revolución, la cuerda se ha desenrollado y cuelga verticalmente, tangente al cilindro. Calcule la rapidez angular del cilindro y la rapidez lineal del extremo inferior de la cuerda en este instante. Puede ignorar el espesor de la cuerda. (*Sugerencia:* use la ecuación (9.18).)

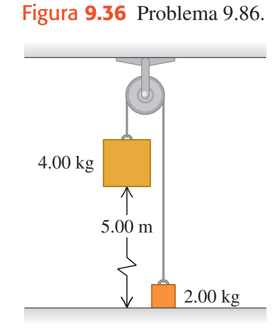
9.85. La polea de la figura 9.35 tiene radio R y momento de inercia I. La cuerda no resbala sobre la polea y ésta gira sobre un eje sin fricción. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque A y la mesa es μ_k. El sistema se suelta del reposo y el bloque B desciende. La masa de A es m_A; y la de B, m_B. Use métodos de energía para calcular la rapidez de B en función de la distancia d que ha descendido.

Figura 9.35 Problema 9.85.



9.86. La polea de la figura 9.36 tiene 0.160 m de radio y su momento de inercia es de $0.480 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. La cuerda no resbala en la polea. Use métodos de energía para calcular la rapidez del bloque de 4.00 kg justo antes de golpear el piso.

Figura 9.36 Problema 9.86.



9.87. Se cuelga un aro delgado de radio R de un clavo. El aro se desplaza lateralmente (dentro de su plano) un ángulo β con respecto a su posición de equilibrio y se suelta. ¿Qué rapidez angular tiene al volver a su posición de equilibrio? (*Sugerencia:* use la ecuación (9.18).)

9.88. Un autobús en Zurich, Suiza, obtenía su potencia motriz de la energía almacenada en un volante grande, cuya rapidez se aumentaba periódicamente, cuando el autobús hacía una parada, con un motor eléctrico que entonces podía conectarse a las líneas eléctricas. El volante era un cilindro sólido con masa de 1000 kg y 1.80 m de diámetro; su rapidez angular máxima era de 3000 rev/min. *a*) Con esta rapidez angular, ¿qué energía cinética tiene el volante? *b*) Si la potencia media que requería el autobús era de 1.86×10^4 W, ¿cuánto tiempo podía operar entre paradas?

9.89. Dos discos metálicos, con radios $R_1 = 2.50$ cm y $R_2 = 5.00$ cm, y masas $M_1 = 0.80$ kg y $M_2 = 1.60$ kg, se sueldan juntos y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común (figura 9.37). *a*) ¿Qué momento de inercia total tienen los discos? *b*) Un cordón ligero se enrolla en el disco más chico y se cuelga de él un bloque de 1.50 kg. Si el bloque se suelta del reposo a una altura de 2.00 m sobre el piso, ¿qué rapidez tiene justo antes de golpear el piso? *c*) Repita el inciso *b*) pero ahora con el cordón enrollado en el disco grande. ¿En qué caso el bloque alcanza mayor rapidez? Explique su respuesta.

Figura 9.37 Problema 9.89.

9.90. En el sistema de cilindro y masa del ejemplo 9.9 (sección 9.4), suponga que la masa m que cae está hecha de hule ideal, de modo que no pierde energía mecánica al golpear el piso. *a*) Si el cilindro no gira inicialmente y la masa m se suelta del reposo desde una altura h, ¿a qué altura rebotará la masa si lo hace verticalmente? *b*) Explique, en términos de energía, por qué la respuesta a *a*) es *menor* que h.

9.91. En el sistema que se muestra en la figura 9.18, una masa de 12.0 kg se suelta desde el reposo y cae, haciendo que el cilindro uniforme con masa de 10.0 kg y diámetro de 30.0 cm gire en torno a un eje sin fricción que pasa por su centro. ¿Qué distancia deberá descender la masa para impartir al cilindro 250 J de energía cinética?

9.92. En la figura 9.38, el cilindro y la polea giran sin fricción en torno a ejes horizontales estacionarios que pasan por su respectivo centro. Se enrolla una cuerda ligera en el cilindro, la cual pasa por la polea y tiene una caja de 3.00 kg suspendida de su extremo libre. No hay deslizamiento entre la cuerda y la superficie de la polea. El cilindro uniforme tiene masa de 5.00 kg y radio de 40.0 cm. La polea es un disco uniforme con masa de 2.00 kg y radio de 20.0 cm. La caja se suelta desde el reposo y desciende mientras la cuerda se desenrolla del cilindro. Calcule la rapidez que tiene la caja cuando ha caído 1.50 m.

Figura 9.38 Problema 9.92.

9.93. Un disco plano uniforme tiene masa M y radio R. Se perfora en él un agujero circular de radio $R/4$, centrado en un punto a $R/2$ del centro del disco. *a*) Calcule el momento de inercia del disco alrededor de un eje que pasa por su centro, perpendicular al plano del disco. (*Sugerencia*: calcule el momento de inercia de la pieza que se quitó al disco.) *b*) Calcule el momento de inercia del disco agujerado en torno a un eje que pasa por el centro del agujero, perpendicular al plano del disco.

9.94. Se hace un péndulo con una esfera sólida uniforme de masa M y radio R suspendida del extremo de una varilla ligera. La distancia del pivote en el extremo superior de la varilla al centro de la esfera es L. El momento de inercia I_P del péndulo para la rotación alrededor del pivote suele aproximarse con ML^2. *a*) Use el teorema de los ejes paralelos para demostrar que si R es el 5% de L y se desprecia la masa de la varilla, I_p es sólo 0.1% mayor que ML^2. *b*) Si la masa de la varilla es el 1% de M y R es mucho menor que L, ¿qué relación hay entre I_{varilla} para un eje en el pivote, y ML^2?

9.95. Teorema de los ejes perpendiculares. Considere un cuerpo rígido que es una lámina delgada plana de forma arbitraria en el plano xy, con el origen de coordenadas O situado en cualquier punto dentro o fuera del cuerpo. Sean I_x e I_y los momentos de inercia alrededor de los ejes x y y, y sea I_0 el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por O, perpendicular al plano. *a*) Considerando elementos de masa m_i con coordenadas (x_i, y_i), demuestre que $I_x + I_y = I_O$. Éste es el teorema de los ejes perpendiculares. Observe que el punto O no tiene que ser el centro de masa. *b*) Para una arandela delgada con masa M y radios interior y exterior R_1 y R_2, use el teorema de los ejes perpendiculares para calcular el momento de inercia alrededor de un eje que está en el plano de la arandela y que pasa por su centro. Puede usar la información de la tabla 9.2. *c*) Use el teorema de los ejes perpendiculares para demostrar que, en el caso de una lámina delgada cuadrada con masa M y longitud de lado L, el momento de inercia en torno a *a cualquier* eje en el plano de la lámina que pase por el centro de la lámina es $\frac{1}{12}ML^2$. Puede usar la información de la tabla 9.2.

9.96. Una varilla uniforme delgada se dobla formando un cuadrado de lado a. Si la masa total es M, calcule el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano del cuadrado. (*Sugerencia*: use el teorema de los ejes paralelos.)

***9.97.** La densidad de un cilindro de radio R y masa M aumenta linealmente con la distancia r al eje del cilindro, $\rho = \alpha r$, donde α es una constante positiva. *a*) Calcule el momento de inercia del cilindro alrededor de un eje longitudinal que pasa por su centro, en términos de M y R. *b*) ¿Su respuesta es mayor o menor que el momento de inercia de un cilindro con la misma masa y radio pero densidad uniforme? Explique por qué este resultado es lógico cualitativamente.

Figura 9.39 Problema 9.98.



9.98. Estrellas de neutrones y restos de supernovas. La Nebulosa del Cangrejo es una nube de gas brillante de unos 10 años luz de diámetro, a una distancia aproximada de 6500 años luz de la Tierra (figura

9.39). Es el residuo de una estrella que sufrió una *explosión supernova* vista en la Tierra en 1054 D.C. Esta nebulosa libera energía a razón de aproximadamente 5×10^{31} W, unas 10^5 veces la energía radiada por el Sol. El origen de esa energía es la rotación rápida de una *estrella de neutrones* en el centro de la nebulosa. Este objeto gira una vez cada 0.0331 s, y este periodo aumenta 4.22×10^{-13} s cada segundo que pasa. *a*) Si la rapidez con que la estrella de neutrones pierde energía es igual a la rapidez con que la nebulosa libera energía, calcule el momento de inercia de tal estrella. *b*) Las teorías sobre supernovas predicen que la estrella de neutrones de la Nebulosa del Cangrejo tiene una masa aproximadamente 1.4 veces mayor que la del Sol. Modelando la estrella de neutrones como esfera uniforme sólida, calcule su radio en kilómetros. *c*) ¿Qué rapidez lineal tiene un punto en el ecuador de esa estrella? Compare esto con la rapidez de la luz. *d*) Suponga que la estrella de neutrones es uniforme y calcule su densidad, comparándola con la de una roca ordinaria (3000 kg/m^3) y la densidad de un núcleo atómico (aproximadamente 10^{17} kg/m^3). Justifique la afirmación de que una estrella de neutrones es en esencia un núcleo atómico grande.

Problemas de desafío

9.99. El momento de inercia de una esfera con densidad uniforme alrededor de un eje que pasa por su centro es $\frac{2}{5}MR^2 = 0.400MR^2$. Observaciones de satélite muestran que el momento de inercia de la Tierra es de $0.3308MR^2$. Datos geofísicos sugieren que la Tierra tiene 5 regiones principales: el núcleo interior ($r = 0$ a $r = 1220$ km) con densidad media de 12,900 kg/m^3, el núcleo exterior ($r = 1220$ km a $r = 3480$ km) con densidad media de 10,900 kg/m^3, el manto inferior ($r = 3480$ km a $r = 5700$ km) con densidad media de 4900 kg/m^3, el manto superior ($r = 5700$ km a $r = 6350$ km) con densidad media de 3600 kg/m^3 y la corteza exterior y los océanos ($r = 6350$ km a $r = 6370$ km) con densidad media de 2400 kg/m^3. *a*) Demuestre que el momento de inercia alrededor de un diámetro de una coraza esférica uniforme con radio interior R_1, radio exterior R_2 y densidad ρ es $I = \rho(8\pi/15)(R_2^5 - R_1^5)$. (*Sugerencia:* forme la coraza superponiendo una esfera de densidad ρ y una esfera menor de densidad $-\rho$.) *b*) Verifique los datos dados usándolos para calcular la masa de la Tierra. *c*) Use los datos dados para calcular el momento de inercia de la Tierra en términos de MR^2.

***9.100.** Calcule el momento de inercia de un cono sólido uniforme de masa M y altura h alrededor de un eje que pasa por su centro (figura 9.40). El radio de la base circular es R.

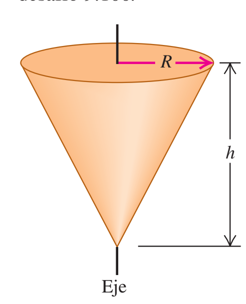


Figura 9.40 Problema de desafío 9.100.

9.101. En un disco compacto (CD), la música se codifica en un patrón de agujeros diminutos dispuestos en una pista que corre en espiral hacia el borde del disco. Al girar el disco dentro del reproductor, la pista es barrida con una rapidez *lineal* constante de $v = 1.25$ m/s. Puesto que el radio de la pista varía al irse alejando del centro, la rapidez *angular* del disco debe cambiar al reproducirse el CD. (Véase el ejercicio 9.22.) Veamos qué aceleración angular se necesita para mantener v constante. La ecuación de una espiral es $r(\theta) = r_0 + \beta\theta$, donde r_0 es el radio de la espiral en $\theta = 0$ y β es una constante. En un CD, r_0 es el radio interior de la pista. Si tomamos la dirección de rotación del CD como positiva, β debe ser positiva para que r aumente al girar el disco y aumentar θ. *a*) Al girar el disco un ángulo pequeño $d\theta$, la distancia barrida sobre la pista es $ds = r\,d\theta$. Usando la expresión anterior para $r(\theta)$, integre ds para obtener la distancia total s barrida sobre la pista en función de ángulo total θ que ha girado el disco. *b*) Dado que la pista se barre con rapidez lineal constante v, la distancia s obtenida en el inciso *a*) es igual a vt. Use esto para obtener θ en función del tiempo. Habrá dos soluciones para θ; elija la positiva y explique por qué es la adecuada. *c*) Con su expresión para $\theta(t)$, calcule la velocidad angular ω_z y la aceleración angular α_z en función del tiempo. ¿α_z es constante? *d*) En un CD, el radio interior de la pista es de 25.0 mm, el radio aumenta 1.55 μm cada revolución y la duración del CD es de 74.0 min. Calcule r_0 y β y determine el número total de revoluciones del disco durante su reproducción. *e*) Con sus resultados de *c*) y *d*), grafique ω_z (en rad/s) contra t y α_z (en rad/s^2) contra t entre $t = 0$ y $t = 74.0$ min.

10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué significa que una fuerza produzca una torca.
- De qué manera la torca total sobre un cuerpo afecta su movimiento rotacional.
- Cómo analizar el movimiento de un cuerpo que gira y se mueve como un todo por el espacio.
- Cómo resolver problemas que implican trabajo y potencia para cuerpos giratorios.
- Cuál es el significado del momento angular de una partícula o de un cuerpo rígido.
- De qué manera el momento angular de un sistema cambia con el tiempo.
- Por qué un giróscopo que gira describe un movimiento extraño llamado precesión.

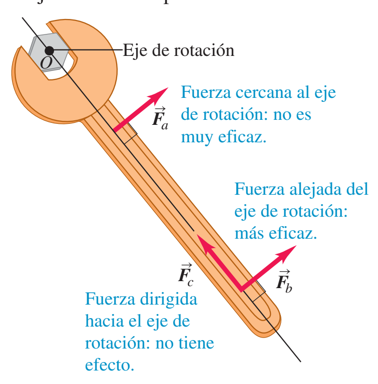


? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico se aplica aquí?

En los capítulos 4 y 5 aprendimos que una fuerza neta aplicada a un cuerpo imparte una aceleración a ese cuerpo. Sin embargo, ¿qué se requiere para impartir una aceleración *angular* a un cuerpo? Es decir, ¿qué se necesita para poner a girar un cuerpo estacionario o para detener un cuerpo que está dando vueltas? Se requiere una fuerza, pero debe aplicarse de tal manera que proporcione una acción de torcer o de dar vuelta.

En este capítulo definiremos una nueva cantidad física, la *torca*, que describe la acción de torsión o giro debido a una fuerza. Veremos que la torca total que actúa sobre un cuerpo rígido determina su aceleración angular, así como la fuerza total sobre un cuerpo determina su aceleración lineal. También examinaremos el trabajo y la potencia en el movimiento rotacional con la finalidad de entender los problemas del tipo de cómo el eje giratorio de un auto transmite energía. Por último, desarrollaremos un nuevo principio de conservación, la *conservación del momento angular*, que es muy útil para entender la rotación de cuerpos tanto rígidos como no rígidos. Terminaremos el capítulo con el estudio de los *giróscopos*, que son dispositivos giratorios que al parecer desafían el sentido común y no se caen cuando creemos que deberían hacerlo, aunque en realidad su comportamiento se ajusta perfectamente a la dinámica del movimiento rotacional.

10.1 ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene mayor probabilidad de aflojar el tornillo apretado?



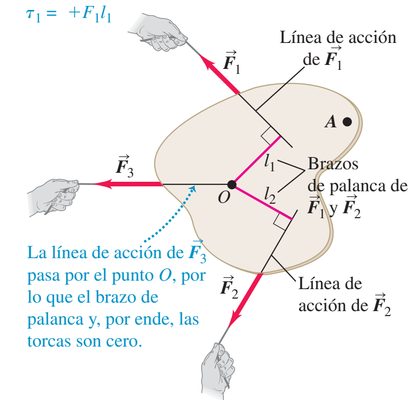
10.1 Torca

Sabemos que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo pueden afectar su **movimiento de traslación**, es decir, el movimiento del cuerpo como un todo a través del espacio. Ahora queremos aprender qué aspectos de una fuerza determinan qué tan eficaz es ésta para provocar o modificar el movimiento *rotacional*. La magnitud y dirección de la fuerza son importantes, pero también lo es la posición del punto de aplicación. En la figura 10.1, se está usando una llave inglesa para aflojar un tornillo apretado. La fuerza $\vec{F}_b$, aplicada cerca del extremo del mango, es más eficaz que una fuerza igual $\vec{F}_a$ aplicada cerca del tornillo. La fuerza $\vec{F}_c$ no sirve de nada. Se aplica en el mismo punto y tiene la misma magnitud que $\vec{F}_b$, pero está dirigida a lo largo del

mango. La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo se denomina *torca*. Decimos que $\vec{F}_a$ genera una torca sobre un punto O a la llave de la figura 10.1 $\vec{F}_b$ genera una torca mayor sobre O y $\vec{F}_c$ no genera ninguna torca sobre O.

La figura 10.2 muestra tres ejemplos de cómo calcular la torca. En la figura el cuerpo puede girar alrededor de un eje que es perpendicular al plano de la figura y pasa por el punto O. Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, y $\vec{F}_3$, en el plano de la figura. La tendencia de $\vec{F}_1$, a causar una rotación alrededor de O depende de su magnitud F_1 y también de la distancia *perpendicular* l_1 entre el punto O y la **línea de acción** de la fuerza (la línea sobre la que está el vector de fuerza). Llamamos a l_1 el **brazo de palanca** (o en ocasiones se le denomina como **brazo de momento**) de $\vec{F}_1$ alrededor de O. El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a F_1 y como a l_1. Definimos a la **torca** de $\vec{F}_1$ con respecto a O como el producto F_1l_1. Usaremos la letra griega τ (tau) para la torca. En general, para una fuerza de magnitud F cuya línea de acción está a una distancia perpendicular l del punto O, la torca es

$$\tau = Fl \qquad (10.1)$$



10.2 La torca de una fuerza alrededor de un punto es el producto de la magnitud de la fuerza y su brazo de palanca.

Los físicos prefieren el término "torca", mientras que los ingenieros prefieren el término "momento o par de torsión" solo (a menos que estén hablando de un eje giratorio). Los dos grupos usan "brazo de palanca" o "brazo de momento" para la distancia l.

El brazo de palanca de $\vec{F}_1$ en la figura 10.2 es la distancia perpendicular l_1 y el de $\vec{F}_2$ es la distancia perpendicular l_2. La línea de acción de $\vec{F}_3$ pasa por el punto O, así que el brazo de palanca de $\vec{F}_3$ es cero y su torca con respecto a O es cero. Por lo mismo, $\vec{F}_c$ en la figura 10.1 tiene una torca cero con respecto al punto O, en tanto que $\vec{F}_b$ tiene mayor torca que $\vec{F}_a$ porque su brazo de palanca es mayor.

ActivPhysics ONLINE

7.1 Cálculo de torcas

CUIDADO **La torca siempre se mide en torno a un punto O** Observe que la torca *siempre* se define con referencia a un punto específico. Si cambiamos de posición este punto, la torca de cada fuerza puede cambiar. Por ejemplo, la torca de $\vec{F}_3$ en la figura 10.2 es cero con respecto al punto O, pero no con respecto al punto A. Al describir la torca de una fuerza, no basta llamarlo "la torca de $\vec{F}$"; debemos decir "el momento de torsión de $\vec{F}$ con respecto al punto X" o "la torca de $\vec{F}$ alrededor del punto X".

En la figura 10.2, la fuerza $\vec{F}_1$ tiende a causar rotación *antihoraria* alrededor de O, mientras que $\vec{F}_2$ tiende a causar rotación *horaria*. Para distinguir entre estas dos posibilidades, necesitamos elegir un sentido de rotación positivo. Si elegimos que *las torcas antihorarias sean positivas y las torcas en sentido horario sean negativas*, las torcas de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ con respecto a O son

$$\tau_1 = +F_1l_1 \qquad \tau_2 = -F_2l_2$$

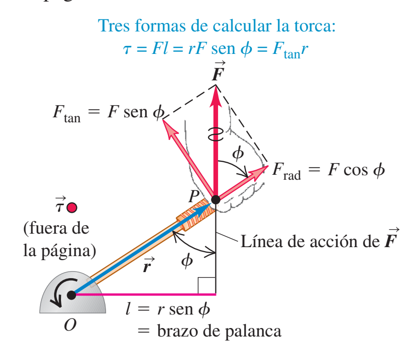
La figura 10.2 muestra esta elección para el signo de la torca. A menudo usaremos el símbolo (+↺) para indicar el sentido de rotación positivo que elegimos.

La unidad de la torca en el SI es el newton-metro. Al hablar de trabajo y energía llamamos a esta combinación joule; sin embargo, la torca *no* es trabajo ni energía, así que debemos expresarlo en newton-metros, *no* joules.

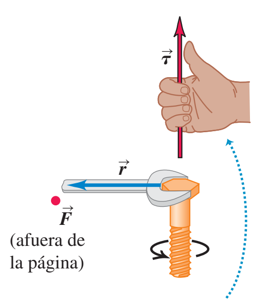
La figura 10.3 muestra una fuerza $\vec{F}$ que se aplica en un punto P descrito por un vector de posición $\vec{r}$ con respecto al punto elegido O. Hay varias formas de calcular la torca de esta fuerza:

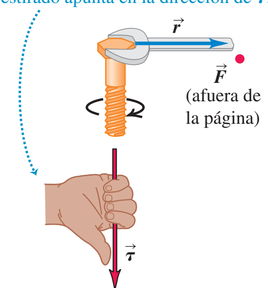
1. Determine el brazo de palanca l y use $\tau = Fl$.
2. Calcule el ángulo ϕ entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$; el brazo de palanca es $r\,\text{sen}\,\phi$, así que $\tau = rF\,\text{sen}\,\phi$.
3. Represente $\vec{F}$ en términos de una componente radial F_{rad} en la dirección de $\vec{r}$ y una componente tangencial F_{tan} perpendicular a $\vec{r}$. (Decimos tangencial porque si el cuerpo gira, el punto donde actúa la fuerza se mueve en un círculo, y esta componente es tangente a ese círculo.) Entonces, $F_{tan} = F\,\text{sen}\,\phi$ y

10.3 Tres formas de calcular la torca de la fuerza $\vec{F}$ en torno al punto O. En esta figura, $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en el plano de la página y el vector de la torca $\vec{\tau}$ apunta afuera de la página hacia el lector.



10.4 El vector de la torca, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ se dirige sobre el eje del tornillo, perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. Vemos que los dedos de la mano derecha se enroscan en la dirección de la rotación que la torca tiende a causar.





$\tau = r(F\operatorname{sen}\phi) = F_{tan}r$. La componente F_{rad} *no* tiene torca con respecto a O porque su brazo de palanca con respecto a ese punto es cero (compare con las fuerzas $\vec{F}_c$ de la figura 10.1 y $\vec{F}_3$ de la figura 10.2).

Resumiendo estas expresiones de la torca , tenemos

$$\tau = Fl = rF\operatorname{sen}\phi = F_{tan}r \qquad \text{(magnitud de la torca)} \qquad (10.2)$$

La torca como vector

En la sección 9.1, vimos que la velocidad y la aceleración angulares pueden representarse como vectores; lo mismo sucede con la torca ; observe que la cantidad $rF\operatorname{sen}\phi$ de la ecuación (10.2) es la magnitud del *producto vectorial* $\vec{r} \times \vec{F}$ que definimos en la sección 1.10. (Repase esa definición.) Ahora generalizamos la definición de torca de la siguiente manera: si una fuerza $\vec{F}$ actúa en un punto que tiene un vector de posición $\vec{r}$ con respecto a un origen O, como en la figura 10.3, la torca $\vec{\tau}$ de la fuerza con respecto a O es la cantidad *vectorial*

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{(definición del vector torca)} \qquad (10.3)$$

La torca definida en la ecuación (10.2) es sólo la magnitud del vector torca $\vec{r} \times \vec{F}$. La dirección de $\vec{\tau}$ es perpendicular tanto a $\vec{r}$ como a $\vec{F}$. En particular, si $\vec{r}$ y $\vec{F}$ están en un plano perpendicular al eje de rotación, como en la figura 10.3, el vector torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ tiene la dirección del eje de rotación, y su sentido está dado por la regla de la mano derecha (figura 1.29). Las relaciones de dirección se muestran en la figura 10.4.

En los diagramas donde intervienen $\vec{r}$, $\vec{F}$ y $\vec{\tau}$, es común que uno de los vectores esté orientado en una dirección perpendicular a la página. (De hecho, por la naturaleza misma del producto cruz, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ *debe* ser perpendicular al plano de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.) Usaremos un punto (●) para representar un vector que apunta hacia afuera de la página (véase la figura 10.3) y una cruz (✕) para representar un vector que apunta hacia adentro de la página.

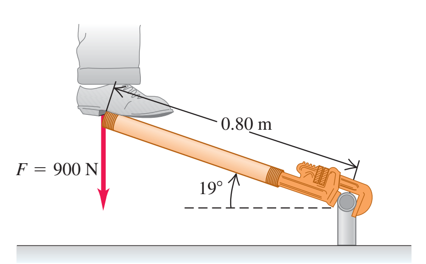
En las siguientes secciones, normalmente nos interesará la rotación de un cuerpo alrededor de un eje orientado en cierta dirección constante. En tal caso, sólo interesa la componente de la torca sobre ese eje, que normalmente llamaremos la torca con respecto al *eje* especificado.

Ejemplo 10.1 Aplicación de una torca

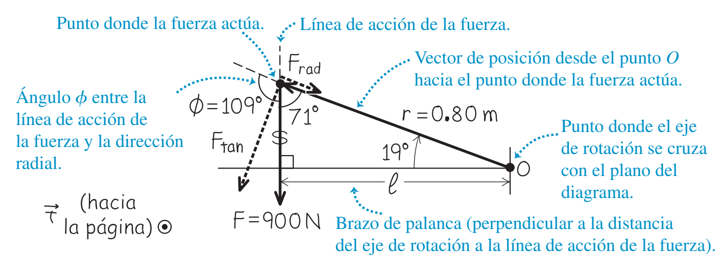
Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de 19° con la horizontal (figura 10.5a). Calcule la magnitud y la dirección de la torca que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

10.5 a) Un plomero aficionado trata de aflojar una junta parándose en una extensión del mango de la llave de tuercas. b) Diagrama vectorial para calcular la torca con respecto a O.

a) Diagrama de la situación



b) Diagrama de cuerpo



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 10.5b muestra los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y el ángulo entre ellos ($\phi = 109°$). Usaremos lo que sabemos acerca de estos vectores para calcular el vector de la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (10.1) o la (10.2) para obtener la magnitud de la torca y la regla de la mano derecha con la ecuación (10.3), para hallar su dirección.

EJECUTAR: Para usar la ecuación (10.1), primero calculamos el brazo de palanca l. Como muestra la figura 10.5b:

$$l = (0.80 \text{ m}) \operatorname{sen} 109° = (0.80 \text{ m}) \operatorname{sen} 71° = 0.76 \text{ m}$$

La ecuación (10.1) nos dice que la magnitud de la torca es

$$\tau = Fl = (900 \text{ N})(0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

O bien, por la ecuación (10.2),

$$\tau = rF \operatorname{sen} \phi = (0.80 \text{ m})(900 \text{ N})(\operatorname{sen} 109°) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

También podemos calcular F_{tan}, la componente tangencial de $\vec{F}$, que actúa perpendicular a $\vec{r}$ (es decir, perpendicular al tubo). El vector $\vec{r}$ está a 19° de la horizontal, así que una perpendicular a $\vec{r}$ está orientada a 19° de la vertical. Puesto que $\vec{F}$ es vertical, esto implica que $F_{tan} = F(\cos 19°) = (900 \text{ N})(\cos 19°) = 851$ N. La torca es

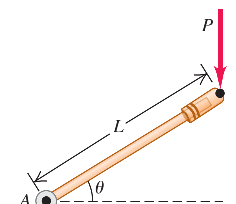
$$\tau = F_{tan} r = (851 \text{ N})(0.80 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Si usted enrosca los dedos de su mano derecha de la dirección de $\vec{r}$ (en el plano de la figura 10.5b, hacia la izquierda y hacia arriba) a la dirección de $\vec{F}$ (verticalmente hacia abajo), su pulgar derecho apuntará hacia adentro del plano de la figura. Ésta es la dirección de la torca $\vec{\tau}$.

EVALUAR: Ya verificamos la magnitud obtenida de τ calculándola de tres formas distintas. Para comprobar la dirección de la torca, observamos que la fuerza de la figura 10.5 tiende a producir una rotación en sentido antihorario en torno a O. Si enroscamos los dedos de la mano derecha en dirección antihoraria, nuestro pulgar apuntará hacia afuera del plano de la figura 10.5 lo cual es, en efecto, la dirección de la torca.

Evalúe su comprensión de la sección 10.1 La figura muestra una fuerza P que se aplica a un extremo de una palanca de longitud L. ¿Cuál es la magnitud de la torca de esta fuerza en torno al punto A? i) $PL \operatorname{sen} \theta$; ii) $PL \cos \theta$; iii) $PL \tan \theta$.

MP



10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

Ahora podemos deducir la relación fundamental de la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. Demostraremos que la aceleración angular de un cuerpo rígido en rotación es directamente proporcional a la suma de las componentes de la torca sobre el eje de rotación. El factor de proporcionalidad es el momento de inercia.

Para deducir esta relación, imaginamos otra vez que el cuerpo se compone de un gran número de partículas. Elegimos como eje de rotación el eje z; la primera partícula tiene masa m_1 y distancia r_1 con respecto a este eje (figura 10.6). La *fuerza total* $\vec{F}_1$ que actúa sobre la partícula tiene una componente en la dirección radial $F_{1,rad}$, una componente $F_{1,tan}$ que es tangente al círculo de radio r_1 en que se mueve la partícula al girar el cuerpo, y una componente F_{1z} sobre el eje de rotación. La segunda ley de Newton para la componente tangencial es

$$F_{1,tan} = m_1 a_{1,tan} \tag{10.4}$$

Podemos expresar la aceleración tangencial de la primera partícula en términos de la aceleración angular α_z, usando la ecuación (9.14): $a_{1,tan} = r_1 \alpha_z$. Con esta relación y multiplicando ambos miembros de la ecuación (10.4) por r_1 obtenemos

$$F_{1,tan} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \tag{10.5}$$

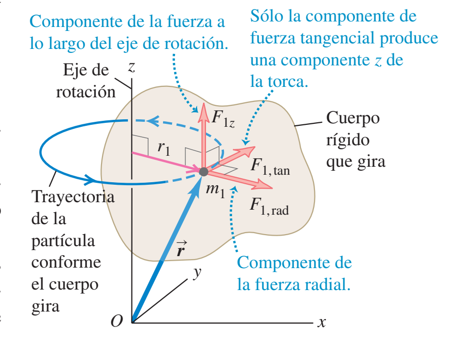
Por la ecuación (10.2), $F_{1,tan} r_1$ no es más que la *torca* de la fuerza total con respecto al eje de rotación (igual a la componente τ_{1z} del vector de la torca sobre dicho eje). El subíndice z nos recuerda que la torca afecta la rotación en torno al eje z, de la misma manera que el subíndice de F_{1z} nos recuerda que esta fuerza afecta el movimiento de la partícula 1 a lo largo del eje z.

Las componentes $F_{1,rad}$ y F_{1z} no contribuyen a la torca alrededor del eje z, pues ninguna tiende a modificar la rotación de la partícula alrededor de ese eje. Por lo tanto, $\tau_{1z} = F_{1,tan} r_1$ es la torca total que actúa sobre la partícula con respecto al eje de



7.8 Rotojuego: enfoque de dinámica
7.9 Escalera que cae
7.10 Mujer y elevador de volante: enfoque de dinámica

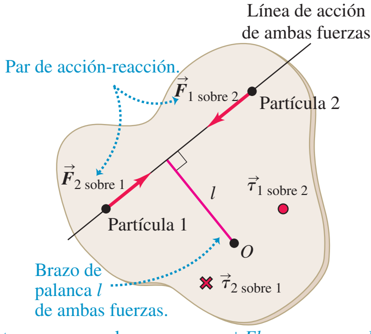
10.6 Puesto que un cuerpo rígido gira en torno al eje z, una fuerza total $\vec{F}_1$ actúa sobre una de las partículas del cuerpo. Sólo la componente de la fuerza $F_{1,tan}$ puede afectar la rotación, ya que sólo $F_{1,tan}$ ejerce una torca alrededor de O con una componente z (a lo largo del eje de rotación).



10.7 Para aflojar o apretar un tornillo, es preciso impartirle una aceleración angular y, por lo tanto, aplicar una torca. Esto se facilita si se usa un destornillador con mango de radio grande, pues así se aumenta el brazo de palanca de la fuerza que aplicamos con la mano.



10.8 Dos partículas de un cuerpo rígido ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre la otra. Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que va de una partícula a la otra, los brazos de palanca de las dos fuerzas son iguales y las torcas causados por ellas son iguales y opuestos. Sólo las torcas *externas* afectan la rotación de un cuerpo rígido.



rotación. Además, $m_1r_1^2$ es I_1, el momento de inercia de la partícula alrededor del eje de rotación. De esta manera, rescribimos la ecuación (10.5) como:

$$\tau_{1z} = I_1\alpha_z = m_1r_1^2\alpha_z$$

Escribimos una ecuación similar para cada partícula del cuerpo y luego sumamos todas las ecuaciones:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = I_1\alpha_z + I_2\alpha_z + \cdots = m_1r_1^2\alpha_z + m_2r_2^2\alpha_z + \cdots$$

es decir,

$$\sum \tau_{iz} = \left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha_z \tag{10.6}$$

El miembro izquierdo de la ecuación (10.6) es la suma de todas las torcas en torno al eje de rotación que actúan sobre todas las partículas. El miembro derecho es $I = \sum m_i r_i^2$, el momento de inercia total alrededor del eje de rotación, multiplicado por la aceleración angular α_z, la cual es la misma para todas las partículas porque se trata de un cuerpo *rígido*. Así, para el cuerpo rígido entero, tenemos el *análogo rotacional de la segunda ley de Newton*:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \tag{10.7}$$

(análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido)

Así como la segunda ley de Newton dice que la fuerza total que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la partícula multiplicada por su aceleración, la ecuación (10.7) dice que la torca total que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación multiplicado por su aceleración angular (figura 10.7).

Observe que como en nuestra deducción supusimos que la aceleración angular α_z es la misma para todas las partículas del cuerpo, la ecuación (10.7) *sólo* es válida para cuerpos *rígidos*. Si el cuerpo no es rígido, como un tanque de agua que gira o un remolino de aire, la aceleración angular es diferente para diferentes partículas del cuerpo. Además, como en la deducción utilizamos la ecuación (9.14), $a_{\tan} = r\alpha_z$, α_z debe medirse en rad/s^2.

La torca que actúa sobre cada partícula se debe a la fuerza neta que actúa sobre esa partícula, la cual es la suma vectorial de fuerzas externas e internas (véase la sección 8.2). Según la tercera ley de Newton, las fuerzas *internas* que cualquier par de partículas del cuerpo rígido ejercen una sobre la otra son iguales y opuestas (figura 10.8). Si estas fuerzas actúan sobre la línea que une las dos partículas, sus brazos de palanca con respecto a cualquier eje también serán iguales. Así, las torcas para tales fuerzas son iguales y opuestos, y suman cero. De hecho, *todas* las torcas internas suman cero, y la suma $\sum\tau_z$ de la ecuación (10.7) incluye sólo las torcas de las fuerzas *externas*.

Es común que una fuerza externa importante que actúa sobre un cuerpo sea su *peso*. Esta fuerza no se concentra en un solo punto: actúa sobre todas las partículas del cuerpo. No obstante, resulta que, si el valor de $\vec{g}$ es el mismo en todos los puntos, siempre obtenemos la torca correcta (alrededor de cualquier eje dado), si suponemos que todo el peso se concentra en el *centro de masa* del cuerpo. Demostraremos esto en el capítulo 11, pero mientras tanto lo usaremos en algunos problemas de este capítulo.

Estrategia para resolver problemas 10.1 Dinámica rotacional de cuerpos rígidos



Nuestra estrategia para resolver problemas de dinámica rotacional es muy similar a la Estrategia para resolver problemas 5.2 (sección 5.2) para resolver problemas donde interviene la segunda ley de Newton.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La ecuación $\sum\tau_z = I\alpha_z$ es útil en todos los casos en que las torcas actúan sobre un cuerpo rígido; es decir, siempre que fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido de manera tal que alteran el estado de rotación del cuerpo.

En algunos casos, podría preferirse un enfoque de energía, como se hizo en la sección 9.4; sin embargo, cuando la incógnita es una fuerza, una torca, una aceleración, una aceleración angular o un tiempo transcurrido, casi siempre es más conveniente usar $\sum\tau_z = I\alpha_z$.

PLANTEAR *el problema* empleando estos pasos:

1. Haga un dibujo de la situación y elija el cuerpo o los cuerpos que va a analizar.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo, marcando las cantidades desconocidas con símbolos algebraicos. Una nueva consideración es que se debe mostrar con exactitud la *forma* del cuer-

continúa

po, incluyendo todas las dimensiones y los ángulos que se necesitarán para los cálculos de una torca.

3. Elija ejes de coordenadas para cada cuerpo e indique un sentido de rotación positivo para cada cuerpo que gire. Si hay una aceleración lineal, lo más sencillo suele ser elegir un eje positivo en su dirección. Si ya conoce el sentido de α_z, se simplificarán los cálculos si se elige ése como sentido de rotación positivo.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Para cada cuerpo del problema, decida si sufre movimiento de rotación, movimiento de rotación o ambos. Por consiguiente, aplique $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ (como en la sección 5.2), $\sum \tau_z = I\alpha_z$, o ambas al cuerpo. Asegúrese de escribir ecuaciones de movimiento aparte para cada cuerpo.
2. Podría haber relaciones *geométricas* entre los movimientos de dos o más cuerpos, como cuando un hilo se desenrolla de una polea girándola, o cuando un neumático gira sin resbalar (lo que veremos en la sección 10.3). Expréselas en forma algebraica, por lo regular como relaciones entre dos aceleraciones lineales, o una aceleración lineal y una angular.
3. Verifique que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas. Resuelva las ecuaciones para obtener la o las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que los signos algebraicos de sus resultados sean lógicos. Por ejemplo, suponga que el problema se refiere a un carrete de hilo. Si se está sacando hilo del carrete, ¡las respuestas *no* deberán decirnos que el carrete gira en el sentido en que el hilo se enrolla! Siempre que pueda, verifique los resultados para casos especiales o valores extremos. Pregúntese: “¿es lógico este resultado?”

Ejemplo 10.2 Cable que se desenrolla I

La figura 10.9a muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.8 (sección 9.4) usando métodos de energía. Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50 kg con diámetro de 0.120 m, que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9.0 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, ¿qué aceleración tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita es la aceleración del cable, que no podemos obtener directamente empleando el método de energía de la sección 9.4 (pues en él no interviene la aceleración). En vez de ello, aplicaremos dinámica rotacional al cilindro. Para obtener la aceleración del cable, buscaremos una relación entre el movimiento del cable y el movimiento del borde del cilindro.

PLANTEAR: El cilindro gira en sentido antihorario cuando se tira del cable, así que tomamos como sentido de rotación positivo el antihorario. La fuerza neta que actúa sobre el cilindro debe ser cero porque su centro de masa permanece en reposos (figura 10.9b). El peso (de magnitud Mg) y la fuerza normal (de magnitud n) ejercidos por los cojinetes del cilindro actúan sobre líneas que pasan por el eje de rotación y, por lo tanto, dichas fuerzas no producen una torca con respecto a ese eje. La única torca alrededor del eje de rotación se debe a la fuerza F.

EJECUTAR: La fuerza F tiene un brazo de palanca que es igual al radio R del cilindro: $l = R = 0.060$ m, así que la torca debido a F es $\tau_z = FR$. (Esta torca es positiva porque tiende a producir una rotación antihoraria.) Por el ejemplo 9.8, el momento de inercia del cilindro en torno al eje de rotación es $I = \frac{1}{2}MR^2$. Por lo tanto, la ecuación (10.7) nos da la aceleración *angular* del cilindro:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0\ \text{N})}{(50\ \text{kg})(0.060\ \text{m})} = 6.0\ \text{rad/s}^2$$

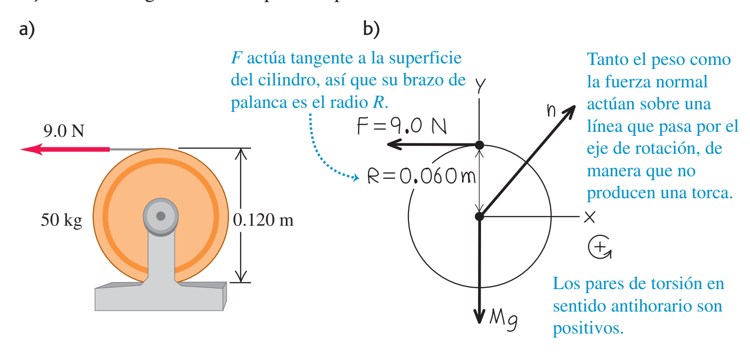
(Verifique que estas unidades sean correctas. Podemos añadir “rad” a nuestro resultado porque el radián es una cantidad adimensional.)

Para obtener la aceleración *lineal* del cable, necesitamos una relación cinemática. En la sección 9.3 señalamos que la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a él. Dicha aceleración tangencial está dada por la ecuación (9.14):

$$a_x = R\alpha = (0.060\ \text{m})(6.0\ \text{rad/s}^2) = 0.36\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: ¿Puede usar este resultado, junto con una ecuación del capítulo 2, para determinar la rapidez del cable una vez que se ha desenrollado 2.0 m? Inténtelo y compare su resultado con el ejemplo 9.8, donde obtuvimos esta rapidez usando consideraciones de trabajo y energía.

10.9 a) Cilindro y cable. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro.



Ejemplo 10.3 Cable que se desenrolla II

Repasemos la situación que analizamos en el ejemplo 9.9 (sección 9.4) usando métodos de energía. Calcule ahora la aceleración del bloque de masa m.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aplicaremos dinámica traslacional al bloque que cuelga y dinámica rotacional al cilindro. Puesto que el cable no resbala sobre el cilindro, existe una relación entre la aceleración lineal del bloque (nuestra incógnita) y la aceleración angular del cilindro.

PLANTEAR: En la figura 10.10 esbozamos la situación y dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo. Tomamos el sentido de rotación antihorario como positivo para el cilindro, y la dirección hacia abajo de la coordenada y como positiva para el objeto.

EJECUTAR: La segunda ley de Newton aplicada al objeto da

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$

Para el cilindro, el peso Mg y la fuerza normal n (ejercida por el cojinete) no tienen torcas con respecto al eje de rotación porque actúan sobre líneas que pasan por ese eje, igual que en el ejemplo 10.2. La única torca es la debida a la tensión del cable T. Aplicando la ecuación (10.7) al cilindro tenemos

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Al igual que en el ejemplo 10.2, la aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde del cilindro que, según la ecuación (9.14), es $a_y = a_{\tan} = R\alpha_z$. Usamos esto para sustituir $R\alpha_z$ por a_y en la ecuación anterior del cilindro y luego dividimos entre R; el resultado es

$$T = \frac{1}{2}Ma_y$$

Ahora sustituimos esta expresión para T en la segunda ley de Newton para el objeto y despejamos la aceleración a_y:

$$mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

EVALUAR: La aceleración es positiva (en la dirección hacia abajo) y menor que g, como debería ser ya que el cable está frenando al objeto. Para saber cuánta fuerza ejerce el cable, sustituimos nuestra expresión para a_y en la segunda ley de Newton para el objeto, obteniendo así T:

$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

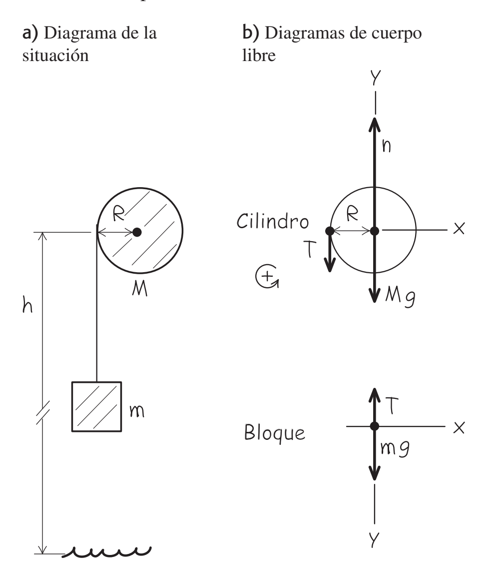
La tensión en el cable *no* es igual al peso mg del objeto; si así fuera, el objeto no podría acelerar.

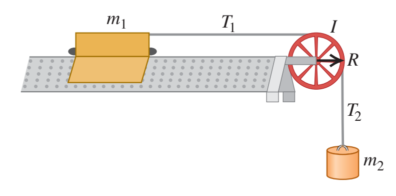
Revisemos algunos casos específicos. Si M es mucho mayor que m, la tensión es casi igual a mg, y por lo tanto la aceleración es mucho menor que g. Si M es cero, $T = 0$ y $a_y = g$; entonces, el objeto cae libremente. Si el objeto parte del reposo $(v_{0y} = 0)$ a una altura h sobre el piso, su rapidez y al golpear el piso está dada por $v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_yh = 2a_yh$, así que $v_0 = 0$

$$v_y = \sqrt{2a_yh} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Éste es el mismo resultado que obtuvimos usando consideraciones de energía en el ejemplo 9.9.

10.10 a) Nuestro diagrama de la situación. b) Nuestro diagrama de cuerpo libre para el cilindro y el bloque. Suponemos que el cable tiene masa despreciable.



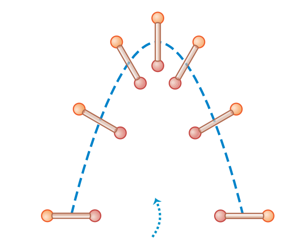


Evalúe su comprensión de la sección 10.2 La figura muestra un deslizador de masa m_1 que se mueve sin fricción sobre un riel de aire horizontal, sujeto a un objeto de masa m_2 con un cordón sin masa. La polea tiene radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. Cuando se suelta, el objeto colgante acelera hacia abajo, el deslizador acelera a la derecha y el cordón gira la polea deslizarse ni estirarse. Ordene, de mayor a menor, las magnitudes de las siguientes fuerzas que actúan durante el movimiento. i) la fuerza de tensión (magnitud T_1) en la parte horizontal del cordón; ii) la fuerza de tensión (magnitud T_2) en la parte vertical del cordón; iii) el peso m_2g del objeto colgante.

10.3 Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Podemos extender nuestro análisis de la dinámica del movimiento rotacional a algunos casos en los que se mueve el eje de rotación. En tal caso, el movimiento del cuerpo es de **traslación y rotación combinados**. La clave para entender estas situaciones es la siguiente: cada posible movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de *movimiento traslacional del centro de masa* y *rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa*. Esto se cumple aun si el centro de masa se acelera, de modo que no está en reposo en ningún marco inercial. La figura 10.11 ilustra esto para el movimiento de un bastón que se lanza: el centro de masa del bastón sigue una parábola, como si el bastón fuera una partícula situada en el centro de masa. Otros ejemplos de movimientos de traslación y de rotación combinados son una pelota que rueda cuesta abajo y un yoyo que se desenrolla.

10.11 El movimiento de un cuerpo rígido es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.



Traslación y rotación combinadas: Relaciones de energía

Demostrar que el movimiento de un cuerpo rígido siempre puede dividirse, en movimientos independientes de traslación del centro de masa y rotación alrededor del centro de masa, rebasa el alcance de este libro; no obstante, podemos comprobar que es cierto para la *energía cinética* de un cuerpo rígido con movimiento tanto traslacional como rotacional. En este caso, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$ asociada al movimiento del centro de masa y una parte $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ asociada a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa:

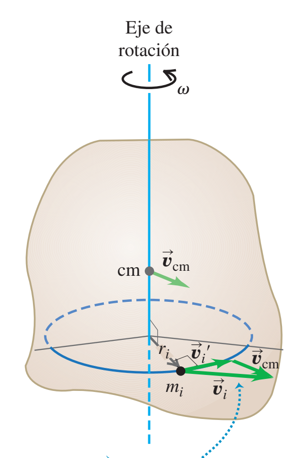
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \quad (10.8)$$

(cuerpo rígido con traslación y rotación)

Para demostrar esto, imaginamos otra vez que el cuerpo rígido se compone de partículas. Consideremos una partícula representativa de masa m_i, como se muestra en la figura 10.12. Su velocidad $\vec{v}_i$ relativa a un marco inercial es la suma vectorial de la velocidad $\vec{v}_{cm}$ del centro de masa y la velocidad $\vec{v}_i'$ de la partícula *relativa al centro de masa*:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i' \quad (10.9)$$

10.12 Cuerpo rígido con movimiento traslacional y rotacional.



La energía cinética K_i de esta partícula en el marco inercial es $\frac{1}{2}m_iv_i^2$, que también podemos expresar como $\frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$. Sustituyendo la ecuación (10.9) en esto, obtenemos

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}_i') \\ &= \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_i') \\ &= \frac{1}{2}m_i(v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + v_i'^2) \end{aligned}$$

La energía cinética total es la suma $\sum K_i$ para todas las partículas del cuerpo. Si expresamos los tres términos de la ecuación como sumas individuales:

$$K = \sum K_i = \sum\left(\frac{1}{2}m_iv_{cm}^2\right) + \sum(m_i\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i') + \sum\left(\frac{1}{2}m_iv_i'^2\right)$$

Los primeros dos términos tienen factores comunes que pueden sacarse de la sumatoria:

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)v_{cm}^2 + \vec{v}_{cm} \cdot \left(\sum m_i\vec{v}_i'\right) + \sum\left(\frac{1}{2}m_iv_i'^2\right) \quad (10.10)$$

Aquí viene la recompensa a nuestro esfuerzo. En el primer término, $\sum m_i$ es la masa total M. El segundo término es cero porque $\sum m_i \vec{v}'_i$ es M multiplicada por la velocidad del centro de masa *relativa al centro de masa*, que es cero por definición. El último término es la suma de las energías cinéticas de las partículas, calculada usando sus rapideces con respecto al centro de masa; ésta es la energía cinética de rotación alrededor de ese centro. Siguiendo los mismos pasos que nos llevaron a la ecuación (9.17) para la energía cinética rotacional de un cuerpo rígido, podemos escribir este último término como $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$, donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa y ω es la rapidez angular. Así, la ecuación (10.10) se convierte en la ecuación (10.8):

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$



7.11 Carrera entre un bloque y un disco

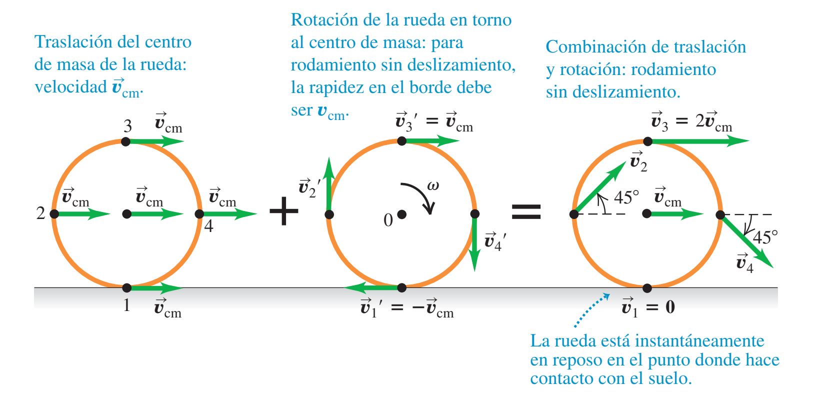
Rodamiento sin deslizamiento

Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin deslizar**, como el movimiento de la rueda que se muestra en la figura 10.13. La rueda es simétrica, así que su centro de masa está en su centro geométrico. Visualizamos el movimiento en un marco de referencia inercial, en el cual la superficie sobre la que se rueda está en reposo. Aquí, el punto de la rueda que toca la superficie debe estar instantáneamente *en reposo* para que no resbale. Por lo tanto, la velocidad $\vec{v}'_1$ del punto de contacto, relativa al centro de masa, debe tener la misma magnitud pero dirección opuesta que la velocidad del centro de masa $\vec{v}_{cm}$. Si el radio de la rueda es R y su rapidez angular alrededor del centro de masa es ω, la magnitud de $\vec{v}'_1$ es $R\omega$; por ello, debemos tener

$$v_{cm} = R\omega \qquad \text{(condición para rodar sin resbalar)} \qquad (10.11)$$

Como muestra la figura 10.13, la velocidad de un punto en la rueda es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa y la velocidad del punto relativa al centro de masa. Así, mientras el punto 1 (el de contacto) está momentáneamente en reposo, el punto 3 en la parte de arriba se mueve hacia adelante con el *doble de la rapidez* del centro de masa, y los puntos 2 y 4 a los lados tienen velocidades a 45° con la horizontal.

En un instante dado, podemos pensar que la rueda gira alrededor de un “eje de rotación instantáneo” que pasa por el punto de contacto con el suelo. La velocidad angular ω es la misma para este eje que para un eje que pasa por el centro de masa; un observador en el centro de masa ve que el borde da el mismo número de revoluciones por segundo, como un observador en el borde ve que el centro de masa da alrededor de él. Si vemos así el movimiento de la rueda de la figura 10.13, la energía cinética de la rueda es $K = \frac{1}{2}I_1\omega^2$, donde I_1 es el momento de inercia de la rueda alrededor de un



10.13 El movimiento de una rueda es la suma del movimiento traslacional del centro de masa y el movimiento rotacional de la rueda alrededor del centro de masa.

eje que pasa por el punto 1. Sin embargo, por el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19), $I_1 = I_{cm} + MR^2$, donde M es la masa total de la rueda e I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Usando la ecuación (10.11), la energía cinética de la rueda es

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2$$

que es igual a la ecuación (10.8).



10.14 El humo que se alza de los neumáticos traseros de este auto de arrancones indica que los neumáticos están resbalando sobre el pavimento, así que v_{cm} no es igual a $R\omega$.

CUIDADO **Rodamiento sin deslizamiento** Observe que es importante tener en cuenta que la relación $v_{cm} = R\omega$ se cumple *únicamente* si hay rodamiento sin deslizamiento. Cuando un automóvil de "arrancones" comienza a moverse, los neumáticos traseros están girando con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que $R\omega$ es mayor que v_{cm} (figura 10.14). Si el conductor aplica los frenos con demasiada fuerza y el coche derrapa, los neumáticos casi no girarán y $R\omega$ será menor que v_{cm}.

Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional. Como vimos en la sección 9.4, la energía potencial gravitacional asociada a cualquier cuerpo extendido de masa M, rígido o no, es la misma que si sustituimos el cuerpo por una partícula de masa M situada en el centro de masa del cuerpo. Esto es,

$$U = Mgy_{cm}$$

Ejemplo 10.4 Rapidez de un yoyo burdo

Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R (figura 10.15). Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez v_{cm} del centro de masa del cilindro sólido después de caer una distancia h.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El extremo superior del cordel está fijo, no se tira de él hacia arriba, así que la mano de la figura 10.15 no efectúa trabajo sobre el sistema del cordel y cilindro. Al igual que en el ejemplo 9.8 (sección 9.4), hay fricción entre el cordel y el cilindro pero, como el cordel no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica y podemos usar la conservación de la energía mecánica..

PLANTEAR: Las energías potenciales son $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$. El cordel no tiene energía cinética porque no tiene masa. La energía cinética inicial del cilindro es $K_1 = 0$, y la energía cinética final K_2 está dada por la ecuación (10.8). El momento de inercia es $I = \frac{1}{2}MR^2$, y $\omega = v_{cm}/R$ porque el cilindro no resbala en el cordel.

EJECUTAR: Utilizando la ecuación (10.8), la energía cinética en el punto 2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv_{cm}{}^2$$

La energía cinética es $1\frac{1}{2}$ veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez v_{cm} sin girar. Dos tercios de la energía cinética total $\left(\frac{1}{2}Mv_{cm}{}^2\right)$ son traslacionales y un tercio $\left(\frac{1}{4}Mv_{cm}{}^2\right)$ es rotacional. Entonces, la conservación de la energía

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

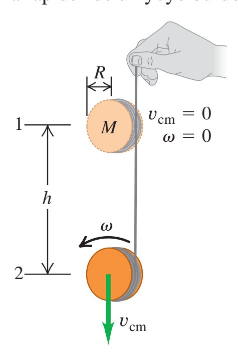
$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}{}^2 + 0$$

y

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

EVALUAR: Ésta es menor que la rapidez $\sqrt{2gh}$ que tendría un objeto que se deja caer, porque conforme el cilindro cae un tercio de la energía potencial liberada aparece como energía cinética rotacional.

10.15 Cálculo de la rapidez de un yoyo burdo.



Ejemplo 10.5 Carrera de cuerpos rodantes

En la demostración de una conferencia de física, un profesor "pone a competir" diversos cuerpos rígidos redondos, soltándolos del reposo desde arriba de un plano inclinado (figura 10.16). ¿Qué forma debe tener un cuerpo para llegar a la base primero?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: De nuevo, podemos usar conservación de la energía porque los cuerpos rígidos no resbalan sobre él plano inclinado. La fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar. También podemos despreciar los efectos de la *fricción de rodamiento*, presentada en la sección 5.3, si los cuerpos y la superficie sobre la que ruedan son perfectamente rígidos. (Más adelante explicaremos por qué.)

PLANTEAR: Cada cuerpo parte del reposo desde arriba de una pendiente de altura h, así que $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ y $U_2 = 0$. La energía cinética en la base del plano está dada por la ecuación (10.8). Si los cuerpos ruedan sin resbalar, $\omega = v_{cm}/R$. Los momentos de inercia de todos los cuerpos redondos de la tabla 9.2 (alrededor de ejes que pasan por su centro de masa) pueden expresarse como $I_{cm} = cMR^2$, donde c es un número puro menor o igual que 1 que depende de la forma del cuerpo. Nuestro objetivo es hallar el valor de c que proporciona al cuerpo la más alta rapidez en la base del plano inclinado.

EJECUTAR: Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 + 0$$

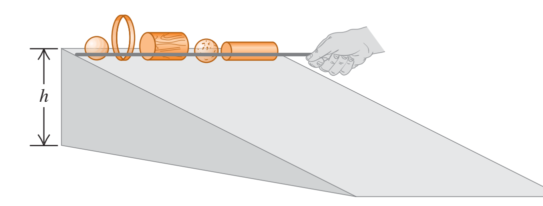
$$= \frac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

así que la rapidez en la base de la pendiente es

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

EVALUAR: Este resultado es sorprendente; la rapidez no depende de la masa M del cuerpo ni de su radio R. Todos los cilindros sólidos uniformes tienen la misma rapidez abajo, aun si sus masas y sus radios son diferentes, porque tienen la misma c. Todas las esferas sólidas tienen la misma rapidez, etcétera. Cuanto menor sea c, mayor será la rapidez del cuerpo en la base (y en cualquier punto de la bajada). Los cuerpos con c pequeña siempre vencen a aquellos con c grande, porque menos de su energía cinética se dedica a rotación y más a traslación. Si leemos los valores de c de la tabla 9.2, vemos que el orden de llegada es: cualquier esfera sólida, cualquier cilindro sólido, cualquier esfera hueca de pared delgada y cualquier cilindro hueco de pared delgada.

10.16 ¿Cuál cuerpo baja más rápido y por qué?



Traslación y rotación combinadas: Dinámica

También podemos analizar los movimientos traslacional y rotacional combinados de un cuerpo rígido desde la perspectiva de la dinámica. En la sección 8.5 mostramos que, para un cuerpo de masa total M, la aceleración $\vec{a}_{cm}$ del centro de masa es igual a la de una masa puntual M sobre la que actúan todas las fuerzas externas a las que está sujeto el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \qquad (10.12)$$

El movimiento rotacional alrededor del centro de masa se describe mediante el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, ecuación (10.7):

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \qquad (10.13)$$

donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y $\sum\tau_z$ incluye todas las torcas externas con respecto a este eje. No es evidente de inmediato que la ecuación (10.13) sea aplicable al movimiento de un cuerpo rígido en traslación; después de todo, nuestra deducción de $\sum\tau_z = I\alpha_z$ en la sección 10.2 dio por hecho que el eje de rotación era estacionario. No obstante, la ecuación (10.13) es válida *aún si el eje de rotación se mueve*, siempre y cuando se satisfagan estas condiciones:

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.
2. El eje no debe cambiar de dirección.

10.17 El eje de una rueda de bicicleta pasa por el centro de masa de la rueda y es un eje de simetría. Por lo tanto, la rotación de la rueda está descrita por la ecuación (10.13), siempre que la bicicleta no dé la vuelta ni se incline hacia un lado (lo cual alteraría la orientación del eje).



Estas condiciones se satisfacen en muchos tipos de rotación (figura 10.17). Cabe señalar que, en general, este eje de rotación móvil *no* está en reposo en un marco de referencia inercial.

Ahora podemos resolver problemas de dinámica donde intervengan cuerpos rígidos con movimientos traslacional y rotacional simultáneos, siempre que el eje de rotación

cumpla las dos condiciones anteriores. La Estrategia de resolución de problemas 10.1 (sección 10.2) es igualmente útil aquí, y le recomendamos repasarla. Tenga presente que, si un cuerpo tiene movimientos traslacional y rotacional al mismo tiempo, necesitamos dos ecuaciones de movimiento independientes *para el mismo cuerpo*. Una de éstas, la ecuación (10.12), describe la traslación del centro de masa. La otra, ecuación (10.13), describe la rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa.

Ejemplo 10.6 Aceleración de un yoyo burdo

Para el yoyo burdo del ejemplo 10.4 (figura 10.18a), calcule la aceleración hacia abajo del cilindro y la tensión en el cordel.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La figura 10.18b es un diagrama de cuerpo libre del yoyo, donde se indican las direcciones de las coordenadas positivas. Con estas coordenadas, las incógnitas son $a_{\text{cm-}y}$ y T.

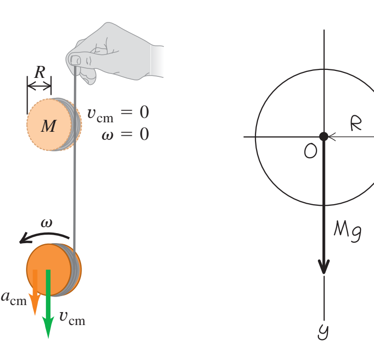
PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (10.12) y (10.13), junto con la condición que el cordel no resbale en el cilindro.

EJECUTAR: La ecuación para la traslación del centro de masa es

$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{\text{cm-}y} \qquad (10.14)$$

10.18 Dinámica de un yoyo burdo (véase la figura 10.15).

a) El yoyo b) Diagrama de cuerpo libre del yoyo



El momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$. Sólo la fuerza de tensión tiene una torca con respecto a dicho eje, así que la ecuación para la rotación alrededor de él es

$$\sum \tau_z = TR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z \qquad (10.15)$$

El cordel se desenrolla sin resbalar, así que $v_{\text{cm-}z} = R\omega_z$ por la ecuación (10.11); la derivada de esta relación con respecto al tiempo es

$$a_{\text{cm-}y} = R\alpha_z \qquad (10.16)$$

Ahora usamos la ecuación (10.16) para eliminar α_z de la ecuación (10.15) y despejamos las ecuaciones (10.14) y (10.15) simultáneamente para obtener T y $a_{\text{cm-}y}$. Estos resultados son sencillísimos:

$$a_{\text{cm-}y} = \frac{2}{3}g \qquad T = \frac{1}{3}Mg$$

Usando la fórmula de aceleración constante $v_{\text{cm-}y}{}^2 = v_{\text{cm-}0y}{}^2 + 2a_{\text{cm-}y}h$, podemos demostrar que la rapidez del yoyo después de caer una distancia h es $v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$, como determinamos en el ejemplo 10.4.

EVALUAR: Desde el punto de vista de la dinámica, la fuerza de tensión es fundamental: hace que la aceleración del yoyo sea menor que g, y su torca hace girar al yoyo. No obstante, cuando analizamos esta situación usando métodos de energía en el ejemplo 10.4, ¡no tuvimos que considerar la tensión! Puesto que no se perdió ni se ganó energía mecánica, desde el punto de vista energético el cordel sólo es importante porque ayuda a convertir parte de la energía potencial gravitacional en energía cinética rotacional.

Ejemplo 10.7 Aceleración de una esfera rodante

Una bola de bolos sólida rueda sin resbalar por la rampa de retorno junto a la mesa de boliche (figura 10.19a). La rampa forma un ángulo β con la horizontal. ¿Qué aceleración tiene la bola y cuál es la magnitud de la fuerza de fricción sobre ésta? Trate la bola como esfera sólida uniforme, despreciando los agujeros.

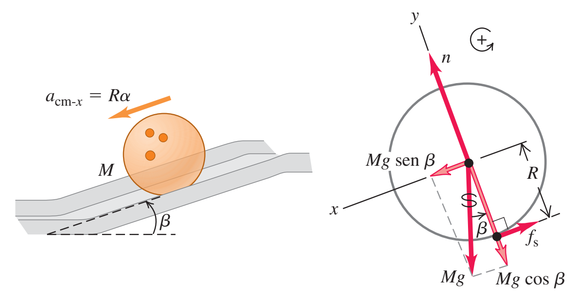
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las incógnitas son la aceleración del centro de masa de la bola y la magnitud de la fuerza de fricción. El diagrama de cuerpo libre de la figura 10.19b muestra que sólo la fuerza de fricción ejerce una torca en torno al centro de masa.

PLANTEAR: Al igual que en el ejemplo 10.6, usaremos la ecuación (10.12) para describir el movimiento traslacional; y la ecuación (10.13), para el movimiento rotacional.

10.19 Una bola de bolos baja rodando una rampa.

a) La bola de bolos b) Diagrama de cuerpo libre de la bola de bolos



continúa

EJECUTAR: De la tabla 9.2, el momento de inercia de una esfera sólida es $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2$. Las ecuaciones de movimiento para traslación y para rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa son, respectivamente,

$$\sum F_x = Mg\,\text{sen}\,\beta + (-f) = Ma_{\text{cm-}x} \tag{10.17}$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{cm}\alpha_z = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \tag{10.18}$$

Si la bola rueda sin resbalar, tenemos la misma relación cinemática $a_{\text{cm-}x} = R\alpha_z$ que en el ejemplo 10.6. Usamos esto para eliminar α_z de la ecuación (10.18):

$$fR = \frac{2}{5}MRa_{\text{cm-}x}$$

Ésta y la ecuación (10.17) son dos ecuaciones para dos incógnitas, $a_{\text{cm-}x}$ y f. Despejamos f de la ecuación (10.17), sustituimos en la ecuación anterior para eliminar f y luego despejamos $a_{\text{cm-}x}$ para obtener

$$a_{\text{cm-}x} = \frac{5}{7}g\,\text{sen}\,\beta$$

La aceleración es $\frac{5}{7}$ de lo que sería si la bola pudiera *deslizarse* sin fricción por la rampa, como el trineo del ejemplo 5.10 (sección 5.2). Por último, sustituimos esto en la ecuación (10.17) y despejamos f:

$$f = \frac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\beta$$

EVALUAR: Como la bola no resbala en el punto de contacto instantáneo con la rampa, f es una fuerza de fricción *estática*; evita el deslizamiento y da a la bola su aceleración angular. Podemos deducir una ecuación para el coeficiente de fricción estática μ_s mínimo necesario para evitar el deslizamiento. La fuerza normal es $n = Mg\cos\beta$. La fuerza máxima de fricción estática es $\mu_s n$, así que el coeficiente de fricción debe ser de, por lo menos,

$$\mu_s = \frac{f}{n} = \frac{\frac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\beta}{Mg\cos\beta} = \frac{2}{7}\tan\beta$$

Si el plano no está muy inclinado, β es pequeña, y no se requiere un valor de μ_s grande para evitar el deslizamiento. Al aumentar el ángulo, aumenta el valor requerido de μ_s, como indicaría la intuición. Si la bola comienza a resbalar, las ecuaciones (10.17) y (10.18) siguen siendo válidas; pero ya no se cumple que $v_{\text{cm-}x} = R\omega_z$ y $a_{\text{cm-}x} = R\alpha_z$; sólo tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas ($a_{\text{cm-}x}$, α_z y f). La resolución del problema de rodamiento *con* deslizamiento requiere considerar la fricción *cinética* (véase el problema de desafío 10.101).

Si la bola desciende una distancia vertical h al bajar por la rampa, su desplazamiento sobre la rampa es $h/\text{sen}\,\beta$. El lector deberá ser capaz de demostrar que la rapidez de la bola en la base de la rampa sería $v_{cm} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$, que es el resultado que obtuvimos en el ejemplo 10.5 con $c = \frac{2}{5}$.

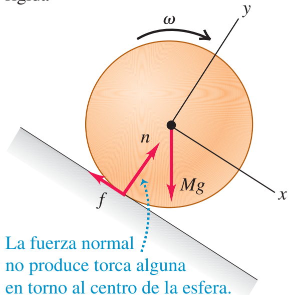
Si la bola rodara de *subida*, la fuerza de fricción también estaría dirigida pendiente arriba, como en la figura 10.19b. ¿Sabe usted por qué?

Fricción de rodamiento

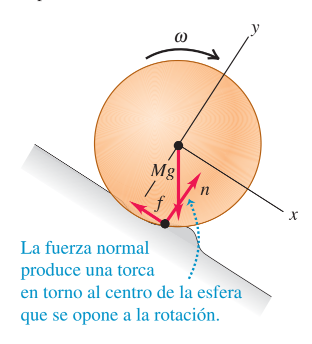
En el ejemplo 10.5 dijimos que podemos despreciar la fricción de rodamiento, si tanto el cuerpo como la superficie sobre la que rueda son perfectamente rígidos. En la figura 10.20a una esfera perfectamente rígida baja rodando una pendiente perfectamente rígida. La línea de acción de la fuerza normal pasa por el centro de la esfera, así que la torca es cero; no hay deslizamiento en el punto de contacto, así que la fricción no efectúa trabajo. La figura 10.20b muestra una situación más realista donde la superficie "se amontona" delante de la esfera y ésta rueda en una zanja poco profunda. Debido a tales deformaciones, las fuerzas de contacto sobre la esfera ya no actúan en un solo punto, sino en un área, concentrándose en el frente de la esfera como se indica. En consecuencia, la fuerza normal ejerce ahora una torca que se opone a la rotación. Además, hay cierto deslizamiento de la esfera en la superficie debido a la deformación, causando pérdida de energía mecánica. La combinación de estos dos efectos es el fenómeno de *fricción de rodamiento*, que también ocurre si el cuerpo que rueda es deformable, como el neumático de un automóvil. Es común que el cuerpo que rueda y la superficie tengan la suficiente rigidez como para despreciar la fricción de rodamiento, y esto es lo que hemos hecho en los ejemplos de la sección.

10.20 Rodamiento descendente sobre a) una superficie perfectamente rígida y b) una superficie deformable. En el inciso b), la deformación se muestra muy exagerada.

a) Esfera perfectamente rígida que baja rodando por una superficie perfectamente rígida



b) Esfera rígida que rueda sobre una superficie deformable



Evalúe su comprensión de la sección 10.3 Suponga que el cilindro sólido que utilizó como yoyo en el ejemplo 10.6 se remplaza con un cilindro hueco de los mismos masa y radio. *a*) La aceleración del yoyo i) aumentará, ii) disminuirá o iii) permanecerá igual? *b*) La tensión en el cordel i) aumentará, ii) disminuirá o iii) permanecerá igual?

10.4 Trabajo y potencia en movimiento rotacional

Cuando pedaleamos una bicicleta, aplicamos fuerzas a un cuerpo en rotación y efectuamos trabajo sobre él. Algo similar ocurre en otras situaciones de la vida real, como el eje de un motor que gira, e impulsa una herramienta de potencia o un vehículo. Podemos expresar el trabajo en términos de la torca y el desplazamiento angular.

Suponga que una fuerza tangencial $\vec{F}_{tan}$ actúa en el borde de un disco pivoteado; por ejemplo, una niña que corre empujando un carrusel sencillo (figura 10.21a). La rueda gira un ángulo infinitesimal $d\theta$ alrededor de un eje fijo durante un tiempo infinitesimal dt (figura 10.21b). El trabajo dW efectuado por $\vec{F}_{tan}$ mientras un punto del borde se mueve una distancia ds es $dW = F_{tan}\,ds$. Si $d\theta$ se mide en radianes, entonces, $ds = R\,d\theta$ y

$$dW = F_{tan}R\,d\theta$$

Ahora $F_{tan}R$ es la *torca* τ_z debido a la fuerza $\vec{F}_{tan}$, así que

$$dW = \tau_z\,d\theta \qquad (10.19)$$

El trabajo total W efectuado por la torca durante un desplazamiento angular de θ_1 a θ_2 es

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z\,d\theta \qquad \text{(trabajo efectuado por una torca)} \qquad (10.20)$$

Si la torca es *constante* y el cambio de ángulo es finito $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$,

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z\Delta\theta \quad \text{(trabajo efectuado por una torca constante)} \qquad (10.21)$$

El trabajo efectuado por una torca *constante* es el producto de la torca y el desplazamiento angular. Si la torca se expresa en $(\text{N}\cdot\text{m})$ y el desplazamiento angular en radianes, el trabajo está en joules. La ecuación (10.21) es el análogo rotacional de la ecuación (6.1), $W = Fs$, y la ecuación (10.20) es el análogo de la ecuación (6.7), $W = \int F_x\,dx$, para el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento rectilíneo.

Si la fuerza de la figura 10.21 tuviera una componente axial (paralela al eje de rotación) o radial (dirigida hacia el eje o alejándose de éste), dicha componente no efectuaría trabajo, porque el desplazamiento del punto de aplicación sólo tiene componente tangencial. Una componente de fuerza axial o radial tampoco contribuiría a la torca alrededor del eje de rotación, así que las ecuaciones (10.20) y (10.21) son correctas para *cualquier* fuerza, independientemente de sus componentes.

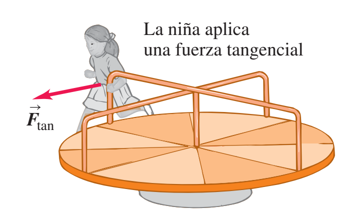
Si una torca efectúa trabajo sobre un cuerpo rígido que gira, la energía cinética cambia en una cantidad igual a ese trabajo. Podemos demostrar esto usando exactamente el mismo procedimiento que en las ecuaciones (6.11) a (6.13) para la energía cinética traslacional una partícula. Sea τ_z la torca neta sobre el cuerpo, de modo que, por la ecuación (10.7), $\tau_z = I\alpha_z$, suponiendo que el cuerpo es rígido y, por lo tanto, tiene momento de inercia I constante. Transformamos el integrando de la ecuación (10.20) en una integral sobre ω_z así:

$$\tau_z d\theta = (I\alpha_z)\,d\theta = I\frac{d\omega_z}{dt}\,d\theta = I\frac{d\theta}{dt}\,d\omega_z = I\omega_z\,d\omega_z$$

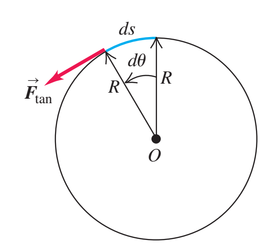
10.21 Una fuerza tangencial aplicada a un cuerpo en rotación efectúa trabajo.



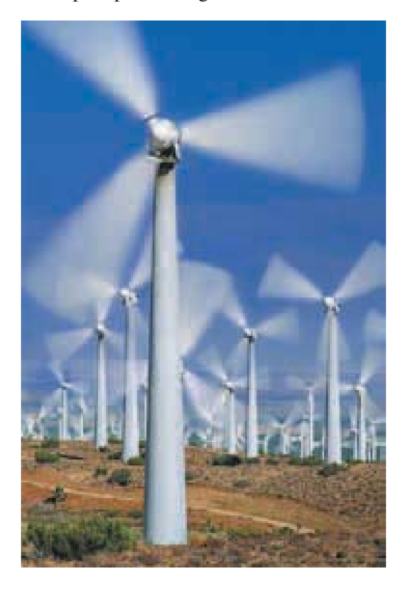
a)



b) Vista superior del carrusel



10.22 La energía cinética rotacional de un aerogenerador es igual al trabajo total efectuado para ponerlo a girar.



Dado que τ_z es la torca total, la integral de la ecuación (10.20) es el trabajo *total* efectuado sobre el cuerpo rígido en rotación. Así, la ecuación se convierte en

$$W_{tot} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z \, d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \qquad (10.22)$$

El cambio de energía cinética rotacional de un cuerpo *rígido* es igual al trabajo efectuado por fuerzas ejercidas desde afuera del cuerpo (figura 10.22). Esta ecuación es análogo a la ecuación (6.13), el teorema trabajo-energía para una partícula.

¿Qué hay con la *potencia* asociada al trabajo efectuado por una torca sobre un cuerpo en rotación? Si dividimos ambos miembros de la ecuación (10.19) entre el intervalo dt durante el que se da el desplazamiento angular:

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

Sin embargo, dW/dt es la rapidez con que se efectúa trabajo, o *potencia P*, y $d\theta/dt$ es velocidad angular ω_z, así que

$$P = \tau_z \omega_z \qquad (10.23)$$

Si una torca τ_z (con respecto al eje de rotación) actúa sobre un cuerpo que gira con velocidad angular ω_z, su potencia (rapidez con que efectúa trabajo) es el producto de τ_z y ω_z. Esto es el análogo de la relación $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ que desarrollamos en la sección 6.4 para el movimiento de partículas.

Ejemplo 10.8 Potencia de motores y torca

La potencia desarrollada por el motor de un automóvil se anuncia como 200 hp a 6000 rpm. Calcule la torca correspondiente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación entre potencia, velocidad angular y la torca (la incógnita).

PLANTEAR: Nos dan la potencia desarrollada P y la velocidad angular ω_z, así que podemos obtener la torca con la ecuación (10.23).

EJECUTAR: Primero debemos convertir la potencia a watts, y la velocidad angular a rad/s:

$$P = 200 \text{ hp} = 200 \text{ hp}\left(\frac{746 \text{ W}}{1 \text{ hp}}\right) = 1.49 \times 10^5 \text{ W}$$

$$\omega_z = 6000 \text{ rev/min} = \left(\frac{6000 \text{ rev}}{1 \text{ min}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 628 \text{ rad/s}$$

Por la ecuación (10.23),

$$\tau_z = \frac{P}{\omega_z} = \frac{1.49 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m/s}}{628 \text{ rad/s}} = 237 \text{ N}\cdot\text{m}$$

EVALUAR: Podríamos aplicar esta torca usando una llave de tuercas de 0.25 m de largo y aplicando una fuerza de 948 N (213 lb) al extremo de su mango. ¿Podría el lector hacerlo?

Ejemplo 10.9 Cálculo de potencia a partir de la torca

Un motor eléctrico ejerce una torca constante de 10 N · m sobre una piedra de amolar montada en un eje. El momento de inercia de la piedra es de 2.0 kg · m^2 y el sistema parte del reposo. Calcule el trabajo efectuado por el motor en 8.0 segundos y la energía cinética al final de este lapso. ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que la torca es constante, la piedra de amolar tiene una aceleración angular constante α_z. Si podemos calcular el valor de α_z, obtendremos el ángulo $\Delta\theta$ que la piedra gira en 8 s [lo cual, por la ecuación (10.21), nos da el trabajo efectuado W] y la velocidad angular ω_z en ese momento (que nos da la energía cinética K). Podemos obtener la potencia media P_{med} dividiendo el trabajo efectuado entre el tiempo.

PLANTEAR: Usamos la versión rotacional de la segunda ley de Newton, $\sum\tau_z = I\alpha_z$, para obtener la aceleración angular α_z. Entonces usamos las ecuaciones de cinemática de la sección 9.2 para calcular $\Delta\theta$ y ω_z y a partir de estos valores calcular W, K y P_{med}.

EJECUTAR: Tenemos $\sum\tau_z = 10$ N · m (la única torca que actúa se debe al motor) e $I = 2.0$ kg · m^2, así que, por $\sum\tau_z = I\alpha_z$, la aceleración angular es de 5.0 rad/s^2. Por la ecuación (9.11), el ángulo total que el sistema gira en 8.0 s es

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5.0 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s})^2 = 160 \text{ rad}$$

y el trabajo total efectuado por la torca es

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10\ \text{N}\cdot\text{m})(160\ \text{rad}) = 1600\ \text{J}$$

Por las ecuaciones (9.7) y (9.17), la velocidad angular y la energía cinética en $t = 8.0$ s son

$$\omega_z = \alpha_z t = (5.0\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s}) = 40\ \text{rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2} I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(2.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s})^2 = 1600\ \text{J}$$

La energía cinética inicial era cero, de manera que el trabajo efectuado es igual al incremento en la energía cinética [véase la ecuación (10.22)].

La potencia media es

$$P_{\text{med}} = \frac{1600\ \text{J}}{8.0\ \text{s}} = 200\ \text{J/s} = 200\ \text{W}$$

EVALUAR: Podemos comprobar el valor que obtuvimos para la potencia *media* considerando la potencia *instantánea*, $P = \tau_z \omega_z$. Observe que, dado que ω_z aumenta continuamente, P también aumenta continuamente; su valor es cero en $t = 0$ y aumenta a (10 N · m) (40 rad/s) = 400 W en $t = 8.0$ s. La velocidad angular y la potencia aumentan uniformemente con el tiempo, así que la potencia *media* es la mitad de este valor máximo, es decir, 200 W.

Evalúe su comprensión de la sección 10.4 Se aplican torcas iguales a dos cilindros distintos, uno de los cuales tiene un momento de inercia dos veces mayor que el del otro. Los dos cilindros están inicialmente en reposo. Después de una rotación completa, ¿cuál cilindro tiene mayor energía cinética? i) El cilindro con el momento de inercia mayor; ii) el cilindro con el momento de inercia menor; iii) ambos cilindros tienen la misma energía cinética.

10.5 Momento angular

Todas las cantidades rotacionales que hemos visto en los capítulos 9 y 10 son análogas a un momento lineal o cantidad en el movimiento traslacional de una partícula. El análogo del momento lineal o *cantidad de movimiento* de una partícula en movimiento rotacional, es el **momento angular**, una cantidad vectorial denotada con $\vec{L}$. Su relación con el momento lineal o cantidad de movimiento $\vec{p}$ (que a veces llamaremos *cantidad de movimiento lineal* o momento lineal por claridad) es exactamente la misma que entre la torca y la fuerza, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Para una partícula de masa constante m, velocidad $\vec{v}$, momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$, y vector de posición $\vec{r}$ relativo al origen O de un marco inercial, definimos el momento angular $\vec{L}$ como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \text{(momento angular de una partícula)} \qquad (10.24)$$

El valor de $\vec{L}$ depende del origen O elegido, ya que en él interviene el vector de posición de la partícula relativo al origen. Las unidades del momento angular son kg · m²/s.

En la figura 10.23, una partícula se mueve en el plano xy; se muestran su vector de posición $\vec{r}$ y su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. El vector momento angular $\vec{L}$ es perpendicular al plano xy. La regla de la mano derecha para productos vectoriales nos indica que su dirección es en el eje $+z$, y su magnitud es

$$L = mvr\,\text{sen}\,\phi = mvl \qquad (10.25)$$

donde l es la distancia perpendicular desde la línea de $\vec{v}$ a O. Esta distancia hace las veces de "brazo de palanca" para el vector de momento lineal.

Si una fuerza neta $\vec{F}$ actúa sobre una partícula, cambian su velocidad y su momento lineal, y también puede cambiar su momento angular. Podemos demostrar que la *rapidez de cambio* del momento angular es igual a la torca de la fuerza neta. Derivamos la ecuación (10.24) con respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

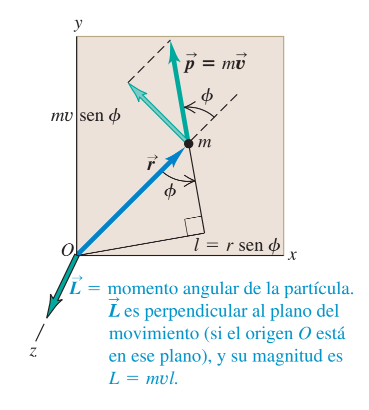
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right) + \left(\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

El primer término es cero porque contiene el producto vectorial de $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ consigo mismo. En el segundo término sustituimos $m\vec{a}$ por la fuerza neta $\vec{F}$, obteniendo

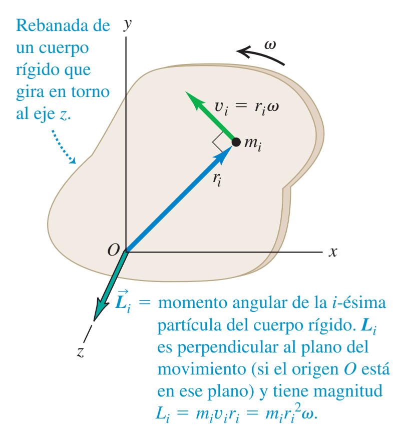
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad \text{(para una partícula sobre la que actúa una fuerza neta } \vec{F}) \qquad (10.26)$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Compare este resultado con la ecuación

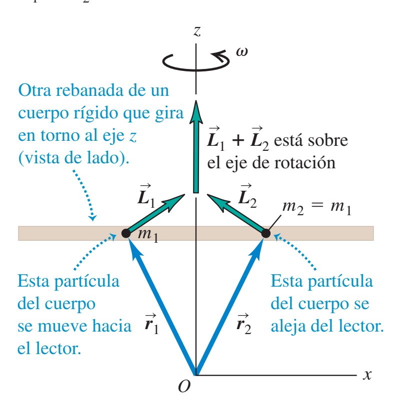
10.23 Cálculo del momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ de una partícula de masa m que se mueve en el plano xy.



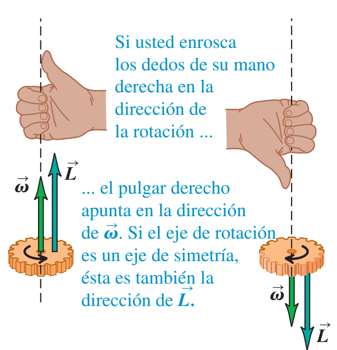
10.24 Cálculo del momento angular de una partícula de masa m_i en un cuerpo rígido que gira con rapidez angular ω. (Compare con la figura 10.23.)



10.25 Dos partículas con la misma masa están situadas simétricamente a cada lado del eje de rotación de un cuerpo rígido. Aunque los vectores de momento angular $\vec{L}_1$ y $\vec{L}_2$ de las dos partículas no están a lo largo del eje de rotación, su suma vectorial $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$ sí lo está.



10.26 En la rotación alrededor de un eje de simetría, $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ son paralelas y están sobre el eje. Las direcciones de ambos vectores están dadas por la regla de la mano derecha (compare con la figura 9.5).



(8.3), que dice que la rapidez de cambio $d\vec{p}/dt$ de la cantidad de movimiento *lineal* o *momento lineal* de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella.

Momento angular de un cuerpo rígido

Podemos usar la ecuación (10.25) para calcular el momento angular total de un *cuerpo rígido* que gira en torno al eje z con rapidez angular ω. Consideremos primero una rebanada del cuerpo que está en el plano xy (figura 10.24). Cada partícula de la rebanada se mueve en un círculo centrado en el origen, y en cada instante su velocidad $\vec{v}_i$ es perpendicular a su vector de posición $\vec{r}_i$, como se indica. Por consiguiente, en la ecuación (10.25), $\phi = 90°$ para toda partícula. Una partícula de masa m_i que está a una distancia r_i de O tiene una rapidez v_i igual a $r_i\omega$. Por la ecuación (10.25), la magnitud L_i de su momento angular es

$$L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_i r_i^2\omega \qquad (10.27)$$

La dirección del momento angular de cada partícula, dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial, es sobre el eje $+z$.

El momento angular *total* de la rebanada que está en el plano xy es la suma $\sum L_i$ de los momentos angulares L_i de las partículas. Haciendo la sumatoria de la ecuación (10.27), tenemos

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$

donde I es el momento de inercia de la rebanada alrededor del eje z.

Podemos efectuar este mismo cálculo para las demás rebanadas del cuerpo, todas paralelas al plano xy. Para los puntos que no están en ese plano, surge una complicación porque los vectores $\vec{r}$ tienen componentes en la dirección z además de las direcciones x y y; esto da al momento angular de cada partícula una componente perpendicular al eje z. Pero *si el eje z es un eje de simetría*, las componentes perpendiculares de partículas en lados opuestos de este eje suman cero (figura 10.25). Así, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje de simetría, su vector de momento angular $\vec{L}$ queda sobre el eje de simetría y su magnitud es $L = I\omega$.

El vector de velocidad angular $\vec{\omega}$ también está sobre el eje de rotación, como vimos al final de la sección 9.1. Así, para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría, $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ tienen la misma dirección (figura 10.26), y tenemos la relación *vectorial*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad \text{(para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría)} \qquad (10.28)$$

Por la ecuación (10.26), la rapidez de cambio del momento angular de una partícula es igual a la torca de la fuerza neta que actúa sobre ella. Para cualquier sistema de partículas (incluidos cuerpos rígidos y no rígidos), la rapidez de cambio del momento *total* es igual a la suma de las torcas de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas. Las torcas de las fuerzas *internas* suman cero si las fuerzas actúan sobre la línea que va de una partícula a otra, como en la figura 10.8, así que la suma de las torcas sólo incluye las torcas de las fuerzas *externas*. (Hubo una cancelación similar cuando hablamos del movimiento del centro de masa en la sección 8.5.) Si el momento angular total del sistema de partículas es $\vec{L}$ y la suma de las torcas externas es $\sum\vec{\tau}$, entonces

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(para cualquier sistema de partículas)} \qquad (10.29)$$

Por último, si el sistema de partículas es un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría (el eje z), $L_z = I\omega_z$ e I es constante. Si el eje tiene dirección fija en el espacio, los vectores $\vec{L}$ y $\vec{\omega}$ sólo cambian en magnitud, no de dirección. En tal caso, $dL_z/dt = I\,d\omega_z/dt = I\alpha_z$, es decir,

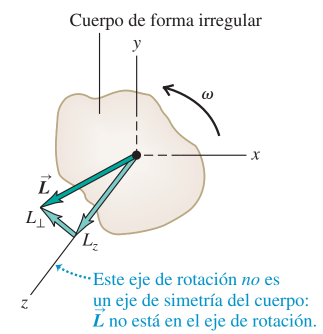
$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

que es otra vez nuestra relación básica para la dinámica de la rotación de un cuerpo rígido. Si el cuerpo *no* es rígido, I puede cambiar; en tal caso, L cambiará aun si ω es constante. Para un cuerpo que no es rígido, la ecuación (10.29) seguirá siendo válida, pero la ecuación (10.7) no.

Si el eje de rotación *no* es un eje de simetría, el momento angular en general *no* es paralela al eje (figura 10.27). Al girar el cuerpo, el vector de momento angular $\vec{L}$ describe un cono alrededor del eje de rotación. Dado que $\vec{L}$ cambia, debe estar actuando una torca externa neta sobre el cuerpo, aún cuando la magnitud de la velocidad angular ω sea constante. Si el cuerpo es una rueda desbalanceada de un automóvil, esta torca provendrá de la fricción en los cojinetes, que hace que éstos se desgasten. "Balancear" una rueda implica distribuir la masa de modo que el eje de rotación sea un eje de simetría; así, $\vec{L}$ apuntará a lo largo del eje de rotación y no se requerirá una torca neta para que la rueda siga girando.

En rotación de eje fijo, solemos usar el término "momento angular del cuerpo" para referirnos sólo a la *componente* de $\vec{L}$ sobre el eje de rotación del cuerpo (el eje z en la figura 10.27), con un signo positivo o negativo para indicar el sentido de rotación, igual que con la velocidad angular.

10.27 Si el eje de rotación de un cuerpo rígido no es un eje de simetría, $\vec{L}$ no está en general sobre el eje de rotación. Aun si $\vec{\omega}$ es constante, la dirección de $\vec{L}$ cambia, y se requiere una torca neta para mantener la rotación.



Ejemplo 10.10 Momento angular y torca

Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de $2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular en función del tiempo es

$$\omega_z = (40\ \text{rad/s}^3)t^2$$

a) Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en $t = 3.0$ s. *b*) Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que un ventilador, la hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría (el eje z). Por lo tanto, el vector de momento angular tiene sólo una componente z (L_z), que podemos determinar a partir de la velocidad angular ω_z. Puesto que la dirección del momento angular es constante, la torca neta también tiene sólo una componente τ_z a lo largo del eje de rotación; esto es igual a la derivada de L_z con respecto al tiempo.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (10.28) para obtener L_z a partir de ω_z, y la ecuación (10.29) para calcular τ_z a partir de la derivada de L_z con respecto al tiempo.

EJECUTAR: *a*) La componente del momento angular está sobre el eje de rotación (z):

$$L_z = I\omega_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(40\ \text{rad/s}^3)t^2 = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t^2$$

(Omitimos "rad" de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional.) En $t = 3.0$ s, $L_z = 900\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$.

b) Por la ecuación (10.29), la componente de la torca neta en el eje de rotación es

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$$

En el instante $t = 3.0$ s,

$$\tau_z = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)(3.0\ \text{s}) = 600\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2 = 600\ \text{N}\cdot\text{m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, vemos que la aceleración angular de la hélice es $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40\ \text{rad/s}^2)(2t) = (80\ \text{rad/s}^2)t$. Por el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, la torca que actúa sobre la hélice es $\tau_z = I\alpha_z = (2.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(80\ \text{rad/s}^2)t = (200\ \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^3)t$, lo que coincide con nuestro cálculo anterior.

Evalúe su comprensión de la sección 10.5 Una pelota está pegada al extremo de un cordel. Usted sostiene el cordel por el otro extremo y da vueltas a la pelota sobre su mano. *a*) Si la rapidez de la pelota es constante, ¿es constante su momento lineal $\vec{p}$? ¿Por qué? *b*) ¿Es constante su momento angular? ¿Por qué?

10.6 Conservación del momento angular

Acabamos de ver que el momento angular puede servir para expresar de otro modo el principio dinámico básico del movimiento rotacional. También es la base del **principio de conservación del momento angular**. Al igual que la conservación de la energía y del momento lineal, este principio es una ley de conservación universal, válida en todas las escalas, desde los sistemas atómicos y nucleares hasta los movimientos de las galaxias. Este principio es consecuencia directa de la ecuación (10.29): $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Si $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$, y $\vec{L}$ es constante.



7.14 La bola le pega al bate

Si la torca externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva).

10.28 Un gato que cae tuerce diversas partes de su cuerpo en direcciones distintas para caer parado. En todo momento durante este proceso, el momento angular total del gato sigue siendo cero.



Un trapecista, un clavadista y un patinador que hacen piruetas en la punta de un patín aprovechan este principio. Suponga que una trapecista acaba de separarse de un columpio con los brazos y las piernas extendidos, y girando en sentido antihorario alrededor de su centro de masa. Al encoger los brazos y las piernas, su momento de inercia I_{cm} con respecto a su centro de masa cambia de un valor grande I_1 a uno mucho menor I_2. La única fuerza externa que actúa sobre ella es su peso, que no tiene torca con respecto a un eje que pasa por su centro de masa. Así, su momento angular $L_z = I_{cm}\omega_z$ permanece constante, y su velocidad angular ω_z aumenta al disminuir I_{cm}. Esto es,

$$I_1\omega_{1z} = I_2\omega_{2z} \qquad \text{(torca externa neta cero)} \tag{10.30}$$

Cuando una patinadora o bailarina gira con los brazos estirados y luego los encoge, su velocidad angular aumenta al disminuir su momento de inercia. En ambos casos, se conserva el momento angular en un sistema donde la torca externa neta es cero.

Si un sistema tiene varias partes, las fuerzas internas que esas partes ejercen entre sí causan cambios en sus momentos angulares; pero el momento *total* no cambia. Por ejemplo, considere dos cuerpos A y B que interactúan entre sí pero con nadie más, como los astronautas de la sección 8.2 (figura 8.8). Suponga que el cuerpo A ejerce una fuerza $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ sobre el cuerpo B; la torca correspondiente (con respecto al punto que elijamos) es $\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$. Según la ecuación (10.29), esta torca es igual a la rapidez de cambio del momento angular de B:

$$\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{L}_B}{dt}$$

Al mismo tiempo, el cuerpo B ejerce una fuerza $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$ sobre el cuerpo A, con una torca correspondiente $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A}$, y

$$\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

Por la tercera ley de Newton, $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$. Además, si las fuerzas actúan en la misma línea, como en la figura 10.8, sus brazos de palanca con respecto al eje elegido son iguales. Así, las *torcas* de estas dos fuerzas son iguales y opuestos, y $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$. Por lo tanto, si sumamos las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \frac{d\vec{L}_B}{dt} = \mathbf{0}$$

o bien, dado que $\vec{L}_A + \vec{L}_B$ es el momento angular *total* $\vec{L}$ del sistema,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \mathbf{0} \qquad \text{(torca externa neta cero)} \tag{10.31}$$

Es decir, el momento angular total del sistema es constante. Las torcas de las fuerzas internas pueden transferir momento angular de un cuerpo al otro; pero no pueden cambiar el momento angular *total* del sistema (figura 10.28).

Ejemplo 10.11 Cualquiera puede bailar ballet

Un ágil profesor de física se para en el centro de una mesita giratoria con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5.0 kg en cada mano (figura 10.29). Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2.0 s. Calcule la nueva velocidad angular del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de $3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ con los brazos estirados, y baja a $2.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ si pone las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0.20 m al final; trátelas como partículas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Si despreciamos la fricción en la mesita giratoria, ninguna torca externa actuará alrededor del eje vertical (z) así que el momento angular con respecto a ese eje será constante.

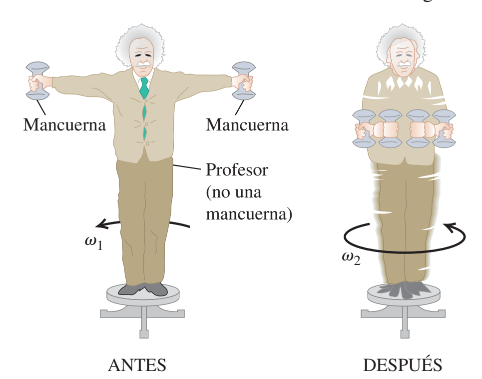
PLANTEAR: Usaremos la ecuación (10.30) para calcular la incógnita (la velocidad angular final ω_{2z}).

EJECUTAR: El momento de inercia del sistema es $I = I_{prof} + I_{manc}$. Cada mancuerna de masa m aporta mr^2 a I_{manc}, donde r es la distancia perpendicular del eje de rotación a la mancuerna. Inicialmente, tenemos

$$I_1 = 3.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(1.0\ \text{m})^2 = 13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\ \text{rev}}{2.0\ \text{s}} = 0.50\ \text{rev/s}$$

10.29 Diversión con la conservación del momento angular.



El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\ \text{kg})(0.20\ \text{m})^2 = 2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Por la ecuación (10.30), la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}{2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}(0.50\ \text{rev/s}) = 2.5\ \text{rev/s}$$

Es decir, la velocidad angular aumenta en un factor de 5, en tanto que el momento angular se mantiene constante. Observe que no tuvimos que cambiar "revoluciones" a "radianes" en este cálculo. ¿Por qué?

EVALUAR: Es útil examinar la manera en que cambia la energía cinética en este proceso. Para calcular la energía cinética, debemos expresar ω_1 y ω_2 en rad/s. (¿Por qué?) Tenemos $\omega_{1z} = (0.50\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 3.14\ \text{rad/s}$ y $\omega_{2z} = (2.5\ \text{rev/s})(2\pi\ \text{rad/rev}) = 15.7\ \text{rad/s}$. La energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \frac{1}{2}(13\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(3.14\ \text{rad/s})^2 = 64\ \text{J}$$

y la energía cinética final es

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \frac{1}{2}(2.6\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(15.7\ \text{rad/s})^2 = 320\ \text{J}$$

La energía cinética adicional proviene del trabajo que el profesor realizó para pegar sus brazos y las mancuernas al abdomen.

Ejemplo 10.12 Un "choque" rotacional I

La figura 10.30 muestra dos discos. Uno (A) es un volante de motor; el otro (B), una placa de embrague sujeta a un eje de transmisión. Sus momentos de inercia son I_A e I_B. Inicialmente, los discos están girando con rapideces angulares constantes ω_A y ω_B, respectivamente. Luego, juntamos los discos con fuerzas que actúan sobre el eje, con la finalidad de no aplicar una torca a ningún disco. Los discos se frotan entre sí y finalmente alcanzan una rapidez angular final común ω. Deduzca una expresión para ω.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La única torca que actúa sobre cualquiera de los discos es el aplicado por el otro disco; no hay torcas externas. Así, el momento angular total del sistema es la misma antes y después de juntarse los discos. Al final, giran como un solo cuerpo con momento de inercia total $I = I_A + I_B$ y rapidez angular ω, que es nuestra incógnita.

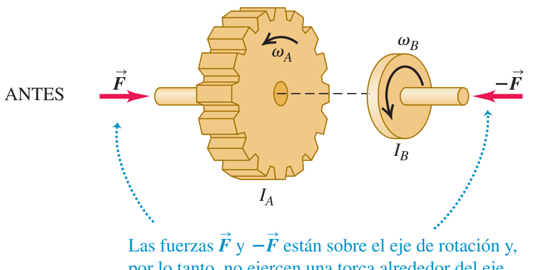
PLANTEAR: La figura 10.30 muestra que todas las velocidades angulares tienen la misma dirección, así que podemos considerar que ω_A, ω_B y ω son componentes de velocidad angular a lo largo del eje de rotación.

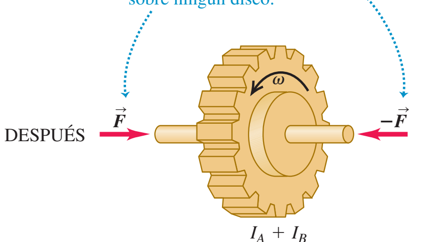
EJECUTAR: La conservación del momento angular da

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

10.30 Si la torca externa neta es cero, se conserva el momento angular.





continúa

EVALUAR: Este "choque" entre dos discos es similar a un choque totalmente inelástico (véase la sección 8.3). Cuando dos objetos en movimiento traslacional a lo largo del mismo eje se juntan y quedan adheridos, se conserva el momento lineal del sistema. En la situación de la figura 10.30, dos objetos en movimiento *rotacional* a lo largo del mismo eje se juntan y adhieren, y se conserva el momento *angular*. En un choque totalmente inelástico, disminuye la energía cinética del sistema. En el siguiente ejemplo veremos qué sucede con la energía cinética del "choque" de dos discos que giran.

Ejemplo 10.13 Un "choque" rotacional II

En el ejemplo 10.12, suponga que el volante A tiene masa de 2.0 kg, radio de 0.20 m y rapidez angular inicial de 50 rad/s (unas 500 rpm), y que la placa de embrague B tiene masa de 4.0 kg, radio de 0.10 m y rapidez angular inicial de 200 rad/s. Calcule la rapidez angular final común ω después de juntarse los discos. ¿Qué sucede con la energía cinética durante este proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitamos calcular la energía cinética rotacional de cada disco antes del choque y su energía cinética combinada después del choque.

PLANTEAR: Usaremos el resultado del ejemplo 10.12 y la expresión $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ para la energía cinética rotacional.

EJECUTAR: Los momentos de inercia de los dos discos son

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2.0\text{ kg})(0.20\text{ m})^2 = 0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4.0\text{ kg})(0.10\text{ m})^2 = 0.020\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Del ejemplo 10.12, la rapidez angular final es

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

$$= \frac{(0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(50\text{ rad/s}) + (0.020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(200\text{ rad/s})}{0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0.020\text{ kg}\cdot\text{m}^2}$$

$$= 100\text{ rad/s}$$

La energía cinética antes del choque es

$$K_1 = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(50\text{ rad/s})^2$$

$$+\frac{1}{2}(0.020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(200\text{ rad/s})^2$$

$$= 450\text{ J}$$

La energía cinética después del choque es

$$K_2 = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.040\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0.020\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(100\text{ rad/s})^2 = 300\text{ J}$$

EVALUAR: Se perdió un tercio de la energía cinética inicial durante este "choque angular", el análogo rotacional de un choque totalmente inelástico. No deberíamos esperar que se conserve la energía cinética, aunque la fuerza externa neta y la torca sean cero, porque actúan fuerzas internas no conservadoras (de fricción) al frotarse los discos y acercarse gradualmente a una velocidad angular común.

Ejemplo 10.14 Momento angular en una acción policiaca

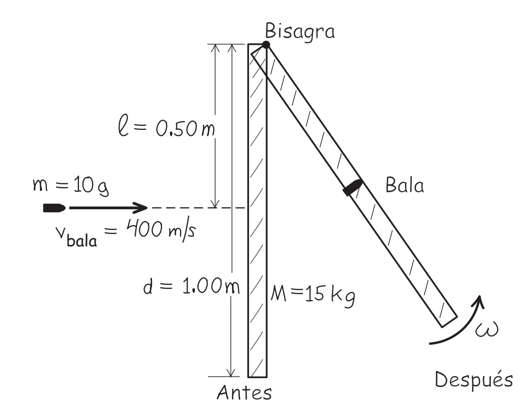
Una puerta de 1.00 m de ancho y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. La puerta no está asegurada. Un policía dispara una bala de 10 g de masa con rapidez de 400 m/s al centro exacto de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta (figura 10.32). Calcule la rapidez angular de la puerta justo después de que la bala se incrusta en la puerta. ¿Se conserva la energía cinética?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Consideramos la puerta y la bala como un sistema. No hay torca externa alrededor del eje definido por las bisagras, así que se conserva el momento angular con respecto a este eje.

PLANTEAR: La figura 10.31 muestra nuestro esquema. El momento angular inicial está totalmente en la bala y está dada por la ecuación (10.25). El momento angular final es la de un cuerpo rígido formado por la puerta y la bala incrustada. Igualaremos estas dos cantidades y

10.31 Nuestro esquema para este problema.



despejaremos la rapidez angular ω de la puerta y la bala inmediatamente después del choque.

EJECUTAR: El momento angular inicial de la bala es:

$$L = mvl = (0.010\text{ kg})(400\text{ m/s})(0.50\text{ m}) = 2.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

El momento angular final es $I\omega$, donde $I = I_{\text{puerta}} + I_{\text{bala}}$. De la tabla 9.2, para una puerta de anchura d,

$$I_{\text{puerta}} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15\text{ kg})(1.0\text{ m})^2}{3} = 5.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la bala (con respecto al eje que pasa por las bisagras) es

$$I_{\text{bala}} = ml^2 = (0.010\text{ kg})(0.50\text{ m})^2 = 0.0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

La conservación del momento angular requiere que $mvl = I\omega$, es decir,

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{5.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2 + 0.0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2} = 0.40\text{ rad/s}$$

El choque de la bala con la puerta es inelástico porque durante el impacto actúan fuerzas de fricción no conservadoras. Por lo tanto, no esperamos que se conserve la energía cinética. Comprobamos esto calculando las energías cinéticas inicial y final:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.010\text{ kg})(400\text{ m/s})^2 = 800\text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5.0025\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(0.40\text{ rad/s})^2$$
$$= 0.40\text{ J}$$

¡La energía cinética final es sólo 1/2000 del valor inicial!

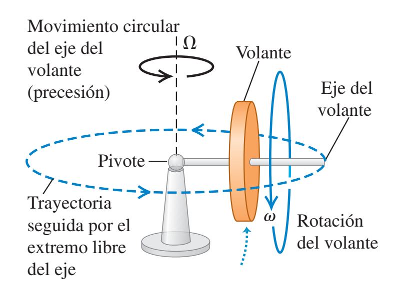
EVALUAR: La rapidez angular final de la puerta es muy baja: a 0.40 rad/s, la puerta tardará 3.9 s en oscilar 90° ($\pi/2$ radianes). ¿Le queda claro al lector que la rapidez aumentaría al doble, si la bala se disparara contra el borde de la puerta cerca de la perilla?

Evalúe su comprensión de la sección 10.6 Si los casquetes polares se derritieran totalmente por el calentamiento global, el hielo derretido se redistribuiría en toda la Tierra. Este cambio haría que la duración del día (el tiempo que la Tierra tarda en girar sobre su eje) i) aumentara, ii) disminuyera o iii) permaneciera igual. (*Sugerencia*: use ideas de momento angular. Suponga que el Sol, la Luna y los planetas ejercen torcas despreciables sobre la Tierra.)

10.7 Giróscopos y precesión

En todas las situaciones que hemos examinado en este capítulo, el eje de rotación se ha mantenido fijo o, si se ha movido, ha mantenido su dirección (como en el rodamiento sin deslizamiento). Se presentan diversos fenómenos físicos nuevos, algunos inesperados, si el eje de rotación puede cambiar de dirección. Por ejemplo, considere un giróscopo de juguete apoyado en un extremo (figura 10.32). Si lo sostenemos con el eje del volante horizontal y lo soltamos, el extremo libre del eje cae debido a la gravedad: si el volante *no* está girando. Pero si el volante *gira*, lo que sucede es muy distinto. Una posibilidad es un movimiento circular uniforme del eje en un plano horizontal, combinado con la rotación del volante alrededor del eje. Este sorprendente movimiento del eje, no intuitivo, se denomina **precesión**. La precesión se observa en la naturaleza, no sólo en máquinas giratorias como los giróscopos. En este momento la Tierra misma está en precesión: su eje de rotación (que pasa por los polos norte y sur) cambia lentamente de dirección, completando un ciclo de precesión cada 26,000 años.

10.32 Giróscopo apoyado en un extremo. El movimiento circular horizontal del volante se llama precesión. La rapidez angular de la precesión es Ω.

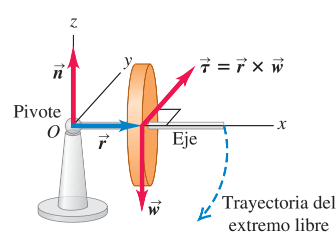


Cuando el volante y su eje están en reposo, caerán a la superficie de la mesa. Cuando el volante gira, éste y su eje "flotan" en el aire mientras se mueven en circulo alrededor del pivote.

Para estudiar el extraño fenómeno de la precesión, debemos recordar que la velocidad angular, el momento angular y la torca son cantidades *vectoriales*. En particular, necesitamos la relación general entre la torca neta $\sum\vec{\tau}$ que actúa sobre un cuerpo y la rapidez de cambio del momento angular del cuerpo $\vec{L}$, dada por la ecuación (10.29) $\sum\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. Apliquemos primero esta ecuación al caso en que el volante *no* gira (figura 10.33a). Tomamos el origen O en el pivote y suponemos que el volante es simétrico, con masa M y momento de inercia I alrededor de su eje. El eje del volante inicialmente está sobre el eje x. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el giróscopo son la fuerza normal $\vec{n}$ que actúa en el pivote (donde suponemos que no hay fricción) y el peso $\vec{w}$ del volante que actúa en su centro de masa, a una distancia r del pivote. La fuerza normal tiene torca cero con respecto al pivote, y el peso tiene una torca $\vec{\tau}$ en la dirección y (figura 10.33a). Al principio, no hay rotación y el momento

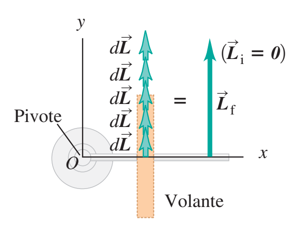
10.33 a) Si el volante de la figura 10.32 no está girando inicialmente, su momento angular inicial es cero. b) En cada intervalo sucesivo de tiempo dt, la torca produce un cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular. El volante adquiere un momento angular $\vec{L}$ con la misma dirección que $\vec{\tau}$, y el eje del volante cae.

a) El volante que no gira cae



Cuando el volante no gira, su peso crea una torca alrededor del pivote, haciendo que este caiga una trayectoria circular hasta que su eje descansa en la superficie de la mesa.

b) Vista superior del volante que cae



Al caer el volante gira alrededor de pivote y, por ello, adquiere un momento angular $\vec{L}$. La *dirección* de $\vec{L}$ permanece constante.

angular inicial $\vec{L}_i$ es cero. Por la ecuación (10.29), el *cambio* $d\vec{L}$ el momento angular en un intervalo corto dt después de este instante es

$$d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt \tag{10.32}$$

Este cambio es en la dirección y, la de $\vec{\tau}$. Al transcurrir cada intervalo adicional dt, el momento angular cambia en incrementos $d\vec{L}$ en la dirección y porque la dirección de la torca es constante (figura 10.33b). El aumento constante del momento angular horizontal implica que el giróscopo girará hacia abajo alrededor del eje y con rapidez creciente, hasta tirar la base o golpear la mesa en la que ésta descansa.

Veamos ahora qué sucede si el volante *está* girando inicialmente, de modo que el momento angular inicial $\vec{L}_i$ no es cero (figura 10.34a). Dado que el volante gira alrededor de su eje de simetría, $\vec{L}_i$ está sobre el eje. Sin embargo, cada cambio de momento angular $d\vec{L}$ es perpendicular al eje, porque la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ también lo es (figura 10.34b). Esto hace que cambie la *dirección* de $\vec{L}$ pero no su magnitud. Los cambios $d\vec{L}$ siempre están en el plano horizontal xy, así que el vector de momento angular y el eje del volante junto con el cual se mueve siempre son horizontales. En otras palabras, el eje no cae; sólo tiene precesión.

Si esto todavía le parece misterioso, imagine una pelota atada a un cordón. Si la pelota está inicialmente en reposo y tiramos del cordón, la pelota se moverá hacia nosotros. Pero si la bola se está moviendo inicialmente y tiramos continuamente del cordón en una dirección perpendicular al movimiento de la pelota, ésta se moverá en un círculo alrededor de nuestra mano; no se acercará a ella. En el primer caso, la pelota tiene cero momento lineal $\vec{p}$ al principio; cuando aplicamos una fuerza $\vec{F}$ hacia nosotros durante un tiempo dt, la pelota adquiere un momento lineal $d\vec{p} = \vec{F}\,dt$, también hacia nosotros. No obstante, si la pelota ya tiene un momento lineal $\vec{p}$, un cambio en el momento lineal $d\vec{p}$ perpendicular a $\vec{p}$ cambiará la dirección del movimiento, no la rapidez. Sustituya $\vec{p}$ por $\vec{L}$ y $\vec{F}$ por $\vec{\tau}$ en este argumento, y verá que la precesión es simplemente el análogo rotacional del movimiento circular uniforme.

En el instante que se muestra en la figura 10.34a, el giróscopo tiene momento angular $\vec{L}$. Un intervalo corto dt después, el momento angular es $\vec{L} + d\vec{L}$; el cambio infinitesimal en momento angular es $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$, perpendicular a $\vec{L}$. Como muestra el diagrama vectorial de la figura 10.35, esto implica que el eje de volante del giróscopo giró un ángulo pequeño $d\phi$ dado por $d\phi = |d\vec{L}|/|\vec{L}|$. La rapidez con que se mueve el eje, $d\phi/dt$, se denomina **rapidez angular de precesión**; denotando esta cantidad con Ω, tenemos

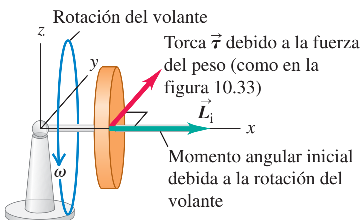
$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{wr}{I\omega} \tag{10.33}$$

Así, la rapidez angular de precesión es *inversamente* proporcional a la rapidez angular de giro alrededor del eje. Un giróscopo que gira rápidamente tiene precesión lenta;

10.34 a) El volante está girando inicialmente con momento angular $\vec{L}_i$. Las fuerzas (que no se muestran) son las mismas que en la figura 10.33a. b) Puesto que el momento angular inicial no es cero, cada cambio $d\vec{L} = \vec{\tau}\,dt$ en el momento angular es perpendicular a $\vec{L}$. El resultado es que la magnitud de $\vec{L}$ no cambia, aunque su dirección cambia continuamente.

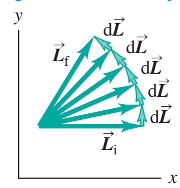
a) Volante giratorio

Cuando el volante gira, el sistema inicia con un momento angular $\vec{L}_i$ paralela al eje de rotación del volante.



b) Vista superior

Ahora el efecto de la torca es provocar el momento angular que tiene precesión alrededor del pivote. El giróscopo gira alrededor de su pivote sin caer.

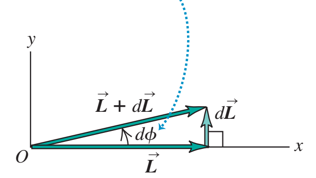


si la fricción en su cojinete hace que el volante se frene, ¡*se incrementa* la rapidez angular de precesión! La rapidez angular de precesión de la Tierra es muy lenta (1 rev/26,000 años), porque su momento angular L_z es grande y la troca τ_z debido a las influencias gravitacionales de la Luna y el Sol es relativamente pequeño.

Al precesar un giróscopo, su centro de masa describe un círculo de radio r en un plano horizontal. Su componente vertical de aceleración es cero, así que la fuerza normal hacia arriba $\vec{n}$ ejercida por el pivote debe ser igual en magnitud al peso. El movimiento circular del centro de masa con rapidez angular Ω requiere una fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia el centro del círculo, con magnitud $F = M\Omega^2 r$. Esta fuerza también debe ser proporcionada por el pivote.

Un supuesto clave que hicimos en nuestro análisis del giróscopo fue que el vector momento angular $\vec{L}$ sólo está asociado a la rotación del volante y es puramente horizontal. Sin embargo, también habrá una componente vertical de momento angular asociada a la precesión del giróscopo. Al hacer caso omiso de esto, hemos supuesto tácitamente que la precesión es *lenta*, es decir, que la rapidez angular de precesión Ω es mucho menor que la rapidez angular de rotación ω. Como muestra la ecuación (10.33), un valor grande de ω automáticamente produce un valor pequeño de Ω, así que la aproximación es razonable. Cuando la precesión no es lenta, aparecen efectos adicionales, incluido un bamboleo vertical o *nutación* (oscilación) del eje del volante, superpuesto a la precesión. Podemos ver la nutación en un giróscopo cuando su rotación se hace lenta, de modo que Ω aumenta y la componente vertical de $\vec{L}$ ya no puede despreciarse.

10.35 Vista detallada de parte de la figura 10.34b.



Ejemplo 10.15 Giróscopo en precesión

La figura 10.36a es una vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrica que un motor eléctrico puso a girar. El pivote está en O y la masa del eje es insignificante. *a*) Vista de arriba, ¿la precesión es en sentido horario o antihorario? *b*) Si una revolución de precesión tarda 4.0 s, ¿qué rapidez angular tiene la rueda?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Esta situación es similar al volante de precesión que se muestra en la figura 10.34.

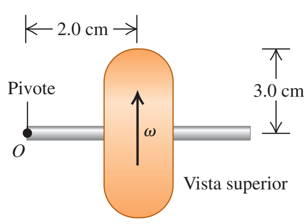
PLANTEAR: Determinaremos la dirección de precesión empleando la regla de la mano derecha como en la figura 10.34, que muestra el mismo tipo de giróscopo que la figura 10.36. Utilizaremos la relación entre rapidez angular de precesión Ω y la rapidez angular de giro ω, ecuación (10.33), para obtener el valor de ω.

EJECUTAR: *a*) La regla de la mano derecha indica que $\vec{\omega}$ y $\vec{L}$ son a la izquierda (figura 10.36b). El peso $\vec{w}$ apunta hacia adentro de la página en esta vista superior y actúa en el centro de masa (denotado con ×); la torca $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$ es hacia arriba de la página, lo mismo que $d\vec{L}/dt$. La adición de un pequeño $d\vec{L}$ al $\vec{L}$ que tenemos inicialmente altera la dirección de $\vec{L}$ como se muestra, así que la precesión es en sentido horario cuando se ve desde arriba.

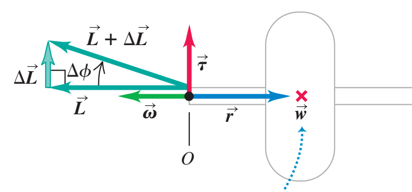
b) ¡Tenga cuidado de no confundir ω y Ω! Tenemos que $\Omega = (1\text{ rev})/(4.0\text{ s}) = (2\pi\text{ rad})/(4.0\text{ s}) = 1.57\text{ rad/s}$. El peso es mg, y el

10.36 ¿Qué dirección y qué rapidez tiene la precesión del giróscopo?

a) Vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrico que gira



b) Diagrama vectorial



continúa

momento de inercia alrededor del eje de simetría de un cilindro sólido de radio R es $I = \frac{1}{2}mR^2$. Despejando ω en la ecuación (10.33):

$$\omega = \frac{wr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega}$$

$$= \frac{2(9.8\ \text{m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})}{(3.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2(1.57\ \text{rad/s})} = 280\ \text{rad/s} = 2600\ \text{rev/min}$$

EVALUAR: La rapidez angular de precesión Ω es mucho menor que la rapidez angular de rotación ω, así que tenemos un ejemplo de precesión lenta.

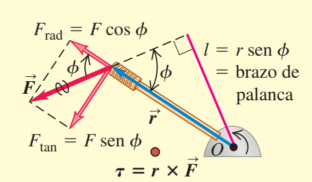
Evalúe su comprensión de la sección 10.7 Suponga que la masa del volante de la figura 10.34 se aumenta al doble pero todas las demás dimensiones y la rapidez angular de rotación no cambian. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rapidez angular de precesión Ω? i) Ω aumentaría en un factor de 4; ii) se duplicaría Ω; iii) Ω no se vería afectada; iv) Ω se reduciría a la mitad; v) Ω se reduciría a la cuarta parte.

CAPÍTULO 10 RESUMEN

Torca: Cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre un cuerpo, la torca de esa fuerza con respecto a un punto O tiene una magnitud dada por el producto de la magnitud F de la fuerza y el brazo de palanca l. En términos más generales, la torca es un vector $\vec{\tau}$ igual al producto vectorial de $\vec{r}$ (el vector de posición del punto donde actúa la fuerza) y $\vec{F}$. (Véase el ejemplo 10.1.)

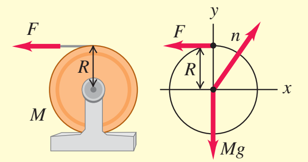
$$\tau = Fl \quad (10.2)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (10.3)$$



Dinámica rotacional: El análogo rotacional de la segunda ley de Newton dice que la torca neta que actúa sobre un cuerpo es igual al producto del momento de inercia del cuerpo y su aceleración angular. (Véanse ejemplos 10.2 y 10.3.)

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \quad (10.7)$$



Traslación y rotación combinadas: Si un cuerpo rígido se mueve en el espacio al tiempo que gira, su movimiento puede considerarse como la conjunción de un movimiento traslacional del centro de masa y un movimiento rotacional en torno a un eje que pasa por el centro de masa. De esta manera, la energía cinética es la suma de una energía cinética traslacional y una rotacional. En dinámica la segunda ley de Newton describe el movimiento del centro de masa y el equivalente rotacional de esa ley describe la rotación en torno al centro de masa. En el caso de un cuerpo que rueda sin resbalar, existe una relación especial entre el movimiento del centro de masa y el movimiento rotacional. (Véanse los ejemplos 10.4 a 10.7.)

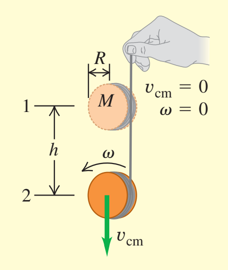
$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \quad (10.8)$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm} \quad (10.12)$$

$$\sum \tau_z = I_{cm}\alpha_z \quad (10.13)$$

$$v_{cm} = R\omega \quad (10.11)$$

(rodamiento sin deslizamiento)



Trabajo efectuado por una torca: Si una torca actúa sobre un cuerpo rígido que gira, efectúa trabajo sobre el cuerpo. Ese trabajo puede expresarse como una integral de la torca. El teorema trabajo-energía dice que el trabajo rotacional total efectuado sobre un cuerpo rígido es igual al cambio de energía cinética rotacional. La potencia, o rapidez con que la torca efectúa trabajo, es el producto de la torca y la velocidad angular. (Véanse los ejemplos 10.8 y 10.9.)

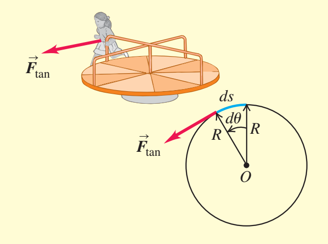
$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z \, d\theta \quad (10.20)$$

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \quad (10.21)$$

(sólo torca constante)

$$W_{tot} = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (10.22)$$

$$P = \tau_z\omega_z \quad (10.23)$$



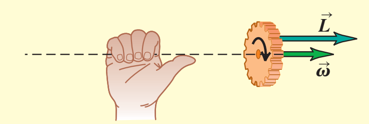
Momento angular: El momento angular de una partícula con respecto a un punto O es el producto vectorial del vector de posición $\vec{r}$ de la partícula con respecto a O y a su momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$. Si un cuerpo simétrico gira alrededor de un eje de simetría estacionario, su momento angular es el producto de su momento de inercia y su vector de velocidad angular $\vec{\omega}$. Si el cuerpo no es simétrico o el eje de rotación (z) no es un eje de simetría, la componente del momento angular sobre el eje de rotación es $I\omega_z$. (Véase el ejemplo 10.10.)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (10.24)$$

(partícula)

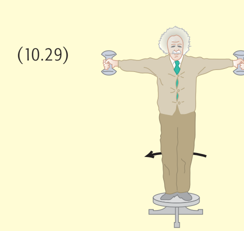
$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (10.28)$$

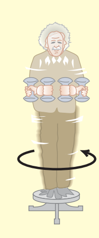
(cuerpo rígido que gira en torno a un eje de simetría)



Dinámica rotacional y momento angular: La torca externa neta sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio de su momento angular. Si la torca externa neta que actúa sobre el sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva). (Véanse ejemplos 10.11 a 10.15.)

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (10.29)$$





Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Cuando el acróbata está en el aire, la torca neta que actúa sobre su centro de masa es cero. Por lo tanto, el momento angular de su cuerpo (el producto del momento de inercia I y la rapidez angular ω) en torno al centro de masa se mantiene constante. Al estirar sus extremidades, el acróbata aumenta I, así que ω disminuye; si encoge las extremidades, I disminuye y ω aumenta.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

10.1 Respuesta: ii) La fuerza P actúa a lo largo de una línea vertical, de manera que el brazo de palanca es la distancia horizontal desde A hasta la línea de acción. Ésta es la componente horizontal de la distancia L, que es $L\cos\theta$. Por lo tanto, la magnitud de la torca es el producto de la magnitud de la fuerza P y el brazo de palanca $L\cos\theta$, o $\tau = PL\cos\theta$.

10.2 Respuesta: iii), ii), i) Para que el objeto colgante de masa m_2 acelere hacia abajo, la fuerza neta sobre él debe ser hacia abajo. Por lo tanto, la magnitud m_2g de la fuerza del peso hacia abajo debe ser mayor que la magnitud T_2 de la fuerza de tensión hacia arriba. Para que la polea tenga aceleración angular en sentido horario, la torca neta sobre la polea debe ser en sentido horario. La tensión T_2 tiende a girar la polea en sentido horario, en tanto que la tensión T_1 tiende a girar la polea en sentido antihorario. Ambas fuerzas de tensión tienen el mismo brazo de palanca R, de manera que hay una torca T_2R en sentido horario y una torca T_1R en sentido antihorario. Para que la torca neta sea en sentido horario, T_2 debe ser mayor que T_1. Por consiguiente, $m_2g > T_2 > T_1$.

10.3 Respuestas: *a*) ii), *b*) i) Si usted vuelve a realizar los cálculos del ejemplo 10.6 con un cilindro hueco (momento de inercia $I_{cm} = MR^2$ en vez de un cilindro sólido (momento de inercia $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$), usted encontrará $a_{cm\text{-}y} = \frac{1}{2}g$ y $T = \frac{1}{2}Mg$ (en vez de $a_{cm\text{-}y} = \frac{2}{3}g$ y $T = \frac{1}{3}Mg$ para un cilindro sólido). Por lo tanto, la aceleración es menor aunque la tensión sea mayor. Usted puede llegar a la misma conclusión sin efectuar el cálculo. Mayor momento de inercia significa que el cilindro hueco girará más lentamente y, por consiguiente, rodará hacia abajo más lentamente. Para hacer más lento el movimiento descendente, se requiere una mayor fuerza de tensión hacia abajo para oponerse a la fuerza de gravedad hacia abajo.

10.4 Respuesta: iii) Aplicamos la misma torca durante el mismo desplazamiento angular a ambos cilindros. Entonces, por la ecuación (10.21), efectuamos la misma cantidad de trabajo sobre los dos cilindros y les impartimos la misma energía cinética a ambos. (El que tiene menor momento de inercia desarrolla la mayor rapidez angular, aunque eso no es lo que se preguntó. Compare con el ejemplo conceptual 6.5 de la sección 6.2.)

10.5 Respuestas: a) no, b) sí Al dar vuelta al círculo la pelota, la magnitud de $\vec{p} = m\vec{v}$ no cambia (la rapidez es constante), pero su dirección sí lo hace, así que el vector de momento lineal no es constante. Sin embargo, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ *sí es* constante: la pelota mantiene una magnitud constante (la rapidez y la distancia perpendicular entre la mano y la pelota no cambian) y una dirección constante (sobre el eje de rotación, perpendicular al plano de movimiento de la pelota). El momento lineal cambia porque una fuerza neta $\vec{F}$ actúa sobre la pelota (hacia el centro del círculo). El momento angular no cambia porque no hay torca neta; el vector $\vec{r}$ apunta de la mano a la pelota, y la fuerza $\vec{F}$ que actúa sobre la pelota apunta hacia la mano, de modo que el producto vectorial $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ es cero.

10.6 Respuesta: i) En ausencia de torcas externas, el momento angular de la Tierra $L_z = I\omega_z$ permanecería constante. El hielo derretido se movería de los polos al ecuador (es decir, se alejaría del eje de rotación del planeta) y el momento de inercia I de la Tierra aumentaría un poco. Por lo tanto, la velocidad angular ω_z disminuiría ligeramente y el día duraría un poco más.

10.7 Respuesta: iii) Aumentar al doble la masa del volante duplicaría tanto su momento de inercia I como su peso w, así que la razón I/w no cambiaría. La ecuación (10.33) dice que la rapidez angular de precesión depende de esta razón, así que el valor de Ω *no* cambiaría.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P10.1. Al apretar los pernos de la cabeza de los cilindros de un motor automotriz, la cantidad crítica es la *torca* aplicada a los pernos. ¿Por qué la torca es más importante que la *fuerza* real aplicada al mango de la llave?

P10.2. ¿Una sola fuerza aplicada a un cuerpo puede alterar tanto su movimiento de traslación como su movimiento rotacional? Explique por qué.

P10.3. Suponga que usted puede usar cualquier tipo de ruedas en el diseño de un carrito de 4 ruedas, sin motor para carreras cuesta abajo, partiendo del reposo. Respetando las reglas de peso total del vehículo y el conductor, ¿conviene usar ruedas grandes y masivas, o ruedas pequeñas y ligeras? ¿Conviene usar ruedas sólidas o ruedas con la mayoría de la masa en el borde? Explique por qué.

P10.4. Un automóvil con tracción en las cuatro ruedas acelera hacia delante partiendo del reposo. Demuestre la dirección en que giran las ruedas del vehículo y cómo esto origina una fuerza de fricción debida al pavimento, que acelera el auto hacia delante.

P10.5. Los ciclistas experimentados dicen que reducir el peso de una bicicleta es más efectivo si se hace en las ruedas que en el cuadro (marco). ¿Por qué reducir el peso en las ruedas sería más fácil para el ciclista que reducir la misma cantidad en el cuadro?

P10.6. Cuanto mayor sea la fuerza que se aplica al frenar conduciendo un auto hacia adelante, más bajará el frente del auto (y más subirá la parte de atrás). ¿Por qué? ¿Qué sucede al acelerar hacia adelante? ¿Por qué los vehículos de arrancones no usan sólo tracción delantera?

P10.7. Cuando una equilibrista camina en la cuerda floja, extiende sus brazos hacia los lados. Esto le facilita recuperarse en caso de inclinarse hacia un lado o hacia el otro. Explique cómo funciona esto. [*Sugerencia:* piense en la ecuación (10.7).]

P10.8. Al encenderse un motor eléctrico, tarda más en alcanzar su rapidez final si hay una rueda de afilar conectada al eje. ¿Por qué?

P10.9. Los buenos cocineros saben si un huevo está crudo o cocido haciéndolo rodar por una pendiente (y atrapándolo abajo). ¿Cómo es posible esto? ¿En qué se fijan?

P10.10. El trabajo efectuado por una fuerza es un producto de fuerza y distancia. La torca debida a una fuerza es un producto de fuerza y distancia. ¿Implica esto que la torca y el trabajo sean equivalentes? Explique por qué.

P10.11. Imagine que usted pertenece a un despacho de ingenieros y un cliente importante le lleva una esfera preciada porque quiere saber si es hueca o sólida. Él ha probado dándole golpecitos, pero eso no lo ha sacado de dudas. Diseñe un experimento sencillo y de bajo costo que pueda efectuar rápidamente, sin dañar la valiosa esfera, para averiguar si es hueca o sólida.

P10.12. Usted hace dos versiones del mismo objeto hecho del mismo material que tiene densidad uniforme. Para una versión, todas las dimensiones son exactamente del doble que la otra. Si actúa la misma torca en ambas versiones, dando a la más pequeña una aceleración angular α, ¿cuál será la aceleración angular de la versión más grande en términos de α?

P10.13. Dos masas idénticas están unidas a poleas sin fricción mediante cordeles muy delgados, enrollados alrededor del borde de la polea, y se liberan partiendo del reposo. Ambas poleas tienen la misma masa y el mismo diámetro, pero una es sólida y la otra es un aro. Conforme las masas caen, ¿en qué caso es mayor la tensión en el cordón, o es la misma en ambos casos? Justifique su respuesta.

P10.14. La fuerza de gravedad actúa sobre el bastón de la figura 10.11. Las fuerzas producen torcas que alteran la velocidad angular de un cuerpo. Entonces, ¿por qué es constante la velocidad angular del bastón en la figura?

P10.15. Cierta esfera sólida uniforme alcanza una altura máxima h_0 cuando rueda cuesta arriba sin deslizarse. ¿Qué altura máxima (en términos de h_0) alcanzará si *a*) se duplica su diámetro, *b*) se duplica su masa, *c*) se duplican tanto su diámetro como su masa, *d*) se duplica su rapidez angular en la base de la pendiente?

P10.16. Una rueda está rodando sin resbalar en una superficie horizontal. En un marco de referencia inercial en el que la superficie está en reposo, ¿hay algún punto de la rueda con velocidad puramente vertical? ¿Hay algún punto con componente horizontal de velocidad opuesta a la velocidad del centro de masa? Explique su respuesta. ¿Cambian sus respuestas si la rueda resbala al rodar? ¿Por qué?

P10.17. Parte de la energía cinética de un automóvil que avanza está en el movimiento rotacional de sus ruedas. Al aplicarse los frenos a fondo en una calle con hielo, las ruedas se "bloquean" y el auto comienza a deslizarse. ¿Qué pasa con la energía cinética rotacional?

P10.18. Un aro, un cilindro sólido uniforme, un casco esférico y una esfera sólida uniforme se sueltan del reposo en la parte alta de una pendiente. ¿En qué orden llegan a la base de la pendiente? ¿Importa si las masas y los radios de los objetos son iguales o no? Explique su respuesta.

P10.19. Una esfera rueda con rapidez v sin resbalar sobre una superficie horizontal, cuando llega a una colina que se alza con un ángulo constante sobre la horizontal. ¿En cuál caso alcanzará mayor altura: si la colina tiene suficiente fricción para evitar deslizamientos o si la colina es perfectamente lisa? En ambos casos, justifique sus respuestas en términos de conservación de la energía y de la segunda ley de Newton.

P10.20. Imagine que, en la Casa de la Risa de una feria, usted está de pie en el centro de una mesa giratoria horizontal grande, que comienza a girar libremente sobre cojinetes sin fricción (ningún motor la impulsa). Si camina hacia el borde de la mesa giratoria, ¿qué pasa con el momento angular combinado de usted y la mesa? ¿Qué sucede con la rapidez de rotación de la mesa? Explique su respuesta.

P10.21. Calentamiento global. Conforme la temperatura en nuestro planeta sigue aumentando, el hielo de los polos se derretirá y se incorporará a los océanos. ¿Qué efecto tendrá esto en la duración del día? (*Sugerencia:* consulte un mapa para ver dónde están los océanos.)

P10.22. Una partícula puntual viaja en línea recta con rapidez constante y la distancia más cercana que parte del origen de las coordenadas es una distancia l. Con respecto a este origen, ¿la partícula tiene momento lineal cero? Conforme la partícula se mueve en línea recta, ¿cambia su momento angular con respecto al origen?

P10.23. En el ejemplo 10.11 (sección 10.6), la rapidez angular ω cambia, lo que implica una aceleración angular distinta de cero. Sin embargo, no hay torca alrededor del eje de rotación, si las fuerzas que el profesor aplica a las mancuernas se dirigen radialmente hacia adentro. Entonces, por la ecuación (10.7), α_z debe ser cero. Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción.

P10.24. En el ejemplo 10.11 (sección 10.6) la energía cinética rotacional del profesor y las mancuernas aumenta. Sin embargo, como no hay torcas externas, no se efectúa trabajo para alterar la energía cinética rotacional. Entonces, por la ecuación (10.22), ¡la energía cinética no debe cambiar! Explique el error de este razonamiento que lleva a una aparente contradicción. ¿*De dónde* sale la energía cinética adicional?

P10.25. Como vimos en la sección 10.6, el momento angular de una trapecista se conserva al dar vueltas en el aire. ¿Se conserva su momento lineal? ¿Por qué?

P10.26. Si usted detiene un huevo crudo en rotación durante el instante más corto que pueda y lo vuelve a soltar, el huevo comenzará a girar otra vez. Si hace lo mismo con un huevo duro, éste se quedará detenido. Inténtelo y explíquelo.

P10.27. Un helicóptero tiene un rotor principal grande que gira en un plano horizontal y proporciona sustentación. También hay un rotor pequeño en la cola que gira en un plano vertical. ¿Para qué sirve? (*Sugerencia:* si no hubiera rotor de cola, ¿qué pasaría cuando el piloto alterara la rapidez angular del rotor principal?) Algunos helicópteros no tienen rotor de cola pero tienen dos rotores principales grandes que giran en un plano horizontal. ¿Por qué es importante que los dos rotores principales giren en direcciones opuestas?

P10.28. En un diseño de giróscopo común, el volante y su eje se encierran en un marco esférico ligero con el volante en el centro. El giróscopo se equilibra entonces sobre un pivote, de modo que el volante esté directamente encima del pivote. ¿El giróscopo precesa si se suelta mientras el volante está girando? Explique su respuesta.

P10.29. Un giróscopo tarda 3.8 s en precesar 1.0 revolución alrededor de un eje vertical. Dos minutos después, sólo tarda 1.9 s en precesar 1.0 revolución. Nadie tocó el giróscopo. Explique por qué.

P10.30. Un giróscopo precesa como en la figura 10.32. ¿Qué sucede si agregamos suavemente peso al extremo del eje del volante opuesto al pivote?

P10.31. Una bala sale de un rifle girando sobre su eje. Explique cómo esto evita que la bala dé volteretas y mantiene la punta dirigida hacia adelante.

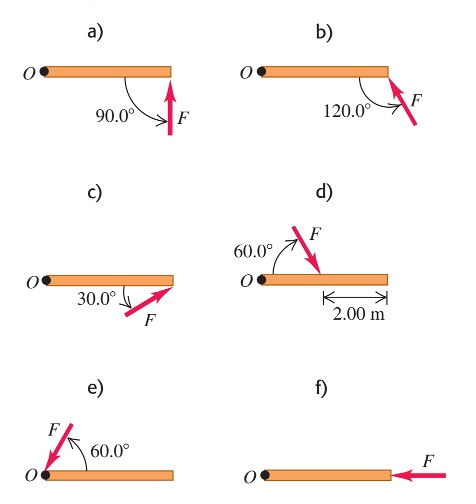
P10.32. Cierta tornamesa uniforme de diámetro D_0 tiene momento angular L_0. Si usted quiere volver a diseñarla de manera que conserve la misma masa, pero tenga el doble de momento angular con la misma velocidad angular que antes, ¿cuál debería ser su diámetro en términos de D_0?

Ejercicios

Sección 10.1 Torca

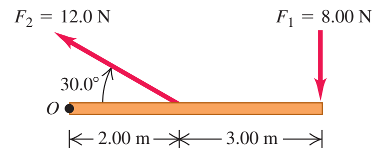
10.1. Calcule la torca (magnitud y dirección) alrededor del punto O debido a la fuerza $\vec{F}$ en cada una de las situaciones mostradas en la figura 10.37. En todos los casos, la fuerza $\vec{F}$ y la varilla están en el plano de la página, la varilla mide 4.00 m de largo y la fuerza tiene magnitud $F = 10.0$ N.

Figura 10.37 Ejercicio 10.1.



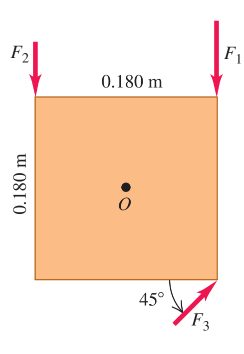
10.2. Calcule la torca neta alrededor del punto O para las dos fuerzas aplicadas como en la figura 10.38. La varilla y las dos fuerzas están en el plano de la página.

Figura 10.38 Ejercicio 10.2.



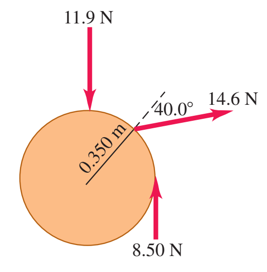
10.3. Una placa metálica cuadrada de 0.180 m por lado pivotea sobre un eje que pasa por el punto O en su centro y es perpendicular a la placa (figura 10.39). Calcule la torca neta alrededor de este eje debido a las tres fuerzas mostradas en la figura, si sus magnitudes son $F_1 =$ 18.0 N, $F_2 =$ 26.0 N y $F_3 =$ 14.0 N. La placa y todas las fuerzas están en el plano de la página.

Figura 10.39 Ejercicio 10.3.



10.4. Se aplican tres fuerzas a una rueda con radio de 0.350 m, como se indica en la figura 10.40. Una fuerza es perpendicular al borde, otra es tangente a éste y la otra forma un ángulo de 40.0° con el radio. ¿Cuál es la torca neta sobre la rueda debido a estas tres fuerzas para un eje perpendicular a la rueda y que pasa por su centro?

Figura 10.40 Ejercicio 10.4.



10.5. Una fuerza que actúa sobre una pieza mecánica es $\vec{F} = (-5.00\text{ N})\hat{\imath} + (4.00\text{ N})\hat{\jmath}$. El vector del origen al punto de aplicación de la fuerza es $\vec{r} = (-0.450\text{ m})\hat{\imath} + (0.150\text{ m})\hat{\jmath}$. *a*) Haga un dibujo que muestre $\vec{r}$, $\vec{F}$, y el origen. *b*) Use la regla de la mano derecha para determinar la dirección de la torca. *c*) Calcule el vector de la torca vectorial producido por la fuerza. Verifique que la dirección de la torca sea la misma que obtuvo en el inciso *b*).

10.6. Un maquinista usa una llave inglesa para aflojar una tuerca. La llave tiene 25.0 cm de longitud y él ejerce una fuerza de 17.0 N en el extremo del mango, formando un ángulo de 37° con éste (figura 10.41). *a*) ¿Qué torca ejerce el maquinista alrededor del centro de la tuerca? *b*) ¿Cuál es la torca máxima que el maquinista podría ejercer con esta fuerza y cómo debería orientarse la fuerza?

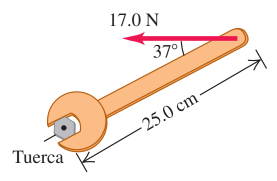


Figura 10.41 Ejercicio 10.6.

Sección 10.2 Torca y aceleración angular de un cuerpo rígido

10.7. El volante de un motor tiene momento de inercia de 2.50 kg · m^2 alrededor de su eje de rotación. ¿Qué torca constante se requiere para que alcance una rapidez angular de 400 rev/min en 8.00 s, partiendo del reposo?

10.8. Un casco esférico uniforme de 8.40 kg y 50.0 cm de diámetro tiene cuatro masas pequeñas de 2.00 kg pegadas a su superficie exterior, a distancias equidistantes. Esta combinación gira en torno a un eje que pasa por el centro de la esfera y dos de las masas pequeñas (figura 10.42). ¿Qué torca por fricción se requiere para reducir la rapidez angular del sistema, de 75.0 rpm a 50.0 rpm en 30.0 s?

Figura 10.42 Ejercicio 10.8.

Eje de rotación

10.9. Una pieza de maquinaria tiene la forma de una esfera sólida uniforme con masa de 225 g y diámetro de 3.00 cm, y gira alrededor de un eje sin fricción que pasa por su centro; sin embargo, en un punto de su ecuador roza contra un metal, lo cual produce una fuerza de fricción de 0.0200 N en ese punto. *a*) Calcule su aceleración angular. *b*) ¿Cuánto tiempo requerirá para disminuir su rapidez rotacional en 22.5 rad/s?

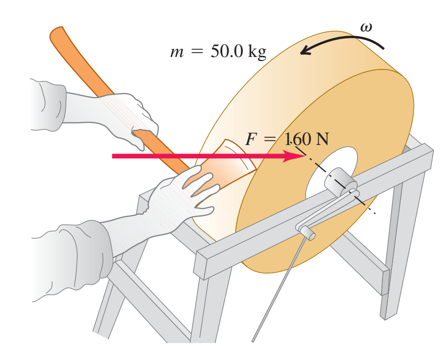
10.10. Un cordón se enrolla en el borde de una rueda sólida uniforme de 0.250 m de radio y masa de 9.20 kg. Se tira del cordón con una fuerza horizontal constante de 40.0 N hacia la derecha, quitándolo tangencialmente de la rueda, la cual está montada con cojinetes sin fricción en un eje horizontal que pasa por su centro. *a*) Calcule la aceleración angular de la rueda y la aceleración de la parte del cordón que ya se haya retirado de la rueda. *b*) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza que el eje ejerce sobre la rueda. *c*) ¿Por qué las respuestas a los incisos *a*) y *b*) cambiarían si el tirón fuera hacia arriba en vez de horizontal?

10.11. Un cilindro uniforme sólido con masa de 8.25 kg y diámetro de 15.0 cm gira a 220 rpm sobre un eje delgado sin fricción, que pasa a lo largo del eje del cilindro. Se diseña un freno de fricción sencillo para detener el cilindro empujando el freno contra el borde exterior con una fuerza normal. El coeficiente de fricción cinética entre el freno y el borde es de 0.333. ¿Qué fuerza normal debe aplicarse para detener el cilindro después de girar 5.25 revoluciones?

10.12. Una piedra cuelga del extremo libre de un cable enrollado en el borde exterior de una polea, como se muestra en la figura 10.10. La polea es un disco uniforme con masa de 10.0 kg y 50.0 cm de radio, que gira sobre cojinetes sin fricción. Se determina que la piedra recorre 12.6 m en los primeros 3.00 s partiendo del reposo. Calcule *a*) la masa de la piedra y *b*) la tensión en el cable.

10.13. Una piedra de afilar en forma de disco sólido con 0.520 m de diámetro y masa de 50.0 kg gira a 850 rev/min. Usted presiona una hacha contra el borde de la piedra con una fuerza normal de 160 N (figura 10.43), y la piedra se detiene en 7.50 s. Calcule el coeficiente de fricción entre el hacha y la piedra. Ignore la fricción de los cojinetes.

Figura 10.43 Ejercicio 10.13 y problema 10.53.

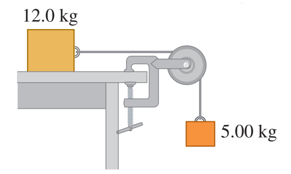


10.14. Una cubeta con agua de 15.0 kg se suspende de una cuerda ligera, enrollada en un cilindro sólido de 0.300 m de diámetro y masa de 12.0 kg. El cilindro pivotea en un eje sin fricción que pasa por su centro. La cubeta se suelta del reposo en el borde de un pozo y cae 10.0 m al agua. *a*) ¿Qué tensión hay en la cuerda mientras la cubeta cae? *b*) ¿Con qué rapidez golpea la cubeta el agua? *c*) ¿Cuánto tarda en caer? *d*) Mientras la cubeta cae, ¿qué fuerza ejerce el eje sobre el cilindro?

10.15. Un libro de 2.00 kg descansa en una superficie horizontal sin fricción. Un cordel atado al libro pasa por una polea de 0.150 m de diámetro, y está atado en su otro extremo a un libro colgante con masa de 3.00 kg. El sistema se suelta del reposo y se observa que los libros se mueven 1.20 m en 0.800 s. *a*) Calcule la tensión en cada sección del cordel. *b*) Calcule el momento de inercia de la polea con respecto a su eje de rotación.

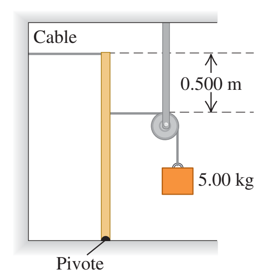
10.16. Una caja de 12.0 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción está unida a un peso de 5.00 kg con un alambre delgado y ligero que pasa por una polea sin fricción (figura 10.44). La polea tiene la forma de un disco sólido uniforme con masa de 2.00 km y diámetro de 0.500 m. Después de que el sistema se libera, calcule *a*) la tensión en el alambre en ambos lados de la polea, *b*) la aceleración de la caja, y *c*) las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el eje ejerce sobre la polea.

Figura 10.44 Ejercicio 10.16.



10.17. Un poste delgado uniforme de 15.0 kg y 1.75 m de longitud se mantiene vertical mediante un cable y tiene unidos una masa de 5.00 kg (como se indica en la figura 10.45) y un pivote en su extremo inferior. La cuerda unida a la masa de 5.0 kg pasa por una polea sin masa y sin fricción, y tira perpendicularmente del poste. De repente, el cable se rompe. *a*) Encuentre la aceleración angular del poste alrededor del pivote cuando el cable se rompe. *b*) La aceleración angular calculada en el inciso *a*) permanece constante conforme el poste cae (antes de que golpee la polea)? ¿Por qué? *c*) ¿Cuál es la aceleración de la masa de 5.00 kg después de que el

Figura 10.45 Ejercicio 10.17.



cable se rompe? ¿Dicha aceleración permanece constante? Explique su respuesta.

10.18. Una varilla horizontal delgada de longitud l y masa M pivotea alrededor de un eje vertical en un extremo. Una fuerza de magnitud constante F se aplica al otro extremo, haciendo que la varilla gire en un plano horizontal. La fuerza se mantiene perpendicular a la varilla y al eje de rotación. Calcule la magnitud de la aceleración angular de la varilla.

Sección 10.3 Rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje móvil

10.19. Un aro de 2.20 kg y de 1.20 m de diámetro rueda hacia la derecha sin deslizarse sobre un piso horizontal a 3.00 rad/s constantes. *a*) ¿Qué tan rápido se mueve su centro? *b*) ¿Cuál es la energía cinética total del aro? *c*) Calcule el vector de velocidad de cada uno de los siguientes puntos, vistos por una persona en reposo en el suelo: i) el punto más alto del aro; ii) el punto más bajo del aro; iii) un punto al lado derecho del aro, a la mitad de la distancia entre la parte superior y la parte inferior. *d*) Calcule el vector de velocidad de cada uno de los puntos del inciso *c*), con excepción del visto por alguien que se mueve con la misma velocidad que el aro.

10.20. Se enrolla un cordel varias veces en el borde de un aro pequeño de 8.00 cm de radio y masa de 0.180 kg. El extremo libre del cordel se sostiene fijo y el aro se suelta del reposo (figura 10.46). Después de que el aro ha descendido 75.0 cm, calcule: *a*) la rapidez angular del aro al girar y *b*) la rapidez de su centro.

Figura 10.46 Ejercicio 10.20 y problema 10.72.

0.0800 m

10.21. ¿Qué fracción de la energía cinética total es rotacional para los siguientes objetos que ruedan sin resbalar por una superficie horizontal? *a*) Un cilindro sólido uniforme, *b*) Una esfera uniforme, *c*) Una esfera hueca de paredes delgadas, *d*) un cilindro hueco con radio exterior R y radio interior $R/2$.

10.22. Un casco esférico hueco con masa de 2.00 kg rueda sin resbalar bajando una pendiente de 38.0°. *a*) Calcule: la aceleración, la fuerza de fricción y el coeficiente de fricción mínimo para que no resbale. *b*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas al inciso *a*) si la masa se aumentara al doble (4.00 kg)?

10.23. Una esfera sólida se suelta del reposo y baja por una ladera que forma un ángulo de 65.0° abajo de la horizontal. *a*) ¿Qué valor mínimo debe tener el coeficiente de fricción estática entre la ladera y la esfera para que no haya deslizamiento? *b*) ¿El coeficiente de fricción calculado en el inciso *a*) bastaría para evitar que una esfera hueca (como un balón de fútbol) resbale? Justifique su respuesta. *c*) En el inciso *a*), ¿por qué usamos el coeficiente de fricción estática y no el coeficiente de fricción cinética?

10.24. Una canica uniforme baja rodando por un tazón simétrico, partiendo del reposo en el borde izquierdo. El borde está una distancia h arriba del fondo del tazón. La mitad izquierda del tazón es lo bastante áspera como para que la canica ruede sin resbalar, pero la mitad derecha no tiene fricción porque está lubricada con aceite. *a*) ¿Qué altura alcanzará la canica en el lado resbaloso, medida verticalmente desde el fondo? *b*) ¿Qué altura alcanzaría la canica si el lado derecho fuera tan áspero como el izquierdo? *c*) ¿Cómo explica el hecho de que la canica alcance *más altura* en el lado derecho con fricción que sin fricción?

10.25. Una rueda de 392 N se desprende de un camión en movimiento, rueda sin resbalar por una carretera y, al llegar al pie de una colina, gira a 25.0 rad/s. El radio de la rueda es de 0.600 m y su momento de inercia alrededor de su eje de rotación es de 0.800 MR^2. La fricción efectúa trabajo sobre la rueda mientras ésta sube la colina hasta que se detiene a una altura h sobre el pie de la colina; ese trabajo tiene valor absoluto de 3500 J. Calcule h.

10.26. Bola que rueda cuesta arriba. Una bola de bolos (boliche) sube rodando sin resbalar por una rampa que forma un ángulo β con la horizontal. (Véase ejemplo 10.7, sección 10.3.) Trate la bola como esfera sólida uniforme, sin tomar en cuenta los agujeros. *a*) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la bola. Explique por qué la fricción debe tener dirección *cuesta arriba*. *b*) ¿Qué aceleración tiene el centro de masa de la bola? *c*) ¿Qué coeficiente de fricción estática mínimo se necesita para que la bola no resbale?

Sección 10.4 Trabajo y potencia en movimiento rotacional

10.27. Un carrusel (tiovivo) con 2.40 m de radio tiene momento de inercia de 2100 kg · m^2 alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y gira con fricción despreciable. *a*) Un niño aplica una fuerza de 18.0 N tangencialmente al borde durante 15.0 s. Si el carrusel estaba inicialmente en reposo, ¿qué rapidez angular tiene al final de los 15.0 s? *b*) ¿Cuánto trabajo efectuó el niño sobre el carrusel? *c*) ¿Qué potencia media le suministró el niño?

10.28. El motor proporciona 175 hp a la hélice de un avión a 2400 rev/min. *a*) ¿Cuánta torca proporciona el motor del avión? *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el motor en una revolución de la hélice?

10.29. Una rueda de afilar de 1.50 kg con forma de cilindro sólido tiene 0.100 m de radio. *a*) ¿Qué torca constante la llevará del reposo a una rapidez angular de 1200 rev/min en 2.5 s? *b*) ¿Qué ángulo habrá girado en ese tiempo? *c*) Use la ecuación (10.21) para calcular el trabajo efectuado por la torca . *d*) ¿Qué energía cinética tiene la rueda al girar a 1200 rev/min? Compare esto con el resultado del inciso *c*).

10.30. Un motor eléctrico consume 9.00 kJ de energía eléctrica en 1.00 min. Si un tercio de la energía se pierde en forma de calor y otras formas de energía interna del motor, y el resto se da como potencia al motor, ¿cuánta torca desarrollará este motor si usted lo pone a 2500 rpm?

10.31. Las puntas de carburo de los dientes de corte de una sierra circular están a 8.6 cm del eje de rotación. *a*) La rapidez sin carga de la sierra, cuando no está cortando, es de 4800 rev/min. ¿Por qué es despreciable la potencia desarrollada sin carga? *b*) Al cortar madera, la rapidez angular de la sierra baja a 2400 rev/min, y la potencia desarrollada es de 1.9 hp. ¿Qué fuerza tangencial ejerce la madera sobre las puntas de carburo?

10.32. La hélice de un avión tiene longitud de 2.08 m (de punta a punta) y masa de 117 kg. Al arrancarse, el motor del avión aplica una torca constante de 1950 N · m a la hélice, que parte del reposo. *a*) Calcule la aceleración angular de la hélice, tratándola como varilla delgada. (Véase la tabla 9.2.) *b*) Calcule la rapidez angular de la hélice después de 5.00 revoluciones. *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *d*) ¿Qué potencia media desarrolla el motor durante las primeras 5.00 revoluciones? *e*) ¿Qué potencia instantánea desarrolla el motor en el instante en que la hélice ha girado 5.00 revoluciones?

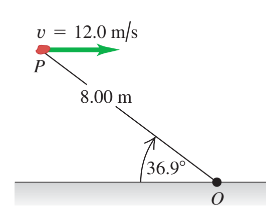
10.33. *a*) Calcule la torca producida por un motor industrial que desarrolla 150 kW a una rapidez angular de 4000 rev/min. *b*) Un tambor de 0.400 m de diámetro y masa despreciable se conecta al eje del motor, y la potencia del motor se utiliza para levantar un peso que cuelga de una cuerda enrollada en el tambor. ¿Qué peso máximo puede levantar el motor, con rapidez constante? *c*) ¿Con qué rapidez subirá el peso?

Sección 10.5 Momento angular

10.34. Una mujer con masa de 50 kg está parada en el borde de un disco grande, con masa de 110 kg y radio de 4.0 m, que gira a 0.50 rev/s alrededor de un eje que pasa por su centro. Calcule la magnitud del momento angular total del sistema mujer-disco. (Suponga que la mujer puede tratarse como punto.)

10.35. Una piedra de 2.00 kg tiene una velocidad horizontal con magnitud de 12.0 m/s cuando está en el punto P de la figura 10.47. *a*) ¿Qué momento angular (magnitud y dirección) tiene con respecto a O en ese instante? *b*) Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre la piedra es su peso, calcule la rapidez del cambio (magnitud y dirección) de su momento angular en ese instante.

Figura 10.47 Ejercicio 10.35.



10.36. *a*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra en órbita alrededor del Sol. ¿Es razonable considerar a la Tierra como partícula? *b*) Calcule la magnitud del momento angular de la Tierra debida a su rotación en torno a un eje que pasa por los polos norte y sur, tratando a la Tierra como una esfera uniforme. Consulte el Apéndice E y los datos astronómicos del Apéndice F.

10.37. Calcule la magnitud del momento angular del segundero de un reloj alrededor de un eje que pasa por el centro de la carátula, si tal manecilla tiene una longitud de 15.0 cm y masa de 6.00 g. Trate la manecilla como una varilla delgada que gira con velocidad angular constante alrededor de un extremo.

10.38. Una esfera hueca de pared delgada con masa de 12.0 kg y diámetro de 48.0 cm gira alrededor de un eje que pasa por su centro. El ángulo (en radianes) con el que gira en función del tiempo (en segundos) está dado por $\theta(t) = At^2 + Bt^4$, donde A tiene valor numérico de 1.50 y B tiene valor numérico de 1.10. *a*) ¿Cuáles son las unidades de las constantes A y B? *b*) En el instante $t = 3.00$ s, calcule i) el momento angular de la esfera y ii) la torca neta de la esfera.

Sección 10.6 Conservación del momento angular

10.39. En ciertas circunstancias, una estrella puede colapsarse formando un objeto extremadamente denso constituido principalmente por neutrones y llamado *estrella de neutrones*. La densidad de tales estrellas es unas 10^{14} veces mayor que la de la materia sólida ordinaria. Suponga que representamos la estrella como esfera sólida rígida uniforme, tanto antes como después del colapso. El radio inicial era de 7.0×10^5 km (comparable al del Sol); y el final, de 16 km. Si la estrella original giraba una vez cada 30 días, calcule la rapidez angular de la estrella de neutrones.

10.40. Un bloque pequeño de 0.0250 kg en una superficie horizontal sin fricción está atado a un cordón sin masa que pasa por un agujero en la superficie (figura 10.48). El bloque inicialmente está girando a una distancia de 0.300 m del agujero, con rapidez angular de 1.75 rad/s. Ahora se tira del cordón desde abajo, acortando el radio del círculo que describe el bloque a 0.150 m. El bloque puede tratarse como partícula. *a*) ¿Se conserva el momento angular del bloque? ¿Por qué? *b*) ¿Qué valor tiene ahora la rapidez angular? *c*) Calcule el cambio de energía cinética del bloque. *d*) ¿Cuánto trabajo se efectuó al tirar del cordón?

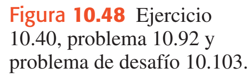
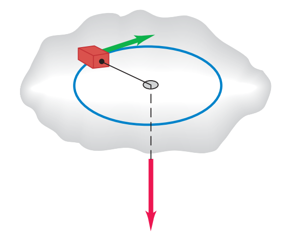
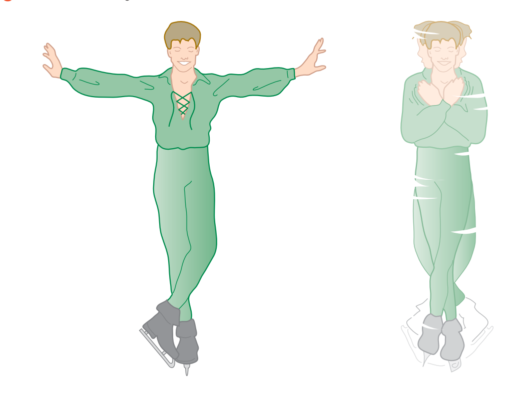


Figura 10.48 Ejercicio 10.40, problema 10.92 y problema de desafío 10.103.



10.41. Patinador que gira. Los brazos estirados de un patinador que prepara un giro pueden considerarse como una varilla delgada que pivotea sobre un eje que pasa por su centro (figura 10.49). Cuando los brazos se juntan al cuerpo para ejecutar el giro, se pueden considerar como un cilindro hueco de pared delgada. Los brazos y las manos tienen una masa combinada de 8.0 kg; estirados, abarcan 1.8 m; y encogidos, forman un cilindro con 25 cm de radio. El momento de inercia del resto del cuerpo alrededor del eje de rotación es constante e igual a $0.40 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Si la rapidez angular original del patinador es de 0.40 rev/s, ¿cuál es la rapidez angular final?

Figura 10.49 Ejercicio 10.41.



10.42. Una clavadista sale del trampolín con los brazos hacia arriba y las piernas hacia abajo, lo que le confiere un momento de inercia alrededor de su eje de rotación de $18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Luego, ella forma una pequeña bola, reduciendo su momento de inercia a $3.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y gira dos revoluciones completas en 1.0 s. Si no se hubiera encogido, ¿cuántas revoluciones habría girado en los 1.5 s que tarda en caer desde el trampolín al agua?

10.43. Una tornamesa de madera de 120 kg con forma de disco plano tiene 2.00 m de radio y gira inicialmente alrededor de un eje vertical, que pasa por su centro, a 3.00 rad/s. De repente, un paracaidista de 70.0 kg se posa suavemente sobre la tornamesa en un punto cerca del borde. *a*) Calcule la rapidez angular de la tornamesa después de que el paracaidista se posa en ella. (Suponga que puede tratarse al paracaidista como partícula.) *b*) Calcule la energía cinética del sistema antes y después de la llegada del paracaidista. ¿Por qué no son iguales estas energías?

10.44. Una puerta de madera sólida de 1.00 m de ancho y 2.00 m de alto tiene las bisagras en un lado y una masa total de 40.0 kg. La puerta, que inicialmente está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un puñado de lodo pegajoso con masa de 0.500 kg, que viaja en dirección perpendicular a la puerta a 12.0 m/s justo antes del impacto. Calcule la rapidez angular final de la puerta. ¿Es apreciable la aportación del lodo al momento de inercia?

10.45. Un bicho de 10.0 g está parado en el extremo de una barra delgada uniforme que inicialmente está en reposo en una mesa horizontal lisa. El otro extremo de la barra pivotea en torno a un clavo incrustado en la mesa, y puede girar libremente sin fricción. La masa de la barra es de 50.0 g, y su longitud de 100 cm. El bicho salta en dirección horizontal, perpendicular a la barra, con rapidez de 20.0 cm/s relativa a la mesa. *a*) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del salto del insecto retozón. *b*) Calcule la energía cinética total del sistema inmediatamente después del salto. *c*) ¿De dónde proviene la energía?

10.46. ¡Choque de asteroide! Suponga que un asteroide que viaja en línea recta hacia el centro de la Tierra fuera a estrellarse contra nuestro planeta en el ecuador y se incrustaría apenas por debajo de la superficie. En términos de la masa terrestre M, ¿cuál tendría que ser la masa de dicho asteroide para el día que se vuelva 25.0% más grande de lo que actualmente es como resultado del choque? Suponga que el asteroide es muy pequeño en comparación con la Tierra y que ésta es un todo uniforme.

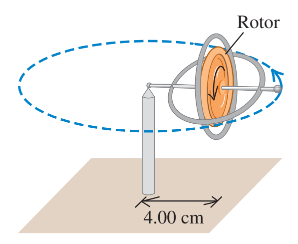
10.47. Una barra metálica delgada y uniforme, de 2.00 m de longitud y con un peso de 90.0 N, cuelga verticalmente del techo en un pivote sin fricción colocado en el extremo superior. De repente, una pelota de 3.00 kg, que viaja inicialmente a 10.0 m/s en dirección horizontal, golpea la barra 1.50 m abajo del techo. La pelota rebota en dirección opuesta con rapidez de 6.00 m/s. *a*) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque. *b*) Durante el choque, ¿por qué se conserva el momento angular pero no el momento lineal?

Sección 10.7 Giróscopos y precesión

10.48. Dibuje una vista superior del giróscopo de la figura 10.32. *a*) Dibuje flechas rotuladas para $\vec{\omega}$, $\vec{L}$ y $\vec{\tau}$. Dibuje $d\vec{L}$ producido por $\vec{\tau}$. Dibuje $\vec{L} + d\vec{L}$. Determine el sentido de precesión examinando las direcciones de $\vec{L}$ y $\vec{L} + d\vec{L}$. *b*) Invierta la dirección de la velocidad angular del rotor y repita todos los pasos del inciso *a*). *c*) Mueva el pivote al otro extremo del eje, con la misma dirección de velocidad angular que en el inciso *b*), y repita todos los pasos. *d*) Con el pivote como en el inciso *c*), invierta la velocidad angular del rotor y repita todos los pasos.

10.49. El rotor (volante) de un giróscopo de juguete tiene una masa de 0.140 kg. Su momento de inercia alrededor de su eje es 1.20×10^{-4} kg · m^2. La masa del marco es de 0.0250 kg. El giróscopo se apoya en un solo pivote (figura 10.50) con su centro de masa a una distancia horizontal de 4.00 cm del pivote. El giróscopo precesa en un plano horizontal a razón de una revolución cada 2.20 s. *a*) Calcule la fuerza hacia arriba ejercida por el pivote. *b*) Calcule la rapidez angular en rpm con que el rotor gira sobre su eje. *c*) Copie el diagrama e indique con vectores el momento angular del rotor y la torca que actúa sobre él.

Figura **10.50** Ejercicio 10.49.



10.50. Un giróscopo en la Luna. Cierto giróscopo precesa a razón de 0.50 rad/s cuando se utiliza en la Tierra. Si se transportara a una base lunar, donde la aceleración debida a la gravedad es de $0.165g$, ¿cuál sería su tasa de precesión?

10.51. Un giróscopo precesa alrededor de un eje vertical. Describa qué pasa con la rapidez angular de precesión si se efectúan los siguientes cambios, sin alterar las demás variables: *a*) se duplica la rapidez angular del volante; *b*) se duplica el peso total; *c*) se duplica el momento de inercia del volante alrededor de su eje; *d*) se duplica la distancia del pivote al centro de gravedad. *e*) ¿Qué sucede si se duplican simultáneamente las cuatro variables de los incisos *a*) a *d*)?

10.52. La Tierra precesa una vez cada 26,000 años y gira sobre su eje una vez al día. Estime la magnitud de la torca que causa tal precesión. Quizá necesite datos del Apéndice F. Haga la estimación suponiendo que: i) la Tierra es una esfera uniforme y ii) la precesión de la Tierra es como la del giróscopo de la figura 10.34. En este modelo, el eje de precesión y el de rotación son perpendiculares. En realidad, el ángulo entre estos dos ejes para la Tierra es de sólo $23\frac{1}{2}°$; esto afecta la torca calculada en un factor de casi 2.

Problemas

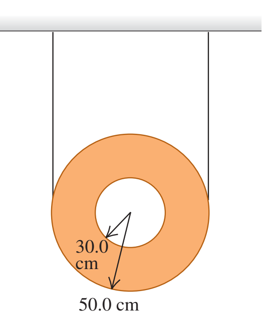
10.53. Una piedra de afilar de 50.0 kg es un disco sólido de 0.520 m de diámetro. Se empuja una hacha contra el borde con una fuerza normal de 160 N (figura 10.43). El coeficiente de fricción cinética entre la piedra y el hacha es de 0.60, y hay una torca por fricción constante de 6.50 N · m entre el eje de la piedra y sus cojinetes. *a*) ¿Qué fuerza debe aplicarse tangencialmente al extremo de una manivela impulsora de 0.500 m para llevar la piedra del reposo a 120 rev/min en 9.00 s? *b*) Una vez que la piedra alcanza esa rapidez angular, ¿qué fuerza tangencial se tendría que aplicar al extremo de la manivela impulsora para mantenerla a una rapidez angular constante de 120 rev/min? *c*) ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en detenerse, si sólo la fricción del eje actúa sobre ella y está girando a 120 rev/min?

10.54. Una rueda experimental de bicicleta se coloca en un banco de pruebas, de modo que pueda girar libremente sobre su eje. Se ejerce una torca neta constante de 5.00 N · m a la rueda durante 2.00 s, aumentando la rapidez angular de la rueda de 0 a 100 rev/min. Luego, se deja de aplicar la torca externa y la fricción en los cojinetes de la rueda detiene a ésta en 125 s. Calcule: *a*) el momento de inercia de la rueda alrededor del eje de rotación; *b*) la torca de fricción; *c*) el número total de revoluciones que la rueda gira en ese lapso de 125 s.

10.55. Velocímetro. El velocímetro de un automóvil convierte la rapidez angular de las ruedas a rapidez lineal del auto, suponiendo que los neumáticos son de tamaño estándar y no hay deslizamiento sobre el pavimento. *a*) Si los neumáticos estándares de un automóvil tienen 24 pulgadas de diámetro, ¿a qué tasa (en rpm) giran las ruedas cuando se maneja en carretera a una rapidez de 60 mi/h? *b*) Suponga que se instalan neumáticos demasiado grandes, de 30 pulgadas de diámetro, en el vehículo. ¿Qué tan rápido viajará realmente cuando el velocímetro marque 60 mi/h? *c*) Si ahora los neumáticos se cambian por unos más pequeños de 20 pulgadas de diámetro, ¿cuál será la lectura del velocímetro cuando realmente se viaje a 50 mi/h?

10.56. Un disco hueco uniforme tiene dos trozos de alambre delgado ligero que se enrollan alrededor de su borde exterior y están sujetos al techo (figura 10.51). De repente, se rompe uno de los alambres, y el alambre que queda no se desliza conforme el disco rueda hacia abajo. Utilice la conservación de la energía para calcular la rapidez del centro de este disco, después de que haya caído una distancia de 1.20 m.

Figura **10.51** Problema 10.56.



10.57. Una barra delgada y uniforme de 3.80 kg y 80.0 cm de longitud tiene pegadas esferas muy pequeñas de 2.50 kg en cada uno de sus extremos (figura 10.52). La barra está apoyada horizontalmente en un eje delgado y sin fricción que para por su centro y es perpendicular a ella. De repente, la esfera del lado derecho se despega y se cae, aunque la otra permanece pegada a la barra. *a*) Calcule la aceleración angular de la barra justo después de que la esfera se cae. *b*) ¿La aceleración angular permanece constante mientras la barra continua balanceándose? Si no es así, ¿aumentará o disminuirá? *c*) Obtenga la velocidad angular de la barra justo cuando se balance por su posición vertical.

Figura 10.52 Problema 10.57.

2.50 kg 2.50 kg
Barra Eje (visto desde el extremo)

10.58. Elena la "Exterminadora" está explorando un castillo. Un dragón la ve y la persigue por un pasillo. Elena se mete en una habitación y trata de cerrar la pesada puerta antes de que el dragón la atrape. Inicialmente, la puerta es perpendicular a la pared, así que debe girar 90° para cerrarse. La puerta tiene 3.00 m de altura y 1.25 m de anchura, y pesa 750 N. Puede despreciarse la fricción en las bisagras. Si Elena aplica una fuerza de 220 N al borde de la puerta, perpendicular a ella, ¿cuánto tardará en cerrarla?

10.59. Una varilla delgada de longitud l está sobre el eje $+x$ con su extremo izquierdo en el origen. Un cordón tira de ella con una fuerza $\vec{F}$ dirigida hacia un punto P una distancia h arriba de la varilla. ¿En qué punto de la varilla debería atarse el cordón para lograr la torca máxima alrededor del origen si P está: *a*) arriba del extremo derecho de la varilla? *b*) ¿Arriba del extremo izquierdo? *c*) ¿Arriba del centro?

10.60. Equilibrismo. Una bolita de arcilla con masa M está pegada a un extremo de una varilla larga, delgada y uniforme de (la misma) masa M y longitud L. *a*) Ubique la posición del centro de masa del sistema varilla-arcilla y márquela en un dibujo de la varilla. *b*) Se equilibra cuidadosamente la varilla en una mesa sin fricción, de modo que esté parada verticalmente, con el extremo que no tiene arcilla tocando la mesa. Ahora la varilla se inclina formando un ángulo pequeño θ con la vertical. Determine su aceleración angular en este instante, suponiendo que el extremo sin arcilla no pierde contacto con la mesa. (*Sugerencia:* véase la tabla 9.2.) *c*) Se equilibra otra vez la varilla en la mesa sin fricción de modo que esté parada verticalmente, pero ahora con el extremo que *tiene* la arcilla tocando la superficie. Otra vez, la varilla se inclina formando un ángulo pequeño θ con la vertical. Determine su aceleración angular en ese instante, suponiendo que la arcilla permanece en contacto con la mesa. Compare su resultado con el que obtuvo en el inciso *b*). *d*) Un taco de billar es una varilla que tiene un extremo grueso y se adelgaza continuamente hasta el otro extremo. Es fácil equilibrar un taco verticalmente sobre un dedo, si el extremo delgado está en contacto con el dedo; sin embargo, resulta mucho más difícil si el extremo que está en contacto con el dedo es el grueso. Explique esta diferencia.

10.61. Se ata un cordón ligero a un punto en el borde de un disco vertical uniforme de radio R y masa M. El disco puede girar sin fricción alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por su centro. Inicialmente, el disco está en reposo con el cordón atado al punto más alto del disco. Se tira del cordón con una fuerza horizontal constante $\vec{F}$ hasta que el disco ha girado exactamente un cuarto de revolución, y luego se suelta. *a*) Use la ecuación (10.20) para calcular el trabajo hecho por el cordón. *b*) Use la ecuación (6.14) para calcular el trabajo hecho por el cordón. ¿Obtiene el mismo resultado que en el inciso *a*)? *c*) Determine la rapidez angular final del disco. *d*) Determine la aceleración tangencial máxima de un punto del disco. *e*) Determine la aceleración radial (centrípeta) máxima de un punto del disco.

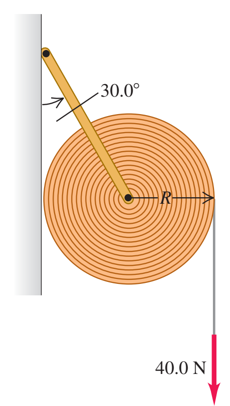
10.62. El mecanismo de la figura 10.53 sirve para sacar una caja de 50 kg con provisiones de la bodega de un barco. Una cuerda está enrollada en un cilindro de madera que gira sobre un eje metálico. El cilindro tiene un radio de 0.25 m y un momento de inercia $I = 2.9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ alrededor del eje. La caja cuelga del extremo libre de la cuerda. Un extremo del eje pivotea sobre cojinetes sin fricción; una manivela está unida al otro extremo. Cuando se gira la manivela, el extremo del mango gira alrededor del eje en un círculo vertical de 0.12 m de radio, el cilindro gira y la caja sube. ¿Qué magnitud de la fuerza $\vec{F}$ aplicada tangencialmente a la manivela se necesita para levantar la caja con una aceleración de 0.80 m/s^2? (Pueden despreciarse la masa de la cuerda, así como los momentos de inercia del eje y la manivela.)

Figura 10.53 Problema 10.62.

0.12 m
F

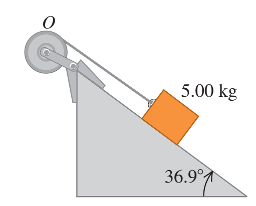
10.63. Un rollo de 16.0 kg de papel con radio $R = 18.0$ cm descansa contra la pared sostenido por un soporte unido a una varilla que pasa por el centro del rollo (figura 10.54). La varilla gira sin fricción en el soporte, y el momento de inercia del papel y la varilla alrededor del eje es de $0.260\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. El otro extremo del soporte está unido a la pared mediante una bisagra sin fricción, de modo que el soporte forma un ángulo de 30.0° con la pared. El peso del soporte es despreciable. El coeficiente de fricción cinética entre el papel y la pared es $\mu_k = 0.25$. Se aplica una fuerza vertical constante $F = 40.0$ N al papel, que se desenrolla. *a*) ¿Qué magnitud tiene la fuerza que la varilla ejerce sobre el rollo de papel al desenrollarse éste? *b*) ¿Qué aceleración angular tiene el rollo?

Figura 10.54 Problema 10.63.



10.64. Un bloque con masa $m = 5.00$ kg baja deslizándose por una superficie inclinada 36.9° con respecto a la horizontal (figura 10.55). El coeficiente de fricción cinética es 0.25. Un cordón atado al bloque está enrollado en un volante con masa de 25.0 kg y con su eje fijo en O, y momento de inercia con respecto al eje de $0.500\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. El cordón tira sin resbalar a una distancia perpendicular de 0.200 m con respecto a ese eje. *a*) ¿Qué aceleración tiene el bloque? *b*) ¿Qué tensión hay en el cordón?

Figura 10.55 Problema 10.64.



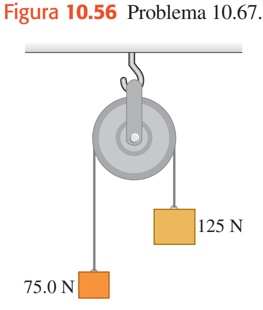
10.65. Dos discos metálicos, uno con radio $R_1 = 2.50$ cm y masa $M_1 = 0.80$ kg y el otro con radio $R_2 = 5.00$ cm y masa $M_2 = 1.60$ kg, se sueldan entre sí y se montan en un eje sin fricción que pasa por su centro común, como en el problema 9.89. a) Un cordón ligero se enrolla en el borde del disco menor, y un bloque de 1.50 kg se cuelga del extremo libre del cordón. ¿Qué magnitud tiene la aceleración hacia abajo del bloque una vez que se suelta? *b*) Repita el cálculo del inciso *a*), ahora con el cordón enrollado en el borde

del disco mayor. ¿En qué caso es mayor la aceleración del bloque? ¿Es lógica la respuesta?

10.66. Se tira de un aplanador en forma de cilindro hueco con pared delgada y masa M, aplicando una fuerza horizontal constante F a un mango sujeto al eje. Si el aplanador rueda sin resbalar, calcule la aceleración y la fuerza de fricción.

10.67. Dos pesos están conectados por un cordón flexible muy ligero, que pasa por una polea sin fricción de 50.0 N y radio de 0.300 m. La polea es un disco sólido uniforme y está apoyada de un gancho unido al techo (figura 10.56). ¿Qué fuerza ejerce el techo sobre el gancho?

Figura 10.56 Problema 10.67.

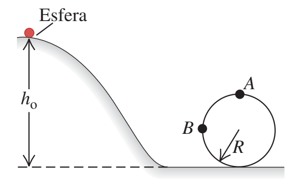


10.68. Un disco sólido rueda sin resbalar en una superficie plana con rapidez constante de 2.50 m/s. *a*) ¿Hasta qué altura puede subir por una rampa de 30.0° antes de parar? *b*) Explique por qué su respuesta anterior no depende de la masa ni del radio del disco.

10.69. El yoyo. Un yoyo consiste en dos discos uniformes, cada uno con masa m y radio R, conectados por un eje ligero de radio b. Un cordón ligero se enrolla varias veces en el eje y luego se sostiene fijo mientras el yoyo se libera del reposo, cayendo al desenrollarse el hilo. Calcule las aceleraciones lineal y angular del yoyo, y la tensión en el cordón.

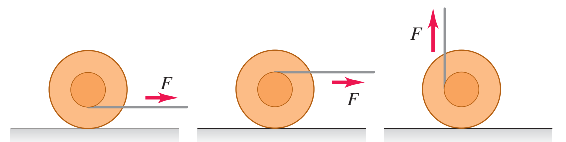
10.70. Un esfera hueca de pared delgada, con masa m y radio r, parte del reposo y rueda hacia abajo sin deslizarse por la pista que se muestra en la figura 10.57. Los puntos A y B están en la parte circular de la pista, cuyo radio es R. El diámetro de la esfera es muy pequeño comparado con h_0 y R, y la fricción de rodamiento es despreciable. *a*) ¿Cuál es la altura mínima h_0 para la cual esta esfera dará una vuelta completa a la parte circular de la pista? *b*) ¿Qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto B, que está al mismo nivel que el centro del círculo? *c*) Suponga que la pista no tiene fricción y que la esfera se suelta desde la misma altura h_0 que usted obtuvo en el inciso *a*). ¿Daría la vuelta completa al bucle? ¿Cómo lo sabe? *d*) En el inciso *c*), ¿qué tan fuerte empuja la pista sobre la esfera en el punto A, la cima del círculo? ¿Qué tan fuerte empujó sobre la esfera en el inciso *a*)?

Figura 10.57 Problema 10.70.



10.71. La figura 10.58 muestra tres yoyos idénticos que inicialmente están en reposo en una superficie horizontal. Se tira del cordel de cada uno en la dirección indicada. Siempre hay suficiente fricción para que el yoyo ruede sin resbalar. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada yoyo. ¿En qué dirección girará cada uno? Explique sus respuestas.

Figura 10.58 Problema 10.71.

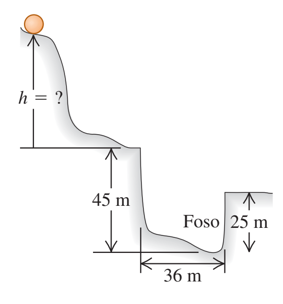


10.72. Como se muestra en la figura 10.46, un cordón está enrollado varias vueltas en el borde de un aro con radio de 0.0800 m y masa de 0.180 kg. Se tira hacia arriba del extremo libre del aro, de forma tal que el aro no se mueve verticalmente mientras el cordón se desenrolla. *a*) Calcule la tensión en el hilo mientras se desenrolla. *b*) Determine la aceleración angular del aro durante el desenrollado del cordón. *c*) Calcule la aceleración hacia arriba de la mano que tira del extremo libre del cordón. *d*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si el aro se sustituyera por un disco sólido con los mismos masa y radio?

10.73. Partiendo del reposo, se aplica una fuerza constante $F = 100$ N al extremo libre de un cable de 50 m, que está enrollado en el borde exterior de un cilindro sólido uniforme de 4.00 kg con diámetro de 30.0 cm, en una situación similar a la de la figura 10.9a. El cilindro puede girar libremente en torno a un eje fijo, sin fricción, que pasa por su centro. *a*) ¿Cuánto tarda en desenrollarse todo el cable y con qué rapidez se está moviendo éste en el instante en que termina de desenrollarse? *b*) Suponga ahora que, en vez de un cilindro, se usa un aro uniforme, pero sin alterar ninguna de las cantidades dadas. ¿Las respuestas a la pregunta del inciso *a*) serían valores más altos o más bajos en este caso? Explique su respuesta.

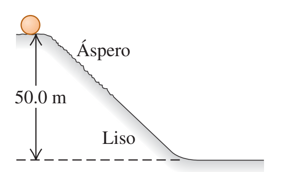
10.74. Una canica uniforme baja rodando sin resbalar por el trayecto de la figura 10.59, partiendo del reposo. *a*) Calcule la altura mínima h que evita que la canica caiga en el foso. *b*) El momento de inercia de la canica depende de su radio. Explique por qué la respuesta al inciso *a*) no depende del radio de la canica. *c*) Resuelva el inciso *a*) para un bloque que se desliza sin fricción, en vez de una canica que rueda. Compare la h mínima en este caso con la respuesta al inciso *a*).

Figura 10.59 Problema 10.74.



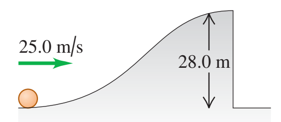
10.75. Piedras rodantes. Un peñasco esférico, sólido y uniforme, parte del reposo y baja rodando por la ladera de una colina de 50.0 m de altura (figura 10.60). La mitad superior de la colina es lo bastante áspera como para que el peñasco ruede sin resbalar; sin embargo, la mitad inferior está cubierta de hielo y no hay fricción. Calcule la rapidez de traslación del peñasco al llegar al pie de la colina.

Figura 10.60 Problema 10.75.



10.76. Una esfera sólida uniforme rueda sin resbalar subiendo una colina, como se muestra en la figura 10.61. En la cima, se está moviendo horizontalmente y después se cae por un acantilado vertical. *a*) ¿A qué distancia del pie del acantilado cae la esfera y con qué rapidez se está moviendo justo antes de tocar el suelo? *b*) Observe que, al tocar tierra la esfera,

Figura 10.61 Problema 10.76.



tiene mayor rapidez traslacional que cuando estaba en la base de la colina. ¿Implica esto que la esfera obtuvo energía de algún lado? ¡Explique su respuesta!

10.77. Una rueda de 42.0 cm de diámetro, consiste en un borde y seis rayos, está hecha de un material plástico rígido y delgado con una densidad lineal de masa de 25.0 g/cm. Esta rueda se suelta desde el reposo en la cima de una colina de 58.0 m de altura. *a*) ¿Con qué rapidez rueda cuando llega a la base de la colina? *b*) ¿Cómo cambiaría su respuesta si la densidad lineal de masa y el diámetro de la rueda se aumentaran al doble?

10.78. Una bicicleta antigua tiene una rueda delantera grande con la manivela para pedalear montada en su eje, y una rueda trasera pequeña que gira con independencia de la delantera: no hay cadena que conecte las ruedas. El radio de la rueda delantera es de 65.5 cm, y el de la trasera es de 22.0 cm. Una bicicleta moderna tiene llantas de 66.0 cm (26 pulgadas) de diámetro y ruedas dentadas delantera y trasera con radios de 11.0 cm y 5.5 cm, respectivamente. La rueda dentada trasera está unida rígidamente al eje de la llanta trasera. Imagine que monta la bicicleta moderna y gira la rueda dentada delantera a 1.00 rev/s. Las llantas de ambas bicicletas ruedan sin resbalar contra el suelo. *a*) Calcule su rapidez lineal al montar la bicicleta moderna. *b*) ¿Con qué rapidez deberá pedalear la manivela de la bicicleta antigua para viajar con la misma rapidez que en el inciso *a*)? *c*) ¿Qué rapidez angular (en rev/s) tendrá entonces la llanta trasera pequeña de la bicicleta antigua?

10.79. En un experimento, se deja que una bola sólida uniforme baje rodando por una pista curva, partiendo del reposo y rodando sin resbalar. La distancia vertical que la bola baja es h. La base de la pista es horizontal y se extiende hasta el borde de una mesa; la bola sale de la pista viajando horizontalmente. En caída libre después de salir de la pista, la bola se mueve una distancia horizontal x y una distancia vertical y. *a*) Calcule x en términos de h y y, despreciando el trabajo de la fricción. *b*) ¿Cambiaría la respuesta al inciso *a*) en la Luna? *c*) Aunque el experimento se haga con mucho cuidado, el valor medido de x es siempre un poco menor que el calculado en el inciso *a*). ¿Por qué? *d*) ¿Cuánto valdría x con las mismas h y y del inciso *a*), si lo que rodara por la pista fuera una moneda? Puede despreciarse el trabajo de la fricción.

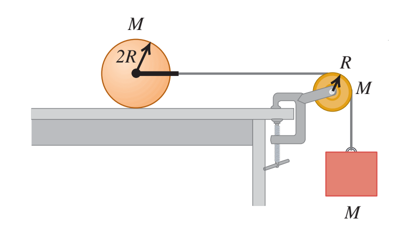
10.80. En un rifle de resorte, un resorte con constante de fuerza de 400 N/m se comprime 0.15 m. Al dispararse el rifle, el 80.0% de la energía potencial elástica almacenada en el resorte se convierte, finalmente, en energía cinética de una esfera uniforme de 0.0590 kg que rueda sin resbalar hasta la base de una rampa. La bola sube rodando sin resbalar por la rampa, hasta que el 90.0% de la energía cinética que tenía en la base se convierte en un aumento de la energía potencial gravitacional en el instante en que se detiene. *a*) ¿Qué rapidez tiene el centro de masa de la bola en la base de la rampa? *b*) En esta posición, ¿qué rapidez tiene un punto en la parte superior de la bola? *c*) ¿Y un punto en la parte inferior? *d*) ¿Qué altura vertical máxima alcanza la bola en la rampa?

10.81. Una rueda está rodando sobre una superficie horizontal con rapidez constante. Las coordenadas de cierto punto del borde de la rueda son $x(t) = R[(2\pi t/T) - \text{sen}(2\pi t/T)]$ y $y(t) = R[1 - \cos(2\pi t/T)]$, donde R y T son constantes. *a*) Dibuje la trayectoria del punto entre $t = 0$ y $t = 2T$. Una curva con esta forma se llama *cicloide*. *b*) ¿Qué significan las constantes R y T? *c*) Calcule las componentes x y y de la velocidad y de la aceleración del punto en cualquier instante t. *d*) Calcule los instantes en que el punto está instantáneamente en reposo. ¿Qué componentes x y y tiene la aceleración en esos instantes? *e*) Calcule la magnitud de la aceleración del punto. ¿Depende del tiempo? Compárela con la magnitud de la aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme, $a_{rad} = 4\pi^2 R/T^2$. Explique su resultado para la magnitud de la aceleración del punto en la rueda usando la idea de que el rodamiento es una combinación de movimientos rotacional y traslacional.

10.82. Una niña empuja un balón de baloncesto de 0.600 kg para que suba rodando por una rampa larga. El balón puede considerarse como esfera hueca de pared delgada. Cuando la niña suelta el balón en la base de la rampa, éste tiene una rapidez de 8.0 m/s. Cuando el balón vuelve a ella después de subir por la rampa y regresar rodando, tiene una rapidez de 4.0 m/s. Suponga que el trabajo efectuado por la fricción sobre el balón es el mismo cuando sube o baja por la rampa, y que el balón rueda sin resbalar. Calcule el aumento máximo en la altura vertical del balón al subir por la rampa.

10.83. Un cilindro sólido uniforme de masa M y radio $2R$ descansa en una mesa horizontal. Se ata un cordón mediante un yugo a un eje sin fricción que pasa por el centro del cilindro, de modo que éste puede girar sobre el eje. El cordón pasa por una polea con forma de disco de masa M y radio R, que está montada en un eje sin fricción que pasa por su centro. Un bloque de masa M se suspende del extremo libre del hilo (figura 10.62). El hilo no resbala en la polea, y el cilindro rueda sin resbalar sobre la mesa. Si el sistema se libera del reposo, ¿qué aceleración hacia abajo tendrá el bloque?

Figura 10.62 Problema 10.83.



10.84. Un puente levadizo uniforme de 8.00 m de longitud está unido al camino en un extremo mediante una articulación sin fricción, y puede levantarse con un cable unido al otro extremo. El puente está en reposo, suspendido 60.0° sobre la horizontal, cuando el cable se rompe repentinamente. *a*) Calcule la aceleración angular del puente inmediatamente después de romperse el cable. (La gravedad se comporta como si actuara en el centro de masa.) *b*) ¿Podría usar la ecuación $\omega = \omega_0 + \alpha t$ para calcular la rapidez angular del puente levadizo en un instante posterior? Explique por qué. *c*) ¿Qué rapidez angular tiene el puente en el momento de quedar horizontal?

10.85. Una esfera de 5.00 kg se deja caer desde una altura de 12.0 m arriba de un extremo de una barra uniforme que está pivoteada en su centro. La masa de la barra es de 8.00 kg y su longitud es de 4.00 m. Sobre el otro extremo de la barra descansa otra esfera de 5.00 kg, no sujeta a la barra. La esfera que cae se queda pegada a la barra después del choque. ¿Qué altura alcanzará la otra esfera después del choque?

10.86. Una varilla uniforme de 0.0300 kg y 0.400 m de longitud gira en un plano horizontal alrededor de un eje fijo que pasa por su centro y es perpendicular a la varilla. Dos anillos pequeños con masa de 0.0200 kg cada uno se montan de modo que pueden deslizarse a lo largo de la varilla, aunque inicialmente están sujetos con broches en posiciones a 0.0500 m del centro de la varilla a cada lado, y el sistema está girando a 30.0 rev/min. Sin alterar de otro modo el sistema, los broches se sueltan y los anillos se deslizan hacia afuera por la varilla, saliendo despedidos por los extremos. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene el sistema en el instante en que los anillos llegan a los extremos de la varilla? *b*) ¿Qué rapidez angular tiene la varilla una vez que los anillos se salen?

10.87. Una varilla uniforme de longitud L descansa en una superficie horizontal sin fricción. La varilla pivotea en un extremo sobre un eje fijo sin fricción y está inicialmente en reposo. Una bala que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la varilla, con rapidez v, golpea la varilla en su centro y se incrusta en ella. La masa de la bala es un cuarto de la masa de la varilla. *a*) ¿Qué rapidez angular final tiene la varilla? *b*) ¿Qué relación (razón) hay entre la energía cinética del sistema después del choque y la energía cinética de la bala antes del choque?

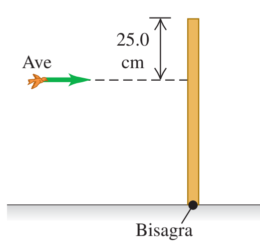
10.88. La puerta de madera sólida de un gimnasio tiene 1.00 m de ancho y 2.00 m de altura, bisagras en un lado y una masa total de 35.0 kg. La puerta, que está abierta y en reposo, es golpeada en su centro por un balón de baloncesto que le aplica una fuerza media de 1500 N durante 8.00 ms. Calcule la rapidez angular de la puerta después del impacto. (*Sugerencia:* si integramos la ecuación (10.29), obtenemos $\Delta L_z = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum \tau_z\right) dt = \left(\sum \tau_z\right)_{\text{med}}\Delta t$. La cantidad $\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum \tau_z\right) dt$ se denomina impulso angular.)

10.89. Un blanco de una galería de tiro consiste en una tabla cuadrada vertical de madera de 0.750 kg y 0.250 m de lado, que pivotea sobre un eje horizontal en su borde superior. Una bala de 1.90 g que viaja a 360 m/s lo golpea de frente en el centro y se incrusta en él. *a*) ¿Qué rapidez angular tiene la tabla justo después del impacto? *b*) ¿Qué altura máxima sobre la posición de equilibrio alcanza el centro de la tabla? *c*) ¿Qué rapidez mínima tendría que tener la bala para que la tabla diera una vuelta completa después del impacto?

10.90. "Glitches" de estrellas de neutrones. A veces, una estrella de neutrones giratoria (véase el ejercicio 10.39) sufre una aceleración repentina e inesperada llamada *glitch*. Una explicación es que el *glitch* se presenta cuando la corteza de la estrella se asienta un poco, reduciendo el momento de inercia alrededor del eje de rotación. Una estrella de neutrones con rapidez angular $\omega_0 = 70.4$ rad/s sufrió un *glitch* en octubre de 1975, el cual aumentó su velocidad angular a $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, donde $\Delta\omega/\omega_0 = 2.01 \times 10^{-6}$. Si el radio de la estrella de neutrones antes del *glitch* era de 11 km, ¿en cuánto disminuyó su radio por el "astramoto"? Suponga que la estrella es una esfera uniforme.

10.91. Un ave de 500 g vuela horizontal y distraídamente a 2.25 m/s, cuando de repente viaja directo hacia una barra vertical estacionaria, golpeándola a 25.0 cm debajo de la parte superior (figura 10.63). La barra es uniforme con longitud de 0.750 m y masa de 1.50 kg, y tiene una bisagra en la base. El choque aturde al ave, de modo que después simplemente cae hacia el suelo (y pronto se recupera para continuar volando felizmente). ¿Cuál es la velocidad angular de la barra, *a*) justo después de que es golpeada por el ave, y *b*) cuando ésta llega al suelo?

Figura 10.63 Problema 10.91.



10.92. Un bloque pequeño con masa de 0.250 kg se ata a un cordón que pasa por un agujero en una superficie horizontal sin fricción (véase la figura 10.48). El bloque originalmente gira en un círculo de 0.800 m de radio alrededor del agujero, con rapidez tangencial de 4.00 m/s. Se tira lentamente del cordón desde abajo, acortando el radio del círculo descrito por el bloque. La resistencia a la rotura del cordón es de 30.0 N. ¿Qué radio tendrá el círculo cuando el cordón se rompa?

10.93. Un disco horizontal de madera rugosa con masa de 7.00 kg y 1.00 m de diámetro pivotea sobre cojinetes sin fricción, alrededor de un eje vertical que pasa por su centro. Se pega en él una vía circular de tren de juguete con masa insignificante y diámetro medio de 0.95 m. Un trenecito de 1.20 kg operado con baterías descansa en la vía. Para demostrar la conservación del momento angular, se enciende el motor del tren. El tren se mueve en sentido antihorario, alcanzando en poco tiempo una rapidez constante de 0.600 m/s relativa a la vía. Calcule la magnitud y la dirección de la velocidad angular del disco relativa a la Tierra.

10.94. Un alambre rígido uniforme de masa M_0 y longitud L_0 se corta, se dobla y las partes se sueldan, de modo que forman una rueda circular con cuatro rayos idénticos que salen de su centro. No se desperdicia alambre y se puede ignorar la masa de la soldadura. *a*) ¿Cuál es el momento de inercia de esta rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano de la rueda? *b*) Si a la rueda se le da un giro inicial con velocidad angular ω_0 y se detiene uniformemente en un tiempo T, ¿cuál será la torca causada por la fricción en su eje?

10.95. En un experimento de laboratorio de física con un péndulo balístico, se dispara una esfera de masa m con rapidez v horizontal usando un rifle de resorte. La esfera queda atrapada inmediatamente una distancia r abajo de un pivote sin fricción, por un dispositivo atrapador pivotante de masa M. El momento de inercia del atrapador alrededor de su eje de rotación en el pivote es I. La distancia r es mucho mayor que el radio de la esfera. *a*) Use la conservación del momento angular para demostrar que la rapidez angular de la esfera y el atrapador justo después del impacto es $\omega = mvr/\left(mr^2 + I\right)$. *b*) Una vez atrapada la esfera, el centro de masa del sistema esfera-atrapador oscila hacia arriba con un aumento máximo de altura de h. Use la conservación de la energía para demostrar que $\omega = \sqrt{2(M + m)gh/\left(mr^2 + I\right)}$. *c*) Una alumna dice que el momento lineal se conserva en el choque, y deduce la expresión $mv = (m + M)V$, donde V es la rapidez de la esfera inmediatamente después del choque. Luego ella usa la conservación de la energía para deducir que $V = \sqrt{2gh}$, de modo que $mv = (m + M)\sqrt{2gh}$. Use los resultados de los incisos *a*) y *b*) para demostrar que esta ecuación sólo es válida si r está dada por $I = Mr^2$.

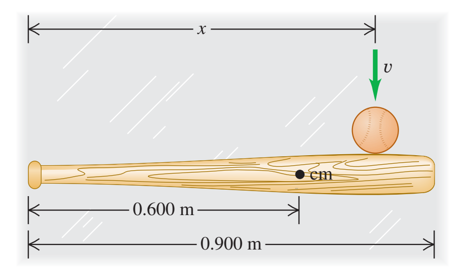
10.96. Un hombre de 55 kg corre alrededor del borde de una tornamesa horizontal montada en un eje vertical sin fricción que pasa por su centro. La velocidad del corredor relativa a la Tierra tiene magnitud de 2.8 m/s. La tornamesa gira en la dirección opuesta con velocidad angular de magnitud 0.20 rad/s relativa a la Tierra. El radio de la tornamesa es de 3.0 m, y su momento de inercia alrededor del eje de rotación es de 80 kg · m^2. Calcule la velocidad angular final del sistema, si el corredor se detiene relativo a la tornamesa. (El corredor puede tratarse como partícula.)

10.97. La precesión de la Luna. Mediciones cuidadosas de la separación entre la Tierra y la Luna indican que actualmente nuestro satélite se mueve alejándose de nosotros cerca de 3.0 cm cada año. Ignore cualquier momento angular que se pudiera transferir a la Luna desde la Tierra. Calcule la rapidez de cambio (en rad/s por año) de la velocidad angular de la Luna alrededor de la Tierra (consulte el Apéndice E y los datos astronómicos del Apéndice F). ¿Su velocidad angular aumenta o disminuye? (*Sugerencia:* si L = constante, entonces, $dL/dt = 0$.)

10.98. Centro de percusión. Un bate de béisbol con masa de 0.800 kg y 0.900 m de longitud descansa en una superficie horizontal sin fricción. Su centro de masa está a 0.600 m del extremo del mango (figura 10.64). El momento de inercia del bate alrededor de su centro de masa es de 0.0530 kg · m^2. El bate es golpeado por una pelota que viaja perpendicular a él. El impacto aplica un impulso $J = \int_{t_1}^{t_2} F\, dt$ en un punto a una distancia x del extremo del mango. ¿Qué x se necesita para que el extremo del mango permanezca en reposo cuando el bate comience a moverse? [*Sugerencia:* considere el movimiento del centro de masa y la rotación alrededor del centro de masa. Calcule x de modo que estos dos movimientos se combinen dando $v = 0$ para el extremo del bate justo después del choque. Además, observe que la inte-

gración de la ecuación (10.29) da $\Delta L = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \tau)\, dt$ (véase el problema 10.88).] El punto encontrado en el bate se denomina *centro de percusión*. Si se golpea una bola lanzada con ese punto se reduce al mínimo la "punzada" que el bateador siente en las manos.

Figura 10.64 Problema 10.98.



10.99. Considere un giróscopo, cuyo eje está inclinado con respecto a la horizontal un ángulo β. Demuestre que la frecuencia angular de precesión no depende del valor de β, sino que está dado por la ecuación (10.33).

Problemas de desafío

10.100. Una esfera uniforme de radio R rueda sin resbalar entre dos rieles, de modo que la distancia horizontal entre los dos puntos de contacto de los rieles con la esfera es d. *a*) Haga un dibujo y demuestre que, en cualquier instante, $v_{cm} = \omega\sqrt{R^2 - d^2/4}$. Analice esta expresión en los límites $d = 0$ y $d = 2R$. *b*) En el caso de una esfera uniforme que parte del reposo y desciende una distancia vertical h mientras baja una rampa rodando sin resbalar, $v_{cm} = \sqrt{10gh/7}$. Sustituyendo la rampa por los dos rieles, demuestre que

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{10gh}{5 + 2/(1 - d^2/4R^2)}}$$

En ambos casos, se despreció el trabajo efectuado por la fricción. *c*) ¿Cuál rapidez del inciso *b*) es menor? ¿Por qué? Conteste en términos de la forma en que la pérdida de energía potencial se divide entre las ganancias de energías cinética traslacional y rotacional. *d*) ¿Para qué valor del cociente d/R las dos expresiones del inciso *b*) para la rapidez difieren en 5.0%? ¿Y en 0.50%?

10.101. Cuando un objeto rueda sin resbalar, la fuerza de fricción de rodamiento es mucho menor que la fuerza de fricción cuando el objeto resbala; una moneda rueda sobre su borde con mucha mayor rapidez que si resbala sobre su cara plana. (Véase la sección 5.3.) Si un objeto rueda sin resbalar sobre una superficie horizontal, podemos suponer que la fuerza de fricción es cero, de modo que a_x y α_z son aproximadamente cero, y v_x y ω_z son aproximadamente constantes. Rodar sin resbalar implica que $v_x = r\omega_z$ y $a_x = r\alpha_z$. Si un objeto se pone en movimiento en una superficie *sin* estas igualdades, la fricción de deslizamiento (cinética) actuará sobre el objeto mientras se desliza, hasta que se establece el rodamiento sin deslizamiento. Un cilindro sólido de masa M y radio R, girando con rapidez angular ω_0 alrededor de un eje que pasa por su centro, se coloca en una superficie horizontal para la que el coeficiente de fricción cinética es μ_k. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del cilindro en la superficie. Medite bien la dirección de la fuerza de fricción cinética que actúa sobre el cilindro. Calcule las aceleraciones a_x del centro de masa y α_z de rotación alrededor del centro de masa. *b*) Inicialmente, el cilindro está resbalando totalmente, ya que $\omega_z = \omega_0$ pero $v_x = 0$. El rodamiento sin deslizamiento se inicia cuando $v_x = R\omega_z$. Calcule la *distancia* que el cilindro rueda antes de que deje de resbalar. *c*) Calcule el trabajo efectuado por la fuerza de fricción sobre el cilindro, mientras éste se movió desde el punto donde se colocó, hasta el punto donde comenzó a rodar sin resbalar.

10.102. Se construye una rueda de giróscopo para demostración quitando el neumático de una rueda de bicicleta de 0.650 m de diámetro, enrollando alambre de plomo en el borde y pegándolo con cinta. El eje se proyecta 0.200 m a cada lado de la rueda y una mujer sostiene los extremos del eje en sus manos. La masa del sistema es de 8.00 kg; puede suponerse que toda la masa se encuentra en el borde. El eje es horizontal y la rueda está girando alrededor del eje a 5.00 rev/s. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza que cada mano ejerce sobre el eje *a*) cuando el eje está en reposo; *b*) cuando el eje gira en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.050 rev/s; *c*) cuando el eje está girando en un plano horizontal alrededor de su centro a 0.300 rev/s. *d*) ¿Con qué rapidez debe girar el eje para que pueda sostenerse sólo en un extremo?

10.103. Un bloque con masa m gira con rapidez lineal v_1 en un círculo de radio r_1 sobre una superficie horizontal sin fricción (véase la figura 10.48). Se tira del cordón lentamente desde abajo, hasta que el radio del círculo descrito por el bloque se reduce a r_2. *a*) Calcule la tensión T en el cordón en función de r, la distancia entre el bloque y el agujero. Su respuesta estará en términos de la velocidad inicial v_1 y el radio r_1. *b*) Use $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{T}(r) \cdot d\vec{r}$ para calcular el trabajo efectuado por $\vec{T}$ cuando r cambia de r_1 a r_2. *c*) Compare los resultados del inciso *b*) con el cambio en la energía cinética del bloque.

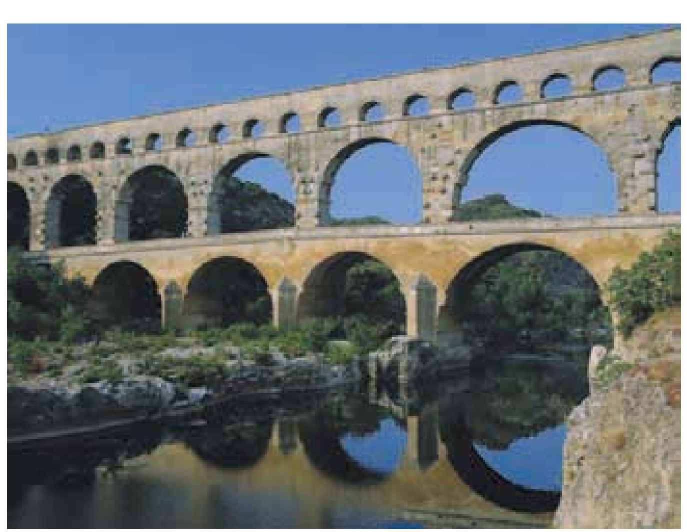
11 EQUILIBRIO Y ELASTICIDAD

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Las condiciones que deben satisfacerse para que un cuerpo o una estructura estén en equilibrio.
- Cuál es el significado del centro de gravedad de un cuerpo, y como se relaciona con su estabilidad.
- Como resolver problemas que implican cuerpos rígidos en equilibrio.
- Como analizar situaciones en las que un cuerpo se deforma por tensión, compresión, presión o corte.
- Qué sucede cuando un cuerpo se estira tanto que se deforma o se rompe.

?Este acueducto romano utiliza el principio del arco para mantener el peso de una estructura y transportar agua. ¿Los bloques que constituyen el arco se están comprimiendo, estirando o ambas cuestiones?



Nos hemos esforzado mucho por entender por qué y cómo los cuerpos aceleran en respuesta a las fuerzas que actúan sobre ellos; sin embargo, con frecuencia nos interesa asegurarnos de que los cuerpos *no* aceleren. Cualquier edificio, desde los rascacielos de muchos pisos hasta la cabaña más sencilla, debe diseñarse de modo que no se derrumbe. Lo mismo sucede con un puente colgante, una escalera recargada sobre una pared o una grúa que levanta una cubeta llena de concreto.

Un cuerpo que puede modelarse como *partícula* está en equilibrio, siempre que la resultante de las fuerzas que actúan sobre él sea cero. No obstante, en las situaciones que acabamos de describir, esa condición no basta. Si actúan fuerzas en diferentes puntos de un cuerpo extendido, se debe satisfacer un requisito adicional para asegurar que el cuerpo no tenga tendencia *a girar*: la suma de las torcas alrededor de cualquier punto debe ser cero. Este requisito se basa en los principios de la dinámica rotacional que vimos en el capítulo 10. Podemos calcular la torca debida al peso de un cuerpo usando el concepto de centro de gravedad, que presentaremos en este capítulo.

Los cuerpos rígidos no se doblan, estiran ni aplastan cuando actúan fuerzas sobre ellos. Sin embargo, el cuerpo rígido es una idealización: en cierto grado todos los materiales reales son *elásticos* y se deforman. Las propiedades elásticas de los materiales tienen enorme importancia. Queremos que las alas de un avión sean capaces de flexionarse un poco, pero preferimos que no se rompan. El armazón de acero de un edificio que resiste los terremotos debe flexionarse, aunque no demasiado. Muchos objetos cotidianos, desde las bandas de hule hasta los puentes colgantes, dependen de las propiedades elásticas de los materiales. En este capítulo presentaremos los conceptos de *esfuerzo, deformación* y *módulo de elasticidad*, así como un sencillo principio llamado *ley de Hooke*, que nos ayuda a predecir las deformaciones que se dan cuando se aplican fuerzas a un cuerpo real (que no es perfectamente rígido).

11.1 Condiciones del equilibrio

En las secciones 4.2 y 5.1, aprendimos que una partícula está en *equilibrio* —es decir, no tiene aceleración— en un marco de referencia inercial si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero, $\sum \vec{F} = \mathbf{0}$. La expresión equivalente para un cuerpo *extendido* es que el centro de masa del cuerpo tiene aceleración cero cuando la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es cero, como vimos en la sección 8.5. Ésta suele denominarse **primera condición de equilibrio**. En términos de vectores y componentes,

$$\sum \vec{F} = \mathbf{0}$$
$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \qquad \text{(primera condición de equilibrio)} \quad (11.1)$$

donde la sumatoria incluye sólo fuerzas *externas*.

Una segunda condición para que un cuerpo extendido esté en equilibrio es que no debe tener tendencia a *girar*. Esta condición se basa en la dinámica del movimiento rotacional, exactamente del mismo modo que la primera condición se basa en la primera ley de Newton. Un cuerpo rígido que, en un marco de referencia inercial, no está girando alrededor de un punto tiene un momento angular cero alrededor de ese punto. Para que el cuerpo no comience a girar en torno a ese punto, la rapidez de cambio del momento angular *también* debe ser cero. Por lo que vimos en la sección 10.5, sobre todo la ecuación (10.29), esto implica que la suma de las torcas debidas a todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero. Un cuerpo rígido en equilibrio no debe tener tendencia a comenzar a girar alrededor de *ningún* punto, así que la suma de torcas externas alrededor de cualquier punto debe ser cero. Ésta es la **segunda condición de equilibrio**:

$$\sum \vec{\tau} = \mathbf{0} \quad \text{alrededor de cualquier punto (segunda condición de equilibrio)} \quad (11.2)$$

La suma de las torcas debidas a todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo, con respecto a cualquier punto específico, debe ser cero.

En este capítulo, aplicaremos las dos condiciones de equilibrio a situaciones en las que un cuerpo rígido está en reposo (sin traslación ni rotación). Se dice que tal cuerpo está en **equilibrio estático** (figura 11.1). Sin embargo, las mismas condiciones son válidas para un cuerpo rígido en movimiento *traslacional* uniforme (sin rotación), como un avión que vuela con rapidez, dirección y altura constantes. Un cuerpo así está en equilibrio pero no estático.

11.1 Para estar en equilibrio estático, un cuerpo en reposo debe satisfacer *ambas* condiciones del equilibrio: no tener la tendencia a acelerar como un todo ni empezar a girar.

a) Este cuerpo está en equilibrio estático.

F F l l 2F

Eje de rotación (perpendicular a la figura)

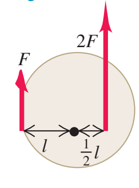
Condiciones de equilibrio:
primera condición satisfecha: fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.
Segunda condición satisfecha: la torca total alrededor del eje = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

b) Este cuerpo no tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero tiene una tendencia a empezar a girar.

F l l F

Primera condición satisfecha: fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.
Segunda condición NO satisfecha: hay una torca total en sentido horario alrededor del eje, así que el cuerpo en reposo empezará a girar en sentido horario.

c) Este cuerpo tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero no tiene una tendencia a empezar a girar.



Primera condición NO satisfecha: hay una fuerza neta hacia arriba, así que un cuerpo en reposo empezará a moverse hacia arriba.
Segunda condición satisfecha: la torca total alrededor del eje = 0 así que el cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a girar.

Evalúe su comprensión de la sección 11.1 ¿Cuáles de las situaciones siguientes satisfacen las dos condiciones de equilibrio: i) una gaviota que planea con un ángulo constante bajo la horizontal y mantiene su rapidez constante; ii) el cigüeñal del motor de un automóvil estacionado que gira con rapidez angular creciente; iii) una pelota de béisbol lanzada que no gira al desplazarse por el aire?

MP

11.2 Centro de gravedad

En la mayoría de los problemas de equilibrio, una de las fuerzas que actúa sobre un cuerpo es su peso. Necesitamos calcular la *torca* de esta fuerza. El peso no actúa en un solo punto; se distribuye en todo el cuerpo. No obstante, podemos calcular la torca debida al peso, suponiendo que toda la fuerza de gravedad (peso) se concentra en un punto llamado **centro de gravedad** (abreviado “cg”). La aceleración debida a la gravedad disminuye con la altura; sin embargo, si esta variación a lo largo de la dimensión vertical del cuerpo es despreciable, el centro de gravedad es idéntico al *centro de masa* (cm) que definimos en la sección 8.5. Expresamos éste resultado en la sección 10.2 sin demostrarlo; ahora lo haremos.



7.2 Viga inclinada: torcas y equilibrio
7.3 Brazos de palanca

Repasemos primero la definición de centro de masa. Para un conjunto de partículas con masas $m_1, m_2, \ldots$ y coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), . . ., las coordenadas x_{cm}, y_{cm} y z_{cm} del centro de masa están dadas por

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_ix_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_iy_i}{\sum_i m_i} \qquad \text{(centro de masa)} \qquad (11.3)$$

$$z_{cm} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_iz_i}{\sum_i m_i}$$

Además, x_{cm}, y_{cm} y z_{cm} son las componentes del vector de posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa, de modo que las ecuaciones (11.3) son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \qquad (11.4)$$

Consideremos ahora la torca gravitacional que actúa sobre un cuerpo de forma arbitraria (figura 11.2). Suponemos que la aceleración debida a la gravedad $\vec{g}$ tiene la misma magnitud y dirección en todos los puntos del cuerpo. Cada partícula del cuerpo experimenta una fuerza gravitacional, y el peso total es la suma vectorial de un gran número de fuerzas paralelas. Una partícula representativa tiene masa m_i y peso $\vec{w}_i = m_i\vec{g}$. Si $\vec{r}_i$ es el vector de posición de la partícula con respecto a un origen arbitrario O, el vector torca $\vec{\tau}_i$ del peso $\vec{w}_i$ con respecto a O es, por la ecuación (10.3),

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{w}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{g}$$

La torca *total* debida a las fuerzas gravitacionales que actúan sobre todas las partículas es

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \sum_i \vec{\tau}_i = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \cdots \\ &= (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots) \times \vec{g} \\ &= \left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g}\end{aligned}$$

Si multiplicamos y dividimos esto por la masa total del cuerpo,

$$M = m_1 + m_2 + \cdots = \sum_i m_i$$

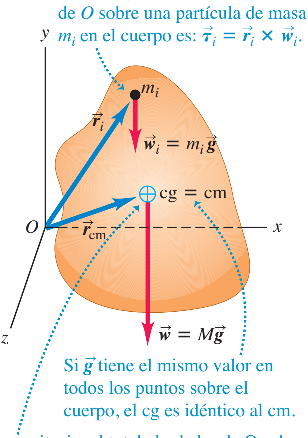
obtenemos

$$\vec{\tau} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} \times M\vec{g} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} \times M\vec{g}$$

La fracción en esta ecuación no es sino el vector de posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa, con componentes x_{cm}, y_{cm} y z_{cm} dados por la ecuación (11.4), y $M\vec{g}$ es igual al peso total $\vec{w}$ del cuerpo. Por lo tanto,

$$\vec{\tau} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} = \vec{r}_{cm} \times \vec{w} \qquad (11.5)$$

11.2 El centro de gravedad (cg) y el centro de masa (cm) de un cuerpo extendido.



La torca gravitacional total, dada por la ecuación (11.5), es la misma que si el peso total $\vec{w}$ estuviera actuando en la posición $\vec{r}_{cm}$ del centro de masa, que también llamamos *centro de gravedad*. **Si $\vec{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos de un cuerpo, su centro de gravedad es idéntico a su centro de masa.** Cabe señalar, sin embargo, que el centro de masa se define independiente de cualquier efecto gravitacional.

Si bien el valor de $\vec{g}$ varía un poco con la altura, la variación es pequeñísima (figura 11.3). Por ello, en este capítulo supondremos que el centro de masa y el de gravedad son idénticos, a menos que se indique explícitamente otra cosa.

11.3 La aceleración debida a la gravedad en la base de las Torres Petronas de Malasia, cuya altura es de 452 m, es sólo 0.014% mayor que en la punta. El centro de gravedad de las torres está sólo 2 cm abajo del centro de masa.



Localización y uso del centro de gravedad

A menudo podemos usar consideraciones de simetría para encontrar el centro de gravedad de un cuerpo, igual que hicimos con el centro de masa. El centro de gravedad de una esfera, cubo, disco o placa rectangular está en su centro geométrico. El centro de gravedad de un cilindro o cono circulares rectos está en su eje de simetría.

En los cuerpos de forma más compleja, a veces es posible encontrar el centro de gravedad dividiendo el cuerpo en piezas simétricas. Podríamos aproximar el cuerpo humano, por ejemplo, como un conjunto de cilindros sólidos, con una esfera como cabeza. Luego podríamos calcular las coordenadas del centro de gravedad de la combinación usando las ecuaciones (11.3), donde m_1, m_2, . . ., son las masas de las piezas individuales y (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), . . ., son las coordenadas de sus centros de gravedad.

Cuando un cuerpo sobre el que actúa la gravedad se apoya en un solo punto o se cuelga de éste, el centro de gravedad siempre está directamente arriba o abajo de dicho punto de suspensión. Si estuviera en otro lugar, el peso tendría una torca con respecto al punto de suspensión, y el cuerpo no estaría en equilibrio rotacional. La figura 11.4 muestra cómo usar este hecho para determinar experimentalmente la posición del centro de gravedad de un cuerpo irregular.

Siguiendo el mismo razonamiento, es evidente que un cuerpo apoyado en varios puntos debe tener su centro de gravedad en algún lugar dentro del área delimitada por los apoyos. Esto explica por qué un automóvil puede viajar por un camino recto pero inclinado, si el ángulo de inclinación es relativamente pequeño (figura 11.5a), pero se vuelca si el ángulo es excesivo (figura 11.5b). El camión de la figura 11.5c tiene un centro de gravedad más alto que el automóvil y se volcará en una pendiente menos inclinada. Cuando un camión se vuelca en una autopista y bloquea el tráfico durante horas, la culpa es de su centro de gravedad tan alto.

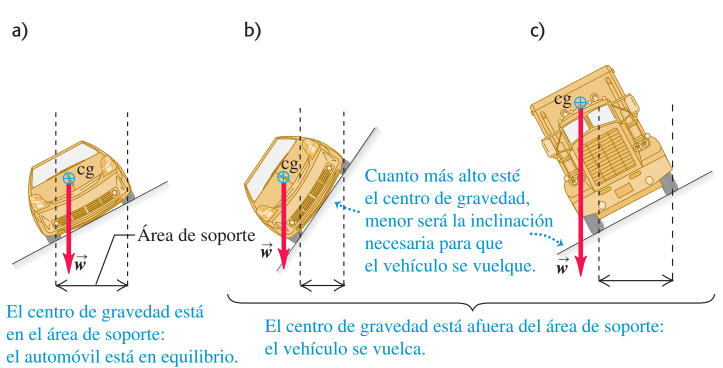
Cuanto más bajo esté el centro de gravedad y mayor sea el área de apoyo, más difícil será volcar un cuerpo. Los cuadrúpedos como los venados y los caballos tienen un área de apoyo grande delimitada por sus patas; por lo tanto, son estables por naturaleza y sólo necesitan pies pequeños o cascos. Los animales que caminan erguidos

11.4 Ubicación del centro de gravedad de un objeto con forma irregular en este caso, una taza de café.

¿Cuál es el centro de gravedad de esta taza?



11.5 En a), el centro de gravedad está dentro del área delimitada por los soportes y el automóvil está en equilibrio. El automóvil en b) y el camión en c) se volcarán porque sus centros de gravedad están fuera del área de soporte.



en dos piernas, como el ser humano y las aves, necesitan pies relativamente grandes para tener un área de apoyo razonable. Si un bípedo sostiene su cuerpo aproximadamente horizontal, como un pollo o un *Tyrannosaurus rex*, deberá equilibrarse con gran precisión al caminar para mantener su centro de gravedad arriba de la pata que está en el suelo. El pollo lo hace moviendo la cabeza; el *T. rex* probablemente lo hacía moviendo la enorme cola.

Ejemplo 11.1 Caminando por la tabla

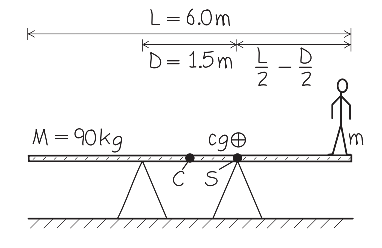
Una tabla de madera uniforme de longitud $L = 6.0$ m y masa $M = 90$ kg descansa sobre dos caballetes separados por $D = 1.5$ m, situados a distancias iguales del centro de la tabla. El primo Morton trata de pararse en el extremo derecho de la tabla. ¿Qué masa máxima puede tener Morton si la tabla no se mueve?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Si el sistema tabla-Morton está apenas en equilibrio, su centro de gravedad estará directamente arriba del caballete de la derecha (apenas dentro del área delimitada por los dos caballetes). La incógnita es la masa de Morton.

PLANTEAR: La figura 11.6 muestra nuestro esquema. Tomamos el origen en C, el centro geométrico y centro de gravedad de la tabla uniforme, y hacemos que el eje $+x$ apunte horizontalmente a la derecha. Las coordenadas x de los centros de gravedad de la tabla (masa M) y de Morton (masa desconocida m) son, entonces, $x_P = 0$ y $x_T = L/2 = 3.0$ m, respectivamente. Usaremos las ecuaciones (11.3) para localizar el centro de gravedad del sistema tabla-Morton.

11.6 Nuestro esquema para este problema.



EJECUTAR: Por la primera de las ecuaciones (11.3),

$$x_{cg} = \frac{M(0) + m(L/2)}{M + m} = \frac{m}{M + m}\frac{L}{2}$$

Si igualamos esto a $D/2$, la coordenada x del apoyo derecho, tenemos

$$\frac{m}{M + m}\frac{L}{2} = \frac{D}{2}$$

$$mL = (M + m)D$$

$$m = M\frac{D}{L - D} = (90\text{ kg})\frac{1.5\text{ m}}{6.0\text{ m} - 1.5\text{ m}}$$

$$= 30\text{ kg}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestro resultado, repitamos el cálculo eligiendo otro origen. Ahora el origen estará en S, la posición del apoyo derecho, de modo que $x_{cg} = 0$. Los centros de gravedad de la tabla y de Morton ahora están en $x_P = -D/2$ y $x_T = (L/2) - (D/2)$, respectivamente, así que

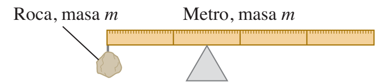
$$x_{cg} = \frac{M(-D/2) + m[(L/2) - (D/2)]}{M + m} = 0$$

$$m = \frac{MD/2}{(L/2) - (D/2)} = M\frac{D}{L - D} = 30\text{ kg}$$

La masa no depende del origen, que se elige arbitrariamente.

Un joven de 60 kg apenas podría pararse a la mitad de la distancia entre el caballete de la derecha y el extremo de la tabla. ¿Sabe usted por qué?

11.7 ¿En qué punto estará en equilibrio el metro con la roca unida?



Evalúe su comprensión de la sección 11.2 Una roca se une al extremo izquierdo de un metro uniforme que tiene la misma masa que la roca. Para equilibrar la combinación de roca y metro en la cúspide del objeto triangular de la figura 11.7, ¿qué tan lejos del extremo derecho del metro debería colocarse el objeto triangular? i) a menos de 0.25 m; ii) a 0.25 m; iii) entre 0.25 m y 0.50 m; iv) a 0.50 m; v) a más de 0.50 m.



ActivPhysics ONLINE

7.4 Dos pintores en una viga

7.5 Conferencia desde una viga

11.3 Resolución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos

Son sólo dos los principios clave del equilibrio de cuerpos rígidos: la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero, y la suma de las torcas con respecto a cualquier punto debe ser cero. Por sencillez, limitaremos nuestra atención a situaciones en las que podemos tratar a todas las fuerzas como si actuaran en un solo plano, que llamaremos *xy*. Así podemos olvidarnos de la condición $\sum F_z = 0$ de la ecuación (11.1), y en la ecuación (11.2) sólo tendremos que considerar las compo-

nentes z de las torcas (perpendicular al plano). Por lo tanto, la primera y la segunda condiciones de equilibrio son

$$\sum F_x = 0 \quad \text{y} \quad \sum F_y = 0 \quad \text{(primera condición de equilibrio, fuerzas en el plano } xy\text{)}$$
$$\sum \tau_z = 0 \quad \text{(segunda condición de equilibrio, fuerzas en el plano } xy\text{)} \tag{11.6}$$

CUIDADO **Elección del punto de referencia para calcular torcas** En problemas de equilibrio, la elección del punto de referencia para calcular torcas en $\sum \tau_z$ es arbitraria por completo. No obstante, una vez que se elige un punto, se deberá usar el *mismo* punto para calcular todas las torcas que actúan sobre el cuerpo. Es conveniente elegir un punto que simplifique los cálculos lo más posible.

Lo difícil es aplicar estos sencillos principios a problemas específicos. La Estrategia para resolver problemas 11.1 es muy similar a las sugerencias de la sección 5.2 para el equilibrio de una partícula; compárela con la Estrategia para resolver problemas 10.1 (sección 10.2) para dinámica rotacional.

Estrategia para resolver problemas 11.1 Equilibrio de un cuerpo rígido



IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes:* La primera y la segunda condiciones de equilibrio son útiles siempre que haya un cuerpo rígido que no gire ni tenga una aceleración en el espacio.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Dibuje un esquema de la situación física, incluyendo dimensiones, y seleccione el cuerpo en equilibrio que analizará.
2. Haga un diagrama de cuerpo libre que muestre sólo las fuerzas que actúan *sobre* el cuerpo elegido y no otras. *No* incluya fuerzas ejercidas *por* el cuerpo sobre otros cuerpos. Muestre correctamente el punto donde actúa cada fuerza; esto resulta esencial para calcular correctamente las torcas. No se puede representar un cuerpo rígido como un punto.
3. Elija ejes de coordenadas y especifique el sentido positivo de la rotación para las torcas. Represente las fuerzas en función de sus componentes con respecto a los ejes seleccionados, tachando la fuerza original para no incluirla dos veces.
4. Al elegir un punto para calcular torcas, recuerde que, si la línea de acción de una fuerza pasa *por* ese punto específico, la torca de la fuerza con respecto a ese punto es cero. En muchos casos, esto permite eliminar fuerzas o componentes desconocidas de la ecuación de torca, mejorando la elección del punto para el cálculo. El cuerpo no necesariamente tiene que pivotear alrededor de un eje que pase por el punto elegido.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Escriba ecuaciones que expresen las condiciones de equilibrio. Recuerde que $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum \tau_z = 0$ siempre son ecuaciones individuales; *nunca* sume componentes x y y en una misma ecuación. Recuerde además que, si una fuerza se representa en términos de sus componentes, se puede calcular la torca de esa fuerza calculando por separado la torca de cada componente, cada una con su brazo de palanca y signo adecuados, y sumándolas. Esto suele ser más fácil que determinar el brazo de palanca de la fuerza original.
2. Siempre se necesitan tantas ecuaciones como incógnitas haya. Dependiendo del número de incógnitas, podría ser necesario calcular torcas con respecto a dos o más ejes para obtener suficientes ecuaciones. Es común que haya varios conjuntos igualmente buenos de ecuaciones de fuerza y torca para un problema dado; casi nunca hay una sola combinación "correcta" de ecuaciones.

EVALUAR *la respuesta:* Una forma útil de comprobar los resultados es replantear la segunda condición de equilibrio, $\sum \tau_z = 0$, eligiendo un origen distinto. Si todo se hizo correctamente, se obtendrán las mismas respuestas con el nuevo origen.

Ejemplo 11.2 Distribución del peso de un automóvil

Una revista especializada informa que cierto automóvil deportivo tiene el 53% de su peso sobre las ruedas delanteras y el 47% sobre las traseras, con una distancia entre ejes de 2.46 m. Esto implica que la fuerza normal total sobre las ruedas delanteras es de $0.53w$, y sobre las traseras, de $0.47w$, donde w es el peso total. Al espacio entre el eje delantero y el eje trasero se llama distancia entre ejes. ¿Qué tan adelante del eje trasero está el centro de gravedad del automóvil?

SOLUCIÓN

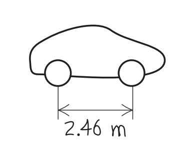
IDENTIFICAR: Podemos usar las dos condiciones de equilibrio, pues se supone que el auto está en reposo. Las condiciones también se aplican cuando el vehículo avanza en línea recta con rapidez constante, porque la fuerza y la torca total que actúan sobre el auto también son cero en esa situación. La incógnita es la coordenada del centro de gravedad del auto.

continúa

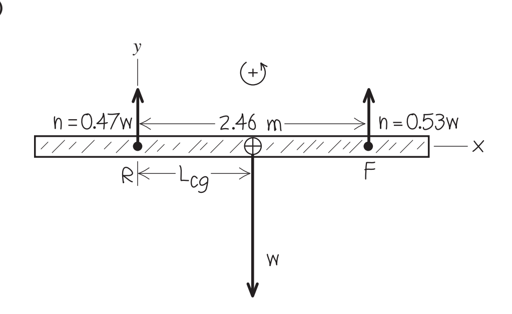
PLANTEAR: La figura 11.8 muestra nuestro diagrama de cuerpo libre del auto, junto con los ejes x y y; nuestra convención para las torcas antihorario serán positivos. Dibujamos el peso w como si actuara sobre el centro de gravedad, y la distancia que buscamos es L_{cg}. Éste es el brazo de palanca del peso con respecto al eje trasero R, así que es razonable tomar las torcas con respecto a R. Observe que la torca debida al peso es negativo porque tiende a causar una rotación horario alrededor de R. La torca debido a la fuerza normal hacia arriba que actúa sobre el eje delantero F es positivo porque tiende a causar una rotación antihorario alrededor de R.

11.8 Nuestro esquema para este problema.

a)



b)



EJECUTAR: Vemos por la figura 11.8b que se satisface la primera condición de equilibrio: $\sum F_x = 0$ porque no hay componentes de fuerza x, en tanto que $\sum F_y = 0$ porque $0.47w + 0.53w + (-w) = 0$. En la ecuación de fuerza no interviene la incógnita L_{cg}, así que deberemos despejar esta última de la ecuación de torca para el punto R:

$$\sum \tau_R = 0.47w(0) - wL_{cg} + 0.53w(2.46\text{ m}) = 0$$
$$L_{cg} = 1.30\text{ m}$$

EVALUAR: Observe que el cg está entre los dos soportes, como debe ser (véase la sección 11.2). Se puede comprobar el resultado numérico para el cg, planteando la ecuación de torca alrededor del eje delantero F. Se verá que el cg está 1.16 m detrás del eje delantero, es decir, (2.46 m) − (1.16 m) = 1.30 m adelante del eje trasero.

¿Puede demostrar que si f es la fracción del peso que descansa sobre las ruedas delanteras y d es la distancia entre ejes, el centro de gravedad está una distancia fd adelante del eje trasero? Cuanto más alejado hacia atrás esté el centro de gravedad, menor será el valor de fd y menor será la fracción del peso sobre las ruedas delanteras. ¿Por qué los dueños de vehículos con tracción trasera ponen sacos de arena en la cajuela para mejorar la tracción en nieve y hielo? ¿Ayudaría esto a un automóvil con tracción delantera?

Ejemplo 11.3 Rescate heroico

Sir Lancelot está tratando de rescatar a Lady Elayne del Castillo von Doom subiendo por una escalera uniforme de 5.0 m de longitud que pesa 180 N. Lancelot, quien pesa 800 N, se detiene después de subir un tercio de la escalera (figura 11.9a). La base de la escalera descansa en una cornisa de piedra horizontal y se recarga al otro lado del foso en equilibrio contra una pared vertical, que no tiene fricción a causa de una gruesa capa de musgo. La escalera forma un ángulo de 53.1° con la horizontal, siendo así la hipotenusa de un triángulo rectángulo 3-4-5. *a*) Calcule las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre la base de la escalera. *b*) Obtenga el coeficiente de fricción estática mínimo que evita un deslizamiento en la base de la escalera. *c*) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza de contacto que actúa sobre la base de la escalera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El sistema escalera-Lancelot es estacionario (en reposo), así que podemos usar las dos condiciones de equilibrio, las cuales bastan para resolver el inciso *a*). En el inciso *b*), también necesitaremos la relación dada en la sección 5.3 entre la fuerza de fricción estática, el coeficiente de fricción estática y la fuerza normal. La fuerza de contacto que se pide en el inciso *c*) es la suma vectorial de la fuerza normal y la fuerza de fricción que actúa en la base de la escalera, que obtendremos en el inciso *a*).

PLANTEAR: La figura 11.9b muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema escalera-Lancelot. Elegimos las direcciones x y y como se muestra y tomamos las torcas en sentido antihorario como positivas. La escalera que se describe es uniforme, por lo que el centro de gravedad está en su centro geométrico. El peso de 800 N de Lancelot actúa en un punto de la escalera situado a un tercio de la distancia entre la base y la pared.

La pared sin fricción sólo ejerce una fuerza normal n_1 sobre la parte superior de la escalera. Las fuerzas en la base son la fuerza normal hacia arriba n_2 y la fuerza de fricción estática f_s, que debe apuntar a la derecha para evitar un deslizamiento; las magnitudes n_2 y f son las incógnitas del inciso *a*). Por la ecuación (5.6), éstas magnitudes están relacionadas por $f_s \le \mu_s n_2$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática [la incógnita del inciso *b*)].

EJECUTAR: *a*) Por las ecuaciones (11.6) la primera condición de equilibrio da

$$\sum F_x = f_s + (-n_1) = 0$$
$$\sum F_y = n_2 + (-800\text{ N}) + (-180\text{ N}) = 0$$

Tenemos dos ecuaciones para las tres incógnitas: n_1, n_2 y f_s. La primera ecuación nos dice que las dos fuerzas horizontales deben ser iguales y opuestas, y la segunda da

$$n_2 = 980\text{ N}$$

El suelo empuja hacia arriba con una fuerza de 980 N para equilibrar el peso total (hacia abajo) (800 N + 180 N).

Aún no tenemos suficientes ecuaciones, pero ahora podemos usar la segunda condición de equilibrio. Podemos tomar torcas alrededor de cualquier punto. La mejor opción es el punto B, que nos da menos términos y menos incógnitas en la ecuación de torca. Por ello, las fuerzas n_2 y f_s no tienen torca alrededor de ese punto. En la figura 11.9b, vemos que el brazo de palanca del peso de la escalera es 1.5 m, el brazo de palanca del peso de Lancelot es 1.0 m y el brazo de palanca de n_1 es 4.0 m. La ecuación de torca para B es

$$\sum \tau_B = n_1(4.0\text{ m}) - (180\text{ N})(1.5\text{ m}) - (800\text{ N})(1.0\text{ m}) + n_2(0) + f_s(0) = 0$$

Despejando n_1, obtenemos $n_1 = 268$ N. Sustituimos esto en la ecuación de $\sum F_x = 0$ para obtener

$$f_s = 268\text{ N}$$

b) La fuerza de fricción estática f_s no puede exceder $\mu_s n_2$, así que el coeficiente *mínimo* de fricción estática para evitar el deslizamiento es

$$(\mu_s)_{\text{mín}} = \frac{f_s}{n_2} = \frac{268\ \text{N}}{980\ \text{N}} = 0.27$$

c) Las componentes de la fuerza de contacto $\vec{F}_B$ en la base son la fuerza de fricción estática f_s y la fuerza normal n_2, así que

$$\vec{F}_B = f_s\hat{\imath} + n_2\hat{\jmath} = (268\ \text{N})\hat{\imath} + (980\ \text{N})\hat{\jmath}$$

La magnitud y la dirección de $\vec{F}_B$ (figura 11.9c) es entonces

$$F_B = \sqrt{(268\ \text{N})^2 + (980\ \text{N})^2} = 1020\ \text{N}$$

$$\theta = \arctan\frac{980\ \text{N}}{268\ \text{N}} = 75°$$

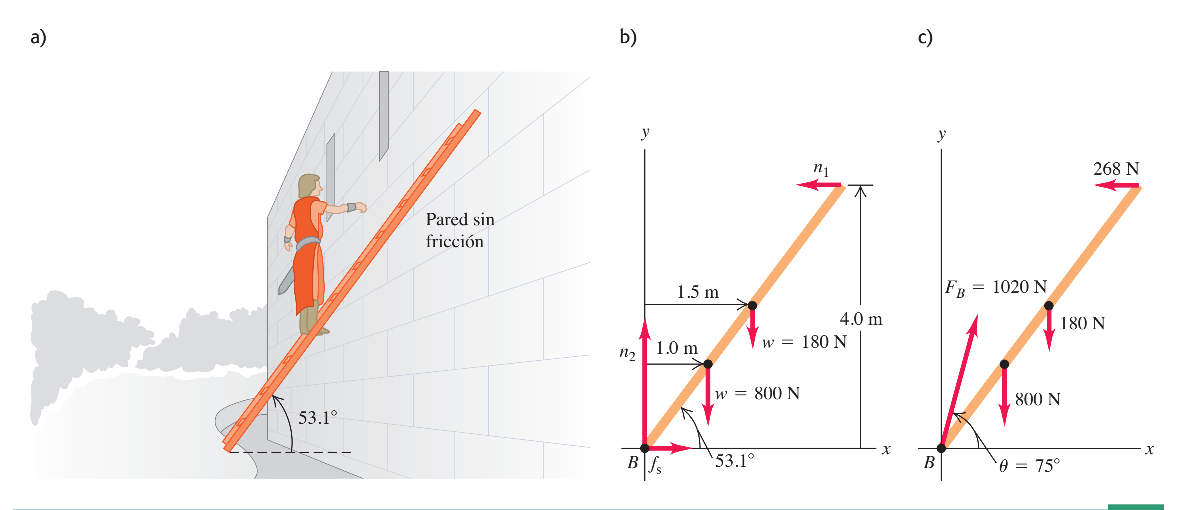
EVALUAR: Como se aprecia en la figura 11.9c, la fuerza de contacto $\vec{F}_B$ *no* está dirigida a lo largo de la escalera. Esto podría extrañarnos, pero no hay una razón de peso para que las dos direcciones sean iguales. ¿Puede el lector demostrar que si $\vec{F}_B$ estuviera dirigida a lo largo de la escalera, habría una torca total en sentido antihorario con respecto a la parte superior y el equilibrio sería imposible?

Hagamos algunos comentarios finales. Primero, si Lancelot sube más por la escalera, el brazo de palanca y la torca de su peso con respecto a B aumentarán, y lo mismo ocurrirá con n_1, f_s y $(\mu_s)_{\text{mín}}$. Al llegar arriba, su brazo de palanca sería de casi 3 m, dando un coeficiente de fricción estática mínimo de casi 0.7. El valor de μ_s no sería tan grande para una escalera medieval de Lancelot, y probablemente resbalará cuando él suba. Para evitar esto, en la actualidad las escaleras se equipan con almohadillas de hule antiderrapante.

Segundo, un ángulo mayor de la escalera reduciría los brazos de palanca con respecto a B de los pesos de la escalera y de Lancelot, y aumentaría el brazo de palanca de n_1; todo esto reduciría la fuerza de fricción requerida. La R. D. Werner Ladder Co. recomienda usar sus escaleras con un ángulo de 75°. (¿Por qué no de 90°?)

Por último, si hubiéramos supuesto fricción en la pared además del piso, el problema no se hubiera resuelto usando sólo las condiciones de equilibrio. (¡Inténtelo!) Se dice que un problema así es *estáticamente indeterminado.* La cuestión es que el cuerpo ya no puede tratarse como perfectamente rígido. Otro ejemplo sencillo es una mesa de cuatro patas; no podemos usar sólo las condiciones de equilibrio para calcular la fuerza que actúa en cada pata.

11.9 a) Sir Lancelot se detiene después de subir un tercio de la escalera, temiendo que resbalará. b) Diagrama de cuerpo libre del sistema escalera-Lancelot. c) La fuerza de contacto en B es la superposición de la fuerza normal y la fuerza de fricción estática.



Ejemplo 11.4 Equilibrio y ejercicio

La figura 11.10a muestra un brazo humano horizontal levantando una mancuerna. El antebrazo está en equilibrio bajo la acción del peso w de la mancuerna, la tensión T del tendón conectado al músculo bíceps y la fuerza E ejercida sobre el antebrazo por el brazo en el codo. Por claridad, el punto A de adhesión del tendón se dibujó más lejos del codo que en la realidad. Se dan el peso w y el ángulo θ entre la fuerza de tensión y la horizontal; queremos calcular la tensión en el tendón y las dos componentes de fuerza en el codo (tres incógnitas escalares en total). Despreciamos el peso del antebrazo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El sistema está en reposo, así que de nuevo usamos las condiciones de equilibrio.

PLANTEAR: Como se muestra en la figura 11.10b, representamos la fuerza del tendón en términos de sus componentes T_x y T_y, usando el ángulo dado θ y la magnitud desconocida T:

$$T_x = T\cos\theta \qquad T_y = T\,\text{sen}\,\theta$$

También representamos la fuerza en el codo en términos de sus componentes E_x y E_y; supondremos que sus direcciones son las indicadas

continúa

en la figura 11.10b; no necesitamos ser exactos porque los resultados de E_x y E_y nos indicarán las direcciones reales. Las incógnitas son la magnitud T de la tensión en el tendón y las componentes E_x y E_y de la fuerza en el codo.

EJECUTAR: La forma más sencilla de obtener la tensión T es tomando torcas con respecto al codo. La ecuación de torca resultante no contiene E_x, E_y ni T_x porque las líneas de acción de todas estas fuerzas pasan por este punto. La ecuación de torca se reduce entonces a

$$\sum \tau_E = Lw - DT_y = 0$$

De esto obtenemos

$$T_y = \frac{Lw}{D} \qquad \text{y} \qquad T = \frac{Lw}{D\operatorname{sen}\theta}$$

Para calcular E_x y E_y, usamos la primera condición de equilibrio, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$:

$$\sum F_x = T_x + (-E_x) = 0$$

$$E_x = T_x = T\cos\theta = \frac{Lw}{D\operatorname{sen}\theta}\cos\theta = \frac{Lw}{D}\cot\theta$$

$$= \frac{Lw}{D}\frac{D}{h} = \frac{Lw}{h}$$

$$\sum F_y = T_y + E_y + (-w) = 0$$

$$E_y = w - \frac{Lw}{D} = -\frac{(L-D)w}{D}$$

El signo negativo indica que nuestra estimación de la dirección de E_y (figura 11.10b) es incorrecta; en realidad es vertical *hacia abajo.*

EVALUAR: Podemos comprobar nuestros resultados obteniendo E_x y E_y de una manera distinta que usa otras dos ecuaciones de torcas. Tomamos torcas con respecto al punto de sujeción del tendón, A:

$$\sum \tau_A = (L-D)w + DE_y = 0 \qquad \text{y} \qquad E_y = -\frac{(L-D)w}{D}$$

Por último, tomamos torcas con respecto al punto B de la figura:

$$\sum \tau_B = Lw - hE_x = 0 \qquad \text{y} \qquad E_x = \frac{Lw}{h}$$

Elegimos los puntos A y B porque la tensión del tendón T tiene torca cero en torno a esos puntos. (¿Entiende por qué, viendo la figura 11.10b?) Observe lo mucho que simplificamos los cálculos eligiendo el punto para calcular torcas a modo de eliminar una o más incógnitas.

En nuestra determinación alterna de E_x y E_y, no usamos explícitamente la primera condición de equilibrio (que la suma vectorial de las fuerzas sea cero). Como verificación, calcule $\sum F_x$ y $\sum F_y$ ¡para comprobar que realmente *sean* cero!

Como ejemplo específico, suponga $w = 200$ N, $D = 0.050$ m, $L = 0.30$ m y $\theta = 80°$. Dado que $\theta = h/D$, obtenemos

$$h = D\tan\theta = (0.050\text{ m})(5.67) = 0.28\text{ m}$$

Por los resultados generales anteriores vemos que

$$T = \frac{Lw}{D\operatorname{sen}\theta} = \frac{(0.30\text{ m})(200\text{ N})}{(0.050\text{ m})(0.98)} = 1220\text{ N}$$

$$E_y = -\frac{(L-D)w}{D} = -\frac{(0.30\text{ m} - 0.050\text{ m})(200\text{ N})}{0.050\text{ m}}$$

$$= -1000\text{ N}$$

$$E_x = \frac{Lw}{h} = \frac{(0.30\text{ m})(200\text{ N})}{0.28\text{ m}} = 210\text{ N}$$

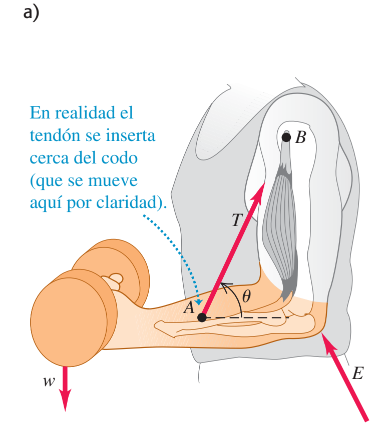
La magnitud de la fuerza en el codo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1020\text{ N}$$

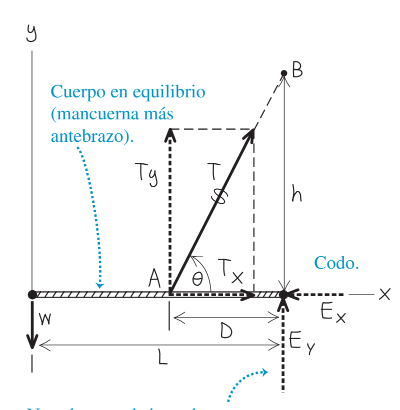
En vista de las magnitudes de los resultados, despreciar el peso del antebrazo (digamos de 20 N) sólo causa errores relativamente pequeños.

11.10 a) La situación. b) Diagrama de cuerpo libre del antebrazo. Se desprecia el peso del antebrazo y se exagera mucho la distancia D por claridad.

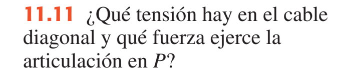
a)



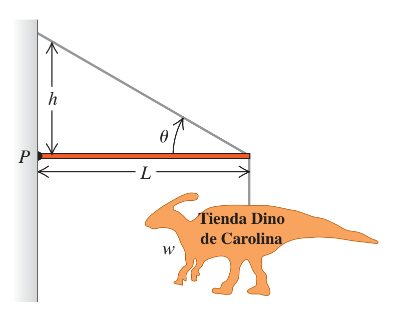
b)



Evalúe su comprensión de la sección 11.3 Un anuncio metálico (peso w) de una tienda especializada cuelga del extremo de una varilla horizontal de longitud L y masa despreciable (figura 11.11). La varilla se sostiene mediante un cable que forma un ángulo θ con la horizontal, y tiene una articulación en el punto P. Ordene de mayor a menor las siguientes magnitudes de fuerza: i) el peso w del anuncio; ii) la tensión en el cable; iii) la componente vertical de la fuerza ejercida sobre el cuerpo por la articulación en P.



11.11 ¿Qué tensión hay en el cable diagonal y qué fuerza ejerce la articulación en P?



11.4 Esfuerzo, deformación y módulos de elasticidad

El cuerpo rígido es un modelo idealizado útil, pero en muchos casos el estiramiento, el aplastamiento y las torsiones de los cuerpos reales cuando se les aplican fuerzas son demasiado importantes para despreciarse. La figura 11.12 muestra tres ejemplos. Nos interesa estudiar la relación entre las fuerzas y los cambios de forma en cada caso.

Para cada clase de alteración de la forma, introduciremos una cantidad llamada **esfuerzo** que caracteriza la intensidad de las fuerzas que causan el cambio de forma, generalmente con base en la "fuerza por unidad de área". Otra cantidad, **deformación**, describe el cambio de forma resultante. Si el esfuerzo y la deformación son pequeños, es común que sean directamente proporcionales, y llamamos a la constante de proporcionalidad **módulo de elasticidad**. Si tiramos con mayor fuerza de algo, se estirará más; si lo aplastamos con mayor fuerza, sé comprimirá más. El patrón general puede formularse así:

$$\frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} = \text{Módulo de elasticidad} \qquad \text{(ley de Hooke)} \qquad (11.7)$$

La proporcionalidad del esfuerzo y la deformación (en ciertas condiciones) se denomina **ley de Hooke**, en honor a Robert Hooke (1635-1703), un contemporáneo de Newton. Usamos una forma de la ley de Hooke en las secciones 6.3 y 7.2: el alargamiento de un resorte ideal es proporcional a la fuerza que lo estira. Recuerde que ésta no es realmente una ley general, sino un resultado experimental válido sólo dentro de un intervalo limitado. En la última sección del capítulo estudiaremos dicho intervalo.

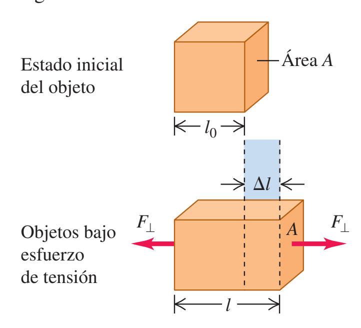
11.12 Tres tipos de esfuerzos: a) Los cables de un puente sometidos *a esfuerzo de tensión*, estirados por fuerzas que actúan en sus extremos. b) Buzo sometido *a esfuerzo de volumen*, aplastado por todos lados por fuerzas debidas a la presión del agua. c) Listón sometido a *esfuerzo de corte*, siendo deformado y finalmente cortado por fuerzas ejercidas por las tijeras.







11.13 Un objeto en tensión. La fuerza total que actúa sobre el objeto es cero, pero el objeto se deforma. El esfuerzo de tensión (la razón de la fuerza al área de sección transversal) produce una deformación por tensión (el alargamiento dividido entre la longitud inicial). Por claridad, se ha exagerado el alargamiento Δl.



Esfuerzo de tensión $= \dfrac{F_\perp}{A}$.

Deformación por tensión $= \dfrac{\Delta l}{l_0}$.

Esfuerzo y deformación de tensión y compresión

El comportamiento elástico más fácil de entender es el estiramiento de una barra, una varilla o un alambre, cuando se tira de sus extremos (figura 11.12a). La figura 11.13 muestra un objeto que inicialmente tiene un área de sección transversal uniforme A y una longitud l_0. Ahora aplicamos fuerzas de igual magnitud $F_\perp$ pero direcciones opuestas a los extremos (esto garantiza que el objeto no tenderá a moverse a la izquierda ni a la derecha). Decimos que el objeto está en **tensión**. Ya hablamos mucho de la tensión en cuerdas y cordones; se trata del mismo concepto. El subíndice $_\perp$ nos recuerda que las fuerzas actúan en dirección perpendicular a la sección transversal.

Definimos el **esfuerzo de tensión** en la sección transversal como el cociente de la fuerza $F_\perp$ y el área de la sección transversal A:

$$\text{Esfuerzo de tensión} = \frac{F_\perp}{A} \qquad (11.8)$$

Ésta es una cantidad *escalar* porque $F_\perp$ es la *magnitud* de la fuerza. La unidad del esfuerzo en el **pascal** (abreviado Pa y así llamado en honor del científico y filósofo francés del siglo XVII Blaise Pascal). La ecuación (11.8) muestra que un pascal es igual a 1 newton sobre metro cuadrado (N/m^2):

$$1 \text{ pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

En el sistema británico, la unidad lógica del esfuerzo sería la libra por pie cuadrado; no obstante, es más común utilizar la libra por pulgada cuadrada (lb/in^2 o psi). Los factores de conversión son

$$1 \text{ psi} = 6895 \text{ Pa} \qquad \text{y} \qquad 1 \text{ Pa} = 1.450 \times 10^{-4} \text{ psi}$$

Las unidades de esfuerzo son las mismas que las de *presión*, que veremos a menudo en capítulos posteriores. La presión del aire en los neumáticos de un automóvil es de alrededor de 3×10^5 Pa $= 300$ kPa, y normalmente se exige que los cables de acero soporten esfuerzos de tensión del orden de 10^8 Pa.

El objeto de la figura 11.13 se estira hasta una longitud $l = l_0 + \Delta l$ cuando se le somete a tensión. El alargamiento Δl no se da sólo en los extremos; todas las partes de la barra se estiran en la misma proporción. La **deformación por tensión** del objeto es igual al cambio fraccionario de longitud, que es el cociente del alargamiento Δl entre la longitud original l_0:

$$\text{Deformación por tensión} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad (11.9)$$

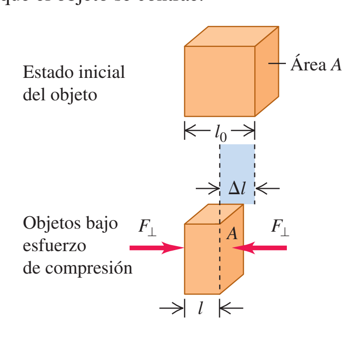
La deformación por tensión es el estiramiento por unidad de longitud; es el cociente de dos longitudes medidas siempre en las mismas unidades, de modo que es un número puro (adimensional) sin unidades.

Experimentalmente, se observa que si el esfuerzo de tensión es lo bastante pequeño, el esfuerzo y la deformación son proporcionales, como en la ecuación (11.7). El módulo de elasticidad correspondiente se denomina **módulo de Young** y se denota con Y:

$$Y = \frac{\text{Esfuerzo de tensión}}{\text{Deformación por tensión}} = \frac{F_\perp / A}{\Delta l / l_0} = \frac{F_\perp}{A}\frac{l_0}{\Delta l} \qquad \text{(módulo de Young)} \qquad (11.10)$$

Dado que la deformación es un número puro, las unidades del módulo de Young son las de esfuerzo: fuerza por unidad de área. En la tabla 11.1 se dan valores representativos. (Esta tabla también presenta valores de otros dos módulos de elasticidad que veremos más adelante en este capítulo.) Un material con un valor grande de Y no se estira mucho; se requiere un esfuerzo grande para una deformación dada. Por ejemplo, el valor de Y para el acero colado (2×10^{11} Pa) es mucho mayor que para el hule (5×10^8 Pa).

11.14 Objeto en compresión. El esfuerzo de compresión y la deformación por compresión se definen igual que en el caso de la tensión (véase la figura 11.13), excepto que ahora Δl denota la distancia que el objeto se contrae.



Esfuerzo de compresión $= \dfrac{F_\perp}{A}$.

Deformación por compresión $= \dfrac{\Delta l}{l_0}$.

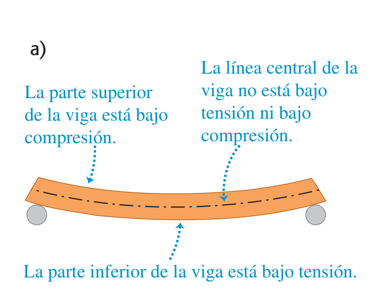
Si las fuerzas en los extremos de una barra empujan en vez de tirar (figura 11.14), la barra está en **compresión**, y el esfuerzo es un **esfuerzo de compresión**. La **deformación por compresión** de un objeto en compresión se define del mismo modo que la deformación por tensión, pero Δl tiene la dirección opuesta. La ley de Hooke y la ecuación (11.10) son válidas también para la compresión si el esfuerzo no es muy grande. El módulo de Young de muchos materiales tiene el mismo valor para esfuerzos de tensión y de compresión; los materiales compuestos como el con-

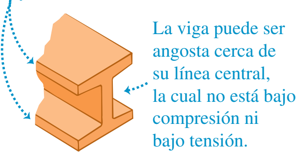
Tabla 11.1 Módulos de elasticidad aproximados

Material	Módulo de Young, Y (Pa)	Módulo de volumen, B (Pa)	Módulo de corte, S (Pa)
Aluminio	7.0×10^{10}	7.5×10^{10}	2.5×10^{10}
Latón	9.0×10^{10}	6.0×10^{10}	3.5×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	14×10^{10}	4.4×10^{10}
Cristal corona (óptico)	6.0×10^{10}	5.0×10^{10}	2.5×10^{10}
Hierro	21×10^{10}	16×10^{10}	7.7×10^{10}
Plomo	1.6×10^{10}	4.1×10^{10}	0.6×10^{10}
Níquel	21×10^{10}	17×10^{10}	7.8×10^{10}
Acero	20×10^{10}	16×10^{10}	7.5×10^{10}

creto u hormigón son una excepción. Pueden soportar esfuerzo de compresión pero fallan bajo un esfuerzo de tensión comparable. Originalmente en las antiguas civilizaciones como Babilonia, Asiria y Roma, la piedra fue el principal material utilizado en sus estructuras, de modo que éstas tuvieron que diseñarse para evitar esfuerzo de tensión. Esto explica el porqué tales culturas utilizaron mucho los arcos en entradas y puentes, donde el peso del material que yace encima comprime la piedra y el arco juntos, y no los pone bajo tensión.

En muchas situaciones, los cuerpos experimentan esfuerzos de tensión y compresión al mismo tiempo. Por ejemplo, una viga horizontal apoyada en sus extremos se pandea por su propio peso. En consecuencia, la parte superior de la viga está en compresión, y la inferior, en tensión (figura 11.15a). Para reducir al mínimo el esfuerzo y por ende la deformación por flexión, la partes superior e inferior de la viga deben tener un área transversal grande. En la línea central de la viga no hay compresión ni tensión, así que esta parte puede tener una sección pequeña; esto ayuda a reducir al mínimo el peso de la viga y también a reducir el esfuerzo. El resultado es la viga en I tan utilizada en la construcción de edificios (figura 11.15b).





11.15 a) Una viga apoyada en sus extremos está sometida tanto a compresión como a tensión. b) La forma de la sección transversal de una viga en I reduce al mínimo tanto el esfuerzo como el peso.

Ejemplo 11.5 Esfuerzo y deformación por tensión

Una varilla de acero de 2.0 m de longitud tiene un área transversal de 0.30 cm^2. La varilla se cuelga por un extremo de una estructura de soporte y, después, un torno de 550 kg se cuelga del extremo inferior de la varilla. Determine el esfuerzo, la deformación y el alargamiento de la varilla.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza las definiciones de esfuerzo, deformación y módulo de Young, que es el módulo de elasticidad adecuado para un objeto bajo tensión.

PLANTEAR: Usaremos las ecuaciones (11.8), (11.9) y (11.10) para calcular el esfuerzo de tensión, la deformación por tensión y el alargamiento Δl. También utilizaremos el valor de Y para el acero de la tabla 11.1.

EJECUTAR: Obtenemos

$$\text{Esfuerzo} = \frac{F_\perp}{A} = \frac{(550\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{3.0 \times 10^{-5}\text{ m}^2} = 1.8 \times 10^8\text{ Pa}$$

$$\text{Deformación} = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\text{Esfuerzo}}{Y} = \frac{1.8 \times 10^8\text{ Pa}}{20 \times 10^{10}\text{ Pa}} = 9.0 \times 10^{-4}$$

$$\text{Alargamiento} = \Delta l = (\text{Deformación}) \times l_0 = (9.0 \times 10^{-4})(2.0\text{ m})$$
$$= 0.0018\text{ m} = 1.8\text{ mm}$$

EVALUAR: Este alargamiento tan pequeño con una carga de más de media tonelada pone de manifiesto la rigidez del acero.

Esfuerzo y deformación de volumen

Cuando un buzo se sumerge a cierta profundidad en el mar, el agua ejerce una presión casi uniforme en toda su superficie y reduce un poco su volumen (figura 11.12b). Esta situación es diferente de los esfuerzos y deformaciones por tensión y compresión que hemos visto. El esfuerzo en este caso es una presión uniforme por todos lados, y la deformación resultante es un cambio de volumen. Usamos los términos **esfuerzo de volumen** y **deformación por volumen** para describir estas cantidades.

Si un objeto se sumerge en un fluido (líquido o gas) en reposo, el fluido ejerce una fuerza sobre todas las partes de la superficie del objeto; esta fuerza es *perpendicular* a la superficie. (Si tratáramos de hacer que el fluido ejerciera una fuerza paralela a la superficie, el fluido se deslizaría a un lado para contrarrestar la acción.) La fuerza $F_\perp$ por unidad de área que el fluido ejerce sobre la superficie de un objeto sumergido es la **presión** p en el fluido:

$$p = \frac{F_\perp}{A} \qquad \text{(presión en un fluido)} \qquad (11.11)$$

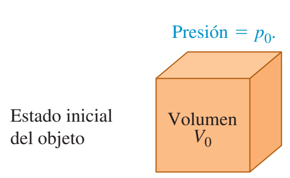
La presión dentro de un fluido aumenta con la profundidad. La presión del aire, por ejemplo, es aproximadamente 21% mayor en el nivel del mar que en Denver (altitud: 1.6 km o 1.0 mi). No obstante, si un objeto sumergido es relativamente pequeño, podremos ignorar las diferencias de presión debidas a la profundidad en el cuerpo del objeto, en lo que respecta al cálculo del esfuerzo de volumen. Por lo tanto, supondremos que la presión tiene el mismo valor para todos los puntos en la superficie del objeto sumergido.

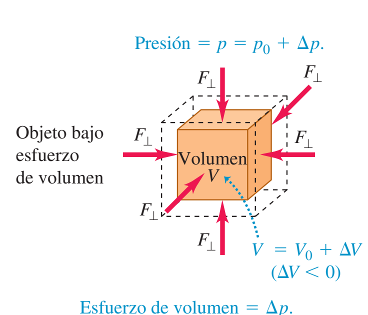
La presión tiene las mismas unidades que el esfuerzo; las unidades de uso común incluyen 1 Pa ($= 1\ \text{N/m}^2$) y $1\ \text{lb/in}^2$ (1 psi). También se usa comúnmente la **atmósfera**, que se abrevia atm. Una atmósfera es la presión media aproximada de la atmósfera terrestre al nivel del mar:

$$1\ \text{atmósfera} = 1\ \text{atm} = 1.013 \times 10^5\ \text{Pa} = 14.7\ \text{lb/in}^2$$

CUIDADO **Presión contra fuerza** A diferencia de la fuerza, la presión no tiene una dirección intrínseca: la presión en la superficie de un objeto sumergido es la misma, sea cual fuere la orientación de la superficie. Por lo tanto, la presión es una cantidad *escalar,* no vectorial.

11.16 Objeto sometido a un esfuerzo de volumen. Sin el esfuerzo, el cubo ocupa un volumen V_0; cuando se aplica el esfuerzo, el cubo tiene un volumen menor, V. Por claridad, se exageró el cambio de volumen ΔV.





Deformación por volumen = $\dfrac{\Delta V}{V_0}$.

La presión desempeña el papel del esfuerzo en un cambio de volumen. La deformación correspondiente es el cambio fraccionario en el volumen (figura 11.16), es decir, el cociente del cambio de volumen ΔV entre el volumen original V_0:

$$\text{Deformación por volumen} = \frac{\Delta V}{V_0} \qquad (11.12)$$

La deformación por volumen es el cambio de volumen por unidad de volumen. Al igual que la deformación por tensión o compresión, es un número puro, sin unidades.

Si se obedece la ley de Hooke, un aumento en la presión (esfuerzo de volumen) produce una deformación por volumen (cambio fraccionario de volumen) *proporcional.* El módulo de elasticidad correspondiente (relación esfuerzo-deformación) se denomina **módulo de volumen** y se denota con B. Si la presión sobre un cuerpo cambia en una cantidad pequeña Δp, de p_0 a $p_0 + \Delta p$, y la deformación por volumen resultante es $\Delta V/V_0$, la ley de Hooke adopta la forma

$$B = \frac{\text{Esfuerzo de volumen}}{\text{Deformación por volumen}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \qquad \text{(módulo de volumen)} \qquad (11.13)$$

Incluimos un signo de menos en esta ecuación porque un *aumento* de presión siempre causa una *reducción* de volumen. En otras palabras, si Δp es positivo, ΔV es negativo. El módulo de volumen B en sí es una cantidad positiva.

En el caso de cambios de presión pequeños en un sólido o un líquido, consideramos que B es constante. El módulo de volumen de un *gas*, sin embargo, depende de la presión inicial p_0. La tabla 11.1 da valores del módulo de volumen para varios materiales sólidos. Sus unidades, fuerza por unidad de área, son las de la presión (las mismas del esfuerzo de tensión o compresión).

El recíproco del módulo de volumen se denomina **compresibilidad** y se denota con k. Por la ecuación (11.13),

$$k = \frac{1}{B} = -\frac{\Delta V/V_0}{\Delta p} = -\frac{1}{V_0}\frac{\Delta V}{\Delta p} \quad \text{(compresibilidad)} \tag{11.14}$$

La compresibilidad es la disminución fraccionaria de volumen, $-\Delta V/V_0$, por unidad de aumento Δp de la presión. Las unidades de la compresibilidad son *inversas a las de presión*, Pa^{-1} (o atm^{-1}).

En la tabla 11.2, se presentan valores de compresibilidad k para varios líquidos. La compresibilidad del agua, por ejemplo, es de 46.4×10^{-6} atm^{-1}. Esto implica que, por cada aumento de 1 atm en la presión, el volumen del agua disminuye en 46.4 partes por millón. Los materiales con módulo de volumen pequeño y compresibilidad grande son fáciles de comprimir.

Tabla 11.2 Compresibilidades de líquidos

	Compresibilidad, k	
Líquido	Pa^{-1}	atm^{-1}
Disulfuro de carbono	93×10^{-11}	94×10^{-6}
Alcohol etílico	110×10^{-11}	111×10^{-6}
Glicerina	21×10^{-11}	21×10^{-6}
Mercurio	3.7×10^{-11}	3.8×10^{-6}
Agua	45.8×10^{-11}	46.4×10^{-6}

Ejemplo 11.6 Esfuerzo y deformación por volumen

Una prensa hidráulica contiene 0.25 m^3 (250 L) de aceite. Calcule la disminución de volumen del aceite cuando se somete a un aumento de presión $\Delta p = 1.6 \times 10^7$ Pa (unas 160 atm o 2300 psi). El módulo de volumen del aceite es $B = 5.0 \times 10^9$ Pa (unas 5.0×10^4 atm) y su compresibilidad es $k = 1/B = 20 \times 10^{-6}$ atm^{-1}.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza las ideas de esfuerzo de volumen y deformación por volumen. Nuestra incógnita es el cambio de volumen ΔV.

PLANTEAR: Nos dan tanto el módulo de volumen como la compresibilidad, así que podemos usar la ecuación (11. 13), o bien, la ecuación (11.14) para calcular ΔV.

EJECUTAR: Despejamos ΔV de la ecuación (11.13) y obtenemos

$$\Delta V = -\frac{V_0\,\Delta p}{B} = -\frac{(0.25\ \text{m}^3)(1.6 \times 10^7\ \text{Pa})}{5.0 \times 10^9\ \text{Pa}}$$
$$= -8.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^3 = -0.80\ \text{L}$$

O bien, podemos usar la ecuación (11.14). Despejando ΔV y usando las conversiones aproximadas de unidades:

$$\Delta V = -kV_0\,\Delta p = -(20 \times 10^{-6}\ \text{atm}^{-1})(0.25\ \text{m}^3)(160\ \text{atm})$$
$$= -8.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$

EVALUAR: Obtenemos el mismo resultado para ΔV con los dos enfoques, como debe ser. Observe que ΔV es negativo, lo cual indica que el volumen disminuye cuando la presión aumenta. Vemos que, si bien el aumento de presión es muy grande, el cambio *fraccionario* de volumen es muy pequeño:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{-8.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}{0.25\ \text{m}^3} = -0.0032, \quad \text{o bien,} \quad -0.32\%$$

Esfuerzo y deformación por corte

El tercer tipo de situación de esfuerzo-deformación se denomina *corte*. El listón de la figura 11.12c está sometido a un **esfuerzo de corte**: una parte del listón se está empujando hacia arriba, mientras una parte adyacente se está empujando hacia abajo, lo que produce un cambio de forma del listón. La figura 11.17 muestra un cuerpo deformado por un esfuerzo de corte. En la figura, fuerzas de igual magnitud pero dirección opuesta actúan de forma *tangente* a las superficies de extremos opuestos del objeto. Definimos el esfuerzo de corte como la fuerza $F_{\parallel}$ que actúa tangente a la superficie, dividida entre el área A sobre la que actúa:

$$\text{Esfuerzo de corte} = \frac{F_{\parallel}}{A} \tag{11.15}$$

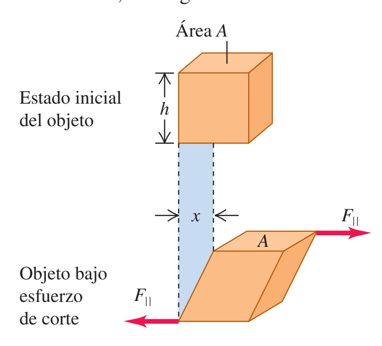
Al igual que los otros dos tipos de esfuerzo, el esfuerzo de corte es una fuerza por unidad de área.

La figura 11.17 muestra que una cara del objeto sometido a esfuerzo de corte se desplaza una distancia x relativa a la cara opuesta. Definimos la **deformación por corte** como el cociente del desplazamiento x entre la dimensión transversal h:

$$\text{Deformación por corte} = \frac{x}{h} \tag{11.16}$$

En situaciones reales, x casi siempre es mucho menor que h. Como todas las deformaciones, la deformación por corte es un número adimensional: un cociente de dos longitudes.

11.17 Objeto sometido a un esfuerzo de corte. Se aplican fuerzas tangentes a superficies opuestas del objeto (en contraste con la situación de la figura 11.13, donde las fuerzas actúan perpendiculares a las superficies). Por claridad, se exagera la deformación x.



Esfuerzo de corte $= \frac{F_{\parallel}}{A}$.

Deformación por corte $= \frac{x}{h}$.

Si las fuerzas son lo suficientemente pequeñas como para que se obedezca la ley de Hooke, la deformación por corte es *proporcional* al esfuerzo de corte. El módulo de elasticidad correspondiente (cociente del esfuerzo de corte entre la deformación por corte) se denomina **módulo de corte** y se denota con S:

$$S = \frac{\text{Esfuerzo de corte}}{\text{Deformación por corte}} = \frac{F_{\parallel}/A}{x/h} = \frac{F_{\parallel}}{A}\frac{h}{x} \qquad \text{(módulo de corte)} \qquad (11.17)$$

con x y h definidos como en la figura 11.17.

En la tabla 11.1 se dan varios valores de módulo de corte. Para un material dado, S suele ser de un tercio a un medio del valor del módulo de Young Y para el esfuerzo de tensión. Tenga en cuenta que los conceptos de esfuerzo de corte, deformación por corte y módulo de corte únicamente se aplican a materiales *sólidos.* La razón es que las fuerzas de corte de la figura 11.17 deben deformar el bloque sólido, el cual tiende a regresar a su forma original si se eliminan las fuerzas de corte. En cambio, los gases y líquidos no tienen forma definida.

Ejemplo 11.7 Esfuerzo y deformación por corte

Suponga que el objeto de la figura 11.17 es la placa base de latón de una escultura exterior, que experimenta fuerzas de corte causadas por un terremoto. La placa cuadrada mide 0.80 m por lado y tiene un espesor de 0.50 cm. ¿Qué fuerza debe ejercerse en cada borde, si el desplazamiento x (véase la figura 11.17) es de 0.16 mm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación entre esfuerzo de corte, deformación por corte y módulo de corte. Nuestra incógnita es la fuerza $F_{\parallel}$ ejercida en forma paralela a cada borde, como se indica en la figura 11.17.

PLANTEAR: Primero calculamos la deformación por corte empleando la ecuación (11.16); luego determinamos el esfuerzo de corte con la ecuación (11.17). Así podremos despejar la incógnita $F_{\parallel}$ de la ecuación (11.15). Se dan los valores de todas las demás cantidades, incluido el módulo de corte del latón (de la tabla 11.1, $S = 3.5 \times 10^{10}$ Pa). Observe que h en la figura 11.17 representa la longitud de 0.80 m de cada lado de la placa cuadrada, mientras que el área A es el producto de la longitud de 0.80 m y el espesor de 0.50 cm.

EJECUTAR: La deformación por corte es

$$\text{Deformación por corte} = \frac{x}{h} = \frac{1.6 \times 10^{-4}\ \text{m}}{0.80\ \text{m}} = 2.0 \times 10^{-4}$$

Por la ecuación (11.17), el esfuerzo de corte es igual a la deformación por corte multiplicada por el módulo de corte S,

$$\begin{aligned}\text{Esfuerzo} &= (\text{Deformación por corte}) \times S \\ &= (2.0 \times 10^{-4})(3.5 \times 10^{10}\ \text{Pa}) = 7.0 \times 10^{6}\ \text{Pa}\end{aligned}$$

(Por la ecuación 11.15), la fuerza en cada borde es el esfuerzo de corte multiplicado por el área del borde:

$$\begin{aligned}F_{\parallel} &= (\text{Esfuerzo de corte}) \times A \\ &= (7.0 \times 10^{6}\ \text{Pa})(0.80\ \text{m})(0.0050\ \text{m}) = 2.8 \times 10^{4}\ \text{N}\end{aligned}$$

EVALUAR: ¡La fuerza requerida es de más de tres toneladas! El latón tiene un módulo de corte grande, lo que implica que es intrínsecamente difícil de deformar. Además, la placa es relativamente gruesa (0.50 cm), así que el área A es relativamente grande y se requiere una fuerza $F_{\parallel}$ grande para producir el esfuerzo necesario $F_{\parallel}/A$.

Evalúe su comprensión de la sección 11.4 Una varilla de cobre con área transversal de 0.500 cm^2 y longitud de 1.00 m se alarga 2.00×10^{-2} mm, y una varilla de acero con la misma área transversal pero longitud de 0.100 m se alarga 2.00×10^{-3} mm? *a*) ¿Qué varilla sufre mayor *deformación* por tensión? i) la varilla de cobre; ii) la varilla de acero; iii) La deformación es igual en ambas. *b*) ¿Qué varilla sufre mayor *esfuerzo* de tensión? i) la varilla de cobre; ii) la varilla de acero; iii) la deformación es igual en ambas.

11.5 Elasticidad y plasticidad

La ley de Hooke (la proporcionalidad del esfuerzo y la deformación elástica) tiene un intervalo de validez limitado. En las secciones anteriores usamos frases como “si las fuerzas son tan pequeñas que se obedece la ley de Hooke”. ¿Cuáles *son* exactamente las limitaciones de la ley de Hooke? Sabemos que: si tiramos de *cualquier cosa*, la aplastamos o la torcemos lo suficiente, se doblará o romperá. ¿Podemos ser más precisos que eso?

Examinemos de nuevo el esfuerzo y la deformación por tensión. Supongamos que graficamos el esfuerzo en función de la deformación. Si se obedece la ley de Hooke, la gráfica será una recta con pendiente igual al módulo de Young. La figura 11.18 muestra una gráfica esfuerzo-deformación típica de un metal como cobre o hierro blando. La deformación se muestra como *porcentaje* de alargamiento; la escala horizontal no es uniforme después de la primera porción de la curva, hasta una deformación menor que el 1%. La primera porción es una línea recta, que indica un comportamiento de ley de Hooke con el esfuerzo directamente proporcional a la deformación. Esta porción rectilínea termina en el punto a; el esfuerzo en este punto se denomina *límite proporcional*.

Desde a hasta b, el esfuerzo y la deformación ya no son proporcionales, y *no* se obedece la ley de Hooke. Si la carga se retira gradualmente, partiendo de cualquier punto entre O y b, la curva se sigue a la inversa hasta que el material recupera su longitud original. La deformación es *reversible*, y las fuerzas son conservativas; la energía introducida en el material para causar la deformación se recupera cuando se elimina el esfuerzo. En la región Ob decimos que el material tiene *comportamiento elástico.* El punto b, donde termina esta región, es el *punto de relajamiento*; el esfuerzo en este punto se denomina *límite elástico.*

Si aumentamos el esfuerzo más allá del punto b, la deformación sigue aumentando; pero si retiramos la carga en un punto más allá de b, digamos c, el material no recupera su longitud original, sino que sigue la línea roja de la figura 11.18. La longitud con cero esfuerzo ahora es mayor que la original; el material sufrió una deformación irreversible y adquirió un *ajuste permanente.* Un aumento de la carga más allá de c produce un aumento grande en la deformación con un incremento relativamente pequeño del esfuerzo, hasta llegar a un punto d en el que se presenta la *fractura.* El comportamiento del material entre b y d se denomina *flujo plástico* o *deformación plástica*. Una deformación plástica es irreversible; si se elimina el esfuerzo, el material no vuelve a su estado original.

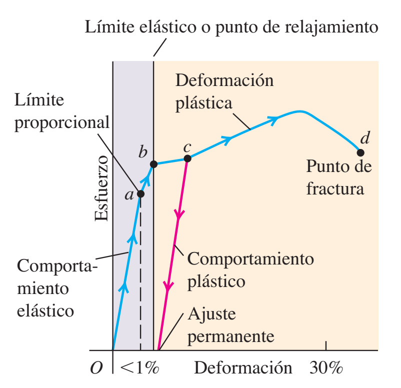
En algunos materiales, se presenta una deformación plástica considerable entre el límite elástico y el punto de fractura, como aquel cuyas propiedades se grafican en la figura 11.18. Decimos que tales materiales son *dúctiles.* En cambio, si la fractura se presenta poco después de rebasarse el límite elástico, decimos que el material es *quebradizo.* Un alambre de hierro blando que puede sufrir un estiramiento permanente considerable sin romperse es dúctil; una cuerda de acero de piano que se rompe poco después de alcanzar su límite elástico es quebradiza.

Algo muy curioso puede ocurrir cuando un objeto se estira y luego se deja relajar. Un ejemplo se presenta en la figura 11.19, que es una curva de esfuerzo-deformación de hule vulcanizado estirado a más de siete veces su longitud original. El esfuerzo no es proporcional a la deformación pero el comportamiento es elástico porque, al retirarse la carga, el material recupera su longitud original. Sin embargo, el material sigue curvas *diferentes* cuando aumenta y cuando disminuye el esfuerzo. Esto se denomina *histéresis elástica*. El trabajo efectuado por el material cuando recupera su forma original es menor que el requerido para deformarlo; hay fuerzas no conservativas asociadas con la fricción interna. El hule con histéresis elástica grande es muy útil para absorber vibraciones, como en los soportes de motores y bujes amortiguadores para automóvil.

El esfuerzo requerido para causar la fractura de un material se denomina *esfuerzo de rotura*, *resistencia límite* o (para el esfuerzo de tensión) *resistencia a la tensión*. Dos materiales, digamos dos tipos de acero, pueden tener constantes elásticas muy similares pero esfuerzos de rotura muy distintos. La tabla 11.3 presenta valores típicos de esfuerzo de rotura para varios materiales en tensión. El factor de conversión 6.9×10^8 Pa $= 100{,}000$ psi ayuda a poner estos números en perspectiva. Por ejemplo, si el esfuerzo de rotura de cierto acero es de 6.9×10^8 Pa, una barra con sección transversal de 1 in^2 tendrá una resistencia a la rotura de 100,000 lb.

Evalúe su comprensión de la sección 11.5 Imagine que, al estacionar su automóvil en una calle concurrida, golpea accidentalmente un poste de acero. Para examinar el daño, aleja un poco el auto del poste y se baja. ¿Qué aspecto tiene el parachoques trasero, si la deformación durante el impacto fue *a*) menor que en el límite proporcional; *b*) mayor que en el límite proporcional, pero menor que en el punto de relajamiento; *c*) mayor que en el punto de relajamiento, pero menor que en el punto de fractura; o *d*) mayor que en el punto de fractura?

11.18 Diagrama de esfuerzo-deformación típico para un metal dúctil sometido a tensión.



11.19 Diagrama esfuerzo-deformación típico para hule vulcanizado. Las curvas son diferentes para un aumento y una disminución del esfuerzo; este fenómeno se denomina histéresis elástica.

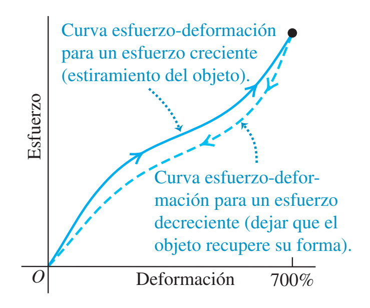


Tabla 11.3 Esfuerzos de rotura aproximados

Material	Esfuerzo de rotura (Pa o N/m^2)
Aluminio	2.2×10^8
Latón	4.7×10^8
Vidrio	10×10^8
Hierro	3.0×10^8
Bronce fosforado	5.6×10^8
Acero	$5 - 20 \times 10^8$

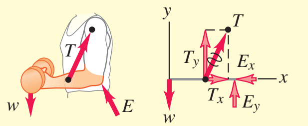
CAPÍTULO 11 RESUMEN

Condiciones del equilibrio: Para que un cuerpo rígido esté en equilibrio, deben cumplirse dos condiciones. Primera, la suma resultante de las fuerzas debe ser cero. Segunda, la suma de las torcas con respecto a cualquier punto debe ser cero. La torca debida al peso de un cuerpo se calcula suponiendo que todo el peso se concentra en el centro de gravedad, que está en el mismo punto que el centro de masa si $\vec{g}$ tiene el mismo valor en todos los puntos. (Véanse ejemplos 11.1 a 1 1.4.)

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0 \tag{11.1}$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad \text{alrededor de } \textit{cualquier} \text{ punto} \tag{11.2}$$

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} \tag{11.4}$$

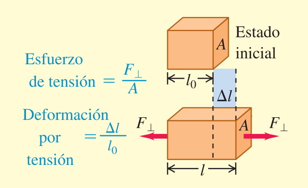


Esfuerzo, deformación y ley de Hooke: La ley de Hooke establece que, en las deformaciones elásticas, el esfuerzo (fuerza por unidad de área) es proporcional a la deformación (cambio fraccionario de forma). La constante de proporcionalidad se llama módulo de elasticidad.

$$\frac{\text{Esfuerzo}}{\text{Deformación}} = \text{Módulo de elasticidad} \tag{11.7}$$

Esfuerzo de tensión y de compresión: El esfuerzo de tensión es la fuerza de tensión por unidad de área, $F_{\perp}/A$. La deformación por tensión es el cambio fraccionario de longitud, $\Delta l/l_0$. El módulo de elasticidad se llama módulo de Young, Y. El esfuerzo y la deformación por compresión se definen de la misma forma. (Véase el ejemplo 11.5.)

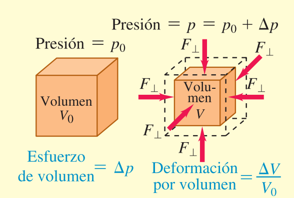
$$Y = \frac{\text{Esfuerzo de tensión}}{\text{Deformación por tensión}} = \frac{F_{\perp}/A}{\Delta l/l_0} = \frac{F_{\perp}}{A}\frac{l_0}{\Delta l} \tag{11.10}$$



Esfuerzo de volumen: La presión ejercida por un fluido es la fuerza por unidad de área. El esfuerzo de volumen es un cambio de presión, Δp, y la deformación por volumen es el cambio fraccionario de volumen $\Delta V/V_0$. El módulo de elasticidad se llama módulo de volumen, B. La compresibilidad, k, es el inverso del módulo de volumen: $k = 1/B$. (Véase ejemplo 11.6.)

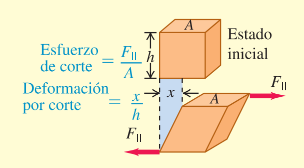
$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \tag{11.11}$$

$$B = \frac{\text{Esfuerzo de volumen}}{\text{Deformación por volumen}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0} \tag{11.13}$$



Esfuerzo de corte: El esfuerzo de corte es la fuerza por unidad de área, $F_{\parallel}/A$, para una fuerza aplicada tangente a una superficie. La deformación por corte es el desplazamiento x de un lado dividido entre la dimensión transversal h. El módulo de elasticidad se llama módulo de corte, S. (Véase el ejemplo 11.7.)

$$S = \frac{\text{Esfuerzo por corte}}{\text{Deformación por corte}} = \frac{F_{\parallel}/A}{x/h} = \frac{F_{\parallel}}{A}\frac{h}{x} \tag{11.17}$$



Los límites de la ley de Hooke: El límite proporcional es el esfuerzo máximo para el que el esfuerzo y la deformación son proporcionales. Más allá del límite proporcional, la ley de Hooke no es válida. El límite elástico es el esfuerzo a partir del cual se presenta una deformación irreversible. El esfuerzo de rotura, o resistencia límite, es el esfuerzo en el que el material se rompe.

Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Cada piedra en el arco está bajo compresión no bajo tensión, que es la causa de que las fuerzas sobre las piedras tiendan a empujar éstas hacia adentro al centro del arco y, por ello, las aplastan juntándolas. En comparación con una pared de carga sólida, una pared con arcos es igualmente resistente pero mucho más barata de construir.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

11.1 Respuesta: i) La situación i) satisface ambas condiciones de equilibrio, ya que la gaviota tiene aceleración cero (así que $\sum\vec{F} = \mathbf{0}$) y ninguna tendencia a comenzar a girar (así que $\sum\vec{\tau} = \mathbf{0}$). La situación ii) satisface la primera condición, pues el cigüeñal entero no acelera en el espacio, pero no satisface la segunda condición; el cigüeñal tiene una aceleración angular, así que $\sum\vec{\tau}$ no es cero. La situación iii) satisface la segunda condición (no hay tendencia a girar) pero no la primera; la pelota se acelera en su vuelo (debido a la gravedad), así que $\sum\vec{F}$ no es cero.

11.2 Respuesta: ii) En el equilibrio, el centro de gravedad debe estar en el punto de soporte. Puesto que la roca y el metro tienen la misma masa y con ello el mismo peso, el centro de gravedad del sistema está a medio camino entre sus centros respectivos. El cg del metro solo está a 0.50 m del extremo izquierdo (es decir, a la mitad del metro), por lo que el cg de la combinación de roca y metro está a 0.25 m del extremo izquierdo.

11.3 Respuestas: ii), i), iii) Esta situación es igual a la descrita en el ejemplo 11.4, sustituyendo el antebrazo por una varilla, el codo por una articulación y el tendón por un cable. La única diferencia es que el punto de sujeción del cable está en el extremo de la varilla, así que las distancias D es igual a L. Del ejemplo 11.4, la tensión es

$$T = \frac{Lw}{L\operatorname{sen}\theta} = \frac{w}{\operatorname{sen}\theta}$$

Como sen θ es menor que 1, la tensión T es mayor que el peso w. La componente vertical de la fuerza ejercida por la articulación es:

$$E_y = -\frac{(L - L)w}{L} = 0$$

En esta situación, la articulación *no* ejerce ninguna fuerza vertical. Usted puede ver esto con facilidad, si calcula torcas alrededor del extremo derecho de la varilla horizontal: la única fuerza que ejerce una torca alrededor de este punto es la componente vertical de la fuerza de la articulación, así que la componente de fuerza debe ser cero.

11.4 Respuestas: *a*) iii), *b*) ii) En *a*) la varilla de cobre tiene 10 veces el alargamiento Δl de la varilla de acero, pero también tiene 10 veces la longitud original l_0. Por lo tanto, la deformación por tensión $\Delta l/l_0$ es la misma para ambas varillas. En *b*) el esfuerzo es igual al módulo de Young Y multiplicado por la deformación. De la tabla 11.1 el acero tiene un valor de Y más grande, así que se requiere un mayor esfuerzo para producir la misma deformación.

11.5 En los casos *a*) y *b*), el parachoques habrá recuperado su forma original (aunque probablemente la pintura se haya rayado). En el caso *c*), el parachoques tendrá una mella o deformación permanente. En el caso *d*), el parachoques estará agrietado o roto.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P11.1. ¿Un objeto rígido en rotación uniforme alrededor de un eje fijo satisface las dos condiciones de equilibrio? ¿Por qué? ¿Entonces se concluye que todas las partículas en el objeto están en equilibrio? Explique su respuesta.

P11.2. *a*) ¿Es posible que un objeto esté en equilibrio traslacional (la primera condición), pero *no* en equilibrio rotacional (la segunda condición)? Ilustre su respuesta con un ejemplo sencillo. *b*) ¿Puede un objeto estar en equilibrio rotacional pero *no* en equilibrio traslacional? Justifique su respuesta con un ejemplo sencillo.

P11.3. Los neumáticos de los automóviles a veces se "balancean" en una máquina que pivotea la rueda alrededor del centro. Se colocan pesos (plomos) en el borde de la rueda hasta que ésta no se inclina con respecto al plano horizontal. Analice este procedimiento en términos del centro de gravedad.

P11.4. ¿El centro de gravedad de un cuerpo sólido siempre está dentro del material del cuerpo? Si no, dé un contraejemplo.

P11.5. En la sección 11.2, supusimos siempre que el valor de g era el mismo en todos los puntos del cuerpo. Esta aproximación *no* es válida si el cuerpo es suficientemente grande, pues el valor de g disminuye con la altitud. Tomando esto en cuenta, ¿el centro de gravedad de una varilla vertical larga está arriba de su centro de masa, debajo de éste o en el mismo lugar? Explique cómo esto puede ayudar a mantener el eje longitudinal de una nave en órbita dirigido hacia la Tierra. (Esto sería útil en el caso de un satélite meteorológico, que siempre debe apuntar la lente de su cámara a la Tierra.) La Luna no es exactamente esférica, sino un tanto alargada. Explique por qué este mismo efecto hace que la Luna siempre dirija la misma cara hacia la Tierra.

P11.6. Imagine que equilibra una llave de tuercas suspendiéndola de un solo punto. ¿El equilibrio es estable, inestable o neutral, si el punto está arriba del centro de gravedad de la llave, debajo de éste o coincide con él? Justifique su respuesta en cada caso. (Para rotación, un cuerpo rígido está en equilibrio *estable* si una rotación pequeña genera una

torca que tiende a volver el cuerpo al equilibrio; está en equilibrio *inestable* si dicha rotación produce una torca que tiende a alejar el cuerpo aún más del equilibrio; y está en equilibrio *neutral* si dicha rotación no produce ninguna torca.)

P11.7. El lector seguramente puede pararse con los pies planos y luego levantar los talones y equilibrarse sobre las puntas de los pies. ¿Por qué no puede hacerlo si los dedos de sus pies están tocando la pared? (¡Inténtelo!)

P11.8. Una herradura pivotea libremente sobre un clavo horizontal que atraviesa uno de sus agujeros. Se cuelga del clavo un hilo largo con un peso colgante, para que el hilo quede vertical frente a la herradura sin tocarla. ¿Por qué sabemos que el centro de gravedad de la herradura queda a lo largo de la línea del hilo? ¿Cómo podemos ubicar dicho centro colgando la herradura de otro agujero? ¿El centro de gravedad está dentro del material sólido de la herradura?

P11.9. Un objeto consiste en una esfera de peso W pegada al extremo de una barra uniforme también con peso W. Si usted lo libera del reposo, manteniendo la barra horizontal, ¿cuál será su comportamiento mientras cae si la resistencia del aire es despreciable? *a*) ¿Permanecerá horizontal, *b*) girará alrededor de su centro de gravedad, *c*) girará alrededor de la esfera, o *d*) girará de modo que la esfera oscile hacia abajo? Explique su razonamiento.

P11.10. Suponga que el objeto de la pregunta 11.9 se libera del reposo con la barra inclinada a 60° arriba de la horizontal, con la esfera en el extremo superior. Conforme cae, ¿*a*) girará alrededor de su centro de gravedad hasta que quede horizontal, *c*) girará alrededor de su centro de gravedad hasta que quede vertical con la esfera en la base, *c*) girará alrededor de la esfera hasta que quede vertical con la esfera en la base, o *d*) permanecerá a 60° arriba de la horizontal?

P11.11. ¿Por qué debe inclinarse hacia atrás un esquiador acuático que avanza con velocidad constante? ¿Qué determina qué tanto debe inclinarse? Dibuje un diagrama de cuerpo libre del esquiador para justificar sus respuestas.

P11.12. Cuando una carreta de pioneros se atascaba en el lodo, la gente sujetaba los rayos de las ruedas y trataba de girarlas, en ves de simplemente empujar la carreta. ¿Por qué?

P11.13. El poderoso Zimbo asegura tener los músculos de las piernas tan fuertes, que podría pararse erguido sobre sus pies e inclinarse hacia delante para recoger con sus dientes una manzana que esté sobre el piso. ¿Debería usted pagar para ver su desempeño o tendría alguna sospecha acerca de su afirmación? ¿Por qué?

P11.14. ¿Por qué es más fácil sostener una mancuerna de 10 kg con la mano junto al cuerpo que con el brazo estirado horizontalmente?

P11.15. Ciertas características de una persona, como su estatura y su peso, son fijos (al menos durante periodos relativamente largos). ¿Las siguientes características también son fijas? *a*) La ubicación del centro de gravedad del cuerpo; *b*) el momento de inercia del cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro de masa de la persona. Explique su razonamiento.

P11.16. Durante el embarazo, con frecuencia las mujeres sufren dolores de espalda porque se tienen que inclinar hacia atrás mientras caminan. ¿Por qué tienen que caminar de esta manera?

P11.17. ¿Por qué es más fácil volcar un vaso cónico de base angosta que uno ancho de lados rectos? ¿Importa que el vaso esté lleno o vacío?

P11.18. Si un refrigerador alto y pesado se empuja sobre un piso áspero, ¿qué factores determinan si resbala o se vuelca?

P11.19. Si un alambre metálico duplica su longitud y triplica su diámetro, ¿en qué factores cambia su módulo de Young?

P11.20. ¿Por qué el hormigón (concreto) reforzado con varillas de acero interiores es más fuerte que el ordinario?

P11.21. Un alambre metálico con diámetro D se estira 0.100 mm cuando soporta un peso W. Si se utiliza un alambre con la misma longitud para soportar un peso tres veces mayor, ¿cuál tendría que ser su diámetro (en términos de D), de manera que se siguiera estirando sólo 0.100 mm?

P11.22. Compare las propiedades mecánicas de un cable de acero hecho trenzando muchos alambres delgados, con las propiedades de una varilla metálica sólida del mismo diámetro. ¿Qué ventajas tiene cada uno?

P11.23. El material de los huesos humanos y de elefante es básicamente el mismo; sin embargo, un elefante tiene patas mucho más gruesas. Explique por qué en términos del esfuerzo de rotura.

P11.24. Existe cierta histéresis elástica, pequeña pero apreciable, en el tendón grande del dorso de la pata de un caballo. Explique cómo esto puede dañar el tendón, si el caballo corre con demasiado esfuerzo durante mucho tiempo.

P11.25. Si se usan monturas de hule para absorber vibraciones de máquinas por histéresis elástica, como se mencionó en la sección 11.5, ¿qué pasa con la energía asociada a las vibraciones?

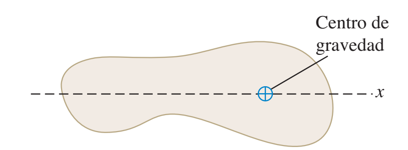
Ejercicios

Sección 11.2 Centro de gravedad

11.1. Una barra uniforme con 50.0 cm de longitud y 2.40 kg tiene pegada una masa pequeña de 1.10 kg a su extremo izquierdo, y una masa pequeña de 2.20 kg pegada al otro extremo. Usted quiere equilibrar horizontalmente este sistema sobre un fulcro colocado justamente debajo de su centro de gravedad. ¿A qué distancia del extremo izquierdo debería colocarse el fulcro?

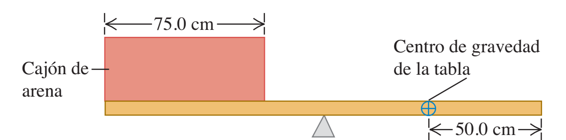
11.2. El centro de gravedad de un objeto irregular se muestra en la figura 11.20. Usted necesita mover el centro de gravedad 2.20 cm a la izquierda pegándole una masa pequeña de 1.50 kg, la cual por ende se considerará como parte del objeto. ¿Dónde debería pegar esta masa adicional?

Figura 11.20 Ejercicio 11.2.



11.3. Un cajón de masa despreciable está en reposo en el extremo izquierdo de una tabla de 25.0 kg y 2.00 m de longitud (figura 11.21). El ancho del cajón es de 75.0 cm y se va a distribuir arena uniformemente en él. El centro de gravedad de la tabla no uniforme está a 50.0 cm del extremo derecho. ¿Qué masa de arena debería colocarse en el cajón para que la tabla se equilibre horizontalmente sobre el fulcro, que está colocado exactamente debajo de su punto medio?

Figura 11.21 Ejercicio 11.3.



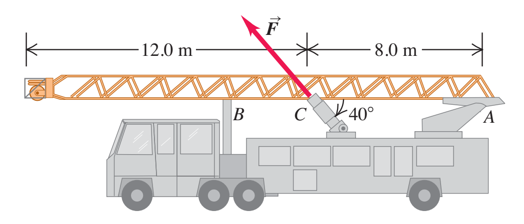
Sección 11.3 Resolución de problemas de equilibrio de cuerpos rígidos

11.4. Una escotilla uniforme de 300 N en un techo tiene bisagras en un lado. Calcule la fuerza total hacia arriba necesaria para comenzar a abrirla, y la fuerza total ejercida por las bisagras sobre la puerta: *a*) si la fuerza hacia arriba se aplica en el centro; *b*) si la fuerza hacia arriba se aplica en el centro del borde opuesto a las bisagras.

11.5. Levantar la escalera. La escalera de un camión de bomberos tiene 20.0 m de longitud, pesa 2800 N, tiene su centro de gravedad en su centro y pivotea sobre un perno en un extremo (A, figura 11.22). La escalera se levanta por una fuerza aplicada por un pistón hidráulico en

el punto C, que está a 8.00 m de A, y la fuerza $\vec{F}$ ejercida por el pistón forma un ángulo de 40° con la escalera. ¿Qué magnitud mínima debe tener $\vec{F}$ para separar la escalera del apoyo en B? Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre de la escalera.

Figura **11.22** Ejercicio 11.5.

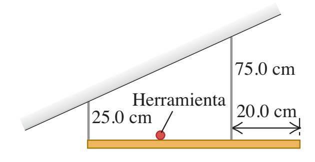


11.6. Dos personas llevan una tabla uniforme horizontal de 3.00 m de longitud que pesa 160 N. Si una persona aplica una fuerza hacia arriba de 60 N en un extremo, ¿en qué punto sostiene la tabla la otra persona? Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre de la tabla.

11.7. Dos personas llevan un pesado motor eléctrico sobre una tabla ligera de 2.00 m de longitud. Una persona levanta un extremo con una fuerza de 400 N, y la otra levanta el extremo opuesto con 600 N. *a*) ¿Cuánto pesa el motor y dónde está el centro de gravedad? *b*) Suponga que la tabla no es ligera sino que pesa 200 N, con su centro de gravedad en el centro y las dos personas ejercen cada una la misma fuerza que antes. En este caso, ¿cuál es el peso del motor y dónde se localiza su centro de gravedad?

11.8. Una repisa uniforme de 60.0 cm y 50.0 N se sostiene horizontalmente mediante dos alambre verticales unidos al techo en pendiente (figura 11.23). Una herramienta muy pequeña de 25.0 N se coloca en la repisa en medio de los puntos donde se le unen los alambres. Calcule la tensión en cada alambre. Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre para la repisa.

Figura **11.23** Ejercicio 11.8.

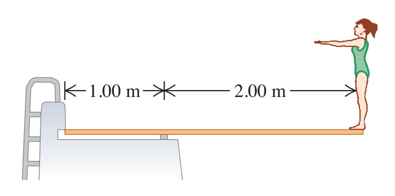


11.9. Una barra uniforme de 1.50 m y 350 N está suspendida horizontalmente con dos cables verticales en cada extremo. El cable A puede soportar una tensión máxima de 500.0 N sin romperse, y el cable B puede soportar hasta 400.0 N. Usted quiere colocar un peso pequeño sobre esta barra. *a*) ¿Cuál es el peso máximo que usted puede colocar sobre ella sin romper ningún cable? *b*) ¿Dónde debería colocar este peso?

11.10. Una escalera uniforme de 5.0 m de longitud que pesa 160 N descansa contra una pared vertical sin fricción con su base a 3.0 m de la pared. El coeficiente de fricción estática entre la base de la escalera y el suelo es de 0.40. Un hombre de 740 N sube lentamente la escalera. Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre de la escalera. *a*) ¿Qué fuerza de fricción máxima puede ejercer el suelo sobre la escalera en su base? *b*) ¿A cuánto asciende esa fuerza cuando el hombre ha subido 1.0 m a lo largo de la escalera? *c*) ¿Hasta dónde puede subir el hombre antes de que la escalera resbale?

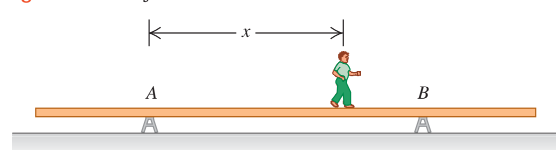
11.11. Un trampolín de 3.00 m de longitud se apoya en un punto a 1.00 m del extremo fijo, y una clavadista que pesa 500 N se para en el extremo libre (figura 11.24). El trampolín tiene sección transversal uniforme y pesa 280 N. Calcule *a*) la fuerza en el apoyo; *b*) la fuerza en el extremo fijo.

Figura **11.24** Ejercicio 11.11.



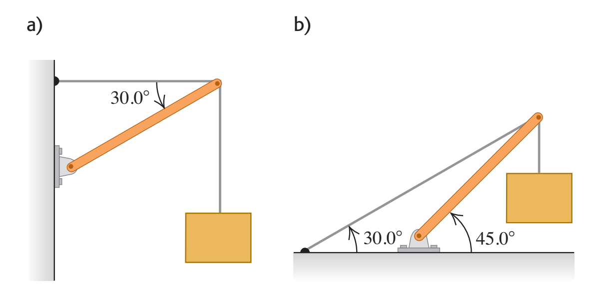
11.12. Una viga uniforme de aluminio de 9.00 m de longitud pesa 300 N y descansa simétricamente en dos apoyos separados 5.00 m (figura 11.25). Un niño que pesa 600 N parte de A y camina hacia la derecha. *a*) Dibuje en la misma gráfica dos curvas que muestren las fuerzas F_A y F_B ejercidas hacia arriba sobre la viga en A y B, en función de la coordenada x del niño. Use 1 cm = 100 N verticalmente y 1 cm = 1.00 m horizontalmente. *b*) Según la gráfica, ¿qué tanto después de B puede estar el niño sin que se incline la viga? *c*) ¿A qué distancia del extremo derecho de la viga debe estar B para que el niño pueda caminar hasta el extremo sin inclinar la viga?

Figura **11.25** Ejercicio 11.12.



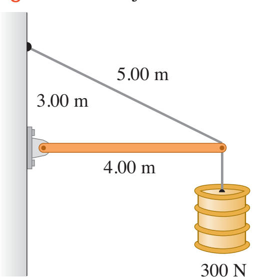
11.13. Calcule la tensión T en cada cable, así como la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el puntal por el pivote en los sistemas de la figura 11.26. En cada caso, sea w el peso de la caja suspendida, que contiene inapreciables objetos de arte. El puntal es uniforme y también pesa w. En cada caso empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre del puntal.

Figura **11.26** Ejercicio 11.13.



11.14. La viga horizontal de la figura 11.27 pesa 150 N, y su centro de gravedad está en su centro. Calcule: *a*) La tensión en el cable, y *b*) Las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la pared sobre la viga.

Figura **11.27** Ejercicio 11.14.

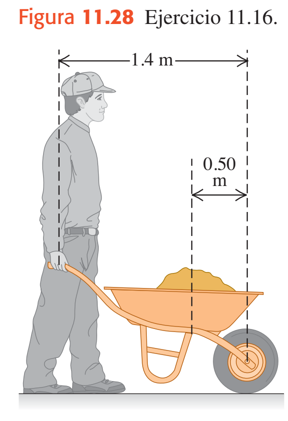


11.15. Una puerta de 1.00 m de anchura y 2.00 m de altura pesa 280 N y se apoya en dos bisagras, una a 0.50 m debajo de la parte superior y otra a 0.50 m arriba de la parte inferior. Cada bisagra

soporta la mitad del peso de la puerta. Suponiendo que el centro de gravedad de la puerta está en su centro, calcule las componentes de fuerza horizontales ejercidas sobre la puerta por cada bisagra.

11.16. Suponga que no puede levantar más de 650 N (aprox. 150 lb) sin ayuda. *a*) ¿Cuánto podrá levantar empleando una carretilla de 1.4 m de longitud que pesa 80 N y que su centro de gravedad está a 0.50 m del centro de la rueda (figura 11.28)? El centro de gravedad de la carga que lleva en la carretilla también está a 0.50 m del centro de la rueda. *b*) ¿De dónde proviene la fuerza que le permite levantar más de 650 N cuando usa la carretilla?

Figura 11.28 Ejercicio 11.16.



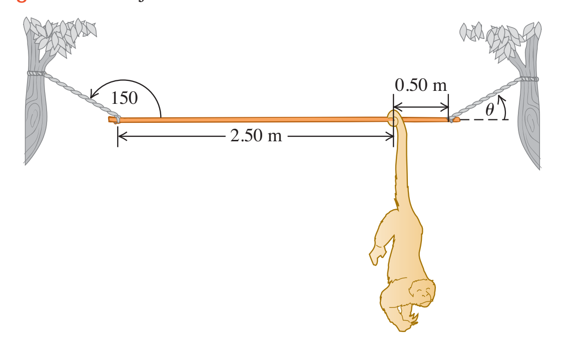
11.17. Imagine que lleva su perrita Clea al veterinario y éste decide que debe ubicar el centro de gravedad del animal. Sería cruel colgar a la perrita del techo, así que el veterinario debe idear otro método. Coloca las patas delanteras de Clea en una báscula y sus patas traseras en otra. La báscula delantera marca 157 N, y la trasera, 89 N. Ahora el veterinario mide a Clea y determina que las patas traseras están 0.95 m detrás de las delanteras. ¿Cuánto pesa Clea y dónde está su centro de gravedad?

11.18. Una grúa de 15,000 N pivotea alrededor de un eje sin fricción en su base y está apoyada por un cable que forma un ángulo de 25° con la grúa (figura 11.29). La grúa tiene 16 m de largo y no es uniforme; su centro de gravedad es de 7.0 m desde el eje medidos a lo largo de la grúa. El cable está unido a 3.0 m del extremo superior de la grúa. Cuando la grúa se levanta a 55° por encima de la horizontal, sosteniendo un palé de ladrillos de 11,000 N mediante una cuerda muy ligera de 2.2 m, calcule *a*) la tensión en el cable y *b*) las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el eje sobre la grúa. Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre de la grúa.

Figura 11.29 Ejercicio 11.18.

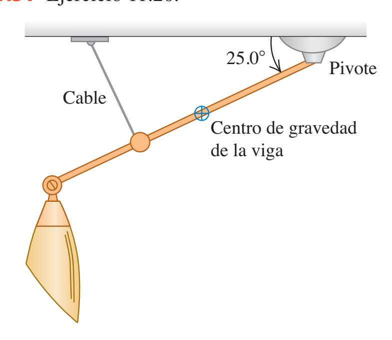
11.19. En un zoológico, una varilla uniforme de 240 N y 3.00 m de longitud se sostiene en posición horizontal con dos cuerdas en sus extremos (figura 11.30). La cuerda izquierda forma un ángulo de 150° con la varilla, y la derecha forma un ángulo θ con la horizontal. Un mono aullador (*Alouatta seniculus*) de 90 N cuelga inmóvil a 0.50 m del extremo derecho de la varilla y nos estudia detenidamente. Calcule θ y las tensiones en las dos cuerdas. Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre de la varilla.

Figura 11.30 Ejercicio 11.19.



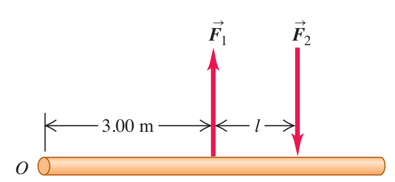
11.20. Una viga no uniforme de 4.50 m de longitud que pesa 1.00 kN y forma un ángulo de 25.0° debajo de la horizontal está sostenida por un pivote sin fricción en su extremo superior derecho y por un cable a 3.00 m de distancia, perpendicular a la viga (figura 11.31). El centro de gravedad de la viga está a 2.00 m del pivote. Una lámpara ejerce una fuerza de 5.00 kN hacia abajo sobre el extremo inferior izquierdo de la viga. Calcule la tensión T en el cable, y las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida sobre la viga por el pivote. Empiece dibujando un diagrama de cuerpo libre de la viga.

Figura 11.31 Ejercicio 11.20.



11.21. Un par. Dos fuerzas de igual magnitud y dirección opuesta que actúan sobre un objeto en dos puntos distintos forman un *par.* Dos fuerzas antiparalelas de magnitud $F_1 = F_2 = 8.00$ N se aplican a una viga como se muestra en la figura 11.32. *a*) ¿Qué distancia l debe haber entre las fuerzas para que produzcan una torca total de 6.40 N · m alrededor del extremo izquierdo de la varilla? *b*) ¿El sentido de esta torca es horario o antihorario? *c*) Repita *a*) y *b*) para un pivote en el punto de la varilla donde se aplica $\vec{F}_2$.

Figura 11.32 Ejercicio 11.21.



Sección 11.4 Esfuerzo, deformación y módulos de elasticidad

11.22. Bíceps. Un bíceps relajado requiere una fuerza de 25.0 N para alargarse 3.0 cm; el mismo músculo sometido a máxima tensión requiere de una fuerza de 500 N para el mismo alargamiento. Calcule el módulo de Young para el tejido muscular en ambas condiciones, si lo consideramos como un cilindro uniforme de 0.200 m de longitud y sección transversal de 50.0 cm^2.

11.23. Un alambre circular de acero de 2.00 m de longitud no debe estirarse más de 0.25 cm, cuando se aplica una tensión de 400 N a cada extremo. ¿Qué diámetro mínimo debe tener?

11.24. Dos varillas redondas, una de acero y la otra de cobre, se unen por los extremos. Cada una tiene 0.750 m de longitud y 1.50 cm de diámetro. La combinación se somete a una tensión con magnitud de 4000 N. Para cada varilla, determine: *a*) la deformación y *b*) el alargamiento.

11.25. Una varilla metálica de 4.00 m de longitud y área transversal de 0.50 cm^2 se estira 0.20 cm al someterse a una tensión de 5000 N. ¿Qué módulo de Young tiene el metal?

11.26. Esfuerzo en una cuerda de alpinista. Una cuerda de nylon se alarga 1.10 m sometida al peso de una alpinista de 65.0 kg. Si la cuerda tiene 45.0 m de longitud y 7.0 mm de diámetro, ¿qué módulo de Young tiene el material?

11.27. Para construir un móvil grande, un artista cuelga una esfera de aluminio con masa de 6.0 kg de un alambre vertical de acero de 0.50 m de longitud y área transversal de 2.5×10^{-3} cm^2. En la base inferior de la esfera, el artista sujeta un alambre de acero similar del que cuelga un cubo de latón de 10.0 kg. Para cada alambre, calcule: *a*) la deformación por tensión y *b*) el alargamiento.

11.28. Un poste vertical de acero sólido de 25 cm de diámetro y 2.50 m de longitud debe soportar una carga de 8000 kg. Puede despreciarse el peso del poste. *a*) ¿A qué esfuerzo se somete el poste? *b*) ¿Qué deformación sufre? *c*) ¿Cómo cambia su longitud al aplicarse la carga?

11.29. Afuera de una casa a 1.0 km del centro de una explosión de bomba nuclear de 100 kilotones, la presión se eleva rápidamente hasta 2.8 atm, en tanto que dentro de la casa sigue siendo de 1.0 atm. Si el área del frente de la casa es de 33 m de altura por 15.0 m de ancho, ¿qué fuerza neta ejerce el aire sobre dicha área?

11.30. Se saca un lingote de oro sólido de la bodega del RMS *Titanic* hundido. *a*) ¿Qué sucede con su volumen al cambiar de la presión en el barco a la menor presión en la superficie del mar? *b*) La diferencia de presión es proporcional a la profundidad. ¿Cuántas veces mayor habría sido el cambio de volumen, si el barco hubiera estado al doble de profundidad? *c*) El módulo de volumen del plomo es la cuarta parte del módulo del oro. Calcule la relación de cambio de volumen de un lingote de plomo y uno de oro de igual volumen, para el mismo cambio de presión.

11.31. Una joven mujer de baja estatura distribuye su peso de 500 N igualmente sobre los tacones altos de los zapatos. Cada tacón tiene una área de 0.750 cm^2. *a*) ¿Qué presión ejerce cada tacón sobre el suelo? *b*) Con la misma presión, ¿cuánto peso podrían soportar dos sandalias planas, cada una con un área de 200 cm^2?

11.32. En el abismo Challenger de la Fosa de las Marianas, la profundidad del agua es de 10.9 km y la presión es de 1.16×10^8 Pa (cerca de 1.15×10^3 atm). *a*) Si se lleva un metro cúbico de agua de la superficie a esa profundidad, ¿cuánto cambiará su volumen? (La presión atmosférica normal es del orden de 1.0×10^5 Pa. Suponga que k para el agua de mar es igual al valor para el agua dulce de la tabla 11.2.) *b*) ¿Qué densidad tiene el agua de mar a esta profundidad? (En la superficie, su densidad es de 1.03×10^3 kg/m^3.)

11.33. Una muestra de aceite con un volumen inicial de 600 cm^3 se somete a un aumento de presión de 3.6×10^6 Pa, y el volumen disminuye 0.45 cm^3. ¿Qué módulo de volumen tiene el material? ¿Y qué compresibilidad tiene?

11.34. Una placa cuadrada de acero mide 10.0 cm por lado y tiene un espesor de 0.500 cm. *a*) Calcule la deformación por corte que se produce al aplicarse a cada uno de los cuatro lados una fuerza de 9.0×10^5 N paralela a cada lado. *b*) Determine el desplazamiento x en centímetros.

11.35. Un cubo de cobre mide 6.00 cm de cada lado. Usando un pegamento muy fuerte, la base está sujeta a una superficie plana horizontal, mientras se aplica una fuerza horizontal F a la cara superior paralela a uno de los bordes. (Consulte la tabla 11.1.) *a*) Demuestre que la fuerza F que el pegamento ejerce sobre la base es igual pero opuesta a la fuerza sobre la cara superior. *c*) ¿Qué tan grande debe ser F para hacer que el cubo se deforme 0.250 mm? *c*) Si se realizara el mismo experimento en un cubo de plomo del mismo tamaño que el de cobre, ¿qué distancia se deformaría al aplicarle la misma fuerza que en el inciso *b*)?

11.36. Se aplican fuerzas de corte a un sólido rectangular. Se aplican las mismas fuerzas a otro sólido rectangular del mismo material, pero con cada lado tres veces más largo. En ambos casos, las fuerzas son lo bastante pequeñas como para que se obedezca la ley de Hooke. ¿Qué relación hay entre la deformación por corte del objeto grande y la del pequeño?

Sección 11.5 Elasticidad y plasticidad

11.37. En un laboratorio de prueba de materiales, se determina que un alambre metálico hecho con una nueva aleación se rompe cuando se aplica una fuerza de tensión de 90.8 N perpendicular a cada extremo. Si el diámetro del alambre es de 1.84 mm, ¿cuál es el esfuerzo de rotura de la aleación?

11.38. Un alambre de acero de 4.0 m de longitud tiene un área transversal de 0.050 m^2, y un límite proporcional igual a 0.0016 veces su módulo de Young (véase la tabla 11.1). El esfuerzo de rotura tiene un valor igual a 0.0065 veces su módulo de Young. El alambre está sujeto por arriba y cuelga verticalmente. *a*) ¿Qué peso puede colgarse del alambre sin exceder el límite proporcional? *b*) ¿Cuánto se estira el alambre con esta carga? *c*) ¿Qué peso máximo puede soportar?

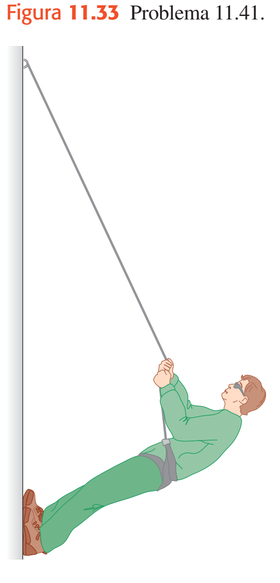
11.39. El límite elástico de un cable de acero es de 2.40×10^8 Pa y su área transversal es de 3.00 cm^2. Calcule la aceleración máxima hacia arriba que puede darse a un elevador de 1200 kg sostenido por el cable sin que el esfuerzo exceda un tercio del límite elástico.

11.40. Un alambre de latón debe resistir una fuerza de tensión de 350 N sin romperse. ¿Qué diámetro mínimo debe tener dicho alambre?

Problemas

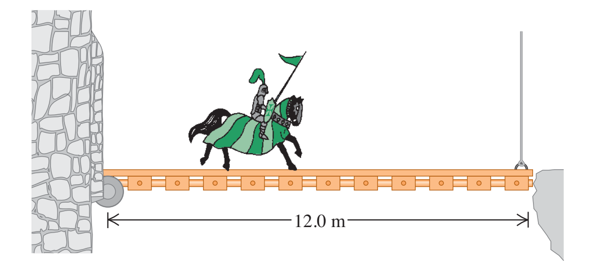
11.41. Escalar montañas. A menudo los alpinistas utilizan una cuerda para descender por la pared de un acantilado (lo cual se conoce como *rapel*). Colocan su cuerpo casi horizontal y sus pies empujando contra el risco (figura 11.33). Suponga que un alpinista, de 82 kg y estatura de 1.90 m con centro de gravedad a 1.1 m de sus pies, desciende con cuerda por un risco vertical manteniendo su cuerpo levantado a 35.0° sobre la horizontal. Él sostiene la cuerda a 1.40 m de sus pies y forma un ángulo de 25.0° con la pared del risco. *a*) ¿Qué tensión necesita soportar esta cuerda? *b*) Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la pared del risco ejerce sobre los pies del alpinista. *c*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se necesita para evitar que los pies del alpinista se resbalen de la pared del risco, si él tiene un pie apoyado contra el risco a la vez?

Figura 11.33 Problema 11.41.



11.42. Sir Lancelot sale lentamente a caballo de la fortaleza de Camelot pasando por el puente levadizo de 12.0 m que salva el foso (figura 11.34). Él no sabe que sus enemigos cortaron parcialmente el cable

Figura 11.34 Problema 11.42.



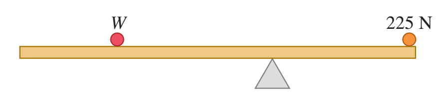
vertical que sostiene el frente del puente, de modo que se romperá si se somete a una tensión de 5.80×10^3 N. La masa del puente es de 200 kg y su centro de gravedad está en su centro. Lancelot, su lanza, su armadura y su caballo tienen una masa combinada de 600 kg. ¿Se romperá el cable antes de que Lancelot llegue al otro lado? Si así es, ¿a qué distancia del castillo estará el centro de gravedad del caballo más el jinete cuando se rompa el cable?

11.43. Tres fuerzas verticales actúan sobre un avión cuando vuela con altitud y velocidad constantes. Se trata del peso del avión, una fuerza vertical aerodinámica sobre el ala y una fuerza vertical aerodinámica sobre la cola horizontal. (El aire circundante es el que ejerce las fuerzas aerodinámicas, que son reacciones a las fuerzas que el ala y la cola ejercen sobre el aire cuando el avión lo surca.) En el caso específico de un avión que pesa 6700 N, el centro de gravedad está 0.30 m adelante del punto donde actúa la fuerza aerodinámica vertical sobre el ala y 3.66 m adelante del punto donde actúa la fuerza aerodinámica vertical sobre la cola. Determine la magnitud y la dirección (hacia arriba o hacia abajo) de cada fuerza aerodinámica.

11.44. Una camioneta tiene una distancia entre ejes de 3.00 m. Normalmente, 10,780 N descansan sobre las ruedas delanteras y 8820 N sobre las ruedas traseras, cuando el vehículo está estacionado en pavimento horizontal. *a*) Una carga de 3600 N se coloca sobre el tirón trasero (un accesorio que se coloca en el parachoques para enganchar un remolque), 1.00 m detrás del eje trasero. ¿Cuánto peso descansa ahora en las ruedas delanteras? ¿Y en las traseras? *b*) ¿Cuánto peso tendría que colocarse en el tirón trasero para que las ruedas delanteras se separen del suelo (se levanten del suelo)?

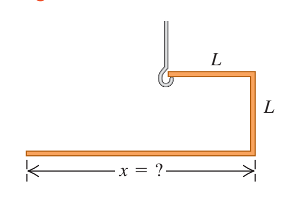
11.45. Una varilla uniforme de 255 N y 2.00 m de longitud carga un peso de 225 N en su extremo derecho, y un peso desconocido W hacia su extremo izquierdo (figura 11.35). Cuando W se coloca a 50.0 cm del extremo izquierdo de la varilla, el sistema se equilibra horizontalmente cuando el fulcro está a 75.0 cm del extremo derecho. *a*) Calcule W. *b*) Si W se mueve ahora 25.0 cm a la derecha, ¿a qué distancia y en que dirección debe moverse el fulcro para restablecer el equilibrio?

Figura 11.35 Problema 11.45.



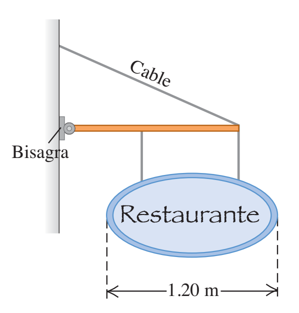
11.46. Una varilla de metal delgada y uniforme se dobla para formar tres segmentos perpendiculares, dos de los cuales tienen longitud L. Usted quiere determinar cuál debería ser la longitud del tercer segmento, de manera que la unidad quede colgando con dos segmentos horizontales cuando se apoye en un gancho, como se indica en la figura 11.36. Calcule x en términos de L.

Figura 11.36 Problema 11.46.



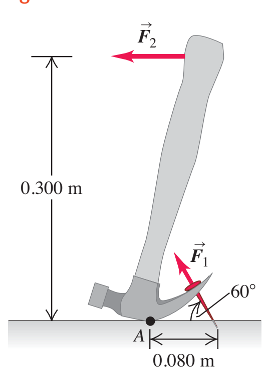
11.47. Suponga que usted inaugura un restaurante y espera atraer a sus clientes colgando un letrero en el exterior (figura 11.37). La viga horizontal uniforme que sostiene el letrero tiene 1.50 m de longitud y masa de 18.0 kg, y está sujeta a la pared mediante una bisagra. El letrero es uniforme con masa de 28.0 kg y longitud de 1.20 m. Los dos alambres que sostienen el letrero tienen una longitud de 32.0 cm cada uno, están separados 90 cm y están igualmente espaciados con respecto al punto medio del letrero. El cable que sostiene la viga tiene 2.00 m de longitud. *a*) ¿Qué tensión mínima debe soportar el cable sin que se caiga el letrero? *b*) ¿Qué fuerza vertical mínima debe soportar la bisagra sin salirse de la pared?

Figura 11.37 Problema 11.47.



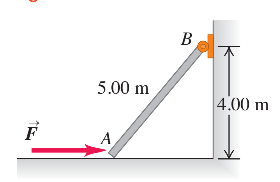
11.48. Se usa un martillo de uña para sacar un clavo de una tabla (figura 11.38). El clavo forma un ángulo de 60° con la tabla, y se necesita una fuerza $\vec{F}_1$ de 500 N aplicada al clavo para sacarlo. La cabeza del martillo toca la tabla en el punto A, que está a 0.080 m de donde el clavo entra en la tabla. Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}_2$ al mango del martillo a una altura de 0.300 m sobre la tabla. ¿Qué magnitud debe tener $\vec{F}_2$ para aplicar al clavo la fuerza requerida de 500 N (F_1)? (Se puede despreciar el peso del martillo.)

Figura 11.38 Problema 11.48.



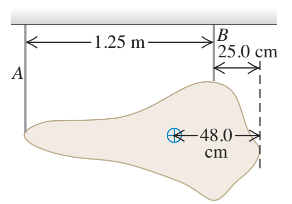
11.49. El extremo A de la barra AB de la figura 11.39 descansa en una superficie horizontal sin fricción, y el extremo B tiene una articulación. Se ejerce en A una fuerza horizontal $\vec{F}$ de magnitud 120 N. Desprecie el peso de la barra. Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la barra sobre la articulación en B.

Figura 11.39 Problema 11.49.



11.50. Un museo de arte moderno está exhibiendo una escultura irregular de 358 N que cuelga de dos alambres verticales delgados, A y B, que están separados 1.25 m (figura 11.40). El centro de gravedad de esta pieza de arte se localiza a 48.0 cm de su punta derecha extrema. Encuentre la tensión en cada alambre.

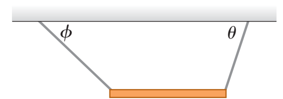
Figura 11.40 Problema 11.50.



11.51. Una viga de masa M y longitud L se apoya horizontalmente en sus extremos mediante dos cables que forman ángulos θ y ϕ con el techo horizontal (figura 11.41). *a*) Demuestre que si la viga es uniforme, estos dos ángulos deben ser iguales y que las tensiones en los cables

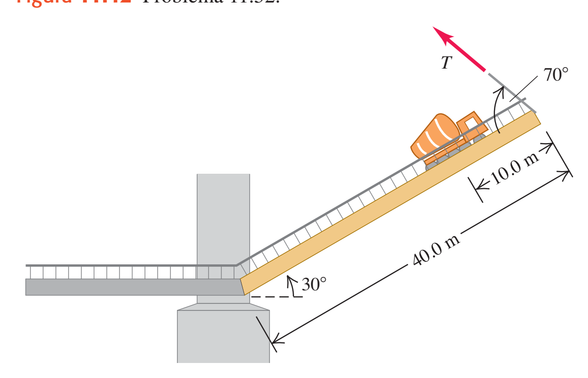
también deben ser iguales. *b*) Suponga ahora que el centro de gravedad está a $3L/4$ del extremo izquierdo de la viga. Demuestre que los ángulos no son completamente independientes sino que deben obedecer la ecuación $\tan\theta = 3\tan\phi$.

Figura 11.41 Problema 11.51.



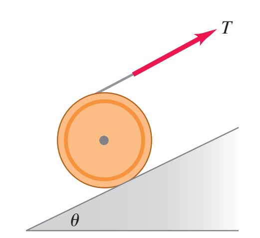
11.52. Camión en puente levadizo. Una revolvedora de cemento cargada entra en un viejo puente levadizo, se descompone y se detiene con su centro de gravedad a tres cuartos del claro del puente. El conductor solicita ayuda por radio, pone el freno de mano y espera. Mientras tanto, se acerca un barco, así que el puente se levanta mediante un cable sujeto al extremo opuesto a la articulación (figura 11.42). El puente levadizo mide 40.0 m a lo largo y tiene una masa de 12,000 kg; el centro de gravedad está en su punto medio. La revolvedora, junto con su conductor, tiene una masa de 30,000 kg. Cuando el puente se eleva formando un ángulo de 30° con la horizontal, el cable forma un ángulo de 70° con la superficie del puente. *a*) ¿Qué tensión T hay en el cable cuando el puente se sostiene en esta posición? *b*) Calcule las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la articulación ejerce sobre el puente.

Figura 11.42 Problema 11.52.



11.53. Un cilindro sólido uniforme de masa M se apoya sobre una rampa que se eleva con un ángulo θ por encima de la horizontal, mediante un alambre que se enrolla alrededor de su borde y tira de él tangencial y paralelamente a la rampa (figura 11.43). *a*) Demuestre que *debe* haber fricción en la superficie para que el cilindro se equilibre de esta manera. *b*) Demuestre que la tensión en el alambre debe ser igual a la fuerza de fricción y calcule esta tensión.

Figura 11.43 Problema 11.53.

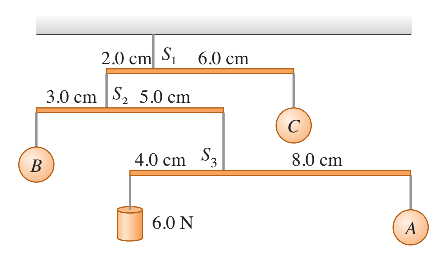


11.54. Una escalera de emergencia no uniforme tiene 6.0 m de longitud cuando se extiende al suelo congelado de un callejón. En su parte superior, la escalera está sujeta por un pivote sin fricción, y el suelo ejerce una fuerza de fricción despreciable en la base. La escalera pesa 250 N y su centro de gravedad está a 2.0 m de la base sobre la escalera. Una madre junto con su hijo pesan juntos 750 N y están en la escalera a 1.5 m del pivote. La escalera forma un ángulo θ con la horizontal. Calcule la magnitud y la dirección de: *a*) la fuerza ejercida por el suelo congelado sobre la escalera, *b*) la fuerza ejercida por la escalera sobre el pivote. *c*) ¿Sus respuestas a los incisos *a*) y *b*) dependen del ángulo θ?

11.55. Un puntal uniforme de masa m forma un ángulo θ con la horizontal; está sostenido por un pivote sin fricción situado a un tercio de su longitud con respecto a su extremo inferior izquierdo, y por una cuerda horizontal en su extremo superior derecho. Un cable y un paquete con peso total w cuelgan del extremo superior derecho. *a*) Calcule las componentes vertical y horizontal V y H de la fuerza que el pivote aplica al puntal, así como la tensión T en la cuerda. *b*) Si la tensión segura máxima en la cuerda es de 700 N y la masa del puntal es de 20.0 kg, calcule el peso seguro máximo del cable y el paquete, cuando el puntal forma un ángulo de 55.0° con la horizontal. *c*) ¿Con qué ángulo θ no puede suspenderse con seguridad ningún peso del extremo derecho del puntal?

11.56. Le piden diseñar el móvil decorativo que se muestra en la figura 11.44. Los hilos y varillas tienen peso despreciable, y las varillas deben colgar horizontales. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada varilla. *b*) Calcule los pesos de las esferas A, B y C. Calcule las tensiones en los alambres S_1, S_2 y S_3. *c*) ¿Qué puede decir acerca de la ubicación horizontal del centro de gravedad del móvil? Explique su respuesta.

Figura 11.44 Problema 11.56.

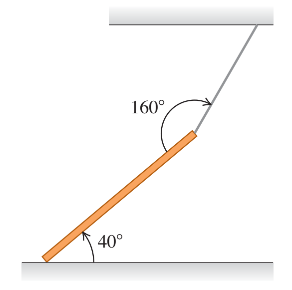


11.57. Una viga uniforme de 7.5 m de longitud y 9000 N de peso está unida por una rótula a una pared y sostenida por un cable delgado, sujeto a un punto que está a 1.5 m del extremo libre de la viga. El cable corre entre la pared y la viga, y forma un ángulo de 40° con esta última. Calcule la tensión en el cable cuando la viga está 30° arriba de la horizontal.

11.58. Un puente levadizo uniforme debe sostenerse con un ángulo de 37° sobre la horizontal para que los barcos puedan pasar por abajo. El puente pesa 45,000 N y tiene una longitud de 14.0 m. Hay un cable conectado a un punto que está a 3.5 m de la rótula donde el puente pivotea (medidos a lo largo del puente), y ejerce una tracción horizontal sobre el puente para mantenerlo fijo. *a*) Calcule la tensión en el cable. *b*) Determine la magnitud y la dirección de la fuerza que la rótula ejerce sobre el puente.

11.59. Una viga uniforme de 250 kg se sostiene con un cable unido al techo, como muestra la figura 11.45. El extremo inferior de la viga descansa en el piso. *a*) Calcule la tensión en el cable. *b*) ¿Qué coeficiente de fricción estática mínimo debe haber entre la viga y el piso para que la viga permanezca en esta posición?

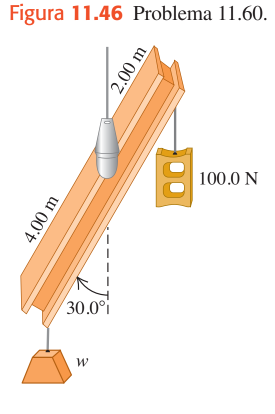
Figura 11.45 Problema 11.59.



11.60. *a*) En la figura 11.46a, una viga uniforme de 6.00 m de longitud cuelga de un punto 1.00 m a la derecha de su centro. La viga pesa 140 N y forma un ángulo de 30.0°

con la vertical. Del extremo derecho de la viga cuelga un peso de 100 N; un peso desconocido w cuelga del otro extremo. Si el sistema está en equilibrio, ¿cuánto vale w? Puede ignorar el espesor de la viga. *b*) Si el ángulo es de 45.0° en vez de 30.0°, ¿cuánto vale w?

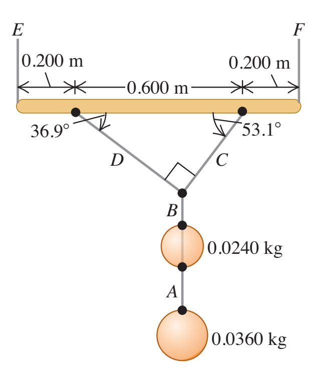
Figura 11.46 Problema 11.60.



11.61. El asta de una bandera uniforme horizontal de 5.00 m de longitud y peso de 200 N pivotea en una pared vertical en un extremo, y una acróbata de 600 N cuelga del otro extremo. El asta es sostenida por un alambre que va de su extremo exterior a un punto en la pared directamente arriba del asta. *a*) Si la tensión en el alambre no debe exceder 1000 N, ¿a qué altura mínima sobre el asta puede fijarse el alambre en la pared? *b*) Si el asta permanece horizontal, ¿cuántos newtons aumentaría la tensión si el alambre se sujetara 0.50 m debajo de ese punto?

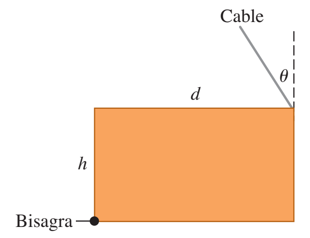
11.62. Un adorno consiste en dos esferas de cristal relucientes con masas de 0.0240 kg y 0.0360 kg suspendidas, como en la figura 11.47, de una varilla uniforme con masa de 0.120 kg y longitud de 1.00 m. La varilla se cuelga del techo con un cordón vertical en cada extremo, quedando horizontal. Calcule la tensión en los cordones *A* a *F*.

Figura 11.47 Problema 11.62.



11.63. Una placa rectangular uniforme con ancho d, altura h y peso W se apoya con sus bordes superior e inferior horizontales (figura 11.18). En la esquina inferior izquierda hay una bisagra y en la esquina superior derecha hay un cable. *a*) Para qué ángulo θ con la vertical la tensión en el cable será mínima y cuál es esa tensión? *b*) Con las condiciones del inciso *a*), encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza que la bisagra ejerce sobre la placa.

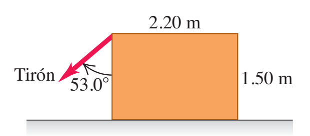
Figura 11.48 Problema 11.63.



11.64. Cuando estiramos un alambre, cuerda o banda de hule, se adelgaza además de alargarse. Si se cumple la ley de Hooke, la reducción fraccionaria de anchura es proporcional a la deformación por tensión. Si w_0 es la anchura original y Δw es el cambio de anchura, entonces $\Delta w/w_0 = -\sigma\Delta l/l_0$, donde el signo menos nos recuerda que la anchura disminuye al aumentar la longitud. La constante adimensional σ, característica del material, es la *razón de Poisson*. *a*) Si la varilla de acero del ejemplo 11.5 (sección 11.4) tiene sección circular y tasa de Poisson de 0.23, ¿cómo cambia su diámetro cuando el torno se cuelga de él? *b*) Un cilindro hecho de níquel (razón de Poisson = 0.42) tiene 2.0 cm de radio. ¿Qué tensión $F_{\perp}$ debe aplicarse perpendicular a cada extremo del cilindro para que el radio disminuya en 0.10 mm? Suponga que el esfuerzo de rotura y el límite proporcional del metal son muy grandes y no se exceden.

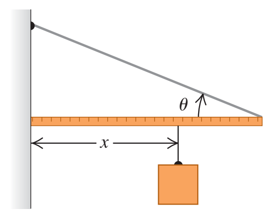
11.65. Un trabajador quiere darle la vuelta a una caja rectangular uniforme de 1250 N tirando a 53.0° sobre uno de sus lados verticales (figura 11.49). El piso es lo suficientemente áspero para evitar que la caja se deslice. *a*) ¿Qué tirón se requiere para que la caja se empiece a inclinar? *b*) ¿Qué tan fuerte empuja el piso sobre la caja? *c*) Obtenga la fuerza de fricción sobre la caja. *d*) ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática se necesita para evitar que la caja se deslice por el piso?

Figura 11.49 Problema 11.65.



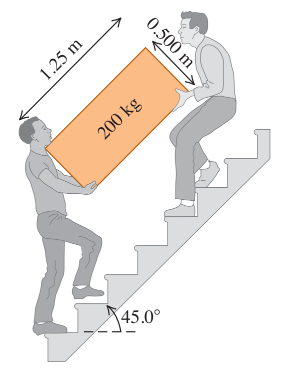
11.66. Un extremo de un metro uniforme se coloca contra una pared vertical (figura 11.50); el otro extremo se sostiene con un cordón ligero que forma un ángulo θ con el metro. El coeficiente de fricción estática entre el extremo del metro y la pared es de 0.40. *a*) ¿Qué valor máximo puede tener el ángulo θ si el metro debe permanecer en equilibrio? *b*) Sea θ = 15°. Un bloque que pesa lo mismo que el metro se suspende de él, a una distancia x de la pared. ¿Qué valor mínimo de x permite al metro seguir en equilibrio? *c*) Si θ = 15°, ¿qué valor debe tener el coeficiente de fricción estática para que el bloque pueda suspenderse a 10 cm del extremo izquierdo del metro sin que éste resbale?

Figura 11.50 Problema 11.66.



11.67. Dos amigos suben un tramo de escalera cargando una caja de 200 kg. La caja mide 1.25 m de longitud y 0.500 m de altura, y el centro de gravedad está en su centro. Las escaleras forman un ángulo de 45.0° con respecto al piso. La caja también se carga inclinada 45.0°, de modo que su base esté paralela a la pendiente de las escaleras (figura 11.51). Si

Figura 11.51 Problema 11.67.



la fuerza que cada persona aplica es vertical, ¿qué magnitud tiene cada fuerza? ¿Es mejor ser la persona de arriba o la de abajo?

11.68. Antebrazo. En el brazo humano, el antebrazo y la mano pivotean en torno a la articulación del codo. Considere un modelo simplificado donde el músculo bíceps está unido al antebrazo a 3.80 cm del codo. Suponga que la mano y el antebrazo juntos pesan 15.0 N y que su centro de gravedad está a 15.0 cm del codo (menos de la mitad de la distancia a la mano). El antebrazo se mantiene en posición horizontal formando un ángulo recto con el brazo, y el bíceps ejerce su fuerza en dirección perpendicular al antebrazo. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el antebrazo y determine la fuerza ejercida por el bíceps cuando la mano está vacía. *b*) Ahora la persona sostiene una pesa de 80.0 N en la mano, manteniendo horizontal el antebrazo. Suponga que el centro de gravedad de esta pesa está a 33.0 cm del codo. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para el antebrazo y determine la fuerza que ahora ejerce el bíceps. Explique por qué el bíceps necesita ser muy fuerte. *c*) En las condiciones del inciso *b*), determine la magnitud y dirección de la fuerza que la articulación del codo ejerce sobre el antebrazo. *d*) Sosteniendo la pesa de 80.0 N, la persona levanta el antebrazo hasta que forma un ángulo de 53.0° con la horizontal. Si el bíceps sigue ejerciendo su fuerza perpendicularmente al antebrazo, ¿qué magnitud tiene la fuerza cuando el antebrazo está en esta posición? ¿La fuerza aumentó o disminuyó con respecto a su valor en el inciso *b*)? Explique esto y compruebe su respuesta haciendo la prueba con su propio antebrazo.

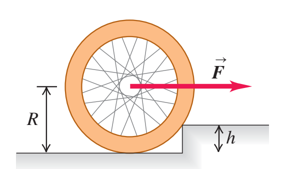
11.69. Repase el ejemplo 11.4 donde se sostiene una mancuerna. El peso máximo que puede sostenerse de esa manera está limitado por la tensión máxima permisible T en el tendón (determinada por la resistencia de los tendones) y por la distancia D entre el codo y el punto de sujeción del tendón al antebrazo. *a*) Representaremos con $T_{\text{máx}}$ el valor máximo de la tensión del tendón. Use los resultados del ejemplo 11.4 para expresar $w_{\text{máx}}$ (el peso máximo que se puede sostener) en términos de $T_{\text{máx}}$, L, D y h. Sus expresiones *no* deberán incluir el ángulo θ. *b*) Los tendones de diferentes primates se unen al antebrazo con diferentes valores de D. Calcule la derivada de $w_{\text{máx}}$ con respecto a D y determine si la derivada es positiva o negativa. *c*) Un tendón de chimpancé está unido al antebrazo en un punto más lejos del codo que en el ser humano. Utilice este hecho para explicar por qué el chimpancé tiene brazos más fuertes que el ser humano. (La desventaja es que los chimpancés tienen brazos menos flexibles que las personas.)

11.70. Una mesa uniforme de 90.0 N mide 3.6 m a lo largo, 1.0 m a lo alto y 1.2 m a lo ancho. Se coloca un peso de 1500 N a 0.50 m de un extremo de la mesa, a una distancia de 0.60 m de cada una de las patas de ese lado. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la mesa y calcule la fuerza que cada una de las cuatro patas ejerce sobre el piso.

11.71. Arbotante. *a*) El techo de un edificio simétrico tiene una pendiente de 35.0° sobre la horizontal a cada lado. Si cada lado del techo uniforme pesa 10,000 N, ¿qué fuerza horizontal ejerce el techo sobre el borde superior de la pared, la cual tiende a empujar las paredes hacia afuera? ¿Qué tipo de edificio tendría más probabilidades de derrumbarse, uno con paredes altas o uno con paredes cortas? Explique su respuesta. *b*) Como se vio en el inciso *a*), las paredes altas corren peligro de derrumbarse por el peso del techo. Los antiguos constructores de estructuras grandes enfrentaron este problema. Una solución empleada en las grandes catedrales góticas del siglo XIII fue el arbotante: un soporte de piedra que corría entre las paredes y el suelo, y empujaba las paredes hacia adentro. Una iglesia gótica tiene un techo uniforme que pesa en total 20,000 N y se alza a 40° sobre la horizontal en cada pared. Las paredes tienen 40 m de altura, y un arbotante toca cada pared 10 m abajo de la base del techo. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicar este arbotante a la pared?

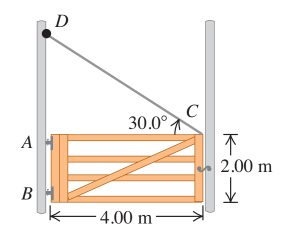
11.72. Imagine que está tratando de subir una rueda de bicicleta de masa m y radio R a una acera de altura h; para ello, aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ (figura 11.52). ¿Qué magnitud mínima de $\vec{F}$ logra subir la rueda, si la fuerza se aplica *a*) al centro de la rueda? *b*) ¿Y en la parte superior de la rueda? *c*) ¿En cuál caso se requiere menos fuerza?

Figura 11.52 Problema 11.72.



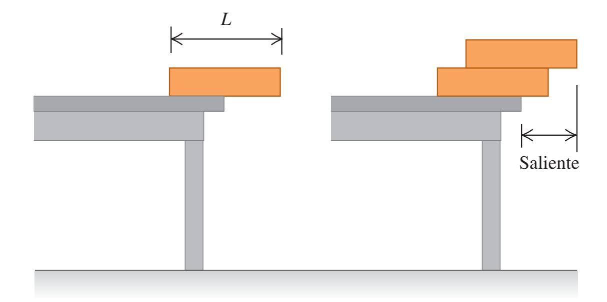
11.73. La puerta del corral. Una puerta de 4.00 m de anchura y 2.00 m de altura pesa 500 N; su centro de gravedad está en su centro, y tiene bisagras en A y B. Para aliviar la deformación en la bisagra superior, se instala el alambre CD (figura 11.53). La tensión en CD se aumenta hasta que la fuerza horizontal en la bisagra A es cero. *a*) ¿Qué tensión hay en el alambre CD? *b*) ¿Qué magnitud tiene la componente horizontal de la fuerza en la bisagra B? *c*) ¿Qué fuerza vertical combinada ejercen las bisagras A y B?

Figura 11.53 Problema 11.73.



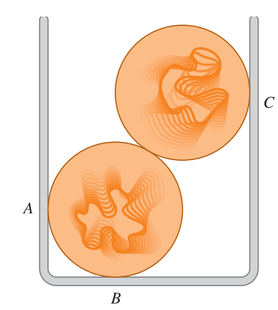
11.74. Si colocamos un bloque uniforme en el borde de una mesa, el centro del bloque debe estar sobre la mesa para que el bloque no caiga. *a*) Si apilamos dos bloques idénticos en el borde de la mesa, el centro del bloque superior debe estar sobre el bloque inferior, y el centro de gravedad de los bloques juntos debe estar sobre la mesa. En términos de la longitud L de cada bloque, ¿cuál es la máxima saliente posible (figura 11.54)? *b*) Repita el inciso anterior para tres y cuatro bloques idénticos. *c*) ¿Es posible apilar bloques de modo que el de arriba no esté directamente sobre la mesa? ¿Cuántos bloques serían necesarios? (Inténtelo con sus amigos, usando copias de éste libro.)

Figura 11.54 Problema 11.74.



11.75. Dos canicas uniformes de 75.0 g y 2.00 cm de diámetro se apilan como se muestra en la figura 11.55, en un recipiente de 3.00 cm de anchura. *a*) Calcule la fuerza que el recipiente ejerce sobre las canicas en los puntos de contacto A, B y C. *b*) ¿Qué fuerza ejerce cada canica sobre la otra?

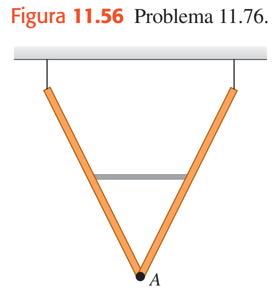
Figura 11.55 Problema 11.75.



11.76. Dos vigas uniformes idénticas que pesan 260 N cada una están unidas por un extremo con una bisagra sin fricción. Una barra

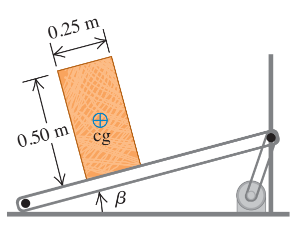
horizontal ligera unida a los puntos medios de las vigas mantiene un ángulo de 53.0° entre las vigas, las cuales cuelgan del techo mediante alambres verticales, formando una "V" (figura 11.56). *a*) ¿Qué fuerza ejerce la barra horizontal sobre cada viga? *b*) ¿La barra horizontal está sometida a tensión o a compresión? *c*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce la bisagra *A* sobre cada viga?

Figura 11.56 Problema 11.76.



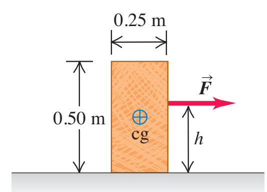
11.77. Un ingeniero está diseñando un sistema transportador para cargar pacas de paja en un carro (figura 11.57). Las pacas miden 0.25 m a lo ancho, 0.50 m a lo alto y 0.80 m a lo largo (la dimensión perpendicular al plano de la figura), con masa de 30.0 kg y su centro de gravedad en el centro geométrico. El coeficiente de fricción estática entre una paca y la banda transportadora es de 0.60, y la banda se mueve con rapidez constante. *a*) El ángulo β del transportador se aumenta lentamente. En cierto ángulo crítico, las pacas se volcarán (si no se deslizan antes), y en otro ángulo crítico distinto resbalarán (si no se vuelcan antes). Calcule los dos ángulos críticos y determine qué sucede en el ángulo más pequeño. *b*) ¿Sería diferente el resultado del inciso *a*) si el coeficiente de fricción fuera 0.40?

Figura 11.57 Problema 11.77.



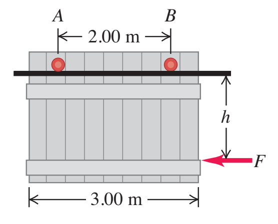
11.78. La paca del problema 11.77 es arrastrada sobre una superficie horizontal con rapidez constante por una fuerza $\vec{F}$ (figura 11.58). El coeficiente de fricción cinética es de 0.35. *a*) Calcule la magnitud de $\vec{F}$. *b*) Determine el valor de *h* con el cual la paca apenas comenzará a volcarse.

Figura 11.58 Problema 11.78.



11.79. Una puerta de cochera está montada en un riel superior (figura 11.59). Las ruedas en *A* y *B* se oxidaron, de modo que no ruedan, sino que se deslizan sobre el riel. El coeficiente de fricción cinética es de 0.52. La distancia entre las ruedas es de 2.00 m, y cada una está a 0.50 m del borde vertical de la puerta. La puerta es uniforme y pesa 950 N. Una fuerza horizontal $\vec{F}$ la empuja a la izquierda con rapidez constante. *a*) Si la distancia *h* es de 1.60 m, ¿qué componente vertical de fuerza ejerce el riel sobre cada rueda? *b*) Calcule el valor máximo que *h* puede tener para que una rueda no se levante del riel.

Figura 11.59 Problema 11.79.

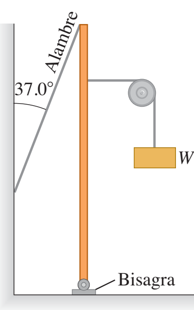


11.80. Un aguilón horizontal se apoya en su extremo izquierdo en un pivote sin fricción y se fija con un cable unido al extremo derecho. Una cadena y una caja con peso total *w* cuelgan de algún punto del aguilón. El peso del aguilón w_b no puede despreciarse, y el aguilón podría ser uniforme o no. *a*) Demuestre que la tensión en el cable es la misma si éste forma un ángulo θ o uno de $180° - \theta$ con la horizontal, y que la componente de fuerza horizontal ejercida sobre el aguilón por el pivote tiene la misma magnitud pero dirección opuesta con esos dos ángulos. *b*) Demuestre que el cable no puede ser horizontal. *c*) Demuestre que la tensión en el cable es mínima cuando el cable es vertical, tirando hacia arriba del extremo derecho del aguilón. *d*) Demuestre que, si el cable es vertical, la fuerza ejercida por el pivote sobre el aguilón es vertical.

11.81. Antes de colocarse en su agujero, un poste uniforme de 5700 N y 9.0 m de longitud forma cierto ángulo distinto de cero con la vertical. Un cable vertical unido 2.0 m debajo del extremo superior del poste lo mantiene fijo con su base apoyada en el suelo. *a*) Calcule la tensión en el cable, así como la magnitud y dirección de la fuerza ejercida por el suelo sobre el poste. *b*) ¿Por qué no necesitamos el ángulo que el poste forma con la vertical, en tanto no sea cero?

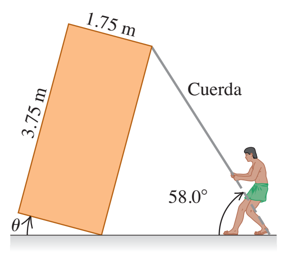
11.82. Un peso *W* se sostiene unido a un poste metálico vertical y uniforme, mediante un cordón ligero que pasa por una polea, cuyas masa y fricción son despreciables. El cordón está unido al poste 40.0 cm debajo de la parte superior y tira horizontalmente de él (figura 11.60). El poste pivotea alrededor de una bisagra en su base, tiene 1.75 m de altura y pesa 55.0 N. Un alambre delgado conecta la parte superior del poste con una pared vertical. El clavo que une este alambre a la pared se saldrá si una fuerza *hacia fuera* mayor que 22.0 N actúa sobre él. *a*) ¿Cuál es el peso máximo *W* que puede soportarse de esta forma sin que se salga el clavo? *b*) ¿Cuál es la *magnitud* de la fuerza que la bisagra ejerce sobre el poste?

Figura 11.60 Problema 11.82.



11.83. Constructores de pirámides. Antiguos constructores de pirámides equilibran una losa de piedra rectangular y uniforme inclinándola a un ángulo θ por encima de la horizontal y usando una cuerda (figura 11.61). Cinco trabajadores sostienen la cuerda compartiendo fuerzas iguales. *a*) Si $\theta = 20.0°$, ¿qué fuerza ejerce cada trabajador sobre la cuerda? *b*) Al aumentar θ, ¿cada trabajador tiene que ejercer más o menos fuerza que en el inciso *a*) suponiendo que no cambian el ángulo de la cuerda? ¿Por qué? *c*) ¿En qué ángulo los trabajadores ya no deben ejercer ninguna fuerza para equilibrar la losa? ¿Qué sucede si θ excede este valor?

Figura 11.61 Problema 11.83.



11.84. La ley de Hooke para un alambre. Un alambre de longitud l_0 y área transversal A sostiene un peso W que cuelga. *a*) Demuestre que si el cable obedece la ecuación (11.7), se comporta como resorte de fuerza constante AY/l_0, donde Y es el módulo de Young para el material de que está hecho el cable. *b*) ¿Cuál sería la constante de fuerza para un alambre de cobre de 75.0 cm de longitud y de calibre 16 (diámetro = 1.291 mm)? Véase la tabla 11.1. *c*) ¿Cuál tendría que ser W para que el alambre del inciso *b*) se estirara 1.25 m?

11.85. Una masa de 12.0 kg sujeta al extremo de un alambre de aluminio con longitud sin estirar de 0.50 m gira en círculo vertical, con rapidez angular constante de 120 rev/min. El área transversal del alambre es de 0.014 cm^2. Calcule el alargamiento del alambre cuando la masa está *a*) en el punto más bajo de la trayectoria y *b*) en el punto más alto de la trayectoria.

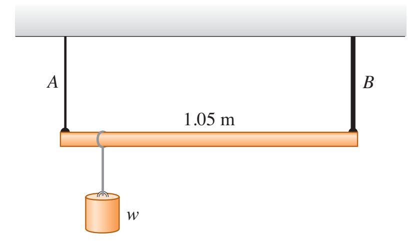
11.86. Un alambre metálico de 3.50 m de longitud y 0.70 mm de diámetro se sometió a esta prueba: se colgó de él un peso original de 20 N para tensarlo, y se leyó en una escala la posición del extremo inferior del alambre después de agregar una carga.

Carga agregada (N)	Lectura en la escala (cm)
0	3.02
10	3.07
20	3.12
30	3.17
40	3.22
50	3.27
60	3.32
70	4.27

a) Grafique el aumento de longitud en el eje horizontal y la carga agregada en el eje vertical. *b*) Calcule el valor del módulo de Young. *c*) El límite proporcional se observó cuando la escala marcaba 3.34 cm. Determine el esfuerzo en ese punto.

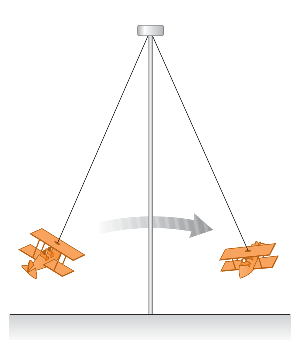
11.87. Una varilla de 1.05 m de longitud con peso despreciable está sostenida en sus extremos por alambres A y B de igual longitud (figura 11.62). El área transversal de A es de 2.00 mm^2, y la de B, 4.00 mm^2. El módulo de Young del alambre A es de 1.80×10^{11} Pa; el de B, 1.20×10^{11} Pa. ¿En qué punto de la varilla debe colgarse un peso w con la finalidad de producir: *a*) esfuerzos iguales en A y B? *b*) ¿Y deformaciones iguales en A y B?

Figura 11.62 Problema 11.87.



11.88. Un juego de feria (figura 11.63) consiste en pequeños aviones unidos a varillas de acero de 15.0 m de longitud y área transversal de 8.00 cm^2. *a*) ¿Cuánto se estira la varilla cuando el juego está en reposo? (Suponga que cada avión con dos personas en él pesa 1900 Newton en total.) *b*) En movimiento, el juego tiene una rapidez angular máxima de 8.0 rev/min. ¿Cuánto se estira la varilla entonces?

Figura 11.63 Problema 11.88.



11.89. Una varilla de latón de 1.40 m de longitud y área transversal de 2.00 cm^2 se sujeta por un extremo al extremo de una varilla de níquel de longitud L y área transversal de 1.00 cm^2. La varilla compuesta se somete a fuerzas iguales y opuestas de 4.00×10^4 N en sus extremos. *a*) Calcule la longitud L de la varilla de níquel, si el alargamiento de ambas varillas es el mismo. *b*) ¿Qué esfuerzo se aplica a cada varilla? *c*) ¿Qué deformación sufre cada varilla?

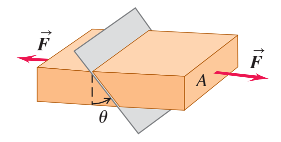
11.90. Esfuerzo en la espinilla. La resistencia a la compresión de nuestros huesos es importante en la vida diaria. El módulo de Young de los huesos es cerca de 1.4×10^{10} Pa. Los huesos sólo pueden sufrir un cambio de longitud del 1.0% antes de romperse. *a*) ¿Qué fuerza máxima puede aplicarse a un hueso con área transversal mínima de 3.0 cm^2? (Esto corresponde aproximadamente al área transversal de la tibia, o espinilla, en su punto más angosto.) *b*) Estime la altura máxima desde la que puede saltar un hombre de 70 kg sin fracturarse la tibia. Suponga que el lapso entre que la persona toca el piso y que se detiene es de 0.030 s, y que el esfuerzo se distribuye igualmente entre las dos piernas.

11.91. Se cuelga una lámpara del extremo de un alambre vertical de aluminio. La lámpara estira el alambre 0.18 mm, y el esfuerzo es proporcional a la deformación. ¿Cuánto se habría estirado el alambre: *a*) si tuviera el doble de longitud? *b*) ¿Si tuviera la misma longitud pero el doble de diámetro? *c*) ¿Si fuera de cobre con la longitud y diámetro originales?

11.92. Un contrabandista produce etanol (alcohol etílico) puro durante la noche y lo almacena en un tanque de acero inoxidable cilíndrico de 0.300 m de diámetro con un pistón hermético en la parte superior. El volumen total del tanque es de 250 L (0.250 m^3). En un intento por meter un poco más en el tanque, el contrabandista apila 1420 kg de lingotes de plomo sobre el pistón. ¿Qué volumen adicional de etanol puede meter el contrabandista en el tanque? (Suponga que la pared del tanque es perfectamente rígida.)

11.93. Una barra con área transversal A se somete a fuerzas de tensión $\vec{F}$ iguales y opuestas en sus extremos. Considere un plano que atraviesa la barra formando un ángulo θ con el plano perpendicular a la barra (figura 11.64). *a*) ¿Qué esfuerzo de tensión (normal) hay en este plano en términos de F, A y θ? *b*) ¿Qué esfuerzo de corte (tangencial) hay en el plano en términos de F, A y θ? *c*) ¿Para qué valor de θ es máximo el esfuerzo de tensión? *d*) ¿Y el de corte?

Figura 11.64 Problema 11.93.

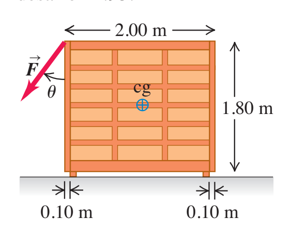


11.94. Una varilla horizontal uniforme de cobre tiene longitud inicial l_0, área transversal A, módulo de Young Y y masa m; está sostenida por un pivote sin fricción en su extremo derecho y por un cable en el izquierdo. Tanto el pivote como el cable se sujetan de modo que ejercen sus fuerzas uniformemente sobre la sección transversal de la varilla. El cable forma un ángulo ρ con la varilla y la comprime. *a*) Calcule el esfuerzo ejercido por el cable y el pivote sobre la varilla. *b*) Determine el cambio de longitud de la varilla causado por ese esfuerzo. *c*) La masa de la varilla es $\rho A l_0$, donde ρ es la densidad. Demuestre que las respuestas a los incisos *a*) y *b*) son independientes del área transversal de la varilla. *d*) La densidad del cobre es de 8900 kg/m^3. Use el Y (módulo de Young) para compresión del cobre dado en la tabla 11.1. Calcule el esfuerzo y el cambio de longitud para una longitud original de 1.8 m y un ángulo de 30°. *e*) ¿Por cuánto multiplicaría las respuestas del inciso *d*) si la varilla fuera dos veces más larga?

Problemas de desafío

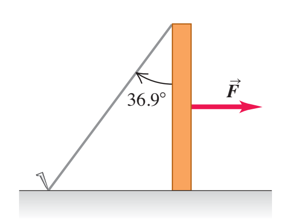
11.95. Un librero que pesa 1500 N descansa en una superficie horizontal donde el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.40$. El librero tiene 1.80 m de altura y 2.00 m de anchura, con su centro de gravedad en su centro geométrico, y descansa en cuatro patas cortas que están a 0.10 m del borde del librero. Una persona tira de una cuerda atada a una esquina superior del librero con una fuerza $\vec{F}$, la cual forma un ángulo θ con el librero (figura 11.65). *a*) Si $\theta = 90°$, de modo que $\vec{F}$ sea horizontal, demuestre que, al aumentar F desde cero, el librero comenzará a resbalar antes de inclinarse, y calcule la magnitud de $\vec{F}$ que hará que el librero comience a deslizarse. *b*) Si $\theta = 0°$, de modo que $\vec{F}$ es vertical, demuestre que el librero se volcará en vez de deslizarse, y calcule la magnitud de $\vec{F}$ que hará que el librero comience a volcarse. *c*) Calcule, en función de θ, la magnitud de $\vec{F}$ que hará que el librero comience a deslizarse y la $\vec{F}$ que hará que comience a volcarse. ¿Qué valor mínimo de θ hará que el librero comience a deslizarse antes de inclinarse?

Figura 11.65 Problema de desafío 11.95.



11.96. Tumbar un poste. Un extremo de un poste de altura h que pesa 400 N descansa en una superficie horizontal áspera ($\mu_s = 0.30$). El extremo superior se sujeta con una cuerda fijada a la superficie que forma un ángulo de 36.9° con el poste (figura 11.66). Se ejerce una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre el poste como se muestra. *a*) Si $\vec{F}$ se aplica en el punto medio del poste, ¿qué valor máximo puede tener sin hacer que el poste resbale? *b*) ¿Y si el punto de aplicación está $\frac{6}{10}$ de la longitud del poste desde la base? *c*) Demuestre que si el punto de aplicación de la fuerza está a suficiente altura, no puede hacerse que el poste resbale, por más grande que sea la fuerza. Calcule esta altura crítica.

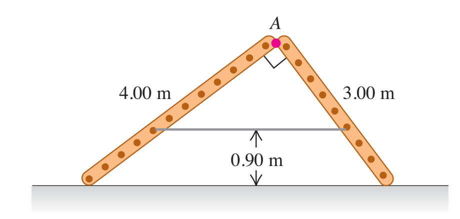
Figura 11.66 Problema de desafío 11.96.



11.97. Reducción de la tensión al mínimo. Varios objetos cuelgan de una pesada viga horizontal de longitud L apoyada en un pivote sin fricción en su extremo izquierdo y en un cable de peso despreciable atado a la viga en I en un punto a una distancia h directamente arriba del centro de la viga. ¿Dónde debe atarse el otro extremo del cable a la viga, de modo que la tensión en el cable sea mínima? (*Sugerencia*: al evaluar y presentar su respuesta, no olvide que la distancia máxima que puede haber entre el punto de sujeción y el pivote es la longitud L de la viga.)

11.98. Dos escaleras, de 4.00 m y 3.00 m de longitud, tienen una bisagra en el punto A y están atadas por una cuerda horizontal 0.90 m arriba del piso (figura 11.67). Las escaleras pesan 480 N y 360 N, respectivamente, y el centro de gravedad de cada una está en su centro. Suponga que el piso está recién encerado y no tiene fricción. *a*) Calcule la fuerza hacia arriba en la base de cada escalera. *b*) Determine la tensión en la cuerda. *c*) Calcule la magnitud de la fuerza que una escalera ejerce sobre la otra en A. *d*) Si un pintor de 800 N se para en A, calcule la tensión en la cuerda horizontal.

Figura 11.67 Problema de desafío 11.98.

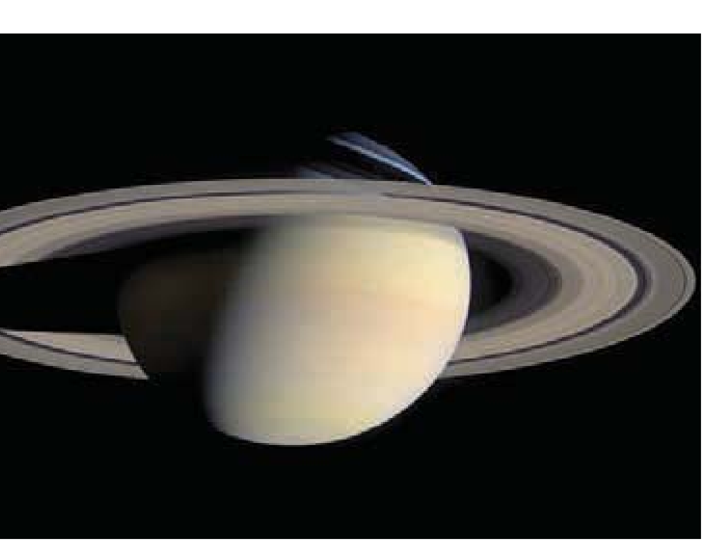


11.99. Un dispositivo para medir la compresibilidad consiste en un cilindro lleno de aceite y provisto de un pistón en un extremo. Un bloque de sodio se sumerge en el aceite y se aplica una fuerza al pistón. Suponga que el pistón y las paredes del cilindro son perfectamente rígidos y que no hay fricción ni fugas de aceite. Calcule la compresibilidad del sodio en términos de la fuerza aplicada F, el desplazamiento del pistón x, el área del pistón A, el volumen inicial del aceite V_O, el volumen inicial del sodio V_S y la compresibilidad del aceite, k_O.

11.100. Módulo de volumen de un gas ideal. La ecuación de estado (la que relaciona la presión, el volumen y la temperatura) de un gas ideal es $pV = nRT$, donde n y R son constantes. *a*) Demuestre que si el gas se comprime mientras la temperatura T se mantiene constante, el módulo de volumen es igual a la presión. *b*) Si un gas ideal se comprime sin que se transfiera calor desde o hacia él, la presión y el volumen están relacionados por pV^{γ} = constante, donde γ es una constante que tiene diferentes valores para diferentes gases. Demuestre que, en este caso, el módulo de volumen está dado por $B = \gamma p$.

11.101. Un pescador cuelga verticalmente un pez de 4.50 kg de un alambre de acero de 1.50 m de longitud y área transversal de 5.00×10^{-3} cm^2. El extremo superior del alambre está bien sujeto a un soporte. *a*) Calcule cuánto se estira el alambre por el peso del pez. Ahora el pescador aplica una fuerza $\vec{F}$ al pez, tirando lentamente de él hacia abajo y moviéndolo 0.500 mm con respecto a su posición de equilibrio. Para este movimiento hacia abajo, calcule *b*) el trabajo efectuado por la gravedad; *c*) el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$; *d*) el trabajo efectuado por la fuerza que el alambre ejerce sobre el pez y *e*) el cambio de energía potencial elástica (la energía potencial asociada al esfuerzo de tensión en el alambre). Compare las respuestas de los incisos *d*) y *e*).

GRAVITACIÓN 12



?Los anillos de Saturno están compuestos de incontables partículas en órbita. ¿Todas las partículas de los anillos orbitan con la misma rapidez, o las partículas interiores orbitan más rápido o más lento que las exteriores?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo calcular las fuerzas gravitacionales que dos cuerpos ejercen uno sobre el otro.
- Cómo se relaciona el peso de un objeto con la expresión general de la fuerza gravitacional.
- Cómo utilizar e interpretar la expresión generalizada para energía potencial gravitacional.
- Cómo se relacionan la rapidez, el periodo orbital y la energía mecánica de un satélite en una órbita circular.
- Las leyes que describen los movimientos de los planetas y cómo trabajar con tales leyes.
- Lo que son los agujeros negros, cómo calcular sus propiedades y cómo se descubren.

Algunas de las primeras investigaciones en el campo de la física nacieron de preguntas que la gente se hacía acerca del firmamento. ¿Por qué no la Luna se cae hacia la Tierra? ¿Por qué los planetas se mueven en el cielo? ¿Y por qué la Tierra no sale despedida hacia el espacio exterior, en vez de permanecer en órbita alrededor del Sol? El estudio de la gravitación responde éstas y muchas otras preguntas relacionadas.

Como enfatizamos en el capítulo 5, la gravitación es una de las cuatro clases de interacciones que observamos en la naturaleza, y fue la primera que se estudió ampliamente. En el siglo XVII, Newton descubrió que la misma interacción que hace a una manzana caer de un árbol mantiene a los planetas en órbita alrededor del Sol. Ése fue el nacimiento de la *mecánica celeste*, es decir, el estudio de la dinámica de los objetos en el espacio. En la actualidad, nuestro conocimiento de la mecánica celeste nos permite determinar cómo poner un satélite en una órbita deseada alrededor de la Tierra o cómo elegir la trayectoria correcta para enviar una nave a otro planeta.

En este capítulo estudiaremos la ley básica que rige las interacciones gravitacionales. Se trata de una ley *universal*: la gravedad actúa fundamentalmente de la misma manera: entre la Tierra y nuestro cuerpo, entre el Sol y un planeta y entre un planeta y sus lunas. Aplicaremos la ley de la gravitación a fenómenos como la variación del peso con la elevación, las órbitas de los satélites terrestres y las de los planetas alrededor del Sol.

12.1 Ley de Newton de la gravitación

El ejemplo de atracción gravitacional que probablemente resulte más conocido para el lector es su *peso*, la fuerza que lo atrae hacia la Tierra. Al estudiar el movimiento de los planetas y la Luna, Newton descubrió el carácter fundamental de la atracción gra-

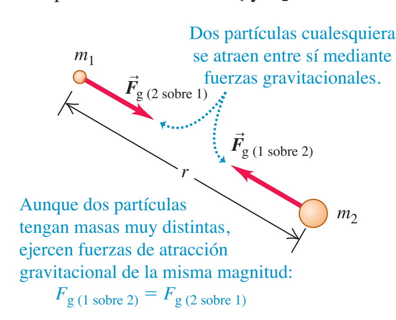
vitacional entre dos cuerpos *cualesquiera.* Junto con sus tres leyes del movimiento, en 1687 Newton publicó la **ley de la gravitación**, que puede enunciarse así:

Toda partícula de materia en el Universo atrae a todas las demás partículas con una fuerza directamente proporcional al producto de las masas de las partículas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Traduciendo esto a una ecuación, tenemos

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad \text{(ley de la gravitación)} \tag{12.1}$$

12.1 Las fuerzas gravitacionales entre dos partículas de masas m_1 y m_2.



donde F_g es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre cualesquiera de las partículas, m_1 y m_2 son sus masas, r es la distancia entre ellas (figura 12.1) y G es una constante física fundamental llamada **constante gravitacional**. El valor numérico de G depende del sistema de unidades empleado.

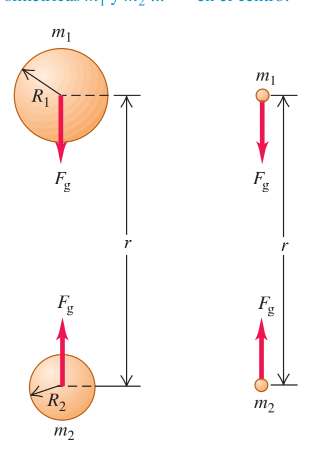
La ecuación (12.1) nos indica que la fuerza gravitacional entre dos partículas disminuye al aumentar la distancia r; por ejemplo, si se duplica la distancia, la fuerza se reducirá a la cuarta parte y así sucesivamente. Aunque muchas estrellas del firmamento tienen una masa mucho mayor que la del Sol, están tan lejos que la fuerza gravitacional que ejercen sobre la Tierra es insignificante.

CUIDADO **No confunda *g* con *G*** Al ser casi iguales los símbolos g y G, es común confundir las dos cantidades gravitacionales diferentes que representan. g minúscula es la aceleración debida a la gravedad, que relaciona el peso w de un cuerpo con su masa m: $w = mg$. El valor de g varía en diferentes puntos de la superficie terrestre y en la superficie de otros planetas. En cambio, G mayúscula relaciona la fuerza gravitacional entre dos cuerpos con sus masas y la distancia entre ellos. Decimos que G es una constante *universal* porque tiene el mismo valor para cualesquiera dos cuerpos, sin importar dónde estén. En la siguiente sección veremos la relación entre g y G.

Las fuerzas gravitacionales siempre actúan sobre la línea que une las dos partículas, y forman un par acción-reacción. Aun si las masas de las partículas difieren, las dos fuerzas de interacción tienen la misma magnitud (figura 12.1). La fuerza de atracción que el cuerpo del lector ejerce sobre la Tierra tiene la misma magnitud que la que la Tierra ejerce sobre el lector. Si caemos de un trampolín a una alberca, ¡toda la Tierra sube hacia nosotros! (No lo notamos porque la masa de la Tierra es unas 10^{23} veces mayor que la de una persona, así que su aceleración es sólo 10^{-23} tan grande como la de la persona.)

12.2 El efecto gravitacional *afuera* de cualquier distribución de masa esféricamente simétrica es igual que si se considera que toda la masa se concentrara en su centro.

a) La fuerza gravitacional entre dos masas esféricamente simétricas m_1 y m_2 ... b) ... es la misma que si toda la masa de cada esfera se concentrara en el centro.



Gravitación y cuerpos esféricamente simétricos

Hemos planteado la ley de la gravitación en términos de la interacción entre dos *partículas*. Resulta que la interacción gravitacional de dos cuerpos con distribuciones de masa *esféricamente simétricas* (como las esferas sólidas o huecas) es la misma que sería si se concentrara toda la masa en el centro, como se muestra en la figura 12.2. Así, si modelamos la Tierra como un cuerpo esférico de masa m_E, la fuerza que ejerce sobre una partícula o un cuerpo esféricamente simétrico con masa m, a una distancia r entre los centros, es

$$F_g = \frac{Gm_Em}{r^2} \tag{12.2}$$

siempre que el cuerpo esté afuera de la Tierra. El cuerpo ejerce una fuerza de la misma magnitud *sobre* la Tierra. (Demostraremos esto en la sección 12.6.)

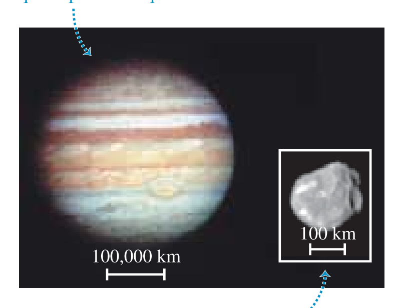
En puntos *dentro* de la Tierra, la situación es diferente. Si pudiéramos taladrar un agujero al centro de la Tierra y medir la fuerza gravitacional a diferentes profundidades, veríamos que *disminuye* hacia el centro, en vez de aumentar según $1/r^2$.

Para un cuerpo colocado dentro de la Tierra se tiene que parte de la masa de la Tierra queda del lado del cuerpo opuesto al centro y actúa en la dirección opuesta. En el centro exacto de la Tierra, la fuerza gravitacional sobre el cuerpo es cero.

Los cuerpos esféricamente simétricos son un caso importante porque las lunas, los planetas y las estrellas tienden a ser esféricos. Puesto que todas las partículas de un cuerpo se atraen gravitacionalmente entre sí, tienden a moverse para reducir al mínimo la distancia que las separa. El resultado es que el cuerpo tiende naturalmente a asumir una forma esférica, como sucede cuando un trozo de arcilla forma una esfera si lo apretamos con fuerzas iguales por todos lados. Este efecto se reduce mucho en los cuerpos celestes de masa baja porque la atracción gravitacional es menor, y estos cuerpos tienden a *no* ser esféricos (figura 12.3).

12.3 Cuerpos esféricos y no esféricos: el planeta Júpiter y una de sus lunas pequeñas, Amaltea.

La masa de Júpiter es muy grande (1.90×10^{27} kg), así que la atracción gravitacional mutua de sus átomos ha hecho que el planeta adquiera una forma casi esférica.



Amaltea, una de las lunas de Júpiter, tiene una masa relativamente insignificante (7.17×10^{18} kg, aproximadamente 3.8×10^{-9} la masa de Júpiter) y su atracción gravitación mutua es débil, por lo que tiene una forma irregular.

Determinación del valor de *G*

Para determinar el valor de la constante de gravitación G, debemos *medir* la fuerza gravitacional entre dos cuerpos de masas conocidas m_1 y m_2 a una distancia conocida r. La fuerza es muy pequeña para cuerpos que caben en un laboratorio, aunque puede medirse con un instrumento llamado *balanza de torsión*, que Sir Henry Cavendish usó en 1798 para determinar G.

En la figura 12.4 se muestra una versión moderna de la balanza de torsión. Una varilla ligera y rígida con forma de T invertida es sostenida por una fibra vertical de cuarzo muy delgada. Dos esferas pequeñas de masa m_1 se montan en los extremos de los brazos horizontales de la T. Si colocamos dos esferas grandes de masa m_2 en las posiciones indicadas, las fuerzas de atracción gravitacionales hacen girar la T un ángulo pequeño. Para medir el ángulo, hacemos incidir un rayo de luz en un espejo sujeto a la T. El haz reflejado incide en una escala; al girar la T, la luz se mueve en la escala.

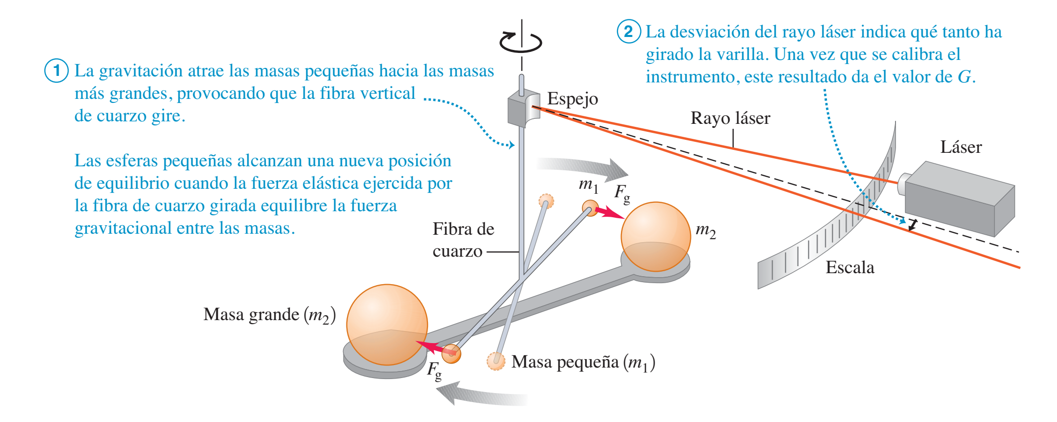
Después de calibrar la balanza de Cavendish, podemos medir las fuerzas gravitacionales y así determinar G. El valor aceptado actualmente (en unidades del SI) es

$$G = 6.6742(10) \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$$

Con tres cifras significativas, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$. Como $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$, las unidades de G también pueden expresarse (en unidades fundamentales del SI) como $\text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$.

Las fuerzas gravitacionales se combinan vectorialmente. Si se tienen dos masas, cada una ellas ejerce una fuerza sobre una tercera, la fuerza *total* que actúa sobre ésta es la resultante de las fuerzas individuales de las dos primeras. El ejemplo 12.3 aprovecha esta propiedad, que se conoce como *superposición de fuerzas*.

12.4 Principio de la balanza de Cavendish, empleada para determinar el valor de G. El ángulo de desviación se exageró por claridad.



Ejemplo 12.1 Cálculo de la fuerza gravitacional

La masa m_1 de una de las esferas pequeñas de una balanza de Cavendish es de 0.0100 kg, la masa m_2 de una de las esferas grandes es de 0.500 kg, y la distancia de centro a centro entre cada esfera grande y la esfera pequeña más cercana es de 0.0500 m. Calcule la fuerza gravitacional F_g que actúa sobre cada esfera debida a la otra esfera más cercana.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como los objetos de 0.0100 kg y 0.500 kg son esféricamente simétricos, podemos calcular la fuerza gravitacional de uno sobre el otro, suponiendo que son partículas que están separadas 0.0500 m. Cada esfera experimenta la *misma* magnitud de fuerza de la otra esfera, incluso cuando sus masas son muy diferentes.

PLANTEAR: Usaremos la ley de la gravitación, ecuación (12.1), para determinar F_g.

EJECUTAR: La magnitud de la fuerza que una esfera ejerce la otra esfera es

$$F_g = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(0.0100\ \text{kg})(0.500\ \text{kg})}{(0.0500\ \text{m})^2}$$
$$= 1.33 \times 10^{-10}\ \text{N}$$

EVALUAR: Ésta es una fuerza muy pequeña, como esperábamos; no sentimos una atracción gravitacional apreciable por los objetos ordinarios de masa pequeña en nuestro entorno. Se requiere un objeto en verdad masivo, como la Tierra, para ejercer una fuerza gravitacional considerable.

Ejemplo 12.2 Aceleración debida a la atracción gravitacional

Suponga que una esfera grande y una pequeña se quitan del aparato del ejemplo 12.1 y se colocan con sus centros separados 0.0500 m en un punto del espacio lejos de otros cuerpos. ¿Qué magnitud tiene la aceleración de cada una, relativa a un sistema inercial?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las fuerzas gravitacionales que las dos esferas ejercen una sobre la otra tienen la misma magnitud. (El sistema de dos esferas en el espacio está tan distante de otros cuerpos que no necesitamos considerar otras fuerzas.) Sin embargo, las *aceleraciones* de las dos esferas son diferentes porque sus masas son diferentes.

PLANTEAR: Ya calculamos la magnitud de la fuerza que actúa sobre cada esfera en el ejemplo 12.1. Usaremos la segunda ley de Newton para determinar la magnitud de la aceleración de cada esfera.

EJECUTAR: La aceleración de la esfera pequeña tiene magnitud de

$$a_1 = \frac{F_g}{m_1} = \frac{1.33 \times 10^{-10}\ \text{N}}{0.0100\ \text{kg}} = 1.33 \times 10^{-8}\ \text{m/s}^2$$

La aceleración de la esfera mayor tiene magnitud de

$$a_2 = \frac{F_g}{m_2} = \frac{1.33 \times 10^{-10}\ \text{N}}{0.500\ \text{kg}} = 2.66 \times 10^{-10}\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: La esfera más grande tiene 50 veces la masa de la esfera más pequeña y, por lo tanto, tiene 1/50 de la aceleración. Observe que las aceleraciones *no* son constantes; las fuerzas gravitacionales aumentan cuando las esferas comienzan a moverse una hacia la otra.

Ejemplo 12.3 Superposición de fuerzas gravitacionales

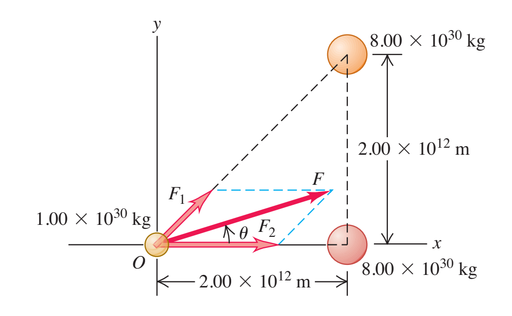
Muchas estrellas del firmamento son en realidad sistemas de dos o más estrellas que se mantienen juntas gracias a su atracción gravitacional mutua. La figura 12.5 muestra un sistema de tres estrellas en un instante en que están en los vértices de un triángulo rectángulo de 45°. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional total ejercida sobre la estrella pequeña por las dos grandes.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Usaremos el principio de superposición: la fuerza total que actúa sobre la estrella pequeña es la resultante de las dos fuerzas debidas a cada estrella grande.

PLANTEAR: Suponemos que las estrellas son esferas, de manera que podemos usar la ley de la gravitación para cada fuerza, como en la figura 12.2. Primero calculamos la magnitud de cada fuerza con la ecuación (12.1); luego, obtenemos la resultante (suma vectorial) empleando componentes a lo largo de los ejes mostrados en la figura 12.5.

12.5 La fuerza gravitacional total que actúa sobre la estrella pequeña (en O) es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas sobre ella por las dos estrellas grandes. (Como dato de comparación, la masa del Sol, una estrella típica, es de 1.99×10^{30} kg, y la distancia Tierra-Sol es de 1.50×10^{11} m.)



EJECUTAR: La magnitud F_1 de la fuerza que actúa sobre la estrella pequeña debida a la estrella grande de arriba es

$$F_1 = \frac{\left[\begin{array}{c}(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2) \\ \times (8.00 \times 10^{30}\ \text{kg})(1.00 \times 10^{30}\ \text{kg})\end{array}\right]}{(2.00 \times 10^{12}\ \text{m})^2 + (2.00 \times 10^{12}\ \text{m})^2} = 6.67 \times 10^{25}\ \text{N}$$

La magnitud F_2 de la fuerza debida a la otra estrella de más abajo es

$$F_2 = \frac{\left[\begin{array}{c}(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2) \\ \times (8.00 \times 10^{30}\ \text{kg})(1.00 \times 10^{30}\ \text{kg})\end{array}\right]}{(2.00 \times 10^{12}\ \text{m})^2} = 1.33 \times 10^{26}\ \text{N}$$

Las componentes x y y de estas fuerzas son

$$F_{1x} = (6.67 \times 10^{25}\ \text{N})(\cos 45°) = 4.72 \times 10^{25}\ \text{N}$$
$$F_{1y} = (6.67 \times 10^{25}\ \text{N})(\text{sen}\, 45°) = 4.72 \times 10^{25}\ \text{N}$$
$$F_{2x} = 1.33 \times 10^{26}\ \text{N}$$
$$F_{2y} = 0$$

Las componentes de la fuerza total que actúa sobre la estrella pequeña son

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 1.81 \times 10^{26}\ \text{N}$$
$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 4.72 \times 10^{25}\ \text{N}$$

La magnitud de esta fuerza es

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1.81 \times 10^{26}\ \text{N})^2 + (4.72 \times 10^{25}\ \text{N})^2} = 1.87 \times 10^{26}\ \text{N}$$

y su dirección relativa al eje x es

$$\theta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = \arctan\frac{4.72 \times 10^{25}\ \text{N}}{1.81 \times 10^{26}\ \text{N}} = 14.6°$$

EVALUAR: Si bien la fuerza total que actúa sobre la estrella pequeña es enorme, no lo es la magnitud de la aceleración resultante: $a = F/m = (1.87 \times 10^{26}\ \text{N})/(1.00 \times 10^{30}\ \text{kg}) = 1.87 \times 10^{-4}\ \text{m/s}^2$.

¿Puede usted demostrar que la fuerza total que actúa sobre la estrella pequeña *no* apunta al centro de masa de las dos estrellas grandes? (Véase el problema 12.51.)

¿Por qué son importantes las fuerzas gravitacionales?

Una comparación de los ejemplos 12.1 y 12.3 muestra que las fuerzas gravitacionales son insignificantes entre objetos como los que tenemos en nuestras casas; pero son considerables entre objetos del tamaño de las estrellas. De hecho, la gravitación es *la* fuerza más importante en la escala de planetas, estrellas y galaxias (figura 12.6). La gravitación mantiene la integridad de la Tierra y las órbitas de los planetas alrededor del Sol. La atracción gravitacional mutua de diferentes partes del Sol comprime los materiales en su centro, hasta alcanzar densidades y temperaturas muy elevadas que hacen posible las reacciones nucleares que ocurren ahí. Tales reacciones generan las emisiones de energía solar, sin las cuales la vida no existiría en la Tierra.

La fuerza gravitacional es tan importante en la escala cósmica porque actúa *a distancia*, sin contacto directo entre los cuerpos. Las fuerzas eléctricas y magnéticas tienen esta misma propiedad notable, aunque son menos importantes en la escala astronómica porque las acumulaciones grandes de materia son eléctricamente neutras; es decir, contienen cantidades iguales de cargas negativa y positiva. Por ello, las fuerzas eléctricas y magnéticas entre estrellas o planetas son muy pequeñas o valen cero. Las interacciones fuerte y débil que vimos en la sección 5.5 también actúan a distancia; no obstante, su influencia es insignificante a distancias mucho mayores que el diámetro de un núcleo atómico (cerca de 10^{-14} m).

Una forma útil de describir las fuerzas que actúan a distancia es en términos de un *campo*. Un cuerpo genera una perturbación o un campo en todos los puntos del espacio, y la fuerza que actúa sobre otro cuerpo en un punto determinado es la acción del campo del primer cuerpo en ese punto. Hay un campo asociado a cada fuerza que actúa a distancia y, por ello, nos referimos a campos gravitacionales, eléctricos, magnéticos, etcétera. En este capítulo, no necesitaremos el concepto de campo para estudiar la gravitación, así que no hablaremos más de él. En capítulos posteriores, sin embargo, veremos que la descripción de campo es una herramienta extremadamente útil para describir interacciones eléctricas y magnéticas.

12.6 Nuestro Sistema Solar forma parte de una galaxia en espiral como ésta, que contiene aproximadamente 10^{11} estrellas, junto con gas, polvo y otra materia. El conjunto total se mantiene unido gracias a la atracción gravitacional mutua de toda la materia en la galaxia.



Evalúe su comprensión de la sección 12.1 Saturno tiene aproximadamente 100 veces la masa de la Tierra y está alejado del Sol casi 10 veces más que nuestro planeta. En comparación con la aceleración de la Tierra causada por la atracción gravitacional solar, ¿qué tan grande es la aceleración de Saturno debida a la gravitación solar?
i) 100 veces mayor; ii) 10 veces mayor; iii) la misma; iv) 1/10; v) 1/100.

12.2 Peso

En la sección 4.4 definimos el *peso* de un cuerpo como la fuerza de atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre él. Ahora vamos a ampliar nuestra definición:

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre él por todos los demás cuerpos del Universo.

Si un cuerpo está cerca de la superficie terrestre, podemos despreciar las demás fuerzas gravitacionales y considerar el peso tan sólo como la atracción de la Tierra. En la superficie de la *Luna*, tomaremos el peso de un cuerpo como la atracción gravitacional de la Luna, etcétera.

Si de nuevo modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico con radio R_E y masa m_E, el peso w de un cuerpo pequeño de masa m en la superficie terrestre (a una distancia R_E del centro) es

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2} \quad \text{(peso de un cuerpo de masa } m \text{ en la superficie terrestre)} \tag{12.3}$$

Sin embargo, en la sección 4.4 también vimos que el peso w de un cuerpo es la fuerza que causa la aceleración g de caída libre, de modo que por la segunda ley de Newton, $w = mg$. Si igualamos esto con la ecuación (12.3) y dividimos entre m, obtenemos

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \quad \text{(aceleración debida a la gravedad en la superficie terrestre)} \tag{12.4}$$

La aceleración debida a la gravedad g es independiente de la masa m del cuerpo porque m no aparece en esta ecuación. Ya lo sabíamos, pero ahora vemos cómo se obtiene de la ley de la gravitación.

Podemos *medir* todas las cantidades de la ecuación (12.4) excepto m_E, así que esta relación nos permite calcular la masa de la Tierra. Si en tal ecuación despejamos m_E y usamos $R_E = 6380 \text{ km} = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ y $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, obtenemos

$$m_E = \frac{gR_E^2}{G} = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

que es muy cercana al valor actualmente aceptado de 5.974×10^{24} kg. Una vez que Cavendish midió G, calculó la masa terrestre precisamente así.

En un punto arriba de la superficie terrestre a una distancia r del centro de la Tierra (una distancia $r - R_E$ sobre la superficie), el peso de un cuerpo está dado por la ecuación (12.3) sustituyendo R_E por r:

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{r^2} \tag{12.5}$$

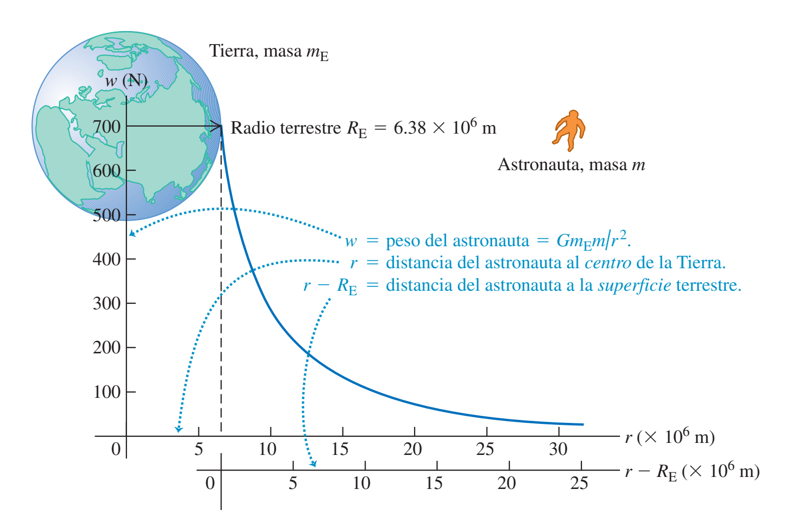
El peso de un cuerpo disminuye inversamente con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra (figura 12.7). La figura 12.8 muestra cómo varía el peso de un astronauta con la altura sobre la Tierra, si su peso es de 700 N en la superficie.

12.7 En un avión comercial a gran altitud, estamos más lejos del centro de la Tierra que cuando estamos en el suelo y pesamos ligeramente menos. ¿Puede usted demostrar que a una altitud de 10 km pesaría 0.3% menos que en el suelo?



El peso *aparente* de un cuerpo en la Tierra difiere un poco de la fuerza gravitacional terrestre porque la Tierra gira y, por lo tanto, no es precisamente un marco inercial de referencia. Hasta ahora hemos ignorado este efecto, suponiendo que la Tierra *es* un sistema inercial. Volveremos al efecto de la rotación terrestre en la sección 12.7.

Al explicar el peso, usamos el hecho de que la Tierra es una distribución de masa con simetría esférica aproximada; pero esto *no* implica que la Tierra sea uniforme.



12.8 Un astronauta que pesa 700 N en la superficie terrestre experimenta menos atracción gravitacional, si está arriba de dicha superficie. La distancia importante r es del astronauta al *centro* de la Tierra (*no* del astronauta a la superficie terrestre).

Para demostrar que no puede ser uniforme, calculemos primero su *densidad* media, o masa por unidad de volumen. Si suponemos una Tierra esférica, el volumen es

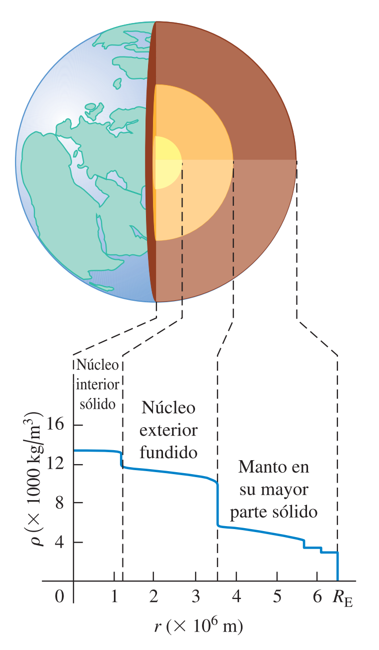
$$V_E = \frac{4}{3}\pi R_E^3 = \frac{4}{3}\pi(6.38 \times 10^6 \text{ m})^3 = 1.09 \times 10^{21} \text{ m}^3$$

La densidad media ρ (la letra griega rho) de la Tierra es la masa total dividida entre el volumen total:

$$\rho = \frac{m_E}{V_E} = \frac{5.97 \times 10^{24} \text{ kg}}{1.09 \times 10^{21} \text{ m}^3}$$
$$= 5500 \text{ kg/m}^3 = 5.5 \text{ g/cm}^3$$

(Como referencia, la densidad del agua es de $1000 \text{ kg/m}^3 = 1.00 \text{ g/cm}^3$.) Si la Tierra fuera uniforme, cabría esperar que la densidad de rocas individuales cerca de la superficie tuvieran este mismo valor. De hecho, la densidad de rocas superficiales es significativamente menor: de $2000 \text{ kg/m}^3 = 2 \text{ g/cm}^3$ para rocas sedimentarias, a cerca de $3000 \text{ kg/m}^3 = 3 \text{ g/cm}^3$ para el basalto. Por lo tanto, la Tierra *no puede* ser uniforme, y el interior debe ser mucho más denso que la superficie para que la densidad *media* sea de $5500 \text{ kg/m}^3 = 5.5 \text{ g/cm}^3$. Según los modelos geofísicos del interior de la Tierra, la densidad máxima en el centro es de cerca de $13{,}000 \text{ kg/m}^3 = 13 \text{ g/cm}^3$. La figura 12.9 es una gráfica de densidad en función de la distancia al centro.

12.9 La densidad de la Tierra disminuye al aumentar la distancia al centro.



Ejemplo 12.4 Gravedad en Marte

Una misión no tripulada se envía a la superficie de Marte, cuyo radio es $R_M = 3.40 \times 10^6$ y cuya masa es $m_M = 6.42 \times 10^{23}$ kg. El peso, en la Tierra, del vehículo de descenso es de 3920 N. Calcule su peso F_g y la aceleración g_M debida a la gravedad de Marte: *a*) 6.0×10^6 m arriba de la superficie (la distancia a la que está su luna Fobos); *b*) en la superficie marciana. No tome en cuenta los efectos gravitacionales de las diminutas lunas de Marte.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitamos encontrar el peso F_g del vehículo de descenso y la aceleración gravitacional g_M a dos distancias diferentes del centro de Marte.

PLANTEAR: Obtendremos el peso F_g empleando la ecuación (12.5) después de sustituir m_E (la masa de la Tierra) por m_M (la masa de Mar-

continúa

te). Observe que el valor de G es el mismo en todo el Universo; es una constante física fundamental. Entonces, obtendremos la aceleración g_M a partir de $F_g = mg_M$, donde m es la masa del vehículo. No nos dan este valor, pero podemos calcularlo con base en su peso en la Tierra.

EJECUTAR: *a*) La distancia r desde el *centro* de Marte es

$$r = (6.0 \times 10^6 \text{ m}) + (3.40 \times 10^6 \text{ m}) = 9.4 \times 10^6 \text{ m}$$

La masa m del vehículo es su peso w dividido entre la aceleración de la gravedad g en la Tierra:

$$m = \frac{w}{g} = \frac{3920 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} = 400 \text{ kg}$$

La masa es la misma aunque el vehículo esté en la Tierra, Marte o camino a Marte, Por la ecuación (12.5),

$$\begin{aligned} F_g &= \frac{Gm_M m}{r^2} \\ &= \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(6.42 \times 10^{23} \text{ kg})(400 \text{ kg})}{(9.4 \times 10^6 \text{ m})^2} \\ &= 194 \text{ N} \end{aligned}$$

La aceleración debida a la gravedad de Marte en este punto es

$$g_M = \frac{F_g}{m} = \frac{194 \text{ N}}{400 \text{ kg}} = 0.48 \text{ m/s}^2$$

Ésta es también la aceleración que experimenta Fobos en su órbita, 6.0×10^6 m sobre la superficie de Marte. *b*) Para calcular F_g y g_M en la superficie, repetimos los cálculos anteriores, sustituyendo $r = 9.4 \times 10^6$ m por $R_M = 3.40 \times 10^6$ m. O bien, dado que F_g y g_M son inversamente proporcionales a $1/r^2$ (en cualquier punto afuera del planeta), podemos multiplicar los resultados del inciso *a*) por el factor

$$\left(\frac{9.4 \times 10^6 \text{ m}}{3.40 \times 10^6 \text{ m}}\right)^2$$

Le sugerimos usar ambos métodos para demostrar que, en la superficie, $F_g = 1500$ N y $g_M = 3.7$ m/s^2.

EVALUAR: Los resultados del inciso *b*) muestran que el peso de un objeto y la aceleración debida a la gravedad en la superficie marciana tienen valores de aproximadamente el 40% de los valores en la superficie terrestre. Las películas de ciencia ficción y los relatos que se desarrollan sobre Marte suelen describir las bajas temperaturas y la atmósfera enrarecida del planeta; pero casi nunca mencionan la experiencia de estar en un entorno de baja gravedad.

Evalúe su comprensión de la sección 12.2 Ordene de mayor a menor la gravedad superficial de los siguientes planetas ficticios: i) masa = 2 veces la masa de la Tierra, radio = 2 veces el radio de la Tierra; ii) masa = 4 veces la masa de la Tierra, radio = 4 veces el radio de la Tierra; iii) masa = 4 veces la masa de la Tierra, radio = 2 veces el radio de la Tierra; iv) masa = 2 veces la masa de la Tierra, radio = 4 veces el radio de la Tierra.

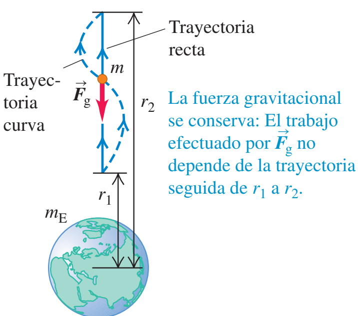
MP

12.3 Energía potencial gravitacional

Cuando desarrollamos el concepto de energía potencial gravitacional en la sección 7.1, supusimos que la fuerza gravitacional que actúa sobre un cuerpo es constante en magnitud y dirección, originando la expresión $U = mgy$. Ahora sabemos que la fuerza gravitacional de la Tierra sobre un cuerpo de masa m afuera de la Tierra está dada en forma más general por la ecuación (12.2), $F_g = Gm_E m/r^2$, donde m_E es la masa de la Tierra y r es la distancia del cuerpo al centro de la Tierra. En problemas donde r cambia tanto que la fuerza gravitacional no puede considerarse constante, necesitamos una expresión más general para la energía potencial gravitacional.

Para obtener esta expresión, usamos la misma secuencia básica de pasos que en la sección 7.1. Consideramos un cuerpo de masa m fuera de la Tierra, y calculamos primero el trabajo W_{grav} efectuado por la fuerza gravitacional cuando el cuerpo se aleja del centro de la Tierra o se acerca a él, desde $r = r_1$ hasta $r = r_2$ (figura 12.10). Así, W_{grav} está dado por

$$W_{grav} = \int_{r_1}^{r_2} F_r \, dr \tag{12.6}$$



12.10 Cálculo del trabajo efectuado sobre un cuerpo por la fuerza gravitacional, cuando el cuerpo se mueve de la coordenada radial r_1 a r_2.

donde F_r es la componente radial de la fuerza gravitacional $\vec{F}$, es decir, la componente dirigida *hacia afuera* desde el centro de la Tierra. Dado que $\vec{F}$ apunta *hacia el*

centro de la Tierra, F_r es negativa; difiere de la ecuación (12.2), la magnitud de la fuerza gravitacional, por un signo menos:

$$F_r = -\frac{Gm_E m}{r^2} \qquad (12.7)$$

Sustituyendo la ecuación (12.7) en la ecuación (12.6), vemos que W_{grav} está dado por

$$W_{grav} = -Gm_E m\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Gm_E m}{r_2} - \frac{Gm_E m}{r_1} \qquad (12.8)$$

La trayectoria no tiene que ser recta: puede ser una curva como la de la figura 12.10. Por un argumento similar al de la sección 7.1, este trabajo sólo depende de los valores inicial y final de r, no del camino seguido. Esto también demuestra que la fuerza gravitacional siempre es *conservativa*.

Ahora definimos la energía potencial correspondiente U tal que $W_{grav} = U_1 - U_2$ [como en la ecuación (7.3)]. Comparando esto con la ecuación (12.8), vemos que la definición apropiada de **energía potencial gravitacional** es

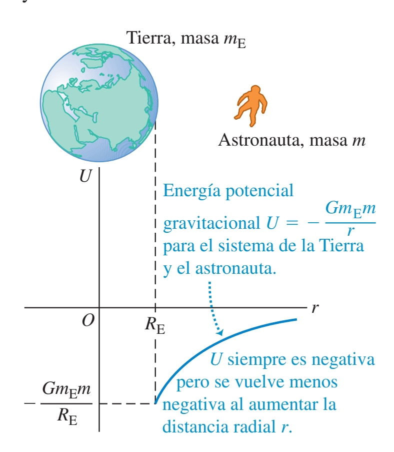
$$U = -\frac{Gm_E m}{r} \quad \text{(energía potencial gravitacional)} \qquad (12.9)$$

La figura 12.11 muestra cómo la energía potencial gravitacional depende de la distancia r entre el cuerpo de masa m y el centro de la Tierra. Si el cuerpo se aleja de la Tierra, r aumenta, la fuerza gravitacional efectúa trabajo negativo, y U aumenta (se vuelve menos negativa). Si el cuerpo "cae" hacia la Tierra, r disminuye, el trabajo gravitacional es positivo, y la energía potencial disminuye (se hace más negativa).

La ecuación (12.9) quizá parezca extraña porque indica que la energía potencial gravitacional siempre es negativa; pero ya hemos visto valores negativos de U. Al usar la fórmula $U = mgy$ en la sección 7.1, vimos que U era negativa, siempre que el cuerpo de masa m estuviera en un valor de y menor que la altura arbitraria que elegimos como $y = 0$; es decir, si el cuerpo y la Tierra estaban más cerca que cierta distancia arbitraria. (Véase el ejemplo 7.2 de la sección 7.1.) Al definir U con la ecuación (12.9), elegimos que U es cero cuando el cuerpo de masa m está infinitamente lejos de la Tierra ($r = \infty$). Al acercarse el cuerpo a la Tierra, la energía potencial gravitacional disminuye y se hace negativa.

Si quisiéramos, podríamos tomar $U = 0$ en la superficie terrestre, donde $r = R_E$, con sólo sumar la cantidad $Gm_E m/R_E$ a la ecuación (12.9). Esto haría a U positiva cuando $r > R_E$. No lo haremos por dos razones: una, se complicaría la expresión para U; y dos, el término sumado no afectaría la *diferencia* en energía potencial entre dos puntos, que es la única cantidad físicamente significativa.

12.11 Gráfica de energía potencial gravitacional U para el sistema de la Tierra (masa m_E) y un astronauta (masa m) contra la distancia r entre el astronauta y el centro de la Tierra.



CUIDADO **Fuerza gravitacional contra energía potencial gravitacional** No confunda las expresiones de fuerza gravitacional (ecuación 12.7) y de energía potencial gravitacional (ecuación 12.9). La fuerza F_r es proporcional a $1/r^2$, y la energía potencial U *es* proporcional a $1/r$.

Con la ecuación (12.9), ya podemos usar relaciones de energía generales para problemas donde debe incluirse el comportamiento según $1/r^2$ de la fuerza gravitacional de la Tierra. Si esta fuerza es la única que efectúa trabajo sobre el cuerpo, la energía mecánica total del sistema es constante, o *se conserva*. En el ejemplo que sigue usaremos este principio para calcular la **rapidez de escape**, es decir, la rapidez que debe tener un cuerpo para escapar por completo de un planeta.

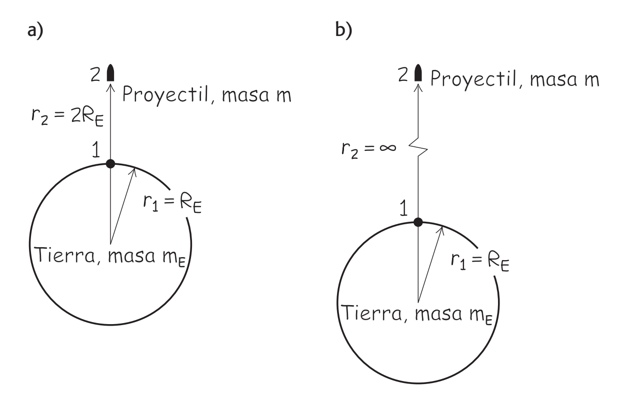
Ejemplo 12.5 "De la Tierra a la Luna"

En la novela de Julio Verne de 1865 con ese título, tres hombres viajaron a la Luna en un cascarón disparado desde un cañón gigante hundido en el suelo de Florida. *a*) Calcule la rapidez inicial necesaria para disparar el cascarón verticalmente hasta una altura sobre la Tierra igual al radio de ésta. *b*) Calcule la *rapidez de escape*, es decir, la rapidez inicial que permitiría al cascarón escapar de la Tierra. Desprecie la resistencia del aire, la rotación de la Tierra y la atracción gravitacional de la Luna. El radio de la Tierra es $R_E = 6380\ \text{km} = 6.38 \times 10^6\ \text{m}$ y su masa es $m_E = 5.97 \times 10^{24}\ \text{kg}$ (véase el Apéndice F).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez que el cascarón sale del cañón, sólo la fuerza gravitacional (conservativa) efectúa trabajo, así que se conserva la energía mecánica. Usaremos esto para determinar la rapidez del cascarón al salir del cañón en el inciso *a*), donde el cascarón se detiene a una distancia de dos radios terrestres con respecto al centro del planeta, y en *b*), donde el cascarón se detiene a una distancia infinita de la Tierra.

PLANTEAR: La ecuación que usaremos en ambos incisos es la expresión de conservación de la energía, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, donde la energía potencial U está dada por la ecuación (12.9). La figura 12.12 muestra nuestros diagramas. Sea el punto 1 donde el cascarón sale del cañón con rapidez v_1 (la incógnita). En este punto, la distancia al centro de la Tierra es $r_1 = R_E$, el radio de la Tierra. El punto 2 está donde el cascarón alcanza su altura máxima; en el inciso *a*) está en $r_2 = 2R_E$ (figura 12.12a); mientras que en el inciso *b*) está a una distancia infinita de la Tierra, en $r_2 = \infty$ (figura 12.12b). En ambos casos, el cascarón está en reposo en el punto 2, así que $v_2 = 0$ y $K_2 = 0$. Sea m la masa del cascarón (con pasajeros).



12.12 Nuestro esquema para este problema.

EJECUTAR: *a*) Podemos determinar v_1 con la ecuación de conservación de la energía

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\frac{Gm_Em}{R_E}\right) = 0 + \left(-\frac{Gm_Em}{2R_E}\right)$$

Reacomodando, obtenemos

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{Gm_E}{R_E}} \\ &= \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.38 \times 10^6\ \text{m}}} \\ &= 7900\ \text{m/s}(= 28{,}400\ \text{km/h} = 17{,}700\ \text{mi/h}) \end{aligned}$$

b) Queremos que el cascarón apenas "llegue" al punto 2 en $r_2 = \infty$, sin energía cinética sobrante, así que $K_2 = 0$ y $U_2 = 0$ (la energía potencial es cero en el infinito; véase la figura 12.11). La energía mecánica total es entonces cero; por lo tanto, al dispararse el cascarón, su energía cinética positiva K_1 y su energía potencial negativa U_1 también deben sumar cero:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \left(-\frac{Gm_Em}{R_E}\right) = 0 + 0$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2Gm_E}{R_E}} \\ &= \sqrt{\frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{6.38 \times 10^6\ \text{m}}} \\ &= 1.12 \times 10^4\ \text{m/s}(= 40{,}200\ \text{km/h} = 25{,}000\ \text{mi/h}) \end{aligned}$$

EVALUAR: Este resultado no depende de la masa del cascarón ni de la dirección en la que se lanza. Las naves modernas lanzadas desde Florida deben alcanzar prácticamente la misma rapidez que en el inciso *b*) para escapar de la Tierra. Una nave espacial en el suelo de Cabo Cañaveral ya se está moviendo a 410 m/s al este por la rotación terrestre; si el lanzamiento es hacia el este, la nave aprovecha esta contribución "gratuita" a la rapidez de escape.

Generalizando nuestro resultado, la rapidez inicial v_1 que un cuerpo necesita para escapar de la superficie de una masa esférica M con radio R (despreciando la resistencia del aire) es

$$v_1 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad \text{(rapidez de escape)}$$

Se puede usar este resultado para calcular la rapidez de escape de otros cuerpos. Obtendremos 5.02×10^3 m/s para Marte, 5.95×10^4 m/s para Júpiter y 6.18×10^5 m/s para el Sol.

Más sobre la energía potencial gravitacional

Como nota final, demostremos que si estamos cerca de la superficie terrestre, la ecuación (12.9) se reduce a $U = mgy$ que ya conocemos del capítulo 7. Primero reescribimos la ecuación (12.8):

$$W_{grav} = Gm_Em\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

Si el cuerpo se mantiene cerca de la Tierra, en el denominador podemos sustituir r_1 y r_2 por R_E, el radio de la Tierra, así que

$$W_{grav} = Gm_E m \frac{r_1 - r_2}{R_E^2}$$

Según la ecuación (12.4), $g = Gm_E/R_E^2$, por lo cual

$$W_{grav} = mg(r_1 - r_2)$$

Si sustituimos las r por y, ésta es la ecuación (7.1) para el trabajo efectuado por una fuerza gravitacional constante. En la sección 7.1 usamos esta ecuación para deducir la ecuación (7.2), $U = mgy$, así que podemos considerar esta expresión de la energía potencial gravitacional como un caso especial de la ecuación (12.9) que es más general.

Evalúe su comprensión de la sección 12.3 ¿Un planeta puede tener la misma gravedad superficial (es decir, el mismo valor de g en la superficie) que la Tierra y tener una rapidez de escape mayor?

12.4 Movimiento de satélites

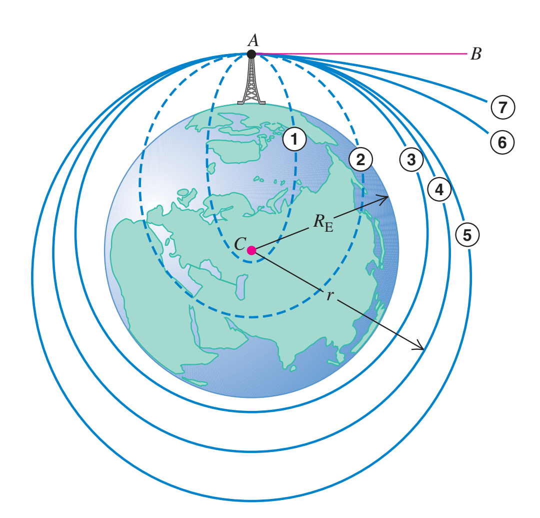
Los satélites artificiales en órbita son parte cotidiana de la vida moderna (figura 12.13). Pero, ¿cómo se mantienen en órbita y qué determina las propiedades de sus órbitas? Podemos usar las leyes de Newton y la ley de la gravitación para obtener las respuestas. En la siguiente sección, veremos cómo el movimiento de los planetas se puede analizar del mismo modo.

Para comenzar, recordemos lo dicho sobre el movimiento de proyectiles en la sección 3.3. En el ejemplo 3.6, un motociclista se lanza horizontalmente del borde de un acantilado, en una trayectoria parabólica que termina en terreno plano en la base del acantilado. Si sobrevive y repite el experimento aumentando su rapidez de lanzamiento, caerá más lejos del punto de partida. Podemos imaginarlo lanzándose con tal rapidez que la curvatura de la Tierra se hace significativa. Al caer, la caída es más larga por la curvatura. Si la rapidez del motociclista es suficiente, y si su punto de lanzamiento es tan alto que pueda librar las montañas, podría seguir dando vuelta a la Tierra, sin jamás tocar el suelo.

La figura 12.14 muestra una variación de este tema. Lanzamos un proyectil del punto A en la dirección AB, tangente a la superficie terrestre. Las trayectorias 1 a 7 muestran el efecto de aumentar la rapidez inicial. En las trayectorias 3 a 5 el proyectil

12.13 Con una longitud de 13.2 m y una masa de 11,000 kg, el telescopio espacial Hubble se cuenta entre los satélites más grandes que se ha puesto en órbita.





12.14 Trayectorias de un proyectil lanzado desde una gran altura (ignorando la resistencia del aire). Las órbitas 1 y 2 se completarían como se muestra, si la Tierra fuera una masa puntual en C. (Esta ilustración se basa en *Principia* de Isaac Newton.)

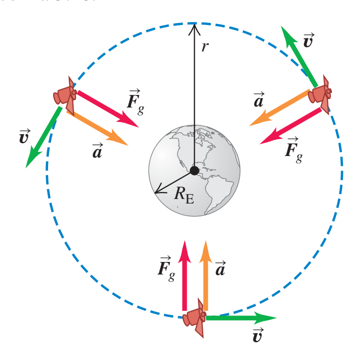
ActivPhysics ONLINE
4.6 Satélites en órbita

no choca contra la Tierra y se convierte en su satélite. Si no hay una fuerza que frene al proyectil, su rapidez al volver al punto A es la que tenía inicialmente, y el movimiento se repite indefinidamente.

Las trayectorias 1 a 5 terminan donde comenzaron y se denominan **órbitas cerradas**. Todas las órbitas cerradas son elipses o segmentos de elipses; la trayectoria 4 es un círculo, un caso especial de elipse. (Analizaremos las propiedades de una elipse en la sección 12.5.) Las trayectorias 6 y 7 son **órbitas abiertas**; el proyectil nunca vuelve a su punto de partida y se aleja cada vez más de la Tierra.

Satélites: Órbitas circulares

12.15 La fuerza $\vec{F}_g$ debida a la atracción gravitacional de la Tierra proporciona la aceleración centrípeta que mantiene a un satélite en órbita. Compare esta figura con la 5.28.



El satélite está en órbita circular: su aceleración $\vec{a}$ es siempre perpendicular a su velocidad $\vec{v}$, por ello, la rapidez v es constante.

Una órbita *circular* como la trayectoria 4 de la figura 12.14 es el caso más sencillo. También es un caso importante, pues muchos satélites artificiales tienen órbitas casi circulares y las órbitas de los planetas alrededor del Sol también son aproximadamente circulares. La única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por lo tanto, hacia el centro de la órbita (figura 12.15). Como vimos en la sección 5.4, esto implica que el satélite está en movimiento circular *uniforme* y su rapidez es constante. El satélite no cae *hacia* la Tierra; más bien, cae constantemente *alrededor de* la Tierra. En una órbita circular, la rapidez es exactamente la necesaria para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra.

Veamos cómo calcular la rapidez constante v de un satélite en órbita circular. El radio de la órbita es r, medido desde el *centro* de la Tierra; la aceleración del satélite tiene magnitud $a_{rad} = v^2/r$ y siempre está dirigida hacia el centro del círculo. Por la ley de la gravitación, la fuerza neta (la gravitacional) que actúa sobre el satélite de masa m tiene magnitud $F_g = Gm_E m/r^2$ y tiene la misma dirección de la aceleración. La segunda ley de Newton $\left(\sum \vec{F} = m\vec{a}\right)$ nos dice entonces que

?

$$\frac{Gm_E m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Despejando v, tenemos que

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}} \quad \text{(órbita circular)} \qquad (12.10)$$

12.16 Estos astronautas del trasbordador espacial están en un estado de ingravidez aparente. ¿Cuáles están parados y cuáles están de cabeza?



Esta relación muestra que no podemos elegir el radio de la órbita r y la rapidez v independientemente; para un radio r dado, la rapidez v de la órbita circular está determinada.

La ecuación (12.10) también muestra que el movimiento del satélite no depende de su masa, porque la masa m no aparece en la ecuación. Si pudiéramos partir un satélite a la mitad sin alterar su rapidez, cada mitad seguiría con el movimiento original. Una astronauta a bordo de un trasbordador espacial también es como un satélite de la Tierra, mantenida por la atracción gravitacional en la misma órbita que la nave. La astronauta tiene la misma velocidad y aceleración que la nave, así que nada la empuja contra el piso o las paredes de la nave. Ella está en un estado de *ingravidez aparente*, como en un elevador en caída libre; véase la explicación que sigue al ejemplo 5.9 en la sección 5.2. (La ingravidez *verdadera* sólo se lograría si la astronauta estuviera infinitamente lejos de cualquier otra masa, de modo que la fuerza gravitacional sobre ella fuera cero.) De hecho, cada parte de su cuerpo está aparentemente ingrávida (carece de peso); ella no siente que nada empuje el estómago contra los intestinos ni la cabeza contra los hombros (figura 12.16).

La ingravidez aparente no se da sólo en órbitas circulares; existe siempre que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre una nave espacial; por lo tanto, se experimenta en órbitas de cualquier forma, incluidas las abiertas como las 6 y 7 de la figura 12.14.

12.17 Tanto la Estación Espacial Internacional como la Luna son satélites terrestres. La Luna está en una órbita mucho más alejada del centro de la Tierra que la Estación Espacial, así que tiene una rapidez orbital menor y un periodo orbital mayor.



Estación Espacial Internacional
Distancia al centro de la Tierra = 6800 km
(400 km arriba de la superficie)
Rapidez orbital = 7.7 km/s
Periodo orbital = 93 min



Luna
Distancia al centro de la Tierra = 384,000 km
Rapidez orbital = 1.0 km/s
Periodo orbital = 27.3 días

Podemos deducir una relación entre el radio r de una órbita circular y el periodo T, la duración de una revolución. La rapidez v es la distancia $2\pi r$ recorrida en una revolución, dividida entre el periodo:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{12.11}$$

Obtenemos una expresión para T si despejamos T de la ecuación (12.11) y sustituimos v de la ecuación (12.10):

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}} \quad \text{(órbita circular)} \tag{12.12}$$

Las ecuaciones (12.10) y (12.12) muestran que las órbitas más grandes corresponden a rapideces más bajas y a periodos más largos (figura 12.17).

Es interesante comparar la ecuación (12.10) con el cálculo de la rapidez de escape en el ejemplo 12.5. Vemos que la rapidez de escape de un cuerpo esférico con radio R es $\sqrt{2}$ veces mayor que la rapidez de un satélite en una órbita circular con ese radio. Si nuestra nave está en órbita circular alrededor de *cualquier* planeta, deberemos multiplicar nuestra rapidez por $\sqrt{2}$ para escapar al infinito, sin importar la masa del planeta.

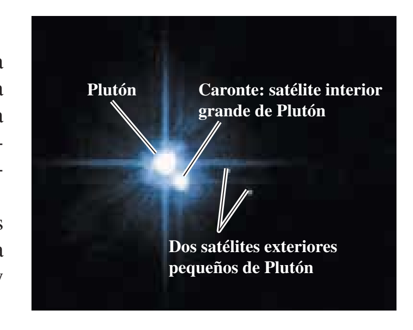
Puesto que la rapidez v en una órbita circular está determinada por la ecuación (12.10) para un radio orbital r dado, la energía mecánica total $E = K + U$ también está determinada. Usando las ecuaciones (12.9) y (12.10), tenemos

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{Gm_Em}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{Gm_E}{r}\right) - \frac{Gm_Em}{r}$$
$$E = -\frac{Gm_Em}{2r} \quad \text{(órbita circular)} \tag{12.13}$$

La energía mecánica total en una órbita circular es negativa e igual a la mitad de la energía potencial. Aumentar el radio orbital r implica aumentar la energía mecánica (es decir, hacer E menos negativa). Si el satélite está en una órbita relativamente baja y toca los márgenes de la atmósfera, la energía mecánica disminuirá a causa del trabajo negativo efectuado por la resistencia del aire; en consecuencia, el radio orbital disminuirá hasta que el satélite caiga a tierra o se queme en la atmósfera.

Hemos hablado casi exclusivamente de satélites terrestres; no obstante, podemos aplicar el mismo análisis al movimiento circular de *cualquier* cuerpo sometido a la atracción gravitacional de un cuerpo estacionario. Otros ejemplos son nuestra Luna y las lunas de otros planetas (figura 12.18).

12.18 Los dos satélites pequeños de Plutón fueron descubiertos en 2005. De acuerdo con la ecuación (12.12), cuanto mayor sea la órbita del satélite, tardará más en dar una vuelta completa alrededor de Plutón.



Ejemplo 12.6 Una órbita de satélite

Suponga que desea poner un satélite meteorológico de 1000 kg en órbita circular a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre. *a*) ¿Qué rapidez, periodo y aceleración radial debe tener? *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para poner el satélite en órbita? *c*) ¿Cuánto trabajo adicional se necesitaría para que el satélite escapara de la Tierra? El radio de la Tierra es $R_E = 6380$ km y su masa es $m_E = 5.97 \times 10^{24}$ kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El satélite está en órbita circular, así que podemos usar las ecuaciones que dedujimos en esta sección.

PLANTEAR: En el inciso *a*) primero calculamos el radio *r* de la órbita del satélite a partir de su altitud. Luego calculamos la rapidez *u* y el periodo *T* usando las ecuaciones (12.10) y (12.12). La aceleración en una órbita circular está dada por la fórmula que vimos en el capítulo 3: $a_{rad} = v^2/r$. En los incisos *b*) y *c*), el trabajo requerido es la diferencia entre las energías mecánicas inicial y final que, en el caso de una órbita circular, están dadas por la ecuación (12.13).

EJECUTAR: *a*) El radio de la órbita del satélite es

$$r = 6380 \text{ km} + 300 \text{ km} = 6680 \text{ km} = 6.68 \times 10^6 \text{ m}$$

Por la ecuación (12.10),

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{6.68 \times 10^6 \text{ m}}}$$
$$= 7720 \text{ m/s}$$

Calculamos el periodo orbital con la ecuación (12.12):

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6.68 \times 10^6 \text{ m})}{7720 \text{ m/s}}$$
$$= 5440 \text{ s} = 90.6 \text{ min}$$

La aceleración radial es

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \frac{(7720 \text{ m/s})^2}{6.68 \times 10^6 \text{ m}}$$
$$= 8.92 \text{ m/s}^2$$

Éste es el valor de *g* a una altura de 300 km sobre la superficie terrestre; es un poco menor que en la superficie.

b) El trabajo requerido es la diferencia entre E_2, la energía mecánica total cuando el satélite está en órbita, y E_1, la energía mecánica original cuando el satélite estaba en reposo en su plataforma de lanzamiento en la Tierra. En órbita, si usamos la ecuación (12.13), la energía es

$$E_2 = -\frac{Gm_E m}{2r}$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(1000 \text{ kg})}{2(6.38 \times 10^6 \text{ m})}$$
$$= -2.99 \times 10^{10} \text{ J}$$

En reposo en la superficie terrestre ($r = R_E$), la energía cinética es cero:

$$E_1 = K_1 + U_1 = 0 + \left(-\frac{Gm_E m}{R_E}\right)$$
$$= -\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(1000 \text{ kg})}{6.38 \times 10^6 \text{ m}}$$
$$= -6.25 \times 10^{10} \text{ J}$$

así que

$$W_{requerido} = E_2 - E_1 = -2.99 \times 10^{10} \text{ J} - (-6.25 \times 10^{10} \text{ J})$$
$$= 3.26 \times 10^{10} \text{ J}$$

c) En el inciso *b*) del ejemplo 12.5, vimos que, para que un satélite escape al infinito, la energía mecánica total debe ser cero. La energía mecánica total en la órbita circular es $E_2 = -2.99 \times 10^{10}$ J; para elevar esto a cero tendríamos que efectuar un trabajo de 2.99×10^{10} J. Esta energía extra podría venir de cohetes unidos al satélite.

EVALUAR: En el inciso *b*), despreciamos la energía cinética inicial que el satélite tenía por la rotación terrestre (cuando aún estaba en la plataforma de lanzamiento). Le sugerimos verificar la importancia de la diferencia (en el ejemplo 12.5 se dan datos útiles).

Evalúe su comprensión de la sección 12.4 Imagine que una nave espacial está en una órbita circular a baja altitud alrededor de la Tierra. La resistencia del aire de las regiones exteriores de la atmósfera efectúa trabajo negativo sobre la nave, haciendo que el radio orbital disminuya ligeramente. ¿La rapidez de la nave i) permanece igual, ii) aumenta, o iii) disminuye?

MP

12.5 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

La palabra *planeta* viene de un vocablo griego que significa "vagabundo"; efectivamente, los planetas cambian continuamente su posición en el cielo relativa al fondo estrellado. Uno de los grandes logros intelectuales de los siglos XVI y XVII fue darse cuenta de tres descubrimientos: que la Tierra es un planeta, que todos los planetas están en órbita alrededor del Sol y que los movimientos aparentes de los planetas vistos desde la Tierra pueden servir para determinar con precisión sus órbitas.

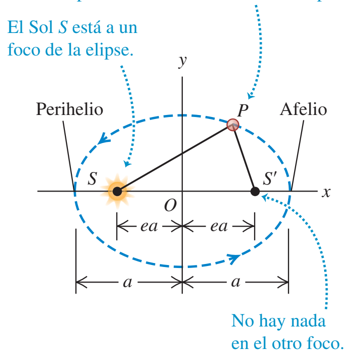
Los primeros dos descubrimientos fueron publicados por Nicolás Copérnico en Polonia en 1543. La determinación de las órbitas planetarias entre 1601 y 1619 corrió

a cargo del astrónomo y matemático alemán Johannes Kepler, utilizando un voluminoso conjunto de datos precisos acerca de los movimientos planetarios aparentes compilado por su mentor, el astrónomo danés Tycho Brahe. Por medio de prueba y error, Kepler descubrió tres leyes empíricas que describían con exactitud los movimientos de los planetas:

1. **Cada planeta se mueve en una órbita elíptica, con el Sol en uno de los focos de la elipse.**
2. **Una línea del Sol a un planeta dado barre áreas iguales en tiempos iguales.**
3. **Los periodos de un planeta son proporcionales a las longitudes del eje mayor de sus órbita elevadas a la potencia $\frac{3}{2}$.**

Kepler no sabía *por qué* los planetas se movían así. Tres generaciones después, cuando Newton dirigió su atención al movimiento planetario, descubrió que las leyes de Kepler pueden *deducirse*; son consecuencias de las leyes de Newton del movimiento y de la ley de la gravitación. Veamos de dónde surge cada una de las leyes de Kepler.

12.19 Geometría de una elipse. La suma de las distancias SP y $S'P$ es la misma para todos los puntos de la curva. Se exageraron los tamaños del Sol (S) y del planeta (P) por claridad.



Primera ley de Kepler

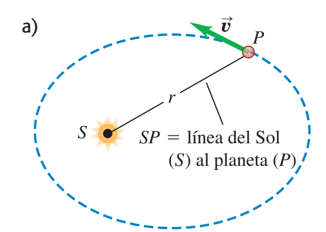
Consideremos primero las órbitas elípticas descritas en la primera ley de Kepler. La figura 12.19 muestra la geometría de la elipse. La dimensión más larga es el *eje mayor*, siendo "a" la mitad de su longitud; esta distancia se denomina **eje semimayor**. La suma de las distancias de S a P y de S' a P es la misma para todos los puntos de la curva. S y S' son los *focos*. El Sol está en S, y el planeta está en P; consideramos a ambos como puntos porque su tamaño es muy pequeño en comparación con la distancia entre ellos. No hay nada en el otro foco S'.

La distancia de cada foco al centro de la elipse es ea, donde e es un número adimensional entre 0 y 1 llamado **excentricidad**. Si $e = 0$, la elipse es un círculo. Las órbitas reales de los planetas son casi circulares; sus excentricidades varían entre 0.007 para Venus y 0.206 para Mercurio. (La órbita de la Tierra tiene $e = 0.017$.) El punto de la órbita más cercano al Sol es el *perihelio*; y el más lejano, el *afelio*.

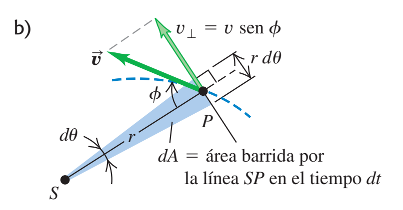
Newton pudo demostrar que, para un cuerpo sobre el que actúa una fuerza de atracción proporcional a $1/r^2$ las únicas órbitas cerradas posibles son un círculo o una elipse; también demostró que las órbitas abiertas (las trayectorias 6 y 7 en la figura 12.14) deben ser parábolas o hipérbolas. Estos resultados pueden deducirse aplicando directamente las leyes de Newton y la ley de la gravitación, junto con ecuaciones diferenciales más complejas que las que podemos enfrentar.

12.20 a) El planeta (P) se mueve alrededor del Sol (S) en una órbita elíptica. b) En un tiempo dt, la línea SP barre un área $dA = \frac{1}{2}(r\,d\theta)r = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$. c) La rapidez del planeta varía de modo que la línea SP barre la misma área A en un tiempo dado t, sea cual fuere la posición del planeta en su órbita.

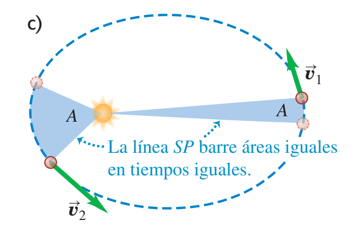
a)



b)



c)



Segunda ley de Kepler

La figura 12.20 muestra la segunda ley de Kepler. En un lapso pequeño dt, la línea del Sol S al planeta P describe un ángulo $d\theta$. El área barrida es el triángulo coloreado de altura r, base $r\,d\theta$ y área $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$ (figura 12.20b). La rapidez con la que se barre el área, dA/dt, se denomina *velocidad de sector*:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{12.14}$$

La esencia de la segunda ley de Kepler establece que la velocidad de sector tiene el mismo valor en todos los puntos de la órbita. Cuando el planeta está cerca del Sol, r es pequeña y $d\theta/dt$ es grande; cuando el planeta está lejos del Sol, r es grande y $d\theta/dt$ es pequeña.

Para saber por qué la segunda ley de Kepler es consecuencia de las leyes de Newton, expresamos dA/dt en términos del vector de velocidad $\vec{v}$ del planeta P. La componente de $\vec{v}$ perpendicular a la línea radial es $v_\perp = v \operatorname{sen}\phi$. Por la figura 12.20b, el desplazamiento en la dirección de $v_\perp$ durante el tiempo dt es $r\,d\theta$, de modo que tenemos $v_\perp = r\,d\theta/dt$. Usando esta relación en la ecuación (12.14), obtenemos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}rv\operatorname{sen}\phi \qquad \text{(velocidad de sector)} \tag{12.15}$$

De esta manera, rv sen ϕ es la magnitud del producto vectorial $\vec{r} \times \vec{v}$, que es $1/m$ veces el momento angular $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ del planeta con respecto al Sol. Tenemos, entonces,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{r} \times m\vec{v}| = \frac{L}{2m} \tag{12.16}$$

Por lo tanto, la segunda ley de Kepler establece que la velocidad de sector es constante, ¡e implica que el momento angular sea constante!

Es fácil saber por qué el momento angular del planeta *debe* ser constante. Según la ecuación (10.26), la rapidez de cambio de $\vec{L}$ es igual a la torca debida a la fuerza gravitacional $\vec{F}$ actúa sobre el planeta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

En nuestra situación, $\vec{r}$ es el vector del Sol al planeta, y la fuerza $\vec{F}$ está dirigida del planeta al Sol. Por lo tanto, estos vectores siempre están en la misma línea y su producto vectorial $\vec{r} \times \vec{F}$ es cero, y $d\vec{L}/dt = \mathbf{0}$. Esta conclusión no depende del comportamiento según $1/r^2$ de la fuerza; se conserva el momento angular para *cualquier* fuerza que siempre actúa sobre la línea que une la partícula a un punto fijo, denominada *fuerza central*. (La primera y la tercera leyes de Kepler *sólo* son válidas para fuerzas $1/r^2$.)

La conservación del momento angular también explica por qué la órbita está en un plano. El vector $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ siempre es perpendicular al plano de los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$; dado que $\vec{L}$ es constante en magnitud *y* dirección, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ siempre están en el mismo plano, que es el plano de la órbita del planeta.

Tercera ley de Kepler

Ya dedujimos la tercera ley de Kepler para el caso específico de órbitas circulares. La ecuación (12.12) muestra que el periodo de un satélite o planeta en una órbita circular es proporcional al radio de la órbita elevado a la potencia $\frac{3}{2}$. Newton pudo demostrar que esta misma relación se cumple para una órbita *elíptica*, sustituyendo el radio r por el eje semimayor a:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_S}} \quad \text{(órbita elíptica alrededor del Sol)} \tag{12.17}$$

Como el planeta está en órbita alrededor del Sol, no de la Tierra, en la ecuación (12.12) sustituimos la masa de la Tierra m_E por la masa del Sol m_S. Observe que el periodo no depende de la excentricidad e. Un asteroide en una órbita elíptica alargada con eje semimayor a tiene el mismo periodo orbital que un planeta en una órbita circular de radio a. La diferencia clave es que la rapidez del asteroide varía a lo largo de su órbita elíptica (figura 12.20c), mientras que la rapidez del planeta es constante en su órbita circular.

Ejemplo conceptual 12.7 Rapideces orbitales

¿En qué punto de una órbita elíptica (figura 12.19) un planeta tiene la mayor rapidez?

SOLUCIÓN

La energía mecánica se conserva al desplazarse el planeta en su órbita. La energía cinética del planeta, $K = \frac{1}{2}mv^2$ es máxima cuando la energía potencial $U = -Gm_Sm/r$ es mínima (es decir, la más negativa; véase la figura 12.11), lo cual se da cuando r es mínima. Por lo tanto, la rapidez v es máxima en el perihelio.

Aquí podemos aprovechar lo que nos dice la intuición acerca de los cuerpos que caen. Al caer el planeta hacia el Sol, adquiere rapidez, y su rapidez es máxima cuando está más cerca del Sol. Por el mismo razonamiento, el planeta se frena al alejarse del Sol, y su rapidez es mínima en el afelio.

Ejemplo 12.8 Tercera ley de Kepler

El asteroide Palas tiene un periodo orbital de 4.62 años y una excentricidad orbital de 0.233. Calcule el eje semimayor de su órbita.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la tercera ley de Kepler, la cual relaciona el periodo T con el eje semimayor a para un objeto (como un asteroide) que describe una órbita.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (12.17) para determinar a a partir del periodo dado T. Observe que no necesitamos el valor de la excentricidad.

EJECUTAR: Por la ecuación (12.17), $a^{3/2} = \left(\sqrt{Gm_S}\,T\right)/2\pi$. Para despejar a, elevamos esta expresión a la potencia $\frac{2}{3}$:

$$a = \left(\frac{Gm_S T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Puesto que $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$ y $m_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg (la masa del Sol, del Apéndice F) está dada en unidades del SI, deberemos expresar el periodo T en segundos, y no en años, empleando un factor de conversión del Apéndice E: $T = (4.62\ \text{años})(3.156 \times 10^7\ \text{s/año}) = 1.46 \times 10^8$ s. Con este valor, obtenemos $a = 4.15 \times 10^{11}$ m. (Haga el cálculo para comprobarlo.)

EVALUAR: Nuestro resultado es intermedio entre los ejes semimayores de Marte y Júpiter (véase el Apéndice F). Efectivamente, la mayoría de los asteroides conocidos están en un "cinturón de asteroides" entre las órbitas de esos dos planetas.

Como nota histórica, Palas se descubrió apenas en 1802, casi dos siglos después de la publicación de la tercera ley de Kepler. Aunque Kepler dedujo sus tres leyes a partir de los movimientos de los cinco planetas (aparte de la Tierra) que se conocían en ese entonces, dichas leyes han demostrado ser válidas para todos los planetas, asteroides y cometas que se descubrieron posteriormente en órbita alrededor del Sol.

Ejemplo 12.9 El cometa Halley

El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alargada alrededor del Sol (figura 12.21). En el perihelio, el cometa está a 8.75×10^7 km del Sol; en el afelio, está a 5.26×10^9 km del Sol. Calcule el eje semimayor, la excentricidad y el periodo de la órbita.

SOLUCIÓN

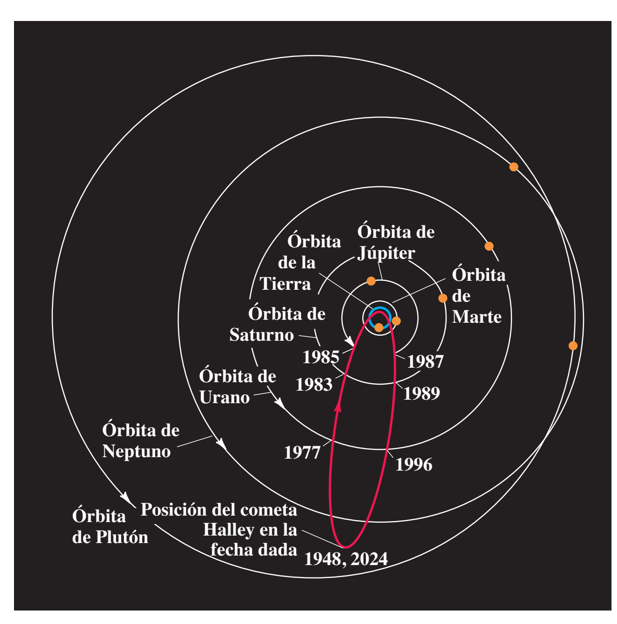
IDENTIFICAR: Dadas las distancias en el perihelio y el afelio, podemos obtener el eje semimayor a, la excentricidad e y el periodo de la órbita T (que se relaciona con el eje semimayor por la tercera ley de Kepler).

PLANTEAR: La figura 12.19 nos indica cómo calcular a y e a partir de las distancias en el perihelio y el afelio. Una vez que conozcamos el valor de a, podremos obtener el periodo orbital con la ecuación (12.17).

EJECUTAR: Por la figura 12.19, la longitud del eje mayor es la suma de las distancias cometa-Sol en el perihelio y en el afelio. La longitud de dicho eje es $2a$, así que

$$a = \frac{8.75 \times 10^7\ \text{km} + 5.26 \times 10^9\ \text{km}}{2} = 2.67 \times 10^9\ \text{km}$$

a)



b)



12.21 a) Órbita del cometa Halley. b) El cometa en 1986. En el corazón del cometa hay un cuerpo helado, llamado núcleo, de unos 10 km de diámetro. Cuando el cometa se acerca el Sol, el calor de éste hace que el núcleo se evapore parcialmente. El material evaporado forma la cola, que puede tener decenas de millones de kilómetros de longitud.

continúa

Si analizamos la figura 12.19 veremos que la distancia cometa-Sol en el perihelio está dada por

$$a - ea = a(1 - e)$$

Conocemos esta distancia (8.75×10^7 km), así que la excentricidad es

$$e = 1 - \frac{8.75 \times 10^7 \text{ km}}{a} = 1 - \frac{8.75 \times 10^7 \text{ km}}{2.67 \times 10^9 \text{ km}} = 0.967$$

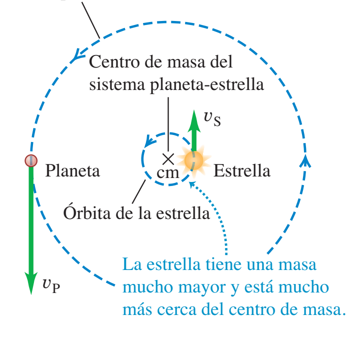
El periodo está dado por la ecuación (12.17):

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_S}} = \frac{2\pi(2.67 \times 10^{12}\text{ m})^{3/2}}{\sqrt{(6.67 \times 10^{-11}\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30}\text{ kg})}}$$
$$= 2.38 \times 10^9 \text{ s} = 75.5 \text{ años}$$

EVALUAR: La excentricidad es casi 1, así que la órbita del cometa es muy alargada (véase la figura 12.21a). El cometa Halley estuvo en su perihelio a principios de 1986; llegará otra vez al perihelio un periodo después, en el año 2061.

Movimientos planetarios y el centro de masa

12.22 Una estrella y su planeta están en órbita alrededor de su centro de masa común.



Hemos supuesto que, mientras un planeta o un cometa se mueven alrededor del Sol, éste permanece absolutamente estacionario. Desde luego, ello no puede ser correcto; el Sol ejerce una fuerza gravitacional sobre el planeta, así que éste debe ejercer sobre el Sol una fuerza gravitacional de la misma magnitud pero dirección opuesta. De hecho, *tanto* el Sol *como* el planeta giran alrededor de su centro de masa común (figura 12.22). No obstante, nuestro error al despreciar este efecto es pequeño; la masa del Sol es unas 750 veces mayor que la masa combinada de todos los planetas, de modo que el centro de masa del sistema solar no está lejos del centro del Sol. Resulta interesante que los astrónomos han aprovechado este efecto para detectar la presencia de planetas en órbita alrededor de otras estrellas. Los telescopios más sensibles pueden detectar el "bamboleo" aparente de una estrella, en órbita alrededor del centro de masa común de la estrella y un planeta acompañante que no puede verse. (La luz reflejada por los planetas es demasiado tenue como para observarse directamente.) Analizando los detalles de esos "bamboleos", los astrónomos han descubierto planetas en órbita alrededor de más de un centenar de estrellas.

Los astrónomos modernos usan a diario los resultados del análisis de los movimientos planetarios efectuado por Newton. No obstante, el resultado más notable de la labor de Newton es que los movimientos de los cuerpos celestes obedecen las *mismas* leyes que los cuerpos en la Tierra. Esta *síntesis newtoniana*, como se ha llamado, es uno de los grandes principios unificadores de la ciencia y afecta profundamente la forma en que vemos el Universo: no como un reino de misterio impenetrable, sino como una extensión directa del mundo cotidiano, sujeto al estudio y al cálculo científicos.

Evalúe su comprensión de la sección 12.5 La órbita del cometa X tiene un eje semimayor cuatro veces más grande que el eje semimayor del cometa Y. Calcule la razón del periodo orbital de X con respecto al periodo orbital de Y. i) 2; ii) 4; iii) 8; iv) 16; v) 32; vi) 64.



*12.6 Distribuciones esféricas de masa

Hemos usado, sin demostrarla, la afirmación de que la interacción gravitacional entre dos distribuciones de masa esféricamente simétricas es la misma que sería si la masa de cada una estuviera concentrada en su centro. Ya estamos en condiciones de demostrarlo. Newton buscó varios años una demostración, y aplazó la publicación de la ley de la gravitación hasta que la encontró.

Veamos lo que haremos. En vez de comenzar con dos masas esféricamente simétricas, atacaremos el problema más sencillo de una masa puntual m que interactúa con un cascarón esférico delgado con masa total M. Demostraremos que, si m está fuera de la esfera, la *energía potencial* asociada a esta interacción gravitacional es la que sería si M estuviera concentrada en el centro de la esfera. En la sección 7.4 vimos que la fuerza es la derivada negativa de la energía potencial, así que la *fuerza* que actúa sobre m es la misma que para una masa puntual M. Toda distribución esféricamente simétrica de masa puede considerarse formada por muchos cascarones esféricos concéntricos, así que nuestro resultado será válido para *cualquier* M esféricamente simétrica.

Una masa puntual afuera de un cascarón esférico

Comenzamos por considerar un anillo en la superficie del cascarón (figura 12.23a), centrado en la línea del centro del cascarón a m. Hacemos esto porque todas las partículas del anillo están a la misma distancia s de la masa puntual m. Por la ecuación (12.9), la energía potencial de la interacción entre la Tierra (masa m_E) y una masa puntual m separada una distancia r es $U = -Gm_E m/r$. Cambiando la notación en esta expresión vemos que, en la situación de la figura 12.23a, la energía potencial de interacción entre m y una partícula de masa m_i del anillo está dada por

$$U_i = -\frac{Gmm_i}{s}$$

Para calcular la energía potencial de interacción entre m y el anillo entero de masa $dM = \sum_i m_i$, sumamos esta expresión de U_i para todas las partículas del anillo. Llamamos a esta energía potencial dU, y vemos que

$$dU = \sum_i U_i = \sum_i \left(-\frac{Gmm_i}{s}\right) = -\frac{Gm}{s}\sum_i m_i = -\frac{Gm\,dM}{s} \tag{12.18}$$

Para continuar, necesitamos conocer la masa dM del anillo, que podemos calcular con un poco de geometría. El radio del cascarón es R, así que, en términos del ángulo ϕ de la figura, el radio del anillo es $R\,\text{sen}\,\phi$, y su circunferencia es $2\pi R\,\text{sen}\,\phi$. La anchura del anillo es $R\,d\phi$, y su área dA es aproximadamente su anchura multiplicada por su circunferencia:

$$dA = 2\pi R^2 \,\text{sen}\,\phi\, d\phi$$

La relación entre la masa del anillo dM y la masa total M del cascarón es la misma que hay entre el área dA del anillo y el área total $A = 4\pi R^2$ del cascarón:

$$\frac{dM}{M} = \frac{2\pi R^2 \,\text{sen}\,\phi\, d\phi}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\phi\, d\phi \tag{12.19}$$

Ahora despejamos dM de esta ecuación y sustituimos el resultado en la ecuación (12.18) para obtener la energía potencial de interacción entre la masa puntual m y el anillo:

$$dU = -\frac{GMm\,\text{sen}\,\phi\, d\phi}{2s} \tag{12.20}$$

La energía potencial total de interacción entre la masa puntual y el *cascarón* es la integral de la ecuación (12.20) para toda la esfera, desde $\phi = 0$ hasta $\phi = \pi$ (¡*no* 2π!) y desde $s = r - R$ hasta $s = r + R$. Para realizar la integración, debemos expresar el integrando en términos de una sola variable; elegimos s. Para expresar ϕ y $d\phi$ en términos de s necesitamos otro poco de geometría. En la figura 12.23b es evidente que s es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos $(r - R\cos\phi)$ y $R\,\text{sen}\,\phi$, así que, por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} s^2 &= (r - R\cos\phi)^2 + (R\,\text{sen}\,\phi)^2 \\ &= r^2 - 2rR\cos\phi + R^2 \end{aligned} \tag{12.21}$$

Diferenciamos ambos miembros:

$$2s\,ds = 2rR\,\text{sen}\,\phi\, d\phi$$

Ahora dividimos esto entre $2rR$ y sustituimos el resultado en la ecuación (12.20):

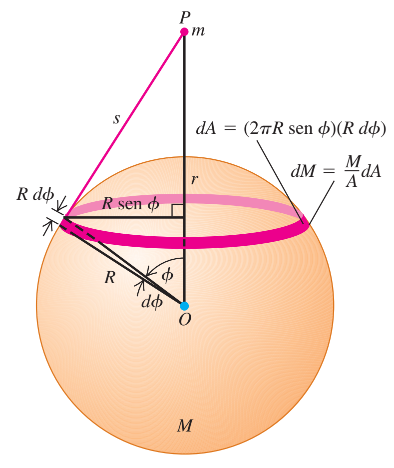
$$dU = -\frac{GMm}{2s}\frac{s\,ds}{rR} = -\frac{GMm}{2rR}\,ds \tag{12.22}$$

Ahora podemos integrar la ecuación (12.22), recordando que s varía desde $r - R$ hasta $r + R$:

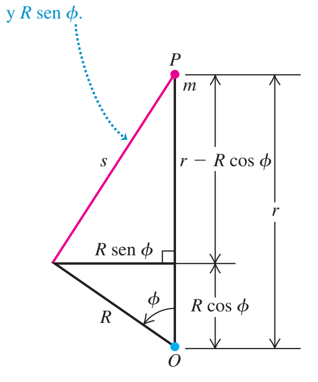
$$U = -\frac{GMm}{2rR}\int_{r-R}^{r+R} ds = -\frac{GMm}{2rR}\left[(r + R) - (r - R)\right] \tag{12.23}$$

12.23 Cálculo de la energía potencial gravitacional de interacción entre una masa puntual m afuera de un cascarón esférico y un anillo en la superficie del cascarón.

a) Geometría de la situación



b) La distancia s es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos $(r - R\cos\phi)$ y R sen ϕ.



Por último, tenemos

$$U = -\frac{GMm}{r} \qquad \text{(masa puntual } m \text{ afuera de un cascarón esférico } M\text{)} \qquad (12.24)$$

Esto es igual a la energía potencial de dos masas puntuales m y M a una distancia r, así que hemos demostrado que la energía potencial gravitacional del cascarón esférico M y la masa puntual m a cualquier distancia r es la misma que sería si fueran masas puntuales. Como la fuerza está dada por $F_r = -dU/dr$, la fuerza es la misma.

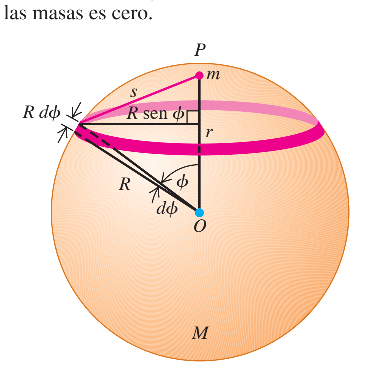
La fuerza gravitacional entre distribuciones esféricas de masa

Cualquier distribución esféricamente simétrica de masa puede considerarse como una combinación de cascarones esféricos concéntricos. Por el principio de superposición de las fuerzas, lo que es válido para un cascarón es válido para la combinación. Por lo tanto, hemos demostrado la mitad de lo que nos propusimos: que la interacción gravitacional entre una distribución esféricamente simétrica de masa y una masa puntual es la misma que sería si toda la masa de la distribución estuviera concentrada en su centro.

La otra mitad consiste en demostrar que *dos* distribuciones esféricamente simétricas de masa interactúan como si fueran puntos. Esto es más fácil. En la figura 12.23a, las fuerzas que los dos cuerpos ejercen entre sí son un par acción-reacción, y obedecen la tercera ley de Newton. De esta manera, hemos demostrado que la fuerza que m ejerce *sobre* la esfera M es la que ejercería si M fuera un punto. Pero si ahora sustituimos m por una distribución esféricamente simétrica de masa centrada en la posición de m, la fuerza gravitacional que actúa sobre cualquier parte de M es la misma que antes, y lo mismo se cumple para la fuerza total. Esto completa la demostración.

Masa puntual dentro de un cascarón esférico

12.24 Si una masa puntual m está *dentro* de un cascarón esférico uniforme de masa M, la energía potencial es la misma sin importar en qué punto del interior del cascarón esté la masa puntual. La fuerza de la interacción gravitacional mutua de las masas es cero.



Supusimos al principio que la masa puntual m estaba afuera del cascarón esférico, así que nuestra demostración sólo es válida si m está afuera de una distribución esféricamente simétrica de masa. Si m está *adentro* de un cascarón esférico, la geometría es la que se muestra en la figura 12.24. El análisis es el mismo; las ecuaciones (12.18) a (12.22) siguen siendo válidas; sin embargo, en la ecuación (12.23) los límites de integración deben cambiarse a $R - r$ y $R + r$. De esta manera,

$$U = -\frac{GMm}{2rR}\int_{R-r}^{R+r} ds = -\frac{GMm}{2rR}[(R + r) - (R - r)] \qquad (12.25)$$

y el resultado final es

$$U = -\frac{GMm}{R} \qquad \text{(masa puntual } m \text{ dentro de un cascarón esférico } M\text{)} \qquad (12.26)$$

Compare este resultado con la ecuación (12.24): en vez de tener r, la distancia entre m y el centro de M, en el denominador, tenemos R, el radio del cascarón. Esto implica que en la ecuación (12.26) U no depende de r y por ello tiene el mismo valor en todo el interior del cascarón. Si m se mueve dentro del cascarón, no se efectúa trabajo sobre ella, por lo que la fuerza que actúa sobre m en cualquier punto dentro del cascarón debe ser cero.

En términos más generales, en cualquier punto del interior de una distribución esféricamente simétrica de masa (no necesariamente hueca), a una distancia r del centro, la fuerza gravitacional que actúa sobre una masa puntual m es la misma que existiría, si elimináramos toda la masa situada a una distancia mayor que r del centro y concentráramos la masa restante en el centro.

Ejemplo 12.10 "Viaje al centro de la Tierra"

Suponga que usted perfora un agujero que atraviesa la Tierra (radio R_E, masa m_E) siguiendo un diámetro y deja caer un saco de correo (masa m) por él. Deduzca una expresión para la fuerza gravitacional que actúa sobre el saco en función de su distancia r al centro. Suponga que la densidad de la Tierra es uniforme (un modelo no muy realista; véase la figura 12.9).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como vimos, la fuerza gravitacional a una distancia r del centro sólo depende de la masa M dentro de una esfera de radio r (figura 12.25). La masa afuera de este radio no tiene efecto en el saco de correo.

PLANTEAR: La fuerza gravitacional sobre el saco es la misma que si toda la masa M dentro del radio r estuviera concentrada en el centro de la Tierra. La masa de una esfera uniforme es proporcional al volumen de la esfera, que es $\frac{4}{3}\pi r^3$ para la esfera de radio r y $\frac{4}{3}\pi R_E^3$ para toda la Tierra.

EJECUTAR: La razón de la masa M de la esfera de radio r y la masa terrestre, m_E, es

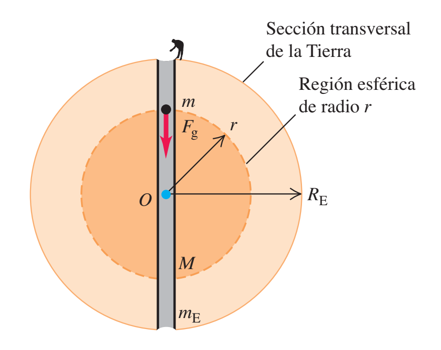
$$\frac{M}{m_E} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} = \frac{r^3}{R_E^3}, \qquad \text{así que} \qquad M = m_E \frac{r^3}{R_E^3}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre m está dada por

$$F_g = \frac{GMm}{r^2} = \frac{Gm}{r^2}\left(m_E \frac{r^3}{R_E^3}\right) = \frac{Gm_E m}{R_E^3} r$$

EVALUAR: Dentro de esta esfera de densidad uniforme, F_g es *directamente proporcional* a la distancia r, no a $1/r^2$ como afuera de la esfera.

12.25 Agujero por el centro de la Tierra (que suponemos uniforme). Si un objeto está a una distancia r del centro, sólo la masa dentro de una esfera de radio r ejerce una fuerza gravitacional neta sobre él.



En la superficie, donde $r = R_E$, la expresión anterior da $F_g = Gm_E m/R_E^2$, como es de esperarse. En el siguiente capítulo aprenderemos a calcular el tiempo que el saco tardaría en llegar al otro lado de la Tierra suponiendo densidad uniforme.

Evalúe su comprensión de la sección 12.6 En la novela clásica de ciencia ficción *En el centro de la Tierra*, escrita en 1913 por Edgar Rice Burroughs, ciertos exploradores descubren que la Tierra es una esfera hueca y que toda una civilización vive en el interior de la esfera. ¿Sería posible pararse y caminar en la superficie interior de un planeta hueco que no gira?

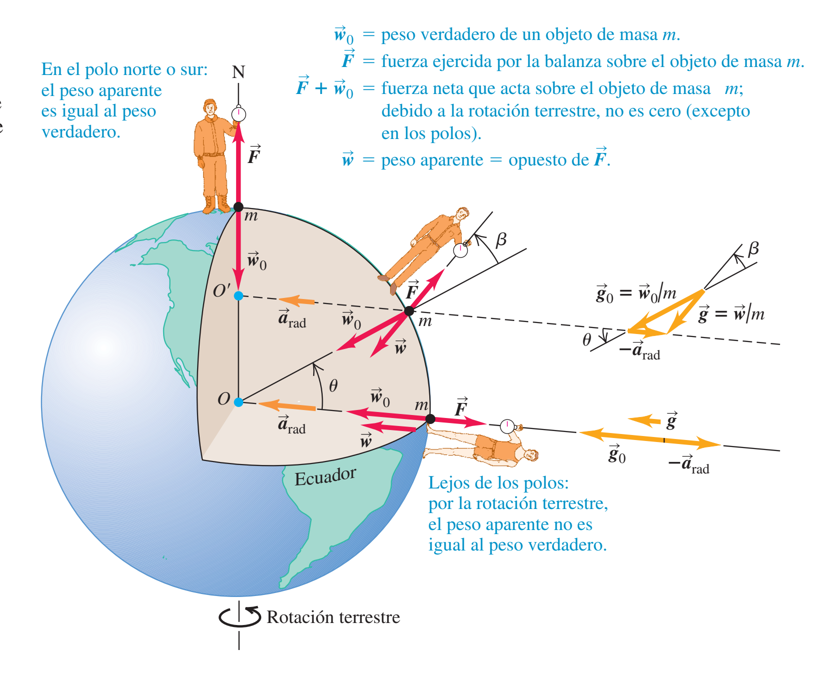
*12.7 Peso aparente y rotación terrestre

Puesto que la Tierra gira sobre su eje, no es precisamente un marco de referencia inercial. Por tal razón, el peso aparente de un cuerpo en la Tierra no es exactamente igual a la atracción gravitacional terrestre, a la que llamaremos **peso verdadero** $\vec{w}_0$ del cuerpo. La figura 12.26 es una vista recortada de la Tierra donde se muestran tres observadores. Cada uno sostiene una balanza de resorte, de la cual cuelga un cuerpo de masa m. Cada balanza aplica una fuerza de tensión $\vec{F}$ al cuerpo colgante, y la lectura de cada balanza es la magnitud F de dicha fuerza. Si los observadores no están conscientes de la rotación terrestre, *piensan* que la lectura de la báscula es igual al peso del cuerpo porque creen que éste está en equilibrio. Así, cada observador piensa que a la tensión $\vec{F}$ debe oponerse una fuerza igual y en sentido contrario $\vec{w}$, a la que llamamos **peso aparente**. Pero si los cuerpos giran junto con la Tierra, *no* están precisamente en equilibrio. Nuestro problema es encontrar la relación entre el peso aparente $\vec{w}$, y el verdadero $\vec{w}_0$.

Si suponemos que la Tierra es esféricamente simétrica, el peso verdadero $\vec{w}_0$ tendrá magnitud $Gm_E m/R_E^2$, donde m_E y R_E son la masa y el radio de la Tierra. Este valor es el mismo para todos los puntos en la superficie terrestre. Si podemos tomar el centro de la Tierra como el origen de un sistema inercial de coordenadas, el cuerpo que está en el polo norte realmente *está* en equilibrio en un sistema inercial, y la lectura de la balanza de resorte de ese observador es igual a w_0. En cambio, el cuerpo en el ecuador se mueve en un círculo de radio R_E con rapidez v, y debe haber una fuerza neta hacia adentro igual a masa multiplicada por la aceleración centrípeta:

$$w_0 - F = \frac{mv^2}{R_E}$$

12.26 Excepto en los polos, la lectura de una báscula en la que se pesa un objeto (el *peso aparente*) es menor que la fuerza de atracción gravitacional que actúa sobre el objeto (el *peso verdadero*). Ello se debe a que se requiere una fuerza neta que proporcione la aceleración centrípeta, pues el objeto gira junto con la Tierra. Por claridad, en el dibujo se exagera considerablemente el ángulo β entre los vectores de peso verdadero y peso aparente.



Por lo tanto, la magnitud del peso aparente (igual a la magnitud de F) es

$$w = w_0 - \frac{mv^2}{R_E} \qquad \text{(en el ecuador)} \tag{12.27}$$

Si la Tierra no girara y el cuerpo se soltara, éste tendría una aceleración de caída libre $g_0 = w_0/m$. Como la Tierra *sí* gira, la aceleración real del cuerpo que cae relativa al observador en el ecuador es $g = w/m$. Dividiendo la ecuación (12.27) entre m y usando estas relaciones, obtenemos

$$g = g_0 - \frac{v^2}{R_E} \qquad \text{(en el ecuador)}$$

Para evaluar v^2/R_E, observamos que, en 86,164 s, un punto en el ecuador se mueve una distancia igual a la circunferencia de la Tierra, $2\pi R_E = 2\pi(6.38 \times 10^6\text{ m})$. (El día solar, 86,400 s, es $\frac{1}{365}$ más largo porque, en un día, la Tierra también recorre $\frac{1}{365}$ de su órbita alrededor del Sol.) Entonces,

$$v = \frac{2\pi(6.38 \times 10^6\text{ m})}{86,164\text{ s}} = 465\text{ m/s}$$

$$\frac{v^2}{R_E} = \frac{(465\text{ m/s})^2}{6.38 \times 10^6\text{ m}} = 0.0339\text{ m/s}^2$$

Así, para una Tierra esféricamente simétrica, la aceleración debida a la gravedad debería ser cerca de 0.03 m/s^2 menor en el ecuador que en los polos.

En puntos intermedios entre el ecuador y los polos, el peso verdadero $\vec{w}_0$ y la aceleración centrípeta no están en la misma línea, y necesitamos escribir una ecuación vectorial correspondiente a la ecuación (12.27). Por la figura 12.26, es evidente que la ecuación apropiada es

$$\vec{w} = \vec{w}_0 - m\vec{a}_{rad} = m\vec{g}_0 - m\vec{a}_{rad} \tag{12.28}$$

La diferencia en las magnitudes de g y g_0 está entre cero y 0.0339 m/s^2. Como se aprecia en la figura 12.26, la *dirección* del peso aparente difiere de la dirección hacia el centro de la Tierra en un ángulo pequeño β, que es 0.1° o menos.

Tabla 12.1 Variaciones de g con la latitud y la elevación

Estación	Latitud norte	Elevación (m)	$g\,(\mathrm{m/s^2})$
Zona del Canal	09°	0	9.78243
Jamaica	18°	0	9.78591
Bermuda	32°	0	9.79806
Denver	40°	1638	9.79609
Pittsburgh, Pa.	40.5°	235	9.80118
Cambridge, Mass.	42°	0	9.80398
Groenlandia	70°	0	9.82534

La tabla 12.1 da los valores de g en varios lugares, mostrando las variaciones con la latitud. También hay otras variaciones pequeñas debidas a que la Tierra no tiene una simetría esférica perfecta, variaciones locales en la densidad y diferencias de elevación.

Peso aparente e ingravidez aparente

Nuestro análisis del peso aparente también puede aplicarse al fenómeno de la ingravidez aparente en las naves espaciales en órbita, que describimos en la sección 12.4. Los cuerpos dentro de la nave *tienen* peso; la atracción gravitacional de la Tierra sigue actuando sobre ellos igual que si estuvieran en reposo relativos a la Tierra. El peso aparente de un cuerpo en una nave está dado también por la ecuación (12.28):

$$\vec{w} = \vec{w}_0 - m\vec{a}_{\text{rad}} = m\vec{g}_0 - m\vec{a}_{\text{rad}}$$

Sin embargo, para una nave en órbita, así como para un cuerpo dentro de la nave, la aceleración $\vec{a}_{\text{rad}}$ hacia el centro de la Tierra es igual al valor de la aceleración de la gravedad $\vec{g}_0$ en la posición de la nave. Por lo tanto,

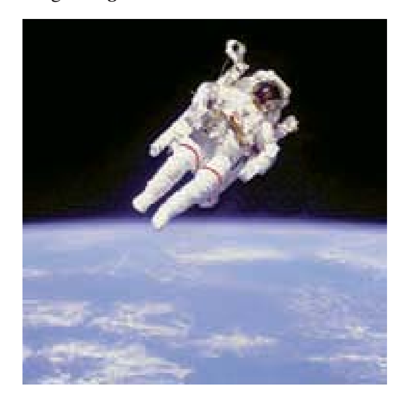
$$\vec{g}_0 = \vec{a}_{\text{rad}}$$

y el peso aparente es

$$\vec{w} = \mathbf{0}$$

Esto es a lo que nos referimos al decir que un astronauta u otro cuerpo en una nave aparentemente no tienen peso. Observe que no supusimos nada acerca de la forma de la órbita; como dijimos en la sección 12.4, un astronauta carecerá de peso aparente sea cual fuere su órbita (figura 12.27).

12.27 Sobre este astronauta en órbita actúa la gravedad terrestre, pero él *siente* que no tiene peso porque su aceleración es igual a $\vec{g}$.



Evalúe su comprensión de la sección 12.7 Imagine un planeta que tiene la misma masa y radio que la Tierra; no obstante, hace 10 rotaciones durante el tiempo en que la Tierra hace una. ¿Cuál sería la diferencia entre la aceleración debida a la gravedad en el ecuador del planeta y la aceleración debida a la gravedad en sus polos? i) 0.00339 $\mathrm{m/s^2}$; ii) 0.0339 $\mathrm{m/s^2}$; iii) 0.339 $\mathrm{m/s^2}$; iv) 3.39 $\mathrm{m/s^2}$.

MP

12.8 Agujeros negros

El concepto de agujero negro es una de las consecuencias más interesantes y desconcertantes de la teoría gravitacional moderna, pero la idea básica puede entenderse con base en los principios newtonianos.

La rapidez de escape de una estrella

Pensemos primero en las propiedades de nuestro Sol. Su masa $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg y radio $R = 6.96 \times 10^{8}$ m son mucho mayores que los de cualquier planeta pero, en comparación con otras estrellas, nuestro Sol no es excepcionalmente masivo. ¿Qué

densidad media ρ tiene el Sol? Podemos calcularla como hicimos para la Tierra en la sección 12.2:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(6.96 \times 10^8\ \text{m})^3}$$
$$= 1410\ \text{kg/m}^3$$

La temperatura del Sol varía entre 5800 K (unos 5500°C o 10,000°F) en la superficie y 1.5×10^7 K (unos 2.7×10^7°F) en el interior, así que seguramente no contiene sólidos ni líquidos. No obstante, la atracción gravitacional junta los átomos de gas hasta hacer al Sol, en promedio, 41% más denso que el agua y unas 1200 veces más denso que el aire que respiramos.

Veamos ahora la rapidez de escape de un cuerpo en la superficie del Sol. En el ejemplo 12.5 (sección 12.3), vimos que la rapidez de escape de la superficie de una masa esférica de masa M y radio R es $v = \sqrt{2GM/R}$. Podemos relacionar esto con la densidad media. Sustituyendo $M = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ en la expresión para la rapidez de escape:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}}R \qquad (12.29)$$

Con cualquier forma de esta ecuación, podemos calcular la rapidez de escape para un cuerpo en la superficie solar: $v = 6.18 \times 10^5$ m/s (cerca de 2.2 millones de km/h o 1.4 millones de mi/h). Este valor, que es cerca de 1/500 de la rapidez de la luz, es independiente de la masa del cuerpo que escapa; sólo depende de la masa y el radio (o la densidad media y el radio) del Sol.

Consideremos ahora diversas estrellas con la misma densidad media ρ y diferentes radios R. La ecuación (12.29) muestra que, para un valor dado de ρ, la rapidez de escape v es directamente proporcional a R. En 1783 el astrónomo aficionado John Mitchell señaló que, si un cuerpo con la misma densidad media que el Sol tuviera un radio 500 veces mayor, la magnitud de su rapidez de escape sería mayor que la rapidez de la luz c. Al apuntar que "toda la luz emitida de semejante cuerpo tendría que regresar a él", Mitchell se convirtió en la primera persona en sugerir la existencia de lo que ahora llamamos **agujero negro**, un objeto que ejerce tal fuerza gravitacional sobre otros cuerpos que ni siquiera pueden emitir su propia luz.

Agujeros negros, el radio de Schwarzschild y el horizonte de eventos

La primera expresión para la rapidez de escape de la ecuación (12.29) también sugiere que un cuerpo de masa M actúa como agujero negro, si su radio R es menor o igual que cierto radio crítico. ¿Cómo podemos determinar dicho radio crítico? Podríamos pensar que se puede determinar su valor con sólo hacer $v = c$ en la ecuación (12.29). De hecho, esto sí da el resultado correcto, pero sólo porque dos errores se compensan. La energía cinética de la luz *no* es $mc^2/2$, y la energía potencial gravitacional cerca de un agujero negro *no* está dada por la ecuación (12.9). En 1916 Karl Schwarzschild usó la teoría general de la relatividad de Einstein (que en parte es una generalización y extensión de la teoría gravitacional newtoniana) para deducir una expresión para el radio crítico R_S, llamado ahora **radio de Schwarzschild**. El resultado es el mismo que si hubiéramos igualado v a c en la ecuación (12.29):

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}}$$

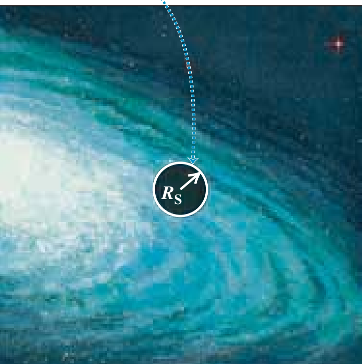
Despejando el radio de Schwarzschild R_S, tenemos

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \qquad \text{(radio de Schwarzschild)} \qquad (12.30)$$

a) Si el radio R de un cuerpo es mayor que el radio de Schwarzschild R_S, la luz puede escapar de la superficie del cuerpo.



b) Si toda la masa del cuerpo está dentro del radio R_S, tal cuerpo es un agujero negro: ninguna luz puede escapar de él.



Gravedad que actúa sobre la luz que escapa y se "desplaza al rojo" hacia longitudes de onda mayores.

12.28 a) Un cuerpo con radio R mayor que el radio de Schwarzschild R_S. b) Si el cuerpo colapsa a un radio menor que R_S, es un agujero negro con una rapidez de escape mayor que la rapidez de la luz. La superficie de la esfera de radio R_S se denomina el horizonte de eventos del agujero negro.

Si un cuerpo esférico sin rotación con masa M tiene un radio menor que R_S, *nada* (ni siquiera la luz) podrá escapar de su superficie, y el cuerpo funcionará como agujero negro (figura 12.28). En este caso, todos los cuerpos que estén a menos de una distancia R_S del centro del agujero negro quedarán atrapados por su atracción gravitacional y no podrán escapar de él.

La superficie de la esfera con radio R_S que rodea a un agujero negro se denomina **horizonte de eventos** porque, como la luz no puede escapar del interior de la esfera, no podemos ver los eventos que ocurren ahí. Lo único que un observador afuera del horizonte de eventos puede conocer acerca de un agujero negro es su masa (por sus efectos gravitacionales sobre otros cuerpos), su carga eléctrica (por las fuerzas eléctricas que ejerce sobre otros cuerpos cargados) y su momento angular (porque un agujero negro en rotación tiende a arrastrar el espacio —y todo lo que contiene— junto con él). Toda la demás información acerca del cuerpo se pierde irremisiblemente cuando se colapsa dentro de su horizonte de eventos.

Ejemplo 12.11 Cálculos de agujeros negros

Las teorías astrofísicas sugieren que una estrella quemada puede colapsarse bajo su propia gravedad para formar un agujero negro, si su masa es de cuando menos tres masas solares. En tal caso, ¿qué radio tendría el horizonte de eventos?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El radio en cuestión es el radio de Schwarzschild.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (12.30) con un valor de M de tres masas solares, es decir, $M = 3\,(1.99 \times 10^{30}\text{ kg}) = 6.0 \times 10^{30}$ kg.

EJECUTAR: Por la ecuación (12.30):

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(6.0 \times 10^{30}\ \text{kg})}{(3.00 \times 10^8\ \text{m/s})^2}$$
$$= 8.9 \times 10^3\ \text{m} = 8.9\ \text{km}$$

que es menos de 6 millas.

EVALUAR: Si el radio de semejante objeto es exactamente igual al radio de Schwarzschild, la densidad media tiene el increíblemente alto valor de

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{6.0 \times 10^{30}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi(8.9 \times 10^3\ \text{m})^3}$$
$$= 2.0 \times 10^{18}\ \text{kg/m}^3$$

Esto es del orden de 10^{15} veces la densidad de la materia ordinaria en la Tierra y es comparable con la densidad de los núcleos atómicos. De hecho, una vez que el cuerpo se colapsa a un radio de R_S, nada puede evitar que se colapse más. Toda la masa se comprime a un solo punto llamado *singularidad* en el centro del horizonte de eventos. Este punto tiene volumen cero y por ende densidad *infinita*.

Visita a un agujero negro

En puntos alejados de un agujero negro, sus efectos gravitacionales son los mismos que los de cualquier cuerpo normal con la misma masa. Si el Sol se colapsara para formar un agujero negro, las órbitas de los planetas no se afectarían. Sin embargo, en

las cercanías del agujero negro las cosas son drásticamente distintas. Si el lector decidiera convertirse en un héroe de la ciencia y saltara a un agujero negro, quienes se quedaran atrás observarían varios efectos extraños al moverse usted hacia el horizonte de eventos, casi todos asociados con la relatividad general.

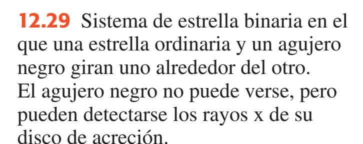
Si usted llevara un radiotransmisor para informar de sus experiencias, habría que resintonizar el receptor continuamente a frecuencias cada vez más bajas por el efecto denominado *desplazamiento gravitacional al rojo*. Junto con este desplazamiento, los observadores percibirían que los relojes de usted (electrónicos o biológicos) avanzarían cada vez más lentamente por el efecto llamado *dilatación del tiempo*. De hecho, a los observadores no les alcanzaría la vida para ver cómo usted llega al horizonte de eventos.

En su marco de referencia, usted llegaría al horizonte de eventos en un tiempo muy corto pero de forma un tanto desconcertante. Al caer con los pies por delante hacia el agujero negro, la atracción gravitacional sobre los pies sería mayor que sobre la cabeza, que estaría un poco más lejos del agujero. Las *diferencias* en la fuerza gravitacional que actúa sobre las distintas partes de su cuerpo serían suficientes para estirarlo a usted en la dirección hacia el agujero negro y comprimirlo en la dirección perpendicular. Estos efectos (llamados *fuerzas de marea*) separarían sus átomos y luego los desgarrarían, antes de que usted llegara al horizonte de eventos.

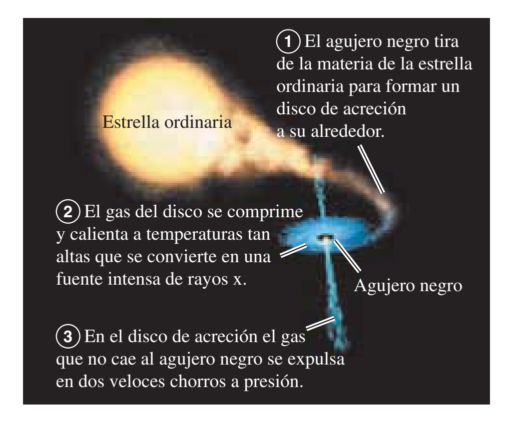
Detección de agujeros negros

Si la luz no puede escapar de un agujero negro, y si los agujeros negros son tan pequeños como sugiere el ejemplo 12.11, ¿cómo sabemos que tales cosas existen? La respuesta es que si hay gas o polvo cerca de un agujero negro, tenderá a formar un *disco de acreción* que girará en torno del agujero y caerá en él, como en un remolino (figura 12.29). La fricción dentro del material del disco hace que pierda energía mecánica y caiga en espiral hacia el agujero negro, comprimiéndose al hacerlo. Esto causa un calentamiento del material, como sucede con el aire comprimido en una bomba para bicicleta. Se pueden alcanzar temperaturas por encima de 10^6 K en el disco de acrecentamiento, de modo que no sólo se emite luz visible (como hacen los cuerpos al "rojo vivo" o al "blanco vivo"), sino también rayos x. Los astrónomos buscan estos rayos x (emitidos *antes* de que el material cruce el horizonte de eventos), para detectar la presencia de un agujero negro. Se han hallado varios candidatos prometedores, y los astrónomos han expresado una confianza considerable en la existencia de los agujeros negros.

La masa de los agujeros negros en sistemas de estrella binaria, como el de la figura 12.29, es unas cuantas veces mayor que la del Sol, y cada vez hay más pruebas de la existencia de *agujeros negros supermasivos* mucho mayores. Se cree que hay uno en el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, a unos 26,000 años luz de la Tierra en la dirección de la constelación Sagitario. Imágenes de alta definición del centro galáctico revelan estrellas que giran a más de 1500 km/s en torno a un objeto invisible que coincide con la posición de una fuente de ondas de radio llamada Sgr A* (figura



12.29 Sistema de estrella binaria en el que una estrella ordinaria y un agujero negro giran uno alrededor del otro. El agujero negro no puede verse, pero pueden detectarse los rayos x de su disco de acreción.



12.30). Al analizar estos movimientos, los astrónomos pueden inferir el periodo T y el eje semimayor a de la órbita de cada estrella. Así, se puede calcular la masa m_X del objeto invisible utilizando la tercera ley de Kepler en la forma que se da en la ecuación (12.17), sustituyendo la masa del Sol m_S por m_X:

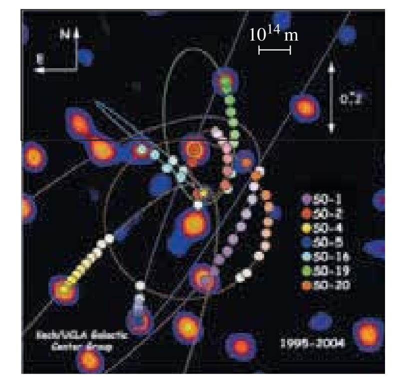
$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{Gm_X}} \qquad \text{así que} \qquad m_X = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

La conclusión es que el misterioso objeto oscuro en el centro de la galaxia tiene una masa de 7.3×10^{36} kg, es decir, 3.7 *millones* de veces la masa del Sol. Sin embargo, observaciones efectuadas con radiotelescopios revelan que su radio no es mayor que 10^{11} m, una distancia comparable a la que hay entre la Tierra y el Sol. Estas observaciones sugieren que tal objeto masivo y compacto es un agujero negro con un radio de Schwarzschild de 1.1×10^{10} m. Los astrónomos confían en mejorar la definición de sus observaciones a tal grado que, en unos pocos años, podrán ver el horizonte de eventos de ese agujero negro.

Otras líneas de investigación sugieren que podría haber agujeros negros aún más grandes, con más de 10^9 masas solares, en el centro de otras galaxias. Los estudios de observación y teóricos sobre agujeros negros siguen siendo un área de investigación vital y estimulante tanto en la física como en la astronomía.

Evalúe su comprensión de la sección 12.8 Si el Sol llegara a colapsarse para formar un agujero negro, ¿qué efecto tendría este suceso sobre la órbita de la Tierra? i) la órbita se encogería; ii) la órbita se expandiría; iii) la órbita permanecería del mismo tamaño.

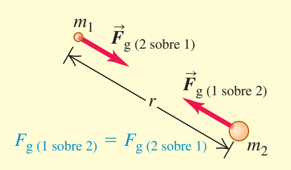
12.30 Esta imagen de color falso muestra los movimientos de estrellas en el centro de nuestra galaxia durante un periodo de nueve años. Un análisis de estas órbitas con la tercera ley de Kepler indica que las estrellas se mueven alrededor de un objeto invisible, cuya masa es de unas 3.7×10^6 veces la masa del Sol. La barra de escala indica una longitud de 10^{14} m (670 veces la distancia entre la Tierra y el Sol) a la distancia del centro galáctico.



CAPÍTULO 12 RESUMEN

Ley de Newton de la gravitación: Dos cuerpos *cualesquiera* con masas m_1 y m_2, separados por una distancia r, se atraen con fuerzas inversamente proporcionales a r^2. Tales fuerzas forman un par acción-reacción y obedecen la tercera ley de Newton. Si dos o más cuerpos ejercen fuerzas gravitacionales sobre un cuerpo dado, la fuerza gravitacional total que actúa sobre ese cuerpo es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por los otros cuerpos. La interacción gravitacional de cualquier distribución esféricamente simétrica de masa, como los planetas o las estrellas, es la misma que si toda la masa estuviera concentrada en el centro. (Véanse los ejemplos 12.1 a 12.3 y 12.10.)

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \qquad (12.1)$$



Fuerza gravitacional, peso y energía potencial gravitacional: El peso w de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre él por todos los demás cuerpos del Universo. Cerca de la superficie de la Tierra (masa m_E y radio R_E), el peso en esencia igual a la fuerza gravitacional de la Tierra sola. La energía potencial gravitacional U de dos masas m y m_E separadas por una distancia r es inversamente proporcional a r. La energía potencial nunca es positiva; es cero sólo cuando los dos cuerpos están infinitamente distantes entre sí. (Véanse los ejemplos 12.4 y 12.5.)

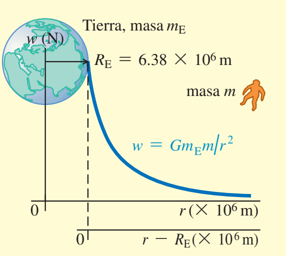
$$w = F_g = \frac{Gm_Em}{R_E^2} \qquad (12.3)$$

(peso en la superficie terrestre)

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2} \qquad (12.4)$$

(aceleración debida a la gravedad en la superficie terrestre)

$$U = -\frac{Gm_Em}{r} \qquad (12.9)$$



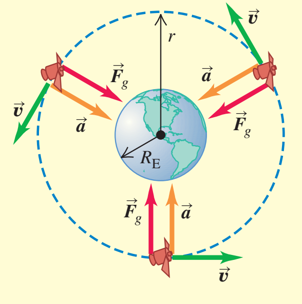
Órbitas: Si un satélite se mueve en una órbita circular, la atracción gravitacional de la Tierra proporciona la aceleración centrípeta. Las tres leyes de Kepler describen el caso más general: la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol o de un satélite alrededor de un planeta. (Véanse ejemplos 12.6 a 12.9.)

$$v = \sqrt{\frac{Gm_E}{r}}$$

(rapidez en órbita circular) (12.10)

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{Gm_E}} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{Gm_E}}$$

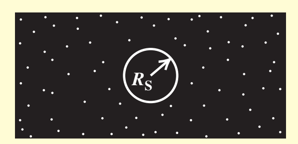
(periodo en órbita circular) (12.12)



Agujeros negros: Si una distribución esférica de masa sin rotación, con masa total M, tiene un radio menor que su radio de Schwarzschild, R_S, se clasifica como agujero negro. La interacción gravitacional impide que cualquier cosa, incluida la luz, escape de una esfera con radio R_S. (Véase el ejemplo 12.11.)

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

(radio de Schwarzschild) (12.30)



Si todo el cuerpo está dentro de su radio de Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$, el cuerpo es un agujero negro.

Términos clave

ley de la gravitación, *384*
constante gravitacional, *384*
energía potencial gravitacional, *391*
rapidez de escape, *391*
órbitas cerradas, *394*
órbitas abiertas, *394*
eje semimayor, *397*
excentricidad, *403*
peso verdadero, *403*
peso aparente, *403*
agujero negro, *406*
radio de Schwarzschild, *406*
horizonte de eventos, *407*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Cuanto menor sea el radio orbital r de un satélite, mayor será su rapidez orbital v (ecuación 12.10). Por lo tanto, una partícula cerca del borde interior de los anillos de Saturno tiene mayor rapidez que una partícula cerca del borde exterior de los anillos.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

12.1 Respuesta: v) Por la ecuación (12.1), la fuerza gravitacional del Sol (masa m_1) sobre un planeta (masa m_2) que está a una distancia r siempre tiene magnitud $F_g = Gm_1m_2/r^2$. En comparación con la Tierra, Saturno tiene un valor de r^2 que es $10^2 = 100$ veces más grande y un valor de m_2 que también es 100 veces mayor. Por lo tanto, la *fuerza* que el Sol ejerce sobre Saturno tiene la misma magnitud que la fuerza que el Sol ejerce sobre la Tierra. La *aceleración* de un planeta es igual a la fuerza neta dividida entre la masa del planeta: como Saturno tiene 100 veces más masa que la Tierra, su aceleración es $1/100$ la aceleración terrestre.

12.2 Respuestas: iii), i), ii), iv) Por la ecuación (12.4), la aceleración debida a la gravedad en la superficie de un planeta de masa m_P y radio R_P es $g_P = Gm_P/R_P^2$. Es decir, g_p es directamente proporcional a la masa del planeta e inversamente proporcional al cuadrado de su radio. Entonces, comparado con el valor de g en la superficie terrestre, el valor de g_p en cada planeta es de i) $2/2^2 = 1/2$; ii) $4/4^2 = 1/4$; iii) $4/2^2 = 1$, es decir, el mismo que en la Tierra; y iv) $2/4^2 = 1/8$.

12.3 Respuesta: sí Esto es posible, porque la gravedad superficial y la rapidez de escape dependen de diferente manera de la masa m_P y del radio R_P del planeta: el valor de g en la superficie es Gm_P/R_P^2, mientras que la rapidez de escape es $\sqrt{2Gm_P/R_P}$. En el caso de Saturno, por ejemplo, m_P es aproximadamente 100 veces la masa de la Tierra y R_P es aproximadamente 10 veces el radio de la Tierra. El valor de g difiere del valor en la Tierra por un factor $(100)/(10)^2 = 1$ (es decir, es igual que en la Tierra), en tanto que la rapidez de escape es mayor en un factor de $\sqrt{100/10} = 3.2$. Es útil recordar que la gravedad superficial se refiere a las condiciones en la superficie del planeta; mientras que la rapidez de escape (que es la que necesitamos adquirir para escapar al infinito) depende de las condiciones en *todos* los puntos entre la superficie del planeta y el infinito. Como Saturno tiene mucho mayor masa que la Tierra, sus efectos gravitacionales se hacen sentir a distancias mucho mayores y su rapidez de escape es más alta.

12.4 Respuesta: ii) La ecuación (12.10) muestra que en una órbita de radio menor, la nave espacial tiene una rapidez mayor. El trabajo negativo efectuado por la resistencia del aire disminuye la energía mecánica *total* $E = K + U$; la energía cinética K aumenta (se vuelve más positiva), pero disminuye la energía potencial gravitacional U (se vuelve más negativa) en una cantidad mayor.

12.5 Respuesta: iii) La ecuación (12.17) muestra que el periodo orbital T es proporcional a la potencia $\frac{3}{2}$ del eje semimayor a. Por lo tanto, el periodo orbital del cometa X es más largo que el del cometa Y por un factor de $4^{3/2} = 8$.

12.6 Respuesta: no Nuestro análisis muestra que la fuerza gravitacional dentro de un cascarón esférico hueco es *cero*. Por consiguiente, quienes visitaran el interior de un planeta hueco experimentarían ingravidez, y no podrían pararse ni caminar sobre la superficie interior del planeta.

12.7 Respuesta: iv) El análisis de la ecuación (12.27) muestra que la diferencia entre la aceleración debida a la gravedad en el ecuador y en los polos es v^2/R_E. Puesto que este planeta tiene el mismo radio y por ello la misma circunferencia que la Tierra, la rapidez v en su ecuador debe ser 10 veces la rapidez del ecuador terrestre. Por lo tanto, v^2/R_E es $10^2 = 100$ veces mayor que en la Tierra, o bien, $100(0.0339\ m/s^2) = 3.39\ m/s^2$. La aceleración debida a la gravedad en los polos es $9.80\ m/s^2$, en tanto que en el ecuador es significativamente menor: $9.80\ m/s^2 - 3.39\ m/s^2 = 6.41\ m/s^2$. Usted puede demostrar que si el planeta estuviera girando 17.0 veces más rápido que la Tierra, la aceleración debida a la gravedad en el ecuador sería *cero* ¡y los objetos sueltos saldrían disparados de la superficie del ecuador!

12.8 Respuesta: iii) Si el Sol se colapsara para formar un agujero negro (lo cual, según lo que actualmente sabemos acerca de las estrellas, no puede suceder), tendría la misma masa pero un radio mucho más pequeño. Dado que la atracción gravitacional entre el Sol y la Tierra no depende del radio del Sol, no se alteraría la órbita de la Tierra.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P12.1. Un estudiante escribió: “La única razón por la que una manzana cae hacia la Tierra en vez de que ésta suba hacia la manzana es que la Tierra tiene una masa mucho mayor y, por lo tanto, tira con mucho mayor fuerza”. Comente esta aseveración.

P12.2. Un planeta gira con una órbita circular con periodo T alrededor de una estrella. Si fuera a orbitar a la misma distancia de una estrella con una masa tres veces mayor que la estrella original, en términos de T ¿el nuevo periodo sería: *a*) $3T$, *b*) $T\sqrt{3}$, *c*) T, *d*) $T/\sqrt{3}$, o *e*) $T/3$?

P12.3. Si todos los planetas tuvieran la misma densidad media, ¿cómo dependería del radio del planeta la aceleración debida a la gravedad en la superficie?

P12.4. ¿Una libra de mantequilla es la misma cantidad en la Tierra que en Marte? ¿Y un kilogramo de mantequilla? Explique su respuesta.

P12.5. El ejemplo 12.2 (sección 12.1) muestra que la aceleración de cada esfera causada por la fuerza gravitacional es inversamente proporcional a la masa de dicha esfera. ¿Por qué entonces esa fuerza da a todas las masas la misma aceleración cuando se dejan caer cerca de la superficie terrestre?

P12.6. ¿Usted atrae más al Sol al medio día o a la media noche? Explique su respuesta.

P12.7. Dado que la Luna es atraída constantemente hacia la Tierra por la interacción gravitacional, ¿por qué no choca contra la Tierra?

P12.8. Un planeta se mueve en una órbita circular con periodo T alrededor de una estrella. Si el planeta estuviera en órbita a la misma distancia alrededor de esa estrella, pero fuera tres veces más masivo, ¿cuál sería el nuevo periodo (en términos de T): *a*) $3T$, *b*) $T\sqrt{3}$, *c*) T, *d*) $T/\sqrt{3}$, o *e*) $T/3$?

P12.9. El Sol tira de la Luna con una fuerza cuya magnitud es más del doble de la magnitud de la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna. ¿Por qué entonces el Sol no se lleva a la Luna?

P12.10. En el capítulo 7 definimos la energía potencial gravitacional como $U = mgy$, positiva para un cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre (que está en $y = 0$). Sin embargo, en este capítulo definimos la energía potencial gravitacional como $U = -Gm_E m/r$, que es *negativa* para un cuerpo de masa m sobre la superficie terrestre (que está en $r = R_E$). ¿Cómo puede comparar estas descripciones al parecer incompatibles?

P12.11. Un planeta se mueve con rapidez constante en una órbita circular alrededor de una estrella. En una órbita completa, ¿la fuerza gravitacional que la estrella ejerce sobre el planeta realiza trabajo neto positivo, negativo o cero? ¿Y si la órbita del planeta fuera elíptica, de modo que la rapidez del planeta no sea constante? Explique su respuesta.

P12.12. ¿La rapidez de escape para un objeto en la superficie terrestre depende de la dirección en que se lanza? Explique su respuesta. ¿Su respuesta depende de si incluye o no los efectos de la resistencia del aire?

P12.13. Si un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie terrestre, ¿qué sucederá si la energía mecánica total (cinética + potencial) es *a*) menor que cero y *b*) mayor que cero? En cada caso, desprecie la resistencia del aire y los efectos gravitacionales del Sol, la Luna y los demás planetas.

P12.14. Diga si la siguiente afirmación es correcta: "En ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado cerca de la superficie terrestre es una *elipse*, no una parábola."

P12.15. La Tierra está más cerca del Sol en noviembre que en mayo. ¿En cuál de estos meses es mayor su rapidez orbital? Explique su respuesta.

P12.16. Una empresa de comunicaciones desea poner en órbita un satélite que siempre esté directamente sobre el paralelo 45 de la Tierra (latitud 45° norte). Esto implica que el plano de la órbita no pasará por el centro de la Tierra. ¿Es posible tal órbita? ¿Por qué?

P12.17. ¿En qué punto de una órbita elíptica es máxima la aceleración? ¿Y mínima? Justifique sus respuestas.

P12.18. ¿Qué viaje requiere más combustible, de la Tierra a la Luna o de la Luna a la Tierra? Explique su respuesta.

P12.19. ¿Cuál sería la tercera ley de Kepler para órbitas circulares, si una modificación a la ley de Newton de la gravitación hiciera a la fuerza gravitacional inversamente proporcional a r^3? ¿Este cambio afectaría las otras dos leyes de Kepler? Explique su respuesta.

P12.20. En la órbita elíptica del cometa Halley que se muestra en la figura 12.21a, la gravedad del Sol hace que el cometa caiga desde el afelio hasta el perihelio. Pero, ¿qué hace que el cometa suba otra vez del perihelio al afelio?

P12.21. Muchas personas creen que los astronautas en órbita sienten no tener peso porque están "fuera del alcance de la gravedad terrestre". ¿Qué tan lejos tendría que viajar una nave para estar realmente fuera de la influencia gravitacional de la Tierra? En tal caso, ¿permanecería en órbita la nave? Explique su respuesta. ¿Cuál es la razón real por la que los astronautas en órbita se sienten sin peso?

P12.22. Como parte de su adiestramiento, los astronautas viajan en un avión que vuela en la misma trayectoria parabólica que un proyectil en caída libre. Explique por qué esto proporciona la misma sensación de ingravidez aparente que estar en órbita.

Ejercicios

Sección 12.1 Ley de Newton de la gravitación

12.1. ¿Qué relación hay entre la atracción gravitacional del Sol sobre la Luna y la de la Tierra sobre la Luna? (Suponga que la distancia entre la Luna y el Sol es aproximadamente la misma que entre la Tierra y el Sol.) Use los datos del Apéndice F. ¿Es más preciso decir que la Luna está en órbita alrededor de la Tierra o del Sol?

12.2. Experimento de Cavendish. En la balanza de Cavendish que se muestra en la figura 12.4, suponga que $m_1 = 1.10$ kg, $m_2 = 25.0$ kg, y la varilla que conecta a las esferas de masa m_1 tiene 30.0 cm de longitud. Si la distancia del centro de cada esfera de masa m_1 al centro de la esfera de masa m_2 más cercana es de 12.0 cm, calcule *a*) la fuerza neta y *b*) la torca total (alrededor del eje de rotación) en la parte giratoria del aparato. *c*) ¿Parece que la torca del inciso *b*) sería suficiente para hacer girar la varilla con facilidad? Sugiera algunas maneras de mejorar la sensibilidad de este experimento.

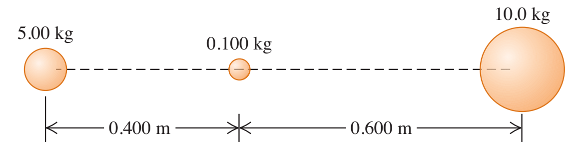
12.3. ¿A qué distancia de una esfera muy pequeña de 100 kg se tendría que colocar una partícula, de manera que la esfera tirara de ella con exactamente la misma magnitud que la gravitación terrestre? ¿Es lógico suponer que usted realmente podría realizar un experimento así? ¿Por qué?

12.4. Dos esferas uniformes, ambas con masa M y radio R, se tocan entre sí. ¿Qué magnitud tiene su fuerza de atracción gravitacional?

12.5. Una nave interplanetaria pasa por el punto en el espacio donde se cancelan exactamente las fuerzas gravitacionales que el Sol y la Tierra ejercen sobre la nave. *a*) ¿A qué distancia del centro de la Tierra está la nave? Use los datos del Apéndice F. *b*) ¿Cuando la nave pasa por el punto descrito en el inciso *a*) podría apagar sus motores y quedar suspendida indefinidamente? Explique su respuesta.

12.6. *a*) En la figura 12.31, ¿qué magnitud y dirección tiene la fuerza gravitacional neta ejercida sobre la esfera uniforme de 0.100 kg por las otras dos esferas uniformes? Los centros de las tres esferas están en la misma línea. *b*) Según la tercera ley de Newton, ¿la esfera de 0.100 kg ejerce fuerzas de la misma magnitud que su respuesta al inciso *a*), pero con dirección opuesta, sobre *cada una* de las otras dos esferas?

Figura 12.31 Ejercicio 12.6.



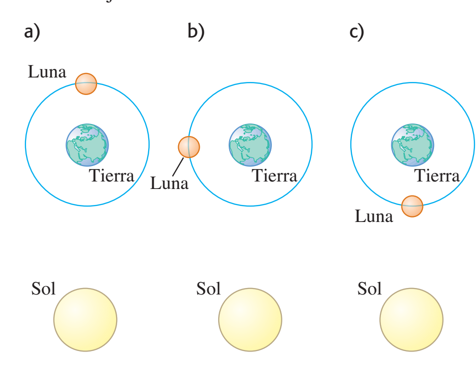
12.7. Una persona adulta promedio tiene una masa aproximada de 70 kg. *a*) ¿Qué fuerza ejerce una Luna llena sobre ella, si está directamente arriba con su centro a 378,000 km? *b*) Compare esta fuerza con la fuerza que la Tierra ejerce sobre la persona.

12.8. Una masa puntual de 8.00 kg y una masa puntual de 15.00 kg están separadas 50.0 cm. Se suelta un partícula de masa m desde un punto entre las dos masas a 20.0 cm de la masa de 8.00 kg en la línea que conecta las dos masas fijas. Obtenga la magnitud y la dirección de la aceleración de la partícula.

12.9. Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional neta que actúa sobre la Luna debida a la Tierra y al Sol, cuando la Luna está en cada una de las posiciones mostradas en la figura 12.32. (La figura *no* está a escala, suponga que el Sol está en el plano de la órbita Tierra-Luna, aunque esto normalmente no sucede.) Use los datos del Apéndice F.

12.10. Cuatro masas idénticas de 800 kg cada una se colocan en las esquinas de un cuadrado que mide 10.0 cm por lado. ¿Qué fuerza gravitacional neta (magnitud y dirección) actúa sobre una de las masas, debida a las otras tres?

Figura 12.32 Ejercicio 12.9.



12.11. Una partícula de masa $3m$ se localiza a 1.00 m de una partícula de masa m. *a*) ¿Dónde debería colocar usted una tercera masa M, de manera que la fuerza gravitacional neta sobre M debida a las dos masas sea exactamente igual a cero? *b*) ¿En este punto, el equilibrio de M es estable o inestable, i) para puntos en la línea que conecta m y $3m$, y ii) para puntos en una línea que pasa por M y es perpendicular a la línea que conecta m y $3m$?

12.12. Las masas puntuales m y $2m$ están en el eje x, con m en el origen y $2m$ en $x = L$. Una tercera masa puntual M se mueve a lo largo del eje x. *a*) ¿En qué punto la fuerza gravitacional neta sobre M, debida a las otras dos masas, es igual a cero? *b*) Elabore un esquema de la componente x de la fuerza neta sobre M debida a m y a $2m$, considerando las cantidades a la derecha como positivas. Incluya las regiones $x < 0$, $0 < x < L$ y $x > L$. Tenga especial cuidado en demostrar el comportamiento de la gráfica en los lados $x = 0$ y $x = L$.

Figura 12.33 Ejercicio 12.13.

12.13. Dos esferas uniformes de 0.260 kg están fijas en los puntos A y B (figura 12.32). Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración inicial de una esfera uniforme con masa de 0.010 kg que se suelta del reposo en P, suponiendo que sólo actúan sobre ella las fuerzas gravitacionales ejercidas por las esferas A y B.

Sección 12.2 Peso

12.14. Use la masa y el radio del planeta enano Plutón dados en el Apéndice F para calcular la aceleración debida a la gravedad en su superficie.

12.15. ¿A qué distancia sobre la superficie terrestre la aceleración debida a la gravedad es de 0.980 m/s^2, si en la superficie tiene una magnitud de 9.80 m/s^2?

12.16. La masa de Venus es el 81.5% de la masa de la Tierra, y su radio es el 94.9% del radio de la Tierra. *a*) Calcule la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Venus con estos datos. *b*) Si una roca pesa 75.0 N en la Tierra, ¿cuánto pesará en la superficie de Venus?

12.17. Titania, la luna más grande de Urano, tiene $\frac{1}{8}$ del radio terrestre y $\frac{1}{1700}$ de la masa de la Tierra. *a*) Calcule la aceleración debida a la gravedad en su superficie. *b*) Obtenga la densidad media de Titania. (Es menor que la densidad de las rocas, lo cual es una evidencia de que Titania está constituida principalmente por hielo.)

12.18. Rea, una de las lunas de Saturno, tiene un radio de 765 km y una aceleración debida a la gravedad de 0.278 m/s^2 en su superficie. Calcule su masa y densidad media.

12.19. Calcule la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre un astronauta de 75 kg, quien está reparando el telescopio espacial Hubble a una altura de 600 km sobre la superficie terrestre, y compare ese valor con su peso en la superficie de la Tierra. Con base en su resultado, explique por qué decimos que los astronautas no tienen peso cuando están en órbita alrededor de la Tierra en un satélite como el transbordador espacial. ¿Se debe a que la atracción gravitacional terrestre es tan pequeña que se puede despreciar?

12.20. Las estrellas de neutrones, como la que está en el centro de la nebulosa del Cangrejo, tienen aproximadamente la misma masa que el Sol, pero un diámetro *mucho* más pequeño. Si una persona pesa 675 N en la Tierra, ¿cuánto pesaría en la superficie de una estrella de neutrones que tuviera la misma masa que el Sol y un diámetro de 20 km?

12.21. En una medición de la constante gravitacional G usando la balanza de Cavendish, se observó que una esfera uniforme de 0.400 kg atrae a otra esfera uniforme de 0.00300 kg con una fuerza de 8.00×10^{-10} N, cuando la distancia entre sus centros es de 0.0100 m. La aceleración debida a la gravedad en la superficie terrestre es de 9.80 m/s^2 y el radio de la Tierra es de 6380 km. Calcule la masa de la Tierra con estos datos.

12.22. Exploración de Europa. Hay evidencia contundente de que Europa, un satélite de Júpiter, tiene un océano líquido debajo de su superficie congelada. Muchos científicos creen que se debería enviar un vehículo explorador ahí para buscar señales de vida. Antes de lanzarlo, se debería probar tal vehículo bajo las condiciones de la gravedad en la superficie de Europa. Una forma de hacerlo consiste en colocar el vehículo explorador en el extremo de un brazo giratorio en un satélite en órbita terrestre. Si el brazo tiene 4.25 m de longitud y está fijo en uno de sus extremos, ¿con que rapidez angular (en rpm) debería girar para que la aceleración del vehículo fuera la misma, que la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Europa? La masa de Europa es de 4.8×10^{22} kg y tiene un diámetro de 3138 km.

Sección 12.3 Energía potencial gravitacional

12.23. El asteroide Dáctilo, descubierto en 1993, tiene un radio de sólo 700 m y una masa aproximada de 3.6×10^{12} kg. Use los resultados del ejemplo 12.5 (sección 12.3) para calcular la rapidez de escape de un objeto en la superficie de Dáctilo. ¿Un ser humano podría alcanzar esta rapidez caminando?

12.24. Masa de un cometa. El 4 de julio de 2005, la nave espacial de la NASA Impacto Profundo disparo un proyectil a la superficie del cometa Tempel 1, el cual tiene aproximadamente 9.0 km de diámetro. Observaciones de los restos superficiales liberados por el impacto mostraron que polvo, con una rapidez tan baja como 1.0 m/s, podía escapar del cometa. *a*) Suponiendo una forma esférica, ¿cuál es la masa de este cometa? (*Sugerencia:* véase el ejemplo 12.5 en la sección 12.3.) *b*) ¿Qué tan alejados del centro del cometa estarán los restos cuando hayan perdido i) el 90.0% de la energía cinética inicial, la que tenía cuando estaba sobre la superficie, y ii) toda su energía cinética inicial?

12.25. Use los resultados del ejemplo 12.5 (sección 12.3) para calcular la rapidez de escape de una nave: *a*) desde la superficie de Marte, y *b*) desde la superficie de Júpiter. Use los datos del Apéndice F. *c*) ¿Por qué la rapidez de escape de la nave es independiente de su masa?

12.26. Diez días después de lanzarse hacia Marte en diciembre de 1998, la nave *Mars Climate Orbiter* (masa de 629 kg) estaba a 2.87×10^6 km de la Tierra, viajando con rapidez de 1.20×10^4 km/h relativa a la Tierra. En ese instante, calcule *a*) la energía cinética de la nave relativa a la Tierra y *b*) la energía potencial del sistema Tierra-nave.

Sección 12.4 Movimiento de satélites

12.27. Para un satélite en órbita circular a 780 km sobre la superficie terrestre, *a*) ¿qué rapidez orbital debería imprimírsele y *b*) cuál es el periodo de la órbita (en horas)?

12.28. Misión Aura. El 15 de julio de 2004, la NASA lanzó la nave espacial Aura para estudiar el clima y la atmósfera terrestres. Este satélite fue puesto en una órbita a 705 km sobre la superficie terrestre, y

supondremos una órbita circular. *a*) ¿Cuántas horas le tomará a este satélite completar una órbita? *b*) ¿Qué tan rápido (en km/h) se mueve la nave espacial Aura?

12.29. Suponga que la órbita de la Tierra en torno al Sol es circular. Use el radio y el periodo orbitales de la Tierra, dados en el Apéndice F, para calcular la masa del Sol.

12.30. Estación Espacial Internacional. La Estación Espacial Internacional hace 15.65 revoluciones por día en su órbita alrededor de la Tierra. Suponiendo una órbita circular, ¿qué tan alto con respecto a la superficie terrestre debe estar dicho satélite?

12.31. Deimos, una luna de Marte, tiene un diámetro aproximado de 12 km y una masa de 2.0×10^{15} kg. Suponga que está varado solo en Deimos y quiere jugar béisbol. ¡Usted mismo sería el lanzador y el bateador! *a*) ¿Con qué rapidez tendría que lanzar la pelota para que entre en órbita y vuelva a donde usted está listo para batearla? ¿Cree que podría lanzarla con esa rapidez? *b*) ¿Cuánto tiempo (en horas) después del lanzamiento, la pelota debería estar lista para ser bateada? ¿Sería un juego de béisbol emocionante?

Sección 12.5 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

12.32. Planeta Vulcano. Suponga que se descubre un planeta entre el Sol y Mercurio, con una órbita circular de radio igual a $\frac{2}{3}$ del radio orbital medio de Mercurio. ¿Qué periodo orbital tendría ese planeta? (Llegó a postularse la existencia de tal planeta, en parte para explicar la precesión de la órbita de Mercurio. Incluso recibió el nombre Vulcano, aunque no tenemos pruebas de que realmente exista. La precesión de Mercurio se ha explicado con base en la relatividad general.)

12.33. La estrella Rho^1 Cancri está a 57 años luz de la Tierra y su masa es 0.85 veces la del Sol. Se ha detectado un planeta en órbita circular en torno a Rho^1 Cancri, con un radio orbital igual a 0.11 veces el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol. Calcule *a*) la rapidez orbital y *b*) el periodo orbital del planeta de Rho^1 Cancri.

12.34. En marzo de 2006, se descubrieron dos satélites pequeños en órbita alrededor de Plutón: uno a una distancia de 48,000 km y el otro a 64,000 km. Ya se sabe que Plutón tiene un satélite grande, Caronte, el cual orbita a 19,600 km con un periodo orbital de 6.39 días. Suponiendo que los satélites no se afectan mutuamente, encuentre los periodos orbitales de los dos satélites pequeños *sin* utilizar la masa de Plutón.

12.35. *a*) Use la figura 12.19 para demostrar que la distancia Sol-planeta en el perihelio es $(1 - e)a$, que en el afelio es $(1 + e)a$ y que, por lo tanto, la suma de estas dos distancias es $2a$. *b*) Cuando el planeta enano Plutón estaba en su perihelio en 1989, estaba casi 100 millones de km más cerca del Sol que Neptuno. Los ejes semimayores de las órbitas de Plutón y Neptuno son 5.92×10^{12} m y 4.50×10^{12} m, respectivamente, y sus excentricidades son 0.248 y 0.010. Calcule la distancia más corta de Plutón al Sol y la más grande de Neptuno al Sol. *c*) ¿Cuántos años, después de su perihelio en 1989, Plutón volverá a estar en su perihelio?

12.36. Los Júpiter calientes. En 2004 los astrónomos informaron el descubrimiento de un planeta del tamaño de Júpiter con una órbita muy cercana a la estrella HD 179949 (de ahí el término "Júpiter caliente"). La órbita estaba sólo a $\frac{1}{9}$ de la distancia de Mercurio al Sol, y al planeta le tomó sólo 3.09 días efectuar una órbita (que se supone circular). *a*) ¿Cuál es la masa de la estrella? Exprese su respuesta en kilogramos y como múltiplo de la masa del Sol. *b*) ¿Qué tan rápido (en km/s) se mueve este planeta?

12.37. La nave espacial *Helios B* tenía una rapidez de 71 km/s cuando estaba a 4.3×10^7 km del Sol. *a*) Demuestre que no estaba en órbita circular alrededor del Sol. *b*) Demuestre que su órbita alrededor del Sol era cerrada y, por lo tanto, elíptica.

*Sección 12.6 Distribuciones esféricas de masa

12.38. Un cascarón esférico uniforme de 1000 kg tiene un radio de 5.00 m. *a*) Calcule la fuerza gravitacional que dicho cascarón ejerce sobre una masa puntual de 2.00 kg colocada a las siguientes distancias del centro del cascarón: i) 5.01 m, ii) 4.99 m, iii) 2.72 m. *b*) Dibuje una gráfica cualitativa de la magnitud de la fuerza gravitacional que esta esfera ejerce sobre una masa puntual m en función de la distancia r de m desde el centro de la esfera. Incluya la región desde $r = 0$ hasta $r \rightarrow \infty$.

12.39. Una esfera sólida uniforme de 1000 kg tiene un radio de 5.00 m. *a*) Obtenga la fuerza gravitacional que esta esfera ejerce sobre una masa puntual de 2.00 kg colocada a las siguientes distancias del centro de la esfera: i) 5.01 m y ii) 2.50 m. *b*) Dibuje una gráfica cualitativa de la magnitud de la fuerza gravitacional que esta esfera ejerce sobre una masa puntual m en función de la distancia r de m desde el centro de la esfera. Incluya la región desde $r = 0$ hasta $r \rightarrow \infty$.

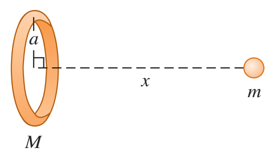
12.40. Una varilla delgada uniforme tiene longitud L y masa M. Una esfera uniforme pequeña de masa m se coloca a una distancia x de un extremo de la varilla, sobre el eje de ésta (figura 12.34). *a*) Calcule la energía potencial gravitacional del sistema varilla-esfera. Tome la energía potencial igual a cero cuando la varilla y la esfera están separadas una distancia infinita. Demuestre que su respuesta se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que L. (*Sugerencia:* use la expansión en forma de serie de potencias que se da en el Apéndice B para $\ln(1 + x)$.) *b*) Utilice $F_x = -dU/dx$ para calcular la magnitud y la dirección de la fuerza gravitacional que la varilla ejerce sobre la esfera (véase la sección 7.4). Demuestre que su respuesta se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que L.

Figura 12.34 Ejercicio 12.40 y problema 12.84.



12.41. Considere el cuerpo con forma de anillo de la figura 12.35. Una partícula de masa m se coloca a una distancia x del centro del anillo, sobre la línea que pasa por el centro y es perpendicular al plano del anillo. *a*) Calcule la energía potencial gravitacional U de este sistema. Tome la energía potencial igual a cero cuando los dos objetos están muy alejados. *b*) Demuestre que su respuesta al inciso *a*) se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que el radio a del anillo. *c*) Use $F_x = -dU/dx$ para obtener la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula. *d*) Demuestre que su respuesta al inciso *c*) se reduce al resultado esperado cuando x es mucho mayor que *a*. *e*) ¿Cuánto valen U y F_x cuando $x = 0$? Explique por qué son lógicos estos resultados.

Figura 12.35 Ejercicio 12.41 y problema 12.83.



*Sección 12.7 Peso aparente y rotación terrestre

12.42. El peso de Santa Claus en el Polo Norte, determinado por una balanza de resorte, es de 875 N. ¿Cuál sería la lectura de la balanza para este peso en el ecuador, suponiendo que la Tierra es esféricamente simétrica.

12.43. La aceleración debida a la gravedad en el polo norte de Neptuno es cercana a 10.7 m/s^2. Neptuno tiene una masa de 1.0×10^{26} kg, un radio de 2.5×10^4 km y un periodo de rotación aproximado de

16 h. *a*) Calcule la fuerza gravitacional que actúa sobre un objeto de 5.0 kg en el polo norte de Neptuno. *b*) ¿Qué peso aparente tiene ese mismo objeto en el ecuador de Neptuno? (*Nota:* la "superficie" de Neptuno es gaseosa, no sólida, así que no podríamos pararnos ahí.)

*Sección 12.8 Agujeros negros

12.44. Mini agujeros negros. Los cosmólogos han especulado que agujeros negros del tamaño de un protón pudieron haberse formado en los días posteriores al Big Bang cuando inició el Universo. Si tomamos el diámetro de un protón como de 1.0×10^{-15} m, ¿Cuál sería la masa de un mini agujero negro?

12.45. ¿Qué fracción de su radio actual tendría que comprimirse la Tierra para volverse un agujero negro?

12.46. *a*) Demuestre que un agujero negro atrae a un objeto con masa m con una fuerza de $mc^2R_S/(2r^2)$, donde r es la distancia entre el objeto y el centro del agujero negro. *b*) Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida por un agujero negro con radio de Schwarzschild de 14.0 mm sobre una masa de 5.00 kg a 3000 km de distancia. *c*) ¿Qué masa tiene este agujero negro?

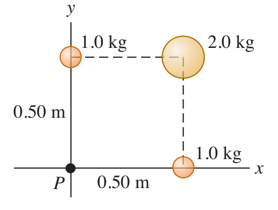
12.47. En el centro de la galaxia. Los astrónomos han observado un objeto pequeño y masivo en el centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea (sección 12.8). Un anillo de material con un diámetro aproximado de 15 años luz y rapidez orbital aproximada de 200 km/s está en órbita a su alrededor. *a*) Determine la masa del objeto central de la Vía Láctea. Dé su respuesta en kg y en masas solares (una masa solar es la masa del Sol). *b*) Observaciones de estrellas y teorías acerca de su estructura sugieren que es imposible que una sola estrella tenga una masa mayor que unas 50 masas solares. ¿Podría el objeto masivo ser una simple estrella ordinaria? *c*) Muchos astrónomos creen que el objeto masivo central de la Vía Láctea es un agujero negro. De ser así, ¿qué radio de Schwarzschild tendría? ¿Un agujero negro de éste tamaño cabría dentro de la órbita de la Tierra en torno al Sol?

12.48. En 2005 los astrónomos anunciaron el descubrimiento de un enorme agujero negro en la galaxia Markarian 766 que tenía aglomeraciones de materia orbitando alrededor una vez cada 27 horas y moviéndose a 30,000 km/s. *a*) ¿Qué tan lejos están estas aglomeraciones del centro del agujero negro? *b*) ¿Cuál es la masa de este agujero negro suponiendo órbitas circulares? Exprese su respuesta en kilogramos y como múltiplos de la masa de nuestro Sol. *c*) ¿Cuál es el radio de su horizonte de eventos?

Problemas

12.49. Tres esferas uniformes están fijas en las posiciones indicadas en la figura 12.36. *a*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza que actúa sobre una partícula de 0.0150 kg colocada en *P*? *b*) Si las esferas están en el espacio lejano fuera de alguna atracción gravitacional adicional, y una partícula de 0.0150 kg se suelta del reposo a 300 m del origen sobre una línea inclinada 45° bajo el eje $-x$, ¿qué rapidez tendrá la partícula cuando llegue al origen?

Figura 12.36 Problema 12.49.



12.50. Una esfera uniforme con masa de 60.0 kg se sostiene con su centro en el origen, y una segunda esfera uniforme con masa de 80.0 kg se sostiene con su centro en el punto $x = 0$, $y = 3.00$ m. *a*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza gravitacional neta que estas esferas ejercen sobre una tercera esfera uniforme con masa de 0.500 kg cuyo centro está en $x = 4.00$ m, $y = 0$? *b*) ¿En qué posición, que no sea a una distancia infinita, podría colocarse la tercera esfera de modo que la fuerza gravitacional neta que actúa sobre ella debida a las otras dos esferas sea cero?

12.51. *a*) Demuestre que la fuerza gravitacional que actúa sobre la estrella pequeña debida a las dos estrellas grandes del ejemplo 12.3 (sección 12.1) *no* está dirigida hacia el punto a medio camino entre las estrellas grandes. *b*) Considere que las dos estrellas grandes forman un solo cuerpo rígido (como si estuvieran unidas por una varilla de masa despreciable). Calcule la torca ejercida por la estrella pequeña sobre el cuerpo rígido respecto a su centro de masa. *c*) Explique cómo el resultado del inciso *b*) demuestra que el centro de masa no coincide con el centro de gravedad. ¿Por qué sucede esto en esta situación?

12.52. En cierto instante, la Tierra, la Luna y una nave estacionaria de 1250 kg está en los vértices de un triángulo equilátero, cuyos lados miden 3.84×10^5 km cada uno. *a*) Calcule la magnitud y dirección de la fuerza gravitacional neta que la Tierra y la Luna ejercen sobre la nave. Exprese la dirección en términos de un ángulo medido a partir de la línea que pasa por la Tierra y la nave. En un dibujo, muestre la Tierra, la Luna, la nave y el vector de fuerza. *b*) ¿Qué cantidad mínima de trabajo tendría que efectuarse para desplazar la nave hasta un punto distante de la Tierra y la Luna? Pueden despreciarse los efectos gravitacionales debidos a los demás planetas y al Sol.

12.53. Se realiza un experimento en el espacio lejano con dos esferas uniformes, una con masa de 25.0 kg y la otra con masa de 100.0 kg. El radio de las dos esferas es el mismo: $r = 0.20$ m. Las esferas se sueltan del reposo con sus centros separados 40.0 m, y aceleran una hacia la otra por su atracción gravitacional mutua. (Ignore todas las demás fuerzas gravitacionales.) *a*) Explique por qué se conserva el momento lineal. *b*) Cuando sus centros están separados 20.0 m: i) ¿qué rapidez tiene cada esfera? ii) ¿Con qué magnitud de velocidad relativa se acerca una esfera a la otra? *c*) ¿A qué distancia de la posición inicial del centro de la esfera de 25.0 kg chocan las superficies de las dos esferas?

12.54. Suponga que la órbita de la Luna es circular. A partir del periodo orbital observado de 27.3 días, calcule la distancia de la Luna al centro de la Tierra. Suponga que los movimientos de la Luna sólo están determinados por la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ella, y use la masa de la Tierra dada en el Apéndice F.

12.55. Satélites geosincrónicos. Muchos satélites se mueven en un círculo en el plano ecuatorial de la Tierra y están a tal altura que siempre permanecen sobre el mismo punto. *a*) Determine la altura de estos satélites sobre la superficie terrestre. (A una órbita con estas características se le llama *geosincrónica*.) *b*) Explique, con un dibujo, por qué las señales radiales de estos satélites no pueden llegar directamente a receptores terrestres situados a más de 81.3° de latitud norte.

12.56. Un módulo de descenso con masa de 12,500 kg está en órbita circular a una distancia de 5.75×10^5 m sobre la superficie de un planeta. El periodo de la órbita es de 5800 s. Los astronautas del módulo han determinado que el diámetro del planeta es de 9.60×10^6 m. El módulo desciende en el polo norte del planeta. ¿Cuánto pesará un astronauta de 85.6 kg al pararse en la superficie del planeta?

12.57. Determine la rapidez de escape desde un asteroide de 300 km de diámetro y densidad de 2500 kg/m^3.

12.58. *a*) Los asteroides tienen densidades medias del orden de 2500 kg/m^3 y radios desde 470 km hasta menos de 1 km. Suponiendo que un asteroide tiene una distribución esféricamente simétrica de masa, estime el radio del asteroide más grande del que podría escapar con sólo saltar. (*Sugerencia:* puede estimar su rapidez de salto relacionándola con la altura máxima que puede saltar en la Tierra.) *b*) Europa, una de las cuatro lunas grandes de Júpiter, tiene un radio de 1570 km. La aceleración debida a la gravedad en su superficie es de 1.33 m/s^2. Calcule su densidad media.

12.59. *a*) Suponga que está en el ecuador de la Tierra y observa un satélite que pasa directamente arriba en dirección oeste a este. Exactamente 12.0 horas después, observa otra vez el satélite directamente arriba de su cabeza. ¿A qué altura sobre la superficie terrestre está la

órbita del satélite? *b*) Ahora observa otro satélite que se mueve de este a oeste y pasa directamente arriba de su cabeza. El satélite vuelve a estar en esa posición 12.0 horas después. ¿A qué distancia sobre la superficie terrestre está su órbita?

12.60. El planeta X gira de forma análoga a la Tierra, en torno a un eje que pasa por sus polos norte y sur, y es perfectamente esférico. Un astronauta que pesa 943.0 N en la Tierra pesa 915.0 N en el polo norte del planeta X y sólo 850.0 N en su ecuador. La distancia entre el polo norte y el ecuador es de 18,850 km, medidos sobre la superficie del planeta X. *a*) ¿Qué duración tiene el día en el planeta *X*? *b*) Si un satélite de 45,000 kg se coloca en órbita circular 2000 km arriba de la superficie del planeta *X*, ¿qué periodo orbital tendrá?

12.61. Hay dos ecuaciones para calcular el cambio en la energía potencial gravitacional U del sistema de una masa m y la Tierra. Una es $U = mgy$ (ecuación 7.2) y la otra es $U = -Gm_E m/r$ (ecuación 12.9). Como se demostró en la sección 12.3, la primera sólo es correcta si la fuerza gravitacional es constante dentro del cambio de altura Δy. La segunda siempre es correcta. En realidad, la fuerza gravitacional nunca es exactamente constante dentro de ningún cambio de altura pero, si la variación es pequeña, podemos despreciarla. Considere la diferencia en U entre una masa en la superficie terrestre y a una distancia h arriba de ella, usando ambas ecuaciones, y determine el valor de h con el que la ecuación (7.2) tiene un error de 1%. Exprese h como una fracción del radio de la Tierra y también como valor numérico.

12.62. Imagine que usted es el principal ingeniero científico de la nave *Despistado Errante*, la cual se posa en el misterioso planeta Mongo. Usted efectúa estas mediciones: una piedra de 2.50 kg lanzada hacia arriba desde el suelo a 12.0 m/s vuelve al suelo en 8.00 s; la circunferencia de Mongo en el ecuador es de 2.00×10^5 km; y el planeta carece prácticamente de atmósfera. El capitán Confusión, comandante de la nave, pide la siguiente información: *a*) ¿Qué masa tiene Mongo? *b*) Si el *Despistado Errante* se coloca en una órbita circular 30,000 km arriba de la superficie de Mongo, ¿cuántas horas tardará en dar una vuelta completa al planeta?

12.63. Calcule la diferencia porcentual entre el peso que tiene usted en Sacramento, cerca del nivel del mar, y en la cima del monte Everest, que está a 8800 m sobre el nivel del mar.

12.64. En el ejemplo 12.5 (sección 12.3), despreciamos los efectos gravitacionales de la Luna sobre una nave que viaja de la Tierra a la Luna. De hecho, debemos incluir también la energía potencial gravitacional debida a la Luna. Para este problema, desprecie los movimientos de ambos cuerpos. *a*) Si la Luna tiene radio R_M y la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es R_{EM}, calcule la energía potencial gravitacional total de los sistemas partícula Tierra y partícula-Luna, cuando una partícula de masa m está entre ambos cuerpos, a una distancia r del centro de la Tierra. Sea la energía potencial gravitacional cero cuando los objetos están muy alejados entre sí. *b*) Hay un punto en la línea entre la Tierra y la Luna, donde la fuerza gravitacional neta es cero. Use la expresión que dedujo en *a*) y valores numéricos del Apéndice F para calcular la distancia de este punto al centro de la Tierra. ¿Con qué rapidez debe lanzarse una nave desde la superficie terrestre para llegar apenas a este punto? *c*) Si se lanzara una nave de la superficie terrestre a la Luna con una rapidez inicial de 11.2 km/s, ¿qué rapidez tendría al chocar contra la Luna?

12.65. Una nave no tripulada está en órbita circular alrededor de la Luna, observando la superficie lunar desde una altura de 50.0 km (vea el Apéndice F). Para consternación de los científicos en la Tierra, un desperfecto eléctrico hace que un motor a bordo se incendie y reduzca la rapidez de la nave en 20.0 m/s. Si no se corrige la órbita, ¿con qué rapidez (en km/h) chocará la nave contra la superficie lunar?

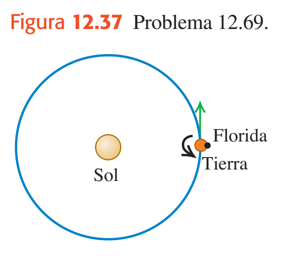
***12.66.** ¿Cuánto duraría un día (es decir, la duración de una revolución de la Tierra sobre su eje), si la rapidez de rotación de la Tierra fuera tal que $g = 0$ en el ecuador?

12.67. Martillo que cae. Un martillo de masa m se deja caer del reposo desde una altura h arriba de la superficie terrestre, no necesariamente pequeña en comparación con el radio R_E de la Tierra. Despreciando la resistencia del aire, deduzca una expresión para la rapidez v del martillo cuando llega a la superficie terrestre. Su expresión deberá incluir h, R_E y m_E, la masa de la Tierra.

12.68. *a*) Calcule cuánto trabajo se requiere para lanzar una nave espacial de masa m desde la superficie de la Tierra (masa m_E, radio R_E) y colocarla en una *órbita baja* circular, es decir, una órbita cuya altura sobre la superficie terrestre es mucho menor que R_E. (Por ejemplo, la Estación Espacial Internacional está en órbita baja a una altura aproximada de 400 km, mucho menor que $R_E = 6380$ km.) Se puede despreciar la energía cinética que la nave tiene en el suelo debido a la rotación de nuestro planeta. *b*) Calcule la cantidad mínima de trabajo adicional requerida para pasar la nave de una órbita baja a una distancia muy grande de la Tierra. Se pueden ignorar los efectos gravitacionales del Sol, la Luna y los demás planetas. *c*) Justifique la afirmación de que "en términos de energía, una órbita baja está a la mitad de la distancia a los confines del Universo".

12.69. Se va a lanzar una nave de la superficie terrestre, de modo que escape del Sistema Solar. *a*) Calcule la rapidez relativa al centro de la Tierra con que se debe lanzar la nave. Tenga en cuenta los efectos gravitacionales de la Tierra y el Sol, e incluya los efectos de la rapidez orbital de la Tierra, pero desprecie la resistencia del aire. *b*) La rotación terrestre puede ayudar a esta nave a alcanzar la rapidez de escape. Calcule la rapidez que la nave debe tener relativa a la *superficie* terrestre, si se lanza de Florida en el punto indicado en la figura 12.37. Los movimientos rotacional y orbital de la Tierra tienen la misma dirección. Las instalaciones de lanzamiento de Florida están 28.5° al norte del ecuador. *c*) La Agencia Espacial Europea (ESA) usa instalaciones de lanzamiento en la Guyana Francesa (inmediatamente al norte de Brasil), 5.15° al norte del ecuador. ¿Qué rapidez relativa a la superficie terrestre necesitaría adquirir una nave para escapar del Sistema Solar, si se lanza desde la Guyana Francesa?

Figura 12.37 Problema 12.69.



***12.70. Gravedad dentro de la Tierra.** Calcule la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre una masa de 10.0 kg, si se coloca en los siguientes lugares. Consulte la figura 12.9 y suponga una densidad constante en cada una de las regiones interiores (manto, núcleo exterior, núcleo interior), pero *no* la misma densidad en cada una de estas regiones. Utilice la gráfica para estimar la densidad media para cada región. *a*) En la superficie terrestre; *b*) en la superficie exterior del núcleo exterior fundido; *c*) en la superficie del núcleo interior sólido; *d*) en el centro de la Tierra.

12.71. Huecos de Kirkwood. Cientos de miles de asteroides giran alrededor del Sol en la *franja de asteroides*, que se extiende desde aproximadamente 3×10^8 km hasta 5×10^8 km del Sol. *a*) Calcule el periodo orbital (en años) de un asteroide en i) la orilla interior de la franja y ii) la orilla exterior de la franja. Suponga órbitas circulares. *b*) En 1867, el astrónomo estadounidense Daniel Kirkwood señaló que existen varios huecos en la franja de asteroides, donde se encuentran relativamente pocos asteroides. Ahora se sabe que esos *huecos de Kirkwood* se deben a la atracción gravitacional de Júpiter, el planeta más grande, cuyo periodo orbital alrededor del Sol es de 11.86 años. Por ejemplo, si un asteroide tiene un periodo orbital que es la mitad del de Júpiter, o sea, 5.93 años, en cada segunda órbita el asteroide estaría a una distancia mínima de Júpiter y experimentará

una fuerte atracción hacia ese planeta. Dicha atracción, al actuar repetidamente en órbitas sucesivas, podría ir sacando a los asteroides del hueco de Kirkwood. Utilice esta hipótesis para determinar el radio orbital de ese hueco de Kirkwood. *c*) Otro hueco de Kirkwood aparece a una distancia del Sol, en la que el periodo orbital es 0.400 veces el de Júpiter. Explique esto y calcule el radio orbital de ese hueco de Kirkwood.

12.72. Si un satélite está en una órbita lo bastante baja, experimentará arrastre de la atmósfera terrestre. Dado que el arrastre realiza trabajo negativo (la dirección de la fuerza de arrastre es opuesta al movimiento), la energía mecánica disminuirá. Según la ecuación (12.13), si E disminuye (se hace más negativa), el radio r de la órbita disminuirá. Si el arrastre es relativamente pequeño, puede considerarse que el satélite está en una órbita circular con radio continuamente decreciente. *a*) Según la ecuación (12.10), si el radio de la órbita circular de un satélite disminuye, la rapidez orbital v del satélite *aumenta*. ¿Cómo puede conciliar esto con la afirmación de que la energía mecánica *disminuye*! (*Sugerencia*: ¿El arrastre es la única fuerza que realiza trabajo sobre el satélite al disminuir el radio orbital?) *b*) Por el arrastre del aire, el radio de la órbita circular de un satélite disminuye de r a $r - \Delta r$, donde la cantidad positiva Δr es mucho menor que r. La masa del satélite es m. Demuestre que el aumento en la rapidez orbital es $\Delta v = +(\Delta r/2)\sqrt{Gm_E/r^3}$; que el cambio de energía cinética es $\Delta K = +(Gm_E m/2r^2)\,\Delta r$; que el cambio de energía potencial gravitacional es $\Delta U = -2\,\Delta K = -(Gm_E m/r^2)\,\Delta r$; y que la cantidad de trabajo efectuado por la fuerza de arrastre es $W = -(Gm_E m/2r^2)\,\Delta r$. Interprete estos resultados a la luz de sus comentarios del inciso *a*). *c*) Un satélite con masa de 3000 kg está inicialmente en una órbita circular a 300 km arriba de la superficie terrestre. A causa del arrastre el aire, la altura del satélite disminuye a 250 km. Calcule la rapidez orbital inicial, el aumento en dicha rapidez, la energía mecánica inicial, el cambio de energía cinética, el cambio de energía potencial gravitacional, el cambio de energía mecánica y el trabajo realizado por la fuerza de arrastre del aire. *d*) A final de cuentas, un satélite descenderá a una altura tan baja en la atmósfera que se quemará y los restos caerán a la superficie. ¿Qué pasa con la energía mecánica inicial?

12.73. Estrella binaria-masas iguales. Dos estrellas idénticas de masa M están en órbita alrededor de su centro de masa. Las dos órbitas son circulares con radio R, de modo que las dos estrellas siempre están en lados opuestos del círculo. *a*) Calcule la fuerza gravitacional que una estrella ejerce sobre la otra. *b*) Calcule la rapidez orbital de cada estrella y el periodo de la órbita. *c*) ¿Cuánta energía se requeriría para separar las estrellas hasta el infinito?

12.74. Estrella binaria: masas distintas. Dos estrellas, de masas M_1 y M_2, están en órbitas circulares alrededor de su centro de masa. La primera tiene una órbita de radio R_1; y la segunda, R_2. *a*) Demuestre que la relación de los radios orbitales de las dos estrellas es igual al recíproco de la relación de sus masas, es decir, $R_1/R_2 = M_2/M_1$. *b*) Explique por qué las dos estrellas tienen el mismo periodo orbital T y que éste está dado por $T = 2\pi(R_1 + R_2)^{3/2}/\sqrt{G(M_1 + M_2)}$. *c*) Las dos estrellas de cierto sistema binario se mueven en órbitas circulares. La primera estrella, Alfa, tiene una rapidez orbital de 36.0 km/s; y la segunda estrella, Beta, de 12.0 km/s. El periodo orbital es de 137 días. Calcule las masas de las estrellas. *d*) Uno de los mejores candidatos para agujero negro está en el sistema binario llamado A0620-0090. Los dos objetos del sistema son una estrella anaranjada, V616 Monocerotis, y un objeto compacto que se cree es un agujero negro (figura 12.22). El periodo orbital de A0620-0090 es de 7.75 horas. Se estima que la masa de V616 Monocerotis es 0.67 veces la masa del Sol, y la del agujero negro, 3.8 veces la masa del Sol. Suponiendo que las órbitas son circulares, determine el radio de la órbita y la rapidez orbital de cada objeto. Compare sus respuestas con el radio orbital de la Tierra y su rapidez orbital alrededor del Sol.

12.75. Los cometas viajan alrededor del Sol en órbitas elípticas de gran excentricidad. Si un cometa tiene una rapidez de 2.0×10^4 m/s cuando está a una distancia de 2.5×10^{11} m del centro del Sol, ¿qué rapidez tiene cuando está a 5.0×10^{10} m?

12.76. Cuando Marte viaja en torno al Sol en su órbita elíptica, su distancia de mayor acercamiento al centro del Sol (en el perihelio) es de 2.067×10^{11} m, y su distancia máxima (en el afelio) es de 2.492×10^{11} m. Si la rapidez orbital de Marte en el afelio es de 2.198×10^4 m/s, ¿qué rapidez tiene en el perihelio? (Desprecie la influencia de los demás planetas.)

12.77. Considere una nave en órbita elíptica alrededor de la Tierra. En el punto bajo (perigeo) de su órbita, la nave está 400 km arriba de la superficie de la Tierra; en el punto alto (apogeo), está a 4000 km de la superficie de la Tierra. *a*) Calcule el periodo de la nave en esa órbita. *b*) Usando la conservación del momento angular, calcule la razón entre la rapidez de la nave en el perigeo y la rapidez de la nave en el apogeo. *c*) Usando la conservación de la energía, determine la rapidez de la nave tanto en el perigeo como en el apogeo. *d*) Se desea que la nave escape totalmente de la Tierra. Si sus cohetes se encienden en el perigeo, ¿cuánto tendrá que aumentarse la rapidez para lograrlo? ¿Qué ocurre si los cohetes se disparan en el apogeo? ¿Qué punto de la órbita se puede usar con mayor eficiencia?

12.78. Urano tiene un radio de 25,560 km y en la superficie de sus polos la aceleración debida a la gravedad es de 11.1 m/s^2. Su luna Miranda (descubierta en 1948 por Kuiper) está en una órbita circular a una altura de 104,000 km sobre la superficie del planeta y tiene una masa de 6.6×10^{19} kg y un radio de 235 km. *a*) Calcule la masa de Urano a partir de estos datos. *b*) Calcule la magnitud de aceleración de Miranda debida a su movimiento orbital alrededor de Urano. *c*) Calcule la aceleración debida a la gravedad de Miranda en su superficie. *d*) ¿Las respuestas a los incisos *b*) y *c*) implican que un objeto soltado 1 m arriba de la superficie de Miranda en el lado que da hacia Urano caerá *hacia arriba* relativo a Miranda? Explique.

12.79. Una nave de 3000 kg está en órbita circular 2000 km arriba de la superficie de Marte. ¿Cuánto trabajo deben efectuar sus motores para llevarla a una órbita circular 4000 km arriba de la superficie?

12.80. Uno de los cometas más brillantes del siglo xx fue el cometa Hyakutake, que pasó cerca del Sol a principios de 1996. Se estimó que el periodo orbital de ese cometa es de unos 30,000 años. Calcule el eje semimayor de la órbita de este cometa y compárela con la distancia media entre Plutón y el Sol, y con la distancia a Alfa Centauri, la estrella más cercana al Sol, que está a 4.3 años luz.

12.81. Los planetas no son uniformes en su interior. Normalmente, son más densos en el centro y su densidad se reduce hacia la superficie. Modele un planeta esféricamente simétrico, con el mismo radio que la Tierra, suponiendo que su densidad disminuye linealmente al aumentar la distancia al centro. Sea la densidad en el centro de 15.0×10^3 kg/m^3, y en la superficie, de 2.0×10^3 kg/m^3. Determine la aceleración debida a la gravedad en la superficie de ese planeta.

12.82. Un alambre uniforme con masa M y longitud L se dobla para formar una semicircunferencia. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza gravitacional que este alambre ejerce sobre una masa puntual m colocada en el centro de curvatura de la semicircunferencia.

***12.83.** Un objeto en forma de un anillo circular delgado tiene radio a y masa M. Una esfera uniforme de masa m y radio R se coloca con su centro a una distancia x a la derecha del centro del anillo, a lo largo de una línea que pasa por el centro del anillo y es perpendicular a su plano (figura 12.35). ¿Qué fuerza gravitacional ejerce la esfera sobre el

anillo? Demuestre que su resultado se reduce al valor esperado cuando x es mucho mayor que a.

***12.84.** Una varilla uniforme delgada tiene una longitud L y una masa M. Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional que la varilla ejerce sobre una partícula de masa m, situada en un punto a lo largo del eje de la varilla y a una distancia x de un extremo (figura 12.34). Demuestre que su resultado se reduce al valor esperado cuando x es mucho mayor que L.

***12.85.** Se perfora un pozo de la superficie al centro de la Tierra (figura 12.25). Como en el ejemplo 12.10 (sección 12.6), suponga que la densidad de la Tierra es uniforme. Con esta aproximación poco realista, la fuerza gravitacional que actúa sobre un objeto de masa m ubicado dentro de la Tierra a una distancia r del centro tiene magnitud $F_g = Gm_E mr/R_E^3$ (como se demostró en el ejemplo 12.10) y apunta hacia el centro de la Tierra. *a*) Deduzca una expresión para la energía potencial gravitacional $U(r)$ del sistema objeto-Tierra en función de la distancia del objeto al centro de la Tierra. Considere la energía potencial igual a cero cuando el objeto está en el centro de la Tierra. *b*) Si un objeto se deja caer por el pozo desde la superficie terrestre, ¿qué rapidez tendrá cuando llegue al centro de la Tierra?

Problemas de desafío

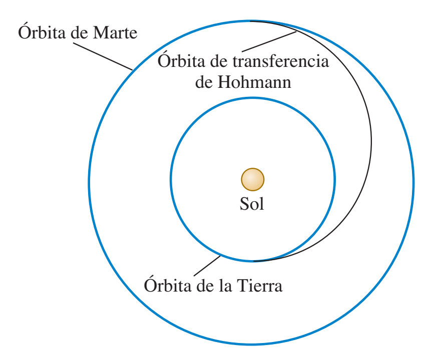
12.86. *a*) Cuando un objeto está en una órbita circular de radio r alrededor de la Tierra (masa m_E), el periodo de la órbita es T [dado por la ecuación (12.12)] y la rapidez orbital es v [dada por la ecuación (12.10)]. Demuestre que, cuando el objeto se pasa a una órbita circular con radio un poco mayor $r + \Delta r$, donde $\Delta r \ll r$, su nuevo periodo es $T + \Delta T$ y su nueva rapidez orbital es $v - \Delta v$, donde Δr, ΔT y Δv son cantidades positivas y

$$\Delta T = \frac{3\pi \Delta r}{v} \qquad \text{y} \qquad \Delta v = \frac{\pi \, \Delta r}{T}$$

(*Sugerencia:* use la expresión $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, válida para $|x| \ll 1$.) *b*) La Estación Espacial Internacional (ISS, por las siglas de International Space Station) está en una órbita casi circular a una altitud de 398.00 km. Una cuadrilla de mantenimiento está a punto de llegar en un transbordador espacial que también está en una órbita circular en el mismo plano orbital que la ISS, pero con una altitud de 398.10 km. La cuadrilla acudió para retirar un cable eléctrico inutilizado con una longitud de 125 m que está unido a la ISS por un extremo, con el otro extremo flotando libre en el espacio. El plan es que el transbordador pesque el extremo libre en el instante en que la nave, la ISS y el centro de la Tierra están alineados. Al tensarse el cable, se soltará de la ISS. ¿Cuántos minutos después de que el transbordador atrapa el extremo suelto el cable se soltará de la ISS? *c*) Demuestre que, si el transbordador no logra pescar el cable, la cuadrilla deberá esperar un tiempo $t \approx T^2/\Delta T$ para tener otra oportunidad. Calcule el valor numérico de t y explique si valdría la pena esperar.

12.87. Navegación interplanetaria. La forma más eficiente de enviar una nave de la Tierra a otro planeta es usar una *órbita de transferencia de Hohmann* (figura 12.38). Si las órbitas de los planetas de origen y de destino son circulares, la órbita de transferencia de Hohmann es una órbita elíptica, cuyos perihelio y afelio son tangentes a las órbitas de los dos planetas. Los cohetes se encienden brevemente en el planeta de origen para colocar la nave en la órbita de transferencia; a continuación, la nave viaja sin motor hasta llegar al planeta de destino. En ese instante, los cohetes se encienden otra vez para poner a la nave en la misma órbita alrededor del Sol que el planeta de destino. *a*) Para un vuelo de la Tierra a Marte, ¿en qué dirección se deben disparar los cohetes en la Tierra y en Marte: en la dirección del movimiento o en la dirección opuesta? ¿Y en un vuelo de Marte a la Tierra? *b*) ¿Cuánto tarda un viaje de ida de la Tierra a Marte, entre los disparos de los cohetes? *c*) Para llegar a Marte desde la Tierra, el instante del lanzamiento debe calcularse de modo que Marte esté en el lugar correcto cuando la nave llegue a la órbita de Marte alrededor del Sol. En el lanzamiento, ¿qué ángulo deben formar las líneas Sol-Marte y Sol-Tierra? Use datos del Apéndice F.

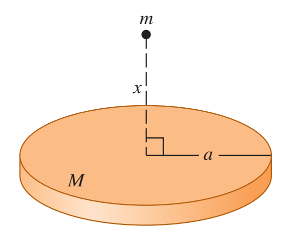
Figura 12.38 Problema de desafío 12.87.



12.88. Fuerzas de marea cerca de un agujero negro. Una astronauta, dentro de una nave que la protege de las radiaciones dañinas, está en órbita alrededor de un agujero negro a una distancia de 120 km de su centro. El agujero tiene 5.00 veces la masa del Sol y un radio de Schwarzschild de 15.0 km. La astronauta está situada dentro de la nave, de modo tal que una de sus orejas de 0.030 kg está 6.0 cm más lejos del agujero negro que el centro de masa de la nave, y la otra oreja está 6.0 cm más cerca. *a*) ¿Qué tensión hay entre las orejas? ¿Sería difícil para la astronauta evitar ser desgarrada por las fuerzas gravitacionales? (Puesto que todo su cuerpo está en órbita con la misma velocidad angular, una oreja se mueve con demasiada lentitud para el radio de su órbita y la otra lo hace con demasiada rapidez. Por ello, la cabeza debe ejercer fuerzas sobre las orejas para mantenerlas en sus órbitas.) *b*) ¿El centro de gravedad de la cabeza está en el mismo punto que su centro de masa? Explique.

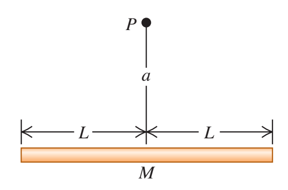
***12.89.** La masa M está distribuida uniformemente en un disco de radio a. Calcule la fuerza gravitacional (magnitud y dirección) que actúa entre esta masa y una partícula de masa m situada a una distancia x arriba del centro del disco (figura 12.39). ¿Su resultado se reduce a la expresión correcta cuando x se hace muy grande? (*Sugerencia:* divida el disco en anillos concéntricos infinitesimalmente delgados, use la expresión deducida en el ejercicio 12.41 para la fuerza gravitacional debida a cada anillo, e integre para obtener la fuerza total.)

Figura 12.39 Problema de desafío 12.89.



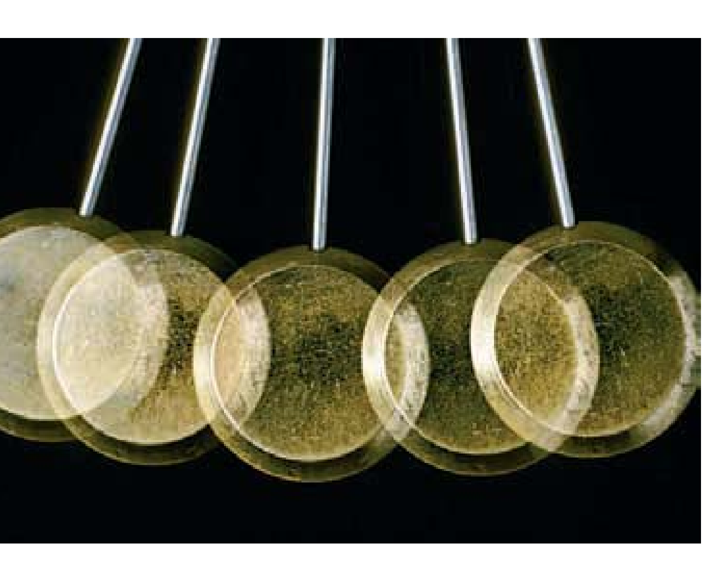
***12.90.** La masa M está distribuida uniformemente a lo largo de una línea de longitud $2L$. Una partícula de masa m está en un punto a una distancia a arriba del centro de la línea en su bisectriz perpendicular (el punto P en la figura 12.40). Para la fuerza gravitacional que la línea ejerce sobre la partícula, calcule las componentes perpendicular y paralela a la línea. ¿Su resultado se reduce a la expresión correcta cuando a se hace muy grande?

Figura 12.40 Problema de desafío 12.90.



MOVIMIENTO PERIÓDICO

13



?Suponga que usted duplica la masa de la péndola de un reloj (que incluye la varilla y la lenteja en su extremo) manteniendo iguales sus dimensiones. ¿El reloj se adelantaría o se atrasaría?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir las oscilaciones en términos de amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular.
- Cómo efectuar cálculos de movimiento armónico simple, un tipo de oscilación importante.
- Cómo utilizar los conceptos de energía para analizar el movimiento armónico simple.
- Cómo aplicar estas ideas de movimiento armónico simple en diferentes situaciones físicas.
- Cómo analizar los movimientos de un péndulo simple.
- Qué es un péndulo físico y cómo calcular las propiedades de su movimiento.
- Qué determina la duración de una oscilación.
- Cómo una fuerza aplicada a un oscilador en la frecuencia adecuada puede causar una respuesta o resonancia muy grande.

Muchos tipos de movimiento se repiten una y otra vez: la vibración de un cristal de cuarzo en un reloj de pulso, la péndola oscilante de un reloj con pedestal, las vibraciones sonoras producidas por un clarinete o un tubo de órgano y el movimiento periódico de los pistones de un motor de combustión. A esta clase de movimiento le llamamos **movimiento periódico** u **oscilación**, y será el tema del presente capítulo. Su comprensión será indispensable para nuestro estudio posterior de las ondas, el sonido, la corriente alterna y la luz.

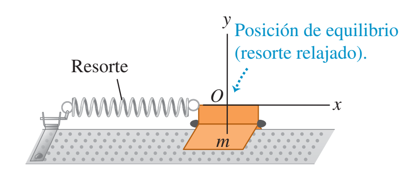
Un cuerpo que tiene un movimiento periódico se caracteriza por una posición de equilibrio estable; cuando se le aleja de esa posición y se suelta, entra en acción una fuerza o torca para volverlo al equilibrio. Sin embargo, para cuando llega ahí, ya ha adquirido cierta energía cinética que le permite continuar su movimiento hasta detenerse del otro lado, de donde será impulsado nuevamente hacia su posición de equilibrio. Imagine una pelota que rueda de un lado a otro dentro de un tazón redondo, o un péndulo que oscila pasando por su posición vertical.

En este capítulo, nos concentraremos en dos ejemplos sencillos de sistemas con movimiento periódico: los sistemas resorte-masa y los péndulos. También veremos por qué algunas oscilaciones tienden a detenerse con el tiempo, y otras tienen desplazamientos cada vez mayores con respecto al equilibrio cuando actúan fuerzas periódicamente variables.

13.1 Descripción de la oscilación

Uno de los sistemas más simples que puede tener movimiento periódico se muestra en la figura 13.1. Un cuerpo con masa m se mueve sobre una guía horizontal sin fricción, como una pista o riel de aire, de modo que sólo puede desplazarse en el eje x. El cuerpo está conectado a un resorte de masa despreciable que puede estirarse o comprimirse. El extremo izquierdo del resorte está fijo, y el derecho está unido al cuerpo. La fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo; las fuerzas normal y gravitacional verticales en este caso suman cero.

13.1 Sistema que puede tener movimiento periódico.



13.2 Modelo de movimiento periódico. Cuando el cuerpo está desplazado con respecto a la posición de equilibrio en $x = 0$, el resorte ejerce una fuerza de restitución dirigida hacia la posición de equilibrio.

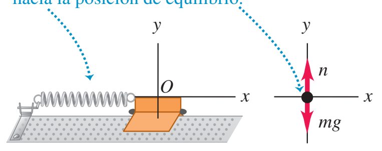
a)

$x > 0$: el deslizador se desplaza a la derecha desde la posición de equilibrio.

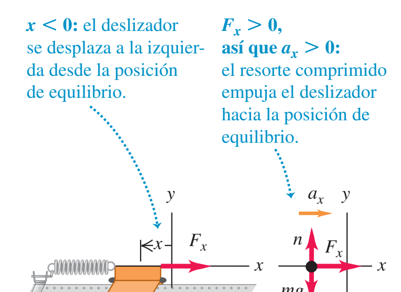
$F_x < 0$, así que $a_x < 0$: el resorte estirado tira del deslizador hacia la posición de equilibrio.

b)

$x = 0$: el resorte estirado tira del deslizador hacia la posición de equilibrio.



c)



Lo más sencillo es definir nuestro sistema de coordenadas con el origen O en la posición de equilibrio, donde el resorte no está estirado ni comprimido. Así, x es la componente x del **desplazamiento** del cuerpo con respecto al equilibrio y también es el cambio de longitud del resorte. La componente x de la fuerza que el resorte ejerce sobre el cuerpo es F_x y la componente x de la aceleración, a_x, está dada por $a_x = F_x/m$.

La figura 13.2 muestra el cuerpo para tres desplazamientos diferentes del resorte. Siempre que el cuerpo se desplaza con respecto a su posición de equilibrio, la fuerza del resorte tiende a regresarlo a dicha posición. Llamamos a una fuerza con esa característica **fuerza de restitución**. Sólo puede haber oscilación si hay una fuerza de restitución que tiende a regresar el sistema a la posición de equilibrio.

Analicemos cómo se da la oscilación en este sistema. Si desplazamos el cuerpo a la derecha hasta $x = A$ y lo soltamos, la fuerza total y la aceleración son hacia la izquierda. La rapidez aumenta al aproximarse el cuerpo a la posición de equilibrio O. Cuando el cuerpo está en O, la fuerza total que actúa sobre él es cero (figura 13.2b) pero, a causa de su movimiento, *rebasa* la posición de equilibrio. En el otro lado de esa posición, el cuerpo se sigue moviendo a la izquierda, pero la fuerza total y la aceleración son a la derecha (figura 13.2c); por lo tanto, la rapidez disminuye hasta que el cuerpo se detiene. Después demostraremos que, con un resorte ideal, el punto en el que se detiene es $x = -A$. Ahora el cuerpo acelera hacia la derecha, rebasa otra vez el equilibrio, y se detiene en el punto inicial $x = A$, listo para repetir todo el proceso. ¡El cuerpo está oscilando! Si no hay fricción u otra fuerza que elimine energía mecánica del sistema, el movimiento se repetirá eternamente; la fuerza de restitución tirará perpetuamente del cuerpo hacia la posición de equilibrio, la cual, el cuerpo rebasará una y otra vez.

En situaciones diferentes, la fuerza puede depender de diversas maneras del desplazamiento x con respecto al equilibrio, pero *siempre* habrá oscilación si la fuerza es de *restitución* y tiende a volver el sistema al equilibrio.

Amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular

Veamos algunos términos que usaremos al analizar movimientos periódicos de todo tipo:

La **amplitud** del movimiento, denotada con A, es la magnitud máxima del desplazamiento con respecto al equilibrio; es decir, el valor máximo de $|x|$ y siempre es positiva. Si el resorte de la figura 13.2 es ideal, el rango global del movimiento es $2A$. La unidad de A en el SI es el metro. Una vibración completa, o **ciclo**, es un viaje redondo (de ida y vuelta), digamos de A a $-A$ y de regreso a A, o bien, de O a A, regresando por O hasta $-A$ y volviendo a O. El movimiento de un lado al otro (digamos, de $-A$ a A) es medio ciclo.

El **periodo**, T, es el tiempo que tarda un ciclo, y siempre es positivo. La unidad del periodo en el SI es el segundo, aunque a veces se expresa como "segundos por ciclo".

La **frecuencia**, f, es el número de ciclos en la unidad de tiempo, y siempre es positiva. La unidad de la frecuencia en el SI es el hertz:

$$1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ ciclo/s} = 1 \text{ s}^{-1}$$

Esta unidad se llama así en honor al físico alemán Heinrich Hertz (1857-1894), un pionero en la investigación de las ondas electromagnéticas.

La **frecuencia angular**, ω, es 2π veces la frecuencia:

$$\omega = 2\pi f$$

Pronto veremos para qué sirve ω; representa la rapidez de cambio de una cantidad angular (no necesariamente relacionada con un movimiento rotacional) que siempre se mide en radianes, de modo que sus unidades son rad/s. Puesto que f está en ciclos/s, podemos considerar que el número 2π tiene unidades de rad/ciclo.

Por las definiciones de periodo T y frecuencia f, es evidente que uno es el recíproco del otro:

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \qquad \text{(relaciones entre frecuencia y periodo)} \tag{13.1}$$

También, por la definición de ω,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{(frecuencia angular)} \tag{13.2}$$

Ejemplo 13.1 Periodo, frecuencia y frecuencia angular

Un transductor ultrasónico (una especie de altavoz) empleado para el diagnóstico médico oscila con una frecuencia de 6.7 MHz = 6.7×10^6 Hz. ¿Cuánto tarda cada oscilación, y qué frecuencia angular tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestras incógnitas son el periodo T y la frecuencia angular ω.

PLANTEAR: Nos dan la frecuencia f, así que podemos obtener esas variables empleando las ecuaciones (13.1) y (13.2), respectivamente.

EJECUTAR: Por las ecuaciones: (13.1) y (13.2),

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6.7 \times 10^6 \text{ Hz}} = 1.5 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.15\ \mu\text{s}$$

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = 2\pi(6.7 \times 10^6 \text{ Hz}) \\ &= (2\pi \text{ rad/ciclo})(6.7 \times 10^6 \text{ ciclos/s}) \\ &= 4.2 \times 10^7 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

EVALUAR: Ésta es una vibración muy rápida, con f y ω grandes y T pequeño. Una vibración lenta tiene f y ω pequeñas, y T grande.

Evalúe su comprensión de la sección 13.1 Un cuerpo como el de la figura 13.2 oscila de un lado a otro. Para cada uno de los siguientes valores, de la velocidad v_x y la aceleración a_x del cuerpo, indique si el desplazamiento x es positivo, negativo o cero. *a)* $v_x > 0$ y $a_x > 0$; *b)* $v_x > 0$ y $a_x < 0$; *c)* $v_x < 0$ y $a_x > 0$; *d)* $v_x < 0$ y $a_x < 0$; *e)* $v_x = 0$ y $a_x < 0$; *f)* $v_x > 0$ y $a_x = 0$.

MP

13.2 Movimiento armónico simple

El tipo de oscilación más sencillo sucede cuando la fuerza de restitución F_x es *directamente proporcional* al desplazamiento x con respecto al equilibrio. Esto ocurre si el resorte de las figuras 13.1 y 13.2 es ideal y obedece la ley de Hooke. La constante de proporcionalidad entre F_x y x es la constante de fuerza k. (De ser necesario, repase la ley de Hooke y la definición de la constante de fuerza en la sección 6.3.) En ambos lados de la posición de equilibrio, F_x y x siempre tienen signos opuestos. En la sección 6.3, representamos la fuerza que actúa *sobre* un resorte ideal estirado como $F_x = kx$. La componente x de la fuerza que el resorte ejerce *sobre el cuerpo* es el negativo de ésta, así que la componente x de la fuerza F_x sobre el cuerpo es

$$F_x = -kx \qquad \text{(fuerza de restitución ejercida por un resorte ideal)} \tag{13.3}$$

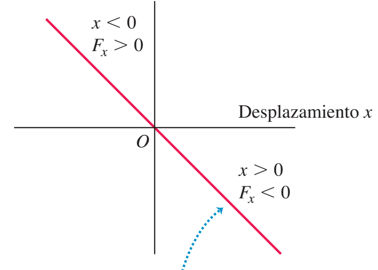
Esta ecuación da la magnitud y el signo correctos de la fuerza, ya sea x positivo, negativo o cero (figura 13.3). La constante de fuerza k siempre es positiva y tiene unidades de N/m (también resultan útiles las unidades de kg/s^2). Estamos suponiendo que no hay fricción, así que la ecuación (13.3) da la fuerza *total* que actúa sobre el cuerpo.

Si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, según la ecuación (13.3), la oscilación se denomina **movimiento armónico simple**, *que se abrevia* **MAS**. La aceleración $a_x = d^2x/dt^2 = F_x/m$ de un cuerpo en MAS está dada por

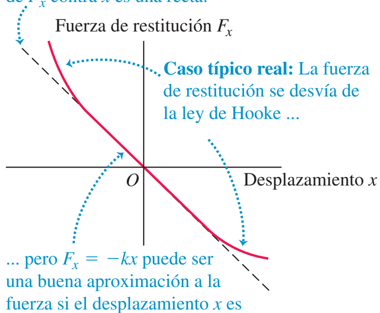
$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad \text{(movimiento armónico simple)} \tag{13.4}$$

El signo menos indica que la aceleración y el desplazamiento siempre tienen signos opuestos. Esta aceleración *no* es constante, así que olvídese de usar las ecuaciones para aceleración constante del capítulo 2. En breve veremos cómo resolver esta

13.3 Un resorte ideal ejerce una fuerza de restitución que obedece la ley de Hooke, $F_x = -kx$. La oscilación con una fuerza de restitución así se denomina movimiento armónico simple.



13.4 En casi todas las oscilaciones reales, se aplica la ley de Hooke dado que el cuerpo no se aleja tanto del equilibrio. En tal caso, las oscilaciones tienen amplitud pequeña y son casi armónicas simples.



ecuación para obtener el desplazamiento x en función del tiempo. Un cuerpo que está en movimiento armónico simple se denomina **oscilador armónico**.

¿Por qué es importante el movimiento armónico simple? Tenga presente que no todos los movimientos periódicos son armónicos simples; en el movimiento periódico en general, la relación entre la fuerza de restitución y el desplazamiento es más complicada que la ecuación (13.3). No obstante, en muchos sistemas, la fuerza de restitución es *aproximadamente* proporcional al desplazamiento si éste es lo suficiente pequeño (figura 13.4). Es decir, si la amplitud es pequeña, las oscilaciones de tales sistemas son más o menos armónicas simples y, por lo tanto, la ecuación (13.4) las describe aproximadamente. Así, podemos usar el MAS como modelo aproximado de muchos movimientos periódicos distintos, como la vibración del cristal de cuarzo de un reloj de pulso, el movimiento de un diapasón, la corriente eléctrica en un circuito de corriente alterna, y las vibraciones de los átomos en moléculas y sólidos.

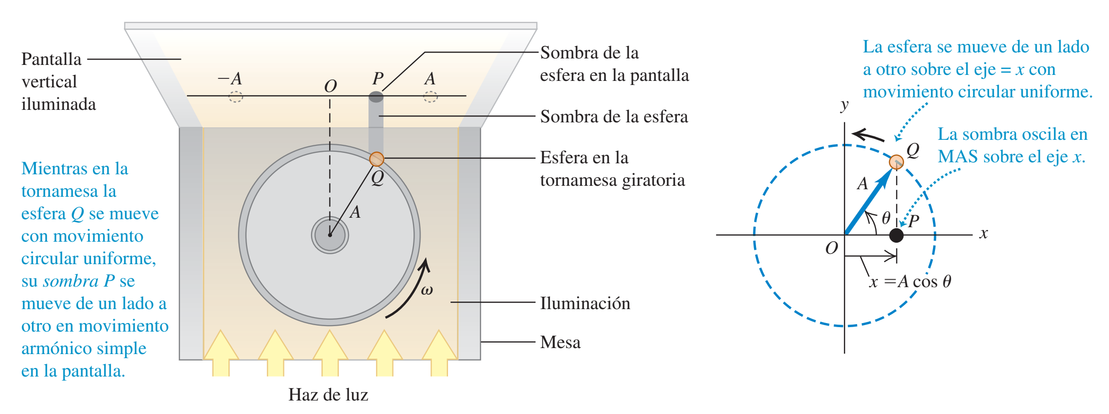
Movimiento circular y ecuaciones del MAS

Para explorar las propiedades del movimiento armónico simple, debemos expresar el desplazamiento x del cuerpo oscilante en función del tiempo, $x(t)$. La segunda derivada de esta función, d^2x/dt^2, debe ser igual a $(-k/m)$ multiplicado por la función misma, como lo pide la ecuación (13.4). Como vimos, las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4 no son útiles aquí, porque la aceleración cambia constantemente al cambiar el desplazamiento x. En cambio, obtendremos $x(t)$ aprovechando la notable similitud entre el MAS y otra forma de movimiento que ya estudiamos detalladamente.

La figura 13.5a muestra la vista superior de un disco horizontal de radio A con una esfera pegada a su borde en el punto Q. El disco gira con rapidez angular constante ω (que se mide en rad/s), así que la esfera tiene movimiento circular uniforme. Un haz de luz horizontal incide en el disco y proyecta la sombra de la esfera en una pantalla. La sombra en el punto P oscila conforme la esfera se mueve en un círculo. Luego instalamos un cuerpo sujeto a un resorte ideal, como la combinación de las figuras 13.1 y 13.2, de modo que el cuerpo oscile paralelo a la sombra. Demostraremos que el movimiento del cuerpo y el movimiento de la sombra de la esfera son *idénticos*, cuando la amplitud de la oscilación del cuerpo es igual al radio del disco A, y si la frecuencia angular $2\pi f$ del cuerpo oscilante es igual a la rapidez angular ω del disco. Esto es, *el movimiento armónico simple es la proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro.*

Podemos comprobar esta notable afirmación calculando la aceleración de la sombra en P y comparándola con la aceleración de un cuerpo en MAS, dada por

13.5 a) Relación entre movimiento circular uniforme y movimiento armónico simple. b) La sombra de la esfera se mueve exactamente como un cuerpo que oscila unido a un resorte ideal.



la ecuación (13.4). El círculo en el que la esfera se mueve, de modo que su proyección coincide con el movimiento del cuerpo oscilante se denomina **círculo de referencia**; llamaremos a Q el *punto de referencia*. Tomamos el círculo de referencia en el plano xy, con el origen O en el centro del círculo (figura 13.5b). En el instante t, el vector OQ del origen al punto de referencia Q forma un ángulo θ con el eje $+x$. Al girar Q en el círculo de referencia con rapidez angular constante ω, el vector OQ gira con la misma rapidez angular. Un vector giratorio así se denomina **fasor**. (Este término estaba en uso mucho antes de inventarse el arma del mismo nombre del programa de TV "Viaje a las estrellas". El método de fasores para analizar oscilaciones es útil en muchas áreas de la física. Usaremos los fasores cuando estudiemos los circuitos de corriente alterna en el capítulo 31 y la interferencia de la luz en los capítulos 35 y 36.)

La componente x del fasor en el instante t es la coordenada x del punto Q:

$$x = A\cos\theta \tag{13.5}$$

Ésta es también la coordenada x de la sombra P, que es la *proyección* de Q sobre el eje x. Por lo tanto, la velocidad x de la sombra P en el eje x es igual a la componente x del vector de velocidad del punto de referencia Q (figura 13.6a) y aceleración x de P es igual a la componente x del vector de aceleración de Q (figura 13.6b). Puesto que Q está en movimiento circular uniforme, su vector de aceleración $\vec{a}_Q$ siempre apunta hacia O. Además, la magnitud de $\vec{a}_Q$ es constante y es igual a la velocidad angular al cuadrado multiplicada por el radio del círculo (véase la sección 9.3):

$$a_Q = \omega^2 A \tag{13.6}$$

La figura 13.6b muestra que la componente x de $\vec{a}_Q$ es $a_x = -a_Q\cos\theta$. Combinando esto con las ecuaciones (13.5) y (13.6), vemos que la aceleración del punto P es

$$a_x = -a_Q\cos\theta = -\omega^2 A\cos\theta \qquad \text{o bien} \tag{13.7}$$

$$a_x = -\omega^2 x \tag{13.8}$$

La aceleración del punto P es directamente proporcional al desplazamiento x y siempre tiene el signo opuesto. Éstas son precisamente las características distintivas del movimiento armónico simple.

La ecuación (13.8) es *exactamente* igual a la ecuación (13.4) para la aceleración de un oscilador armónico, siempre que la rapidez angular ω del punto de referencia Q esté relacionada con la constante de fuerza k y la masa m del cuerpo oscilante por

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad \text{o bien,} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.9}$$

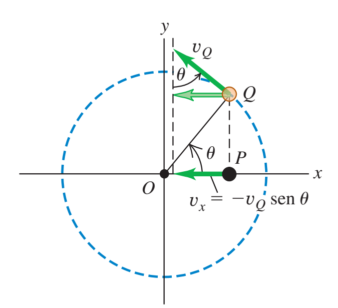
Hemos estado usando el mismo símbolo ω para la *rapidez* angular del punto de referencia Q y la *frecuencia* angular del punto oscilante P. La razón es que ¡estas cantidades son iguales! Si Q completa una revolución en un tiempo T, P completa un ciclo de oscilación en el mismo tiempo; por lo tanto, T es el periodo de la oscilación. Durante el tiempo T, el punto Q gira 2π radianes, así que su rapidez angular es $\omega = 2\pi/T$. Ésta es la ecuación (13.2) para la frecuencia angular de P, lo cual verifica nuestra afirmación acerca de las dos interpretaciones de ω. Por ello, introdujimos la frecuencia angular en la sección 13.1; es la cantidad que conecta la oscilación y el movimiento circular. Así, reinterpretamos la ecuación (13.9) como una expresión de la frecuencia angular del movimiento armónico simple para un cuerpo de masa m, sobre el que actúa una fuerza de restitución con constante de fuerza k:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(movimiento armónico simple)} \tag{13.10}$$

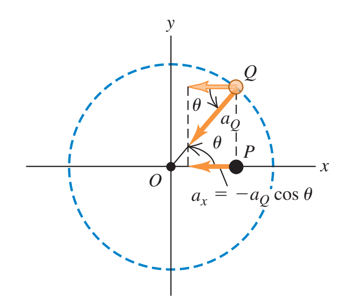
Cuando un cuerpo comienza a oscilar en un MAS, no podemos elegir el valor de ω, pues está predeterminado por los valores de k y m. Las unidades de k son N/m, o

13.6 a) La velocidad x y b) la aceleración de x de la sombra de la esfera representada por el punto P (véase la figura 13.5) son las componentes x de los vectores de velocidad y aceleración, respectivamente, de la esfera Q.

a) Uso del círculo de referencia para determinar la velocidad x del punto P



b) Uso del círculo de referencia para determinar la aceleración x del punto P



bien, kg/s^2, así que k/m está en $(kg/s^2)/kg = s^{-2}$. Cuando obtenemos la raíz cuadrada en la ecuación (13.10), obtenemos s^{-1} o, mejor dicho, rad/s, porque se trata de una frecuencia *angular* (recuerde que el radián no es una unidad verdadera).

Según las ecuaciones (13.1) y (13.2), la frecuencia f y el periodo T son

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \qquad (13.11)$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{(movimiento armónico simple)} \qquad (13.12)$$

Por la ecuación (13.12), vemos que una masa mayor m, con su mayor inercia, tiene menos aceleración, se mueve más lentamente y tarda más en completar un ciclo (figura 13.7). En cambio, un resorte más rígido (con mayor constante de fuerza k) ejerce una mayor fuerza para una deformación x dada, causando una mayor aceleración, velocidades más altas y ciclos más cortos.

13.7 Cuanto mayor sea la masa m de los brazos de un diapasón, más baja será la frecuencia de oscilación $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ y más bajo será el tono del sonido producido por el diapasón.

Brazos con masa m grande: frecuencia baja $f = 128$ Hz



Brazos con masa m pequeña: frecuencia alta $f = 4096$ Hz

CUIDADO **No confunda frecuencia con frecuencia angular** Podemos meternos en problemas si no distinguimos entre frecuencia f y frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. La frecuencia nos indica cuántos ciclos de oscilación se dan por segundo; mientras que la frecuencia angular nos dice a cuántos radianes por segundo corresponde esto en el círculo de referencia. Al resolver problemas, fíjese bien si el objetivo es obtener f o bien ω.

Periodo y amplitud en el MAS

Las ecuaciones (13.11) y (13.12) muestran que el periodo y la frecuencia del movimiento armónico simple están determinadas solamente por la masa m y la constante de fuerza k. *En el movimiento armónico simple, el periodo y la frecuencia no dependen de la amplitud A*. Para valores dados de m y k, el tiempo de una oscilación completa es el mismo, sea la amplitud grande o pequeña. La ecuación (13.3) muestra por qué esto es lógico. Una mayor A implica que la masa alcanza valores mayores de $|x|$ y se somete a fuerzas de restitución mayores. Esto aumenta la rapidez media del cuerpo durante un ciclo completo, lo cual compensa exactamente la necesidad de recorrer una mayor distancia, de modo que el tiempo total es el mismo.

En esencia las oscilaciones de un diapasón son movimiento armónico simple; ello implica que siempre vibra con la misma frecuencia, sea cual fuere la amplitud. Esto permite usar el diapasón como estándar para tono musical. Si no fuera por esta característica del movimiento armónico simple, sería imposible hacer que los relojes mecánicos y electrónicos que conocemos fueran exactos, o tocar afinadamente la mayoría de los instrumentos musicales. Si encontramos un cuerpo oscilante cuyo periodo *sí* depende de la amplitud, su movimiento *no* es armónico simple.

Ejemplo 13.2 Frecuencia angular, frecuencia y periodo del MAS

Un resorte se monta horizontalmente con su extremo izquierdo fijo. Conectando una balanza de resorte al extremo libre y tirando hacia la derecha (figura 13.8a), determinamos que la fuerza de estiramiento es proporcional al desplazamiento y que una fuerza de 6.0 N causa un desplazamiento de 0.030 m. Quitamos la balanza y conectamos un deslizador de 0.50 kg al extremo, tiramos de él hasta moverlo 0.020 m por una pista de aire sin fricción, lo soltamos y vemos cómo oscila. *a*) Determine la constante de fuerza del resorte. *b*) Calcule la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo de la oscilación.

SOLUCIÓN

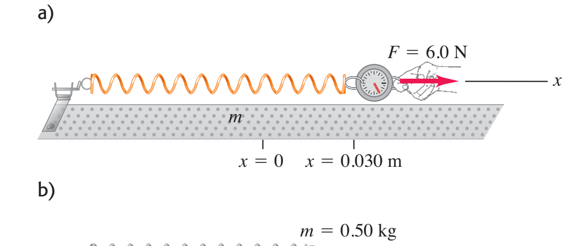
IDENTIFICAR: Dado que la fuerza del resorte (con magnitud igual a la fuerza de estiramiento) es proporcional al desplazamiento, el movimiento es armónico simple.

PLANTEAR: Obtendremos el valor de la constante de fuerza k usando la ley de Hooke, la ecuación (13.3) y los valores de ω, f y T, usando las ecuaciones (13.10), (13.11) y (13.12), respectivamente.

EJECUTAR: *a*) Cuando $x = 0.030$ m, la fuerza que el resorte ejerce sobre la balanza de resorte es $F_x = -6.0$ N. Por la ecuación (13.3),

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{-6.0\ \text{N}}{0.030\ \text{m}} = 200\ \text{N/m} = 200\ \text{kg/s}^2$$

13.8 a) La fuerza ejercida *sobre* el resorte (indicada por el vector $\vec{F}$) tiene componente *x*: $F_x = +6.0$ N. La fuerza ejercida *por* el resorte tiene componente *x*: $F_x = -6.0$ N. *b*) Un deslizador está unido al mismo resorte y se le permite oscilar.



b) Usando $m = 0.50$ kg en la ecuación (13.10), vemos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200\ \text{kg/s}^2}{0.50\ \text{kg}}} = 20\ \text{rad/s}$$

La frecuencia *f* es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20\ \text{rad/s}}{2\pi\ \text{rad/ciclo}} = 3.2\ \text{ciclos/s} = 3.2\ \text{Hz}$$

El periodo *T* es el recíproco de la frecuencia *f*:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{3.2\ \text{ciclos/s}} = 0.31\ \text{s}$$

El periodo por lo regular se da en "segundos", en vez de en "segundos por ciclo".

EVALUAR: La amplitud de la oscilación es de 0.020 m, la distancia a la derecha que movimos el deslizador conectado al resorte antes de soltarlo. No necesitamos esta información para calcular la frecuencia angular, la frecuencia ni el periodo porque, en el MAS, ninguna de esas cantidades depende de la amplitud.

Desplazamiento, velocidad y aceleración en el MAS

Aún necesitamos obtener el desplazamiento *x* en función del tiempo para un oscilador armónico. La ecuación (13.4) para un cuerpo en movimiento armónico simple en el eje *x* es idéntica a la ecuación (13.8), para la coordenada *x* del punto de referencia en movimiento circular uniforme con rapidez angular constante $\omega = \sqrt{k/m}$. Se sigue que la ecuación (13.5), $x = A\cos\theta$, describe la coordenada *x* para ambas situaciones. Si, en $t = 0$, el fasor *OQ* forma un ángulo ϕ (letra griega phi) con el eje $+x$, entonces en cualquier instante posterior *t*, este ángulo será $\theta = \omega t + \phi$. Sustituimos esto en la ecuación (13.5) para obtener

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(desplazamiento del MAS)} \qquad (13.13)$$

Activ Physics ONLINE

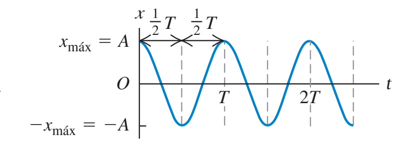
9.1 Ecuaciones y gráficas de posición
9.2 Descripción del movimiento vibratorio
9.5 Mono tira a Tarzán

donde $\omega = \sqrt{k/m}$. La figura 13.9 muestra una gráfica de la ecuación (13.13) para el caso específico en que $\phi = 0$. El desplazamiento *x* es una función periódica de *t*, como se espera en el MAS. También podríamos haber escrito la ecuación (13.13) en términos de la función seno en vez de coseno, usando la identidad $\cos\alpha = \text{sen}(\alpha + \pi/2)$. *En el movimiento armónico simple, la posición es una función periódica senoidal del tiempo.* Hay muchas otras funciones periódicas, pero ninguna tan continua y simple como una función seno o coseno.

El valor del coseno siempre está entre -1 y 1, así que en la ecuación (13.13) *x* siempre está entre $-A$ y *A*. Esto confirma que *A* es la amplitud del movimiento.

El periodo *T* es lo que tarda un ciclo de oscilación (figura 13.9). La función coseno se repite cada vez que la cantidad entre paréntesis de la ecuación (13.13) aumenta en 2π radianes. Si comenzamos en $t = 0$, el tiempo *T* para completar un ciclo está dado por

$$\omega T = \sqrt{\frac{k}{m}}T = 2\pi \qquad \text{o bien,} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



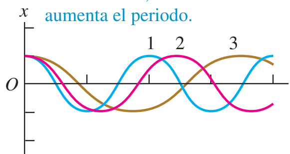
13.9 Gráica de *x* en función de *t* [véase la ecuación (13.13)] para el movimiento armónico simple. El caso que se muestra tiene $\phi = 0$.

13.10 Variaciones del movimiento armónico simple. En todos los casos, $\phi = 0$ [véase la ecuación (13.13)].



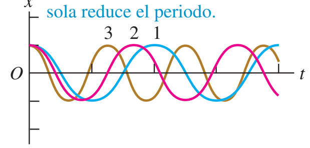
a) Si m aumenta; mismas A y k

La masa m aumenta de la curva 1 a la 2 a la 3; incrementar m solo aumenta el periodo.



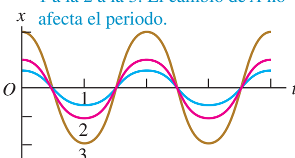
b) Si k aumenta; mismas A y m

La constante de fuerza k aumenta de la curva 1 a la 2 a la 3; incrementar k sola reduce el periodo.



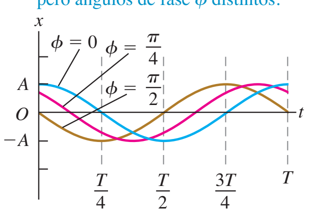
c) Si A aumenta; mismas k y m

La amplitud A aumenta de la curva 1 a la 2 a la 3. El cambio de A no afecta el periodo.



13.11 Variaciones del MAS: desplazamiento contra tiempo para el mismo oscilador armónico pero ángulos de fase ϕ distintos.

Las tres curvas muestran el MAS con los mismos periodo T y amplitud A, pero ángulos de fase ϕ distintos.



que es la ecuación (13.12). Un cambio de m o de k altera el periodo de oscilación, como se muestra en las figuras 13.10a y 13.10b. El periodo no depende de la amplitud A (figura 13.10c).

La constante ϕ de la ecuación (13.13) es el **ángulo de fase**, que nos indica en qué punto del ciclo se encontraba el movimiento cuando $t = 0$ (o en qué parte del círculo estaba el punto Q en $t = 0$). Denotamos la posición en $t = 0$ con x_0. Sustituyendo $t = 0$ y $x = x_0$ en la ecuación (13.13) obtenemos

$$x_0 = A\cos\phi \tag{13.14}$$

Si $\phi = 0$, entonces $x_0 = A\cos 0 = A$, por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento positivo máximo. Si $\phi = \pi$, entonces $x_0 = A\cos\pi = -A$, por lo tanto, la partícula parte del desplazamiento *negativo* máximo. Si $\phi = \pi/2$, entonces $x_0 = A\cos(\pi/2) = 0$, por lo tanto, la partícula parte del origen. La figura 13.11 muestra el desplazamiento x contra el tiempo para diferentes ángulos de fase.

Obtenemos la velocidad v_x y la aceleración a_x en función del tiempo para un oscilador armónico derivando la ecuación (13.13) con respecto al tiempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) \qquad \text{(velocidad en el MAS)} \tag{13.15}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \qquad \text{(aceleración en el MAS)} \tag{13.16}$$

La velocidad v_x oscila entre $v_{máx} = +\omega A$ y $-v_{máx} = -\omega A$, y la aceleración a_x oscila entre $a_{máx} = +\omega^2 A$ y $-a_{máx} = -\omega^2 A$ (figura 13.12). Si comparamos la ecuación (13.16) con la ecuación (13.13) y recordamos que $\omega^2 = k/m$ [ecuación (13.9)], vemos que

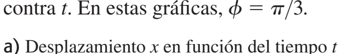
$$a_x = -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x$$

que es la ecuación (13.4) para el movimiento armónico simple. Esto confirma que es correcta la ecuación (13.13) para x en función del tiempo.

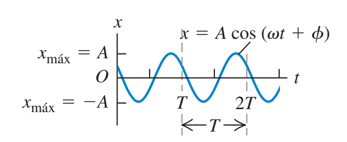
Ya antes deducimos geométricamente la ecuación (13.16), tomando la componente x del vector de aceleración del punto de referencia Q. Esto se hizo en la figura 13.6b y la ecuación (13.7) (recuerde que $\theta = \omega t + \phi$). Del mismo modo, podríamos haber derivado la ecuación (13.15) tomando la componente x del vector de velocidad de Q (figura 13.6b). Dejamos los detalles al lector (véase el problema 13.85).

Observe que la gráfica senoidal de desplazamiento contra tiempo (figura 13.12a) está desplazada un cuarto de periodo con respecto a la de velocidad contra tiempo (figura 13.12b) y medio periodo con respecto a la de aceleración contra tiempo (figura 13.12c). La figura 13.13 muestra porque ocurre así. Cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio y el desplazamiento es cero, la velocidad es $v_{máx}$ o bien $-v_{máx}$

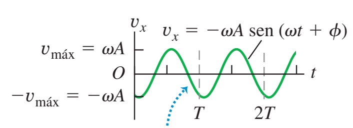
13.12 Gráficas para el MAS: a) de x contra t, b) de v_x contra t y c) de a_x contra t. En estas gráficas, $\phi = \pi/3$.



a) Desplazamiento x en función del tiempo t

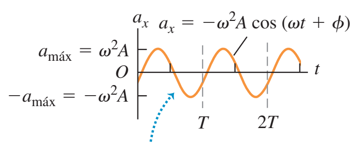


b) Velocidad v_x en función del tiempo t



La gráfica v_x-t se desplaza un cuarto de ciclo con respecto a la gráfica.

c) Aceleración a_x en función del tiempo t



La gráfica a_x-t se desplaza un cuarto de ciclo con respecto a la gráfica v_x-t y medio ciclo con respecto a la gráfica x-t.

(dependiendo de la dirección de movimiento) y la aceleración es cero. Cuando el cuerpo está en su desplazamiento máximo positivo ($x = +A$) o negativo ($x = -A$), la velocidad es cero y el cuerpo está momentáneamente en reposo. En estos puntos, la fuerza de restitución $F_x = -kx$ y la aceleración del cuerpo tienen su magnitud máxima. En $x = +A$ la aceleración es negativa e igual a $-a_{máx}$. En $x = -A$, la aceleración es positiva: $a_x = +a_{máx}$.

Si conocemos la posición y la velocidad iniciales x_0 y v_{0x} del cuerpo oscilante, podemos determinar la amplitud A y el ángulo de fase ϕ como sigue. v_{0x} es la velocidad inicial en $t = 0$; si sustituimos $v_x = v_{0x}$ y $t = 0$ en la ecuación (13.15), vemos que

$$v_{0x} = -\omega A \operatorname{sen}\phi \tag{13.17}$$

Para calcular ϕ, divida la ecuación (13.17) entre la ecuación (13.14). Esto elimina A y produce una ecuación de la que podemos despejar ϕ:

$$\frac{v_{0x}}{x_0} = \frac{-\omega A \operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = -\omega\tan\phi$$

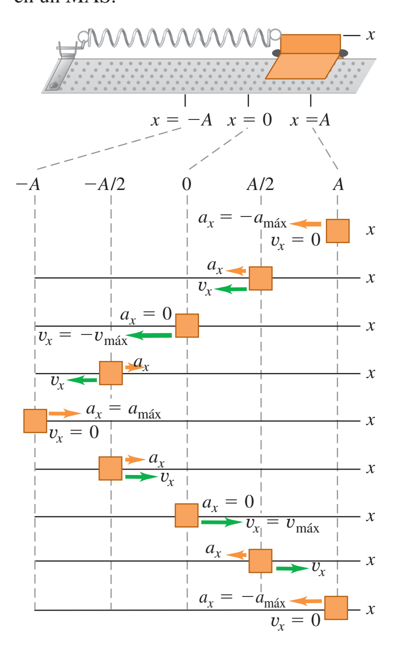
$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right) \quad \text{(ángulo de fase del MAS)} \tag{13.18}$$

También es fácil calcular la amplitud A si conocemos x_0 y v_{0x}. Bosquejaremos la deducción y dejaremos los detalles al lector. Eleve al cuadrado la ecuación (13.14); luego divida la ecuación (13.17) entre ω, elévela al cuadrado y súmela al cuadrado de la ecuación (13.14). El miembro derecho será $A^2(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi)$, que es igual a A^2. El resultado final es

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \quad \text{(amplitud del MAS)} \tag{13.19}$$

Observe que si el cuerpo tiene tanto un desplazamiento inicial x_0 como una velocidad inicial v_{0x} distinta de cero, la amplitud A *no* es igual al desplazamiento inicial. Eso es lógico. Si el cuerpo parte de un x_0 positivo y se le imparte una velocidad positiva v_{0x}, llegará *más lejos* que x_0 antes de regresar.

13.13 Cómo varían la velocidad v_x y la aceleración a_x durante un ciclo en un MAS.



Estrategia para resolver problemas 13.1 Movimiento armónico simple I: Descripción del movimiento



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Un sistema oscilante tiene movimiento armónico simple (MAS) *únicamente* si la fuerza de restitución es directamente proporcional al desplazamiento. Asegúrese de que esto se cumpla en la situación del problema antes de tratar de aplicar cualquiera de los resultados de esta sección. Como siempre, identifique las incógnitas.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Identifique las cantidades conocidas y desconocidas, y determine cuáles son las incógnitas.
2. Resulta útil distinguir dos clases de cantidades. Las *propiedades básicas* del sistema incluyen la masa m y la constante de fuerza k. También incluyen cantidades derivadas de m y k, como el periodo T, la frecuencia f y la frecuencia angular ω. Las *propiedades del movimiento* describen cómo se comporta el sistema cuando se pone en movimiento de una forma específica, e incluyen la amplitud A, la velocidad máxima $v_{máx}$, el ángulo de fase ϕ y los valores de x, v_x y a_x en un instante dado.
3. Si es necesario, defina un eje x como en la figura 13.13, con la posición de equilibrio en $x = 0$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Use las ecuaciones dadas en las secciones 13.1 y 13.2 para obtener las incógnitas.
2. Si necesita calcular el ángulo de fase, tenga cuidado de expresarlo en radianes. La cantidad ωt de la ecuación (13.13) está naturalmente en radianes, por lo que ϕ debe estarlo también.
3. Si necesita hallar los valores de x, v_x y a_x en diversos instantes, use las ecuaciones (13.11), (13.15) y (13.16), respectivamente. Si se dan la posición x_0 y la velocidad inicial v_{0x}, se puede determinar el ángulo de fase y la amplitud a partir de las ecuaciones (13.18) y (13.19). Si el cuerpo tiene un desplazamiento inicial positivo x_0 pero velocidad inicial cero ($v_{0x} = 0$), la amplitud es $A = x_0$ y el ángulo de fase es $\phi = 0$. Si el cuerpo tiene velocidad inicial positiva v_{0x} pero ningún desplazamiento inicial ($x_0 = 0$), la amplitud es $A = v_{0x}/\omega$ y el ángulo de fase es $\phi = -\pi/2$.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe sus resultados para asegurarse de que sean congruentes. Por ejemplo, suponga que usó la posición y la velocidad iniciales para obtener expresiones generales para x y v_x en el instante t. Si sustituye $t = 0$ en estas expresiones, deberá obtener los valores correctos de x_0 y v_{0x}.

Ejemplo 13.3 Descripción del MAS

Volvamos al sistema de masa y resorte horizontal que consideramos en el ejemplo 13.2, con $k = 200$ N/m y $m = 0.50$ kg. Esta vez impartiremos al cuerpo un desplazamiento inicial de $+0.015$ m y una velocidad inicial de $+0.40$ m/s. *a*) Determine el periodo, la amplitud y el ángulo de fase del movimiento. *b*) Escriba ecuaciones para desplazamiento, velocidad y aceleración en función del tiempo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Igual que en el ejemplo 13.2, las oscilaciones son de un MAS y podemos usar las expresiones desarrolladas en esta sección.

PLANTEAR: Nos dan los valores de k, m, x_0 y v_{0x}. Con base en ellos, calcularemos las incógnitas T, A y ϕ y las expresiones para x, v_x y a_x en función del tiempo.

EJECUTAR: *a*) El periodo es exactamente el mismo del ejemplo 13.2, $T = 0.31$ s. En el movimiento armónico simple, el periodo no depende de la amplitud, sólo de los valores de k y m. En el ejemplo 13.2, determinamos que $\omega = 20$ rad/s, así que, por la ecuación (13.19),

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}$$
$$= \sqrt{(0.015 \text{ m})^2 + \frac{(0.40 \text{ m/s})^2}{(20 \text{ rad/s})^2}}$$
$$= 0.025 \text{ m}$$

Para obtener el ángulo de fase ϕ, usamos la ecuación (13.18):

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_{0x}}{\omega x_0}\right)$$
$$= \arctan\left(-\frac{0.40 \text{ m/s}}{(20 \text{ rad/s})(0.015 \text{ m})}\right) = -53° = -0.93 \text{ rad}$$

b) El desplazamiento, la velocidad y la aceleración en cualquier instante están dados por las ecuaciones (13.13), (13.15) y (13.16), respectivamente. Sustituyendo los valores, obtenemos

$$x = (0.025 \text{ m})\cos[(20 \text{ rad/s})t - 0.93 \text{ rad}]$$
$$v_x = -(0.50 \text{ m/s})\,\text{sen}[(20 \text{ rad/s})t - 0.93 \text{ rad}]$$
$$a_x = -(10 \text{ m/s}^2)\cos[(20 \text{ rad/s})t - 0.93 \text{ rad}]$$

La velocidad varía senoidalmente entre -0.50 m/s y $+0.50$ m/s. La aceleración varía senoidalmente entre -10 m/s^2 y $+10 \text{ m/s}^2$.

EVALUAR: Puede comprobar los resultados para x y v_x en función del tiempo sustituyendo $t = 0$ y evaluando el resultado. Deberá obtener $x = x_0 = 0.015$ m y $v_x = v_{0x} = 0.40$ m/s. ¿Es así?

Evalúe su comprensión de la sección 13.2 Se une un deslizador a un resorte, como se indica en la figura 13.13. Si el deslizador se mueve a $x = 0.10$ m y se suelta del reposo en el tiempo $t = 0$, oscilará con amplitud $A = 0.10$ m y ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Suponga ahora que en $t = 0$ el deslizador está en $x = 0.10$ m y se mueve a la derecha como se indica en la figura 13.13. En esta situación, la amplitud ¿es mayor, menor o igual que 0.10 m? El ángulo de fase ¿es mayor, menor o igual que cero? *b*) Suponga ahora que en $t = 0$ el deslizador está en $x = 0.10$ m y se mueve a la izquierda como se muestra en la figura 13.13. En esta situación, ¿la amplitud es mayor, menor o igual que 0.10 m? ¿El ángulo de fase es mayor, menor o igual que cero?

ActivPhysics ONLINE

9.3 Energía de vibración
9.4 Dos formas de medir la masa del joven Tarzán
9.6 Liberación de un esquiador que vibra I
9.7 Liberación de un esquiador que vibra II
9.8 Sistemas vibratorios de uno y dos resortes
9.9 Vibrojuego

13.3 Energía en el movimiento armónico simple

Podemos aprender aún más acerca del movimiento armónico simple usando consideraciones de energía. Examinemos otra vez el cuerpo que oscila en el extremo de un resorte en las figuras 13.2 y 13.3. Ya señalamos que la fuerza del resorte es la única fuerza horizontal que actúa sobre el cuerpo. La fuerza ejercida por un resorte ideal es conservativa y las fuerzas verticales no efectúan trabajo, así que se *conserva* la energía mecánica total del sistema. También supondremos que la masa del resorte es despreciable.

La energía cinética del cuerpo es $K = \frac{1}{2}mv^2$ y la energía potencial del resorte es $U = \frac{1}{2}kx^2$, igual que en la sección 7.2. (Sería útil repasar esa sección.) No hay fuerzas no conservativas que efectúen trabajo, así que se conserva la energía mecánica total $E = K + U$:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \qquad (13.20)$$

(Dado que el movimiento es unidimensional, $v^2 = v_x^2$.)

La energía mecánica total E también está relacionada directamente con la amplitud A del movimiento. Cuando el cuerpo llega al punto $x = A$, su desplazamiento es máximo con respecto al equilibrio, se detiene momentáneamente antes de volver hacia la posición de equilibrio. Es decir, cuando $x = A$ (o bien, $-A$), $v_x = 0$. Aquí, la energía es sólo potencial, y $E = \frac{1}{2}kA^2$. Puesto que E es constante, esta cantidad es

igual a $\frac{1}{2}kA^2$ en cualquier otro punto. Combinando esta expresión con la ecuación (13.20), obtenemos

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \quad \text{(energía mecánica total en un MAS)} \tag{13.21}$$

Podemos verificar esta ecuación sustituyendo x y v_x de las ecuaciones (13.13) y (13.15), y usando $\omega^2 = k/m$ de la ecuación (13.9):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2}k[A\cos(\omega t + \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2}kA^2\,\text{sen}^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

(Recuerde que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.) Por lo tanto, nuestras expresiones para el desplazamiento y la velocidad en un MAS son congruentes con la conservación de la energía, como debe ser.

Podemos usar la ecuación (13.21) para calcular la velocidad v_x del cuerpo en cierto desplazamiento x:

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \tag{13.22}$$

El signo $\pm$ implica que, para un valor de x dado, el cuerpo se puede estar moviendo en cualquiera de las dos direcciones. Por ejemplo, cuando $x = \pm A/2$,

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - \left(\pm\frac{A}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{k}{m}}A$$

La ecuación (13.22) también muestra que la rapidez *máxima* $v_{\text{máx}}$ se da en $x = 0$. Utilizando la ecuación (13.10), $\omega = \sqrt{k/m}$, encontramos que

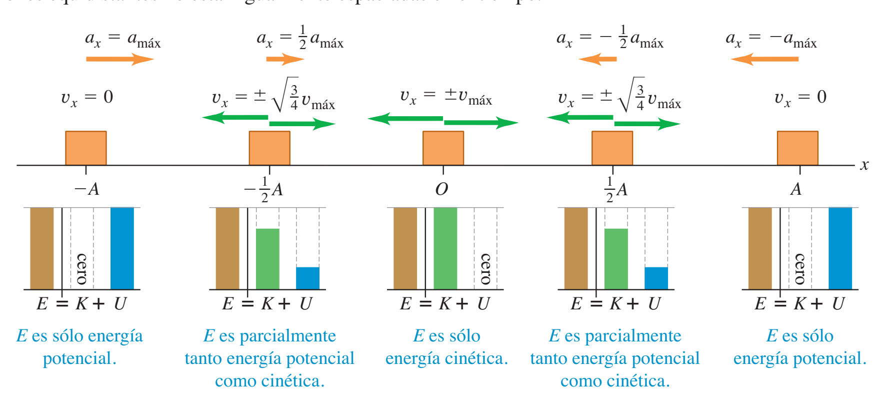
$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega A \tag{13.23}$$

Esto concuerda con la ecuación (13.15), que mostró que v_x oscila entre $-\omega A$ y $+\omega A$.

Interpretación de *E*, *K* y *U* en el MAS

La figura 13.14 muestra las energías E, K y U en $x = 0$, $x = \pm A/2$ y $x = \pm A$. La figura 13.15 es una representación gráfica de la ecuación (13.21); la energía (cinética, potencial y total) se gráfica verticalmente, y la coordenada x, horizontalmente. La curva

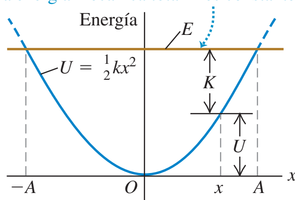
13.14 Gráfica de E, K y U contra desplazamiento en un MAS. La velocidad del cuerpo *no* es constante, de manera que las imágenes del cuerpo en posiciones equidistantes no están igualmente espaciadas en el tiempo.



13.15 Energía cinética K, energía potencial U y energía mecánica total E en función de la posición en un MAS. Para cada valor de x, la suma de K y U es igual al valor constante de E. ¿Puede usted demostrar que en $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}A$, la energía es mitad cinética y mitad potencial?

a) La energía potencial U y la energía mecánica total E para un cuerpo en un MAS en función del desplazamiento x

La energía mecánica total E es constante.



b) La misma gráfica que en **a)**, ahora muestra también la energía cinética K

En $x = \pm A$ toda la energía es potencial; la energía cinética es cero.

En $x = 0$ toda la energía es cinética; la energía potencial es cero.

Energía

$E = K + U$

U

K

x

$-A$ O A

En estos puntos la energía es mitad cinética y mitad.

parabólica de la figura 13.15a representa la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$. La línea horizontal representa la energía mecánica total E, que es constante y no varía con x. En cualquier valor de x entre $-A$ y A, la distancia vertical entre el eje x y la parábola es U; dado que $E = K + U$, la distancia vertical restante hasta la línea horizontal es K. La figura 13.15b muestra tanto K como U en función de x. La línea horizontal para E interseca la curva de energía potencial en $x = -A$ y $x = A$, donde la energía es sólo potencial, la energía cinética es cero y el cuerpo está momentáneamente en reposo antes de invertir su dirección. Al oscilar el cuerpo entre $-A$ y A, la energía se transforma continuamente de potencial a cinética, y viceversa.

La figura 13.15a muestra la relación entre la amplitud A y la energía mecánica total correspondiente, $E = \frac{1}{2}kA^2$. Si tratáramos de hacer que x fuera mayor que A (o menor que $-A$), U sería mayor que E y K tendría que ser negativa. Esto es imposible, así que x no puede ser mayor que A ni menor que $-A$.

Estrategia para resolver problemas 13.2 Movimiento armónico simple II: Energía



La ecuación de energía (ecuación 13.21) es una relación alterna útil entre velocidad y posición, sobre todo cuando también se calculan cantidades de energía. Si el problema implica una relación entre posición, velocidad y aceleración sin referencia al tiempo, suele ser más fácil usar la ecuación (13.4) (de la segunda ley de Newton) o la (13.21) (de la conservación de la energía), que usar la expresión general para x, v_x y a_x en función de t [ecuaciones (13.13), (13.15) y (13.16), respectivamente]. Dado que en la ecuación de energía intervienen x^2 y v_x^2, no podemos conocer el signo de x ni de v_x; debemos inferirlo de la situación. Por ejemplo, si el cuerpo se mueve de la posición de equilibrio hacia al punto de desplazamiento positivo máximo, x y v_x serán positivas.

Ejemplo 13.4 Velocidad, aceleración y energía de un MAS

En la oscilación descrita en el ejemplo 13.2, $k = 200$ N/m, $m = 0.50$ kg y la masa oscilante se suelta del reposo en $x = 0.020$ m. *a*) Calcule las velocidades máxima y mínima que alcanza el cuerpo al oscilar. *b*) Calcule la aceleración máxima. *c*) Determine la velocidad y la aceleración cuando el cuerpo se ha movido a la mitad del camino hacia el centro desde su posición inicial. *d*) Determine las energías total, potencial y cinética en esta posición.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Observe que el problema se refiere al movimiento en diversas *posiciones* del movimiento, no en *instantes* específicos. Esto nos sugiere que podemos usar las relaciones de energía que deducimos en esta sección, despejando de ellas las incógnitas.

PLANTEAR: La figura 13.13 muestra que elegimos el eje x. El desplazamiento máximo con respecto al equilibrio es $A = 0.020$ m. En cualquier posición x, usaremos las ecuaciones (13.22) y (13.4) para obtener la velocidad v_x y la aceleración a_x, respectivamente. Teniendo la velocidad y la posición, usaremos la ecuación (13.21) para obtener las energías K, U y E.

EJECUTAR: *a*) La velocidad v_x para cualquier desplazamiento x está dada por la ecuación (13.22):

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}$$

La velocidad máxima se da cuando el cuerpo se mueve hacia la derecha y pasa por la posición de equilibrio, donde $x = 0$:

$$v_x = v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}}(0.020\ \text{m}) = 0.40\ \text{m/s}$$

La velocidad mínima (es decir, la más negativa) ocurre cuando el cuerpo se mueve hacia la izquierda y pasa por $x = 0$; su valor es $-v_{máx} = -0.40$ m/s.

b) Por la ecuación (13.4),

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

La aceleración máxima (más positiva) se da en el valor más negativo de x: $x = -A$; por lo tanto,

$$a_{máx} = -\frac{k}{m}(-A) = -\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}(-0.020\ \text{m}) = 8.0\ \text{m/s}^2$$

La aceleración mínima (más negativa) es $-8.0\ \text{m/s}^2$ y ocurre en $x = +A = +0.020$ m.

c) En un punto a la mitad del camino hacia el centro desde la posición inicial, $x = A/2 = 0.010$ m. Por la ecuación (13.22),

$$v_x = -\sqrt{\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}}\sqrt{(0.020\ \text{m})^2 - (0.010\ \text{m})^2} = -0.35\ \text{m/s}$$

Elegimos la raíz cuadrada negativa porque el cuerpo se mueve de $x = A$ hacia $x = 0$. Por la ecuación (13.4),

$$a_x = -\frac{200\ \text{N/m}}{0.50\ \text{kg}}(0.010\ \text{m}) = -4.0\ \text{m/s}^2$$

En este punto, la velocidad y la aceleración tienen el mismo signo, así que la rapidez está aumentando. En la figura 13.14, se muestran las condiciones en $x = 0$, $\pm A/2$ y $\pm A$.

d) La energía total tiene el mismo valor en todos los puntos durante el movimiento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.020\ \text{m})^2 = 0.040\ \text{J}$$

La energía potencial es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(200\ \text{N/m})(0.010\ \text{m})^2 = 0.010\ \text{J}$$

y la energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(-0.35\ \text{m/s})^2 = 0.030\ \text{J}$$

EVALUAR: En el punto $x = A/2$, la energía es una cuarta parte energía potencial y tres cuartas partes energía cinética. Puede comprobar este resultado examinando la figura 13.15b.

Ejemplo 13.5 Energía y momento lineal del MAS

Un bloque con masa M, conectado a un resorte horizontal con constante de fuerza k, se mueve en movimiento armónico simple con amplitud A_1. En el instante en que el bloque pasa por su posición de equilibrio, un trozo de masilla con masa m se deja caer verticalmente sobre el bloque desde una altura pequeña y se adhiere a él. *a*) Calcule la amplitud y el periodo ahora. *b*) Repita el inciso *a*) suponiendo que la masilla se deja caer sobre el bloque en un extremo de su trayectoria.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema implica el movimiento en una posición dada, no un instante dado, así que usaremos métodos de energía para resolverlo. Antes de que la masilla toque el bloque, la energía mecánica del bloque y resorte son constantes. El contacto entre la masilla y el bloque es un choque totalmente inelástico (véase la sección 8.3); se conserva la componente horizontal del momento lineal, pero disminuye la energía cinética. Después del choque, la energía mecánica se mantiene constante con un valor diferente.

PLANTEAR: La figura 13.16 muestra las coordenadas que elegimos. En cada parte, consideraremos qué sucede antes, durante y después del choque. Calculamos la amplitud A_2 después del choque considerando la energía final del sistema, y obtenemos el periodo T_2 después del choque empleando la relación entre periodo y masa.

EJECUTAR: *a*) Antes del choque, la energía mecánica total del bloque y el resorte es $E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$. Puesto que el bloque está en la posición de equilibrio, $U = 0$ y la energía es puramente cinética (figura 13.16a). Si v_1 es la rapidez del bloque en la posición de equilibrio, tenemos

$$E_1 = \frac{1}{2}Mv_1^2 = \frac{1}{2}kA_1^2 \qquad \text{así que} \qquad v_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}A_1$$

Durante el choque, se conserva la componente x del momento lineal del sistema de bloque y masilla. (¿Por qué?) Justo antes del choque, esta componente es la suma de Mv_1 (para el bloque) y cero (para la masilla). Justo después del choque, el bloque y la masilla se mueven juntos con rapidez v_2, y su componente x del momento lineal combinada es $(M + m)v_2$. Por la conservación del momento lineal,

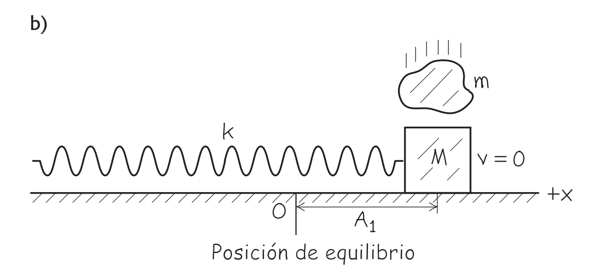
$$Mv_1 + 0 = (M + m)v_2 \qquad \text{así que} \qquad v_2 = \frac{M}{M + m}v_1$$

13.16 Nuestro diagrama para este problema.

a)

Masilla
m
k
M
v_1
O
A_1
+x
Posición de equilibrio

b)



continúa

El choque dura muy poco, así que poco después el bloque y la masilla aún están en la posición de equilibrio. La energía sigue siendo exclusivamente cinética, pero *menor* que antes del choque:

$$E_2 = \frac{1}{2}(M + m)v_2^2 = \frac{1}{2}\frac{M^2}{M + m}v_1^2 = \frac{M}{M + m}\left(\frac{1}{2}Mv_1^2\right)$$
$$= \left(\frac{M}{M + m}\right)E_1$$

Dado que E_2 es igual a $\frac{1}{2}kA_2^2$, donde A_2 es la amplitud después del choque, tenemos

$$\frac{1}{2}kA_2^2 = \left(\frac{M}{M + m}\right)\frac{1}{2}kA_1^2$$
$$A_2 = A_1\sqrt{\frac{M}{M + m}}$$

Cuanto mayor sea la masa m de la masilla, menor será la amplitud final.

Determinar el periodo de oscilación después del choque es la parte sencilla. Usando la ecuación (13.12), tenemos

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{M + m}{k}}$$

b) Al caer la masilla sobre el bloque, éste está momentáneamente en reposo (figura 13.16b). La componente x del momento lineal es cero tanto antes como después del choque. El bloque tenía energía cinética cero justo antes del choque, y el bloque y la masilla tienen cero energía cinética inmediatamente después. Toda la energía es energía potencial almacenada en el resorte, por lo que la adición de la masa extra *no afecta* la energía mecánica. Es decir,

$$E_2 = E_1 = \frac{1}{2}kA_1^2$$

y la amplitud después del choque es la misma ($A_2 = A_1$). El periodo sí cambia al agregarse la masilla; su valor no depende de cómo se agregó la masa, sólo de la masa total. Así, T_2 es el mismo que obtuvimos en el inciso *a*), $T_2 = 2\pi\sqrt{(M + m)/k}$.

EVALUAR: ¿Por qué se pierde energía en el inciso *a*) pero no en el *b*)? La diferencia es que, en el inciso *a*), la masilla se desliza contra el bloque en movimiento durante el choque, lo cual disipa energía por fricción cinética.

Evalúe su comprensión de la sección 13.3 *a*) Para duplicar la energía total de un sistema masa-resorte en oscilación, ¿en qué factor se debe aumentar la amplitud? i) 4; ii) 2; iii) $\sqrt{2} = 1.414$; iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$. *b*) ¿En qué factor cambiará la frecuencia como resultado de tal incremento de amplitud? i) 4; ii) 2; iii) $\sqrt{2} = 1.414$; iv) $\sqrt[4]{2} = 1.189$; v) no cambia.



13.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple

Hasta ahora, hemos examinado globalmente *una* situación donde hay movimiento armónico simple (MAS): un cuerpo conectado a un resorte ideal horizontal. No obstante, el MAS puede presentarse en cualquier sistema donde haya una fuerza de restitución que sea directamente proporcional al desplazamiento con respecto al equilibrio, según la ecuación (13.3), $F_x = -kx$. Dicha fuerza se origina de diferentes maneras y en distintas situaciones, por lo que debe determinarse la constante de fuerza k para cada caso, examinando la fuerza neta que actúa sobre el sistema. Una vez hecho esto, es fácil calcular la frecuencia angular ω, la frecuencia f y el periodo T; basta con sustituir el valor de k en las ecuaciones (13.10), (13.11) y (13.12), respectivamente. Utilicemos estas ideas para examinar varios ejemplos de movimiento armónico simple.

MAS vertical

Suponga que colgamos un resorte con constante de fuerza k (figura 13.17a) y suspendemos de él un cuerpo de masa m. Las oscilaciones ahora serán verticales; ¿seguirán siendo MAS? En la figura 13.17b, el cuerpo cuelga en reposo, en equilibrio. En esta posición, el resorte se estira una distancia Δl apenas suficiente para que la fuerza vertical $k\,\Delta l$ del resorte sobre el cuerpo equilibre su peso mg:

$$k\,\Delta l = mg$$

Sea $x = 0$ la posición de equilibrio, con la dirección $+x$ hacia arriba. Cuando el cuerpo está una distancia x *arriba* de su posición de equilibrio (figura 13.17c), la extensión del resorte es $\Delta l - x$. Entonces, la fuerza hacia arriba que ejerce sobre el cuerpo es $k(\Delta l - x)$, y la componente x total de la fuerza sobre el cuerpo es

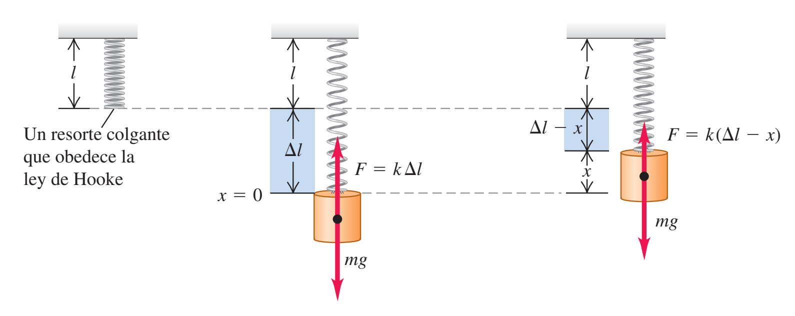
$$F_{net} = k(\Delta l - x) + (-mg) = -kx$$

13.17 Un cuerpo se adhiere a un resorte colgante.

a)

b) Cuerpo suspendido del resorte. Está en equilibrio cuando el resorte está estirado lo suficiente como para que la fuerza hacia arriba del resorte tenga la misma magnitud que el peso del objeto.

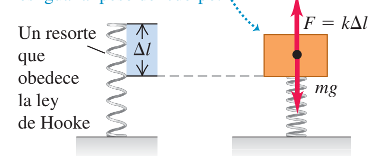
c) Si el cuerpo se mueve con respecto al equilibrio, la fuerza neta sobre él será proporcional a su desplazamiento. Las oscilaciones son las de un MAS.



esto es, una fuerza total hacia abajo de magnitud kx. Asimismo, cuando el cuerpo está *debajo* de la posición de equilibrio, hay una fuerza total hacia arriba de magnitud kx. En ambos casos, hay una fuerza de restitución de magnitud kx. Si el cuerpo se pone en movimiento vertical, oscilará en MAS con la misma frecuencia angular que si fuera horizontal, $\omega = \sqrt{k/m}$. Por lo tanto, el MAS vertical no difiere en su esencia del horizontal. El único cambio real es que la posición de equilibrio $x = 0$ ya no corresponde al punto donde el resorte no está estirado. Las mismas ideas son válidas cuando un cuerpo con peso mg se coloca sobre un resorte compresible (figura 13.18) y lo comprime una distancia Δl.

13.18 Si el peso mg comprime el resorte una distancia Δl, la constante de fuerza es $k = mg/\Delta l$ y la frecuencia angular para un MAS vertical es $\omega = \sqrt{k/m}$; igual que si el cuerpo estuviera suspendido del resorte (véase la figura 13.17).

Se coloca un cuerpo en la parte superior del resorte, y está en equilibrio cuando la fuerza hacia arriba ejercida por el resorte comprimido es igual al peso del cuerpo.



Ejemplo 13.6 MAS vertical en un automóvil viejo

Los amortiguadores de un automóvil viejo con masa de 1000 kg están gastados. Cuando una persona de 980 N se sube lentamente al auto en su centro de gravedad, el auto baja 2.8 cm. Cuando el auto, con la persona a bordo, cae en un bache, comienza a oscilar verticalmente en MAS. Modele el auto y la persona como un solo cuerpo en un solo resorte, y calcule el periodo y la frecuencia de la oscilación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La situación es similar a la de la figura 13.18.

PLANTEAR: La compresión del resorte cuando se agrega el peso adicional nos da la constante de fuerza, que podemos usar para obtener el periodo y la frecuencia (las incógnitas).

EJECUTAR: Cuando la fuerza aumenta en 980 N, el resorte se comprime otros 0.028 m, y la coordenada x del auto cambia en -0.028 m. Por lo tanto, la constante de fuerza efectiva (incluido el efecto de toda la suspensión) es

$$k = -\frac{F_x}{x} = -\frac{980\ \text{N}}{-0.028\ \text{m}} = 3.5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2$$

La masa de la persona es $w/g = (980\ \text{N})/(9.8\ \text{m/s}^2) = 100$ kg. La masa oscilante *total* es $m = 1000\ \text{kg} + 100\ \text{kg} = 1100$ kg. El periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1100\ \text{kg}}{3.5 \times 10^4\ \text{kg/s}^2}} = 1.11\ \text{s}$$

y la frecuencia es

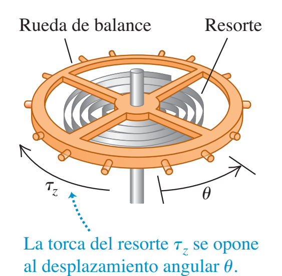
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.11\ \text{s}} = 0.90\ \text{Hz}$$

EVALUAR: Una oscilación persistente con un periodo aproximado de un segundo es muy molesta. El propósito de los amortiguadores es eliminar tales oscilaciones (véase la sección 13.7).

MAS angular

La figura 13.19 muestra la rueda de balance de un reloj mecánico. La rueda tiene un momento de inercia I alrededor de su eje. Un resorte en espiral ejerce una torca de restitución τ_z proporcional al desplazamiento angular θ con respecto a la posición de equilibrio. Escribimos $\tau_z = -\kappa\theta$, donde κ (la letra griega kappa) es una constante llamada *constante de torsión.* Empleando la analogía rotacional de la segunda

13.19 Rueda de balance de un reloj mecánico. El resorte ejerce una torca de restitución que es proporcional al desplazamiento angular θ, por lo tanto, el movimiento es MAS angular.



La torca del resorte τ_z se opone al desplazamiento angular θ.

ley de Newton para un cuerpo rígido, $\Sigma\tau_z = I\alpha_z = I\,d^2\theta/dt^2$, la ecuación del movimiento es

$$-\kappa\theta = I\alpha \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

La forma de esta ecuación es idéntica a la de la ecuación (13.4) para la aceleración en movimiento armónico simple, sustituyendo x por θ y k/m por κ/I. Así, estamos tratando con una forma de movimiento armónico simple *angular*. La frecuencia angular ω y la frecuencia f están dadas por las ecuaciones (13.10) y (13.11), respectivamente, con la misma sustitución:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \qquad (\text{MAS angular}) \qquad (13.24)$$

El movimiento está descrito por la función

$$\theta = \Theta\cos(\omega t + \phi)$$

donde Θ (theta mayúscula) juega el rol de una amplitud angular.

Es bueno que el movimiento de una rueda de balance *sea* armónico simple. Si no lo fuera, la frecuencia podría depender de la amplitud, y el reloj se adelantaría o se retrasaría, al ir disminuyendo la tensión del resorte.

*Vibraciones de moléculas

En la siguiente explicación de las vibraciones de las moléculas se usa el teorema binomial. Si el estudiante no está familiarizado con dicho teorema, le recomendamos estudiar la sección adecuada de su libro de matemáticas.

Si dos átomos están separados menos de unos cuantos diámetros atómicos, pueden ejercer fuerzas de atracción entre sí. Por otro lado, si los átomos están tan cercanos que se traslapan sus capas electrónicas, las fuerzas entre ellos son de repulsión. Entre estos límites, hay una separación de equilibrio donde los átomos forman una *molécula*. Si los átomos se desplazan ligeramente del equilibrio, oscilarán.

Como ejemplo, consideremos un tipo de interacción entre átomos llamada *interacción de Van der Waals*. Nuestro objetivo inmediato es estudiar las oscilaciones, así que no entraremos en detalles con respecto al origen de la interacción. Tomemos el centro de un átomo como el origen; el otro estará a una distancia r (figura 13.20a). La distancia de equilibrio entre los centros es $r = R_0$. Se ha observado experimentalmente que tal interacción se puede describir con la función de energía potencial

$$U = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^{6}\right] \qquad (13.25)$$

13.20 a) Dos átomos con sus centros separados una distancia r. b) La energía potencial U de la interacción de Van der Waals en función de r. c) La fuerza F_r sobre el átomo derecho en función de r.

a) Sistema de dos átomos

Distancia entre los centro de los átomos.

r

Átomos

F_r = Fuerza ejercida sobre el átomo derecho por el izquierdo.

b) Energía potencial U del sistema de dos átomos en función de r

U, $2U_0$, U_0, O, $-U_0$, $-2U_0$, r, R_0, $1.5R_0$, $2R_0$

$U(r)$

Parábola

Cerca del equilibrio, U puede aproximarse con una parábola.

El punto de equilibrio está en $r = R_0$ (donde U es mínima).

c) La fuerza F_r en función de r

F_r, $10U_0/R_0$, $5U_0/R_0$, O, $-5U_0/R_0$, $-10U_0/R_0$, r, R_0, $1.5R_0$, $2R_0$

$F_r(r)$

Cerca del equilibrio, F_r se puede aproximar con una recta.

El punto de equilibrio está en $r = R_0$ (donde F_r es cero).

donde U_0 es una constante positiva con unidades de joules. Si los átomos están muy separados, $U = 0$; si están separados por la distancia de equilibrio $r = R_0$, $U = -U_0$. La fuerza sobre el segundo átomo es la derivada negativa de la ecuación (13.25):

$$F_r = -\frac{dU}{dr} = U_0\left[\frac{12R_0^{12}}{r^{13}} - 2\frac{6R_0^6}{r^7}\right] = 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{r}\right)^7\right] \tag{13.26}$$

La energía potencial y la fuerza se grafican en las figuras 13.20b y 13.20c, respectivamente. La fuerza es positiva para $r < R_0$ y negativa para $r > R_0$, así que es una fuerza *de restitución*.

Examinemos la fuerza de restitución F_r en la ecuación (13.26). Introducimos la cantidad x para representar el desplazamiento con respecto al equilibrio:

$$x = r - R_0 \qquad \text{así que} \qquad r = R_0 + x$$

En términos de x, la fuerza F_r de la ecuación (13.26) se convierte en

$$\begin{aligned} F_r &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^{13} - \left(\frac{R_0}{R_0+x}\right)^7\right] \\ &= 12\frac{U_0}{R_0}\left[\frac{1}{(1+x/R_0)^{13}} - \frac{1}{(1+x/R_0)^7}\right] \end{aligned} \tag{13.27}$$

Esto no se parece a la ley de Hooke, $F_x = -kx$, y podríamos precipitarnos a la conclusión de que las oscilaciones moleculares no pueden ser MAS. Sin embargo, limitémonos a oscilaciones de *amplitud pequeña*, de modo que el valor absoluto del desplazamiento x sea pequeño en comparación con R_0 y el valor absoluto de la razón x/R_0 sea mucho menor que 1. Ahora podemos simplificar la ecuación (13.27) usando el *teorema binomial*:

$$(1 + u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \cdots \tag{13.28}$$

Si $|u|$ es mucho menor que 1, cada término sucesivo de la ecuación (13.28) es mucho menor que el anterior, y podemos aproximar $(1 + u)^n$ con sólo los dos primeros términos. En la ecuación (13.27), u se reemplaza con x/R_0 y n es igual a -13 o -7, de manera que

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{13}} = (1 + x/R_0)^{-13} \approx 1 + (-13)\frac{x}{R_0}$$

$$\frac{1}{(1 + x/R_0)^{7}} = (1 + x/R_0)^{-7} \approx 1 + (-7)\frac{x}{R_0}$$

$$F_r \approx 12\frac{U_0}{R_0}\left[\left(1 + (-13)\frac{x}{R_0}\right) - \left(1 + (-7)\frac{x}{R_0}\right)\right] = -\left(\frac{72U_0}{R_0^2}\right)x \tag{13.29}$$

Ésta es la ley de Hooke con constante de fuerza $k = 72U_0/R_0^2$. (Observe que k tiene las unidades correctas, J/m^2 o bien N/m.) Así, las oscilaciones de las moléculas unidas por interacción de Van der Waals pueden ser movimiento armónico simple, si la amplitud es pequeña en comparación con R_0, haciendo válida la aproximación $|x/R_0| \ll 1$ empleada al deducir la ecuación (13.29).

También podemos demostrar que la energía potencial U de la ecuación (13.25) se puede escribir como $U \approx \frac{1}{2}kx^2 + C$, donde $C = -U_0$ y k es de nuevo igual a $72U_0/R_0^2$. La suma de una constante a la energía potencial no afecta la interpretación física, así que el sistema de dos átomos no es fundamentalmente distinto de una masa unida a un resorte horizontal, para el que $U = \frac{1}{2}kx^2$. Se deja la demostración al lector (véase el ejercicio 13.39).

Ejemplo 13.7 Vibración molecular

Dos átomos de argón pueden formar una molécula débilmente unida, Ar_2, gracias a una interacción de Van der Waals con $U_0 = 1.68 \times 10^{-21}$ J y $R_0 = 3.82 \times 10^{10}$ m. Calcule la frecuencia de oscilaciones pequeñas de un átomo alrededor de su posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Es como la situación que se muestra en la figura 13.20.

continúa

PLANTEAR: Puesto que las oscilaciones son pequeñas, podemos usar la ecuación (13.11) para obtener la frecuencia del movimiento armónico simple. La constante de fuerza está dada por la ecuación (13.29).

EJECUTAR: La constante de fuerza es

$$k = \frac{72U_0}{R_0^2} = \frac{72(1.68 \times 10^{-21}\ \text{J})}{(3.82 \times 10^{-10}\ \text{m})^2} = 0.829\ \text{J/m}^2 = 0.829\ \text{N/m}$$

Ésta es comparable a la constante de fuerza de los resortes de juguete laxos, como Slinky®.

De la tabla periódica de los elementos (véase el Apéndice D), la masa atómica media del argón es

$$(39.948\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}/1\ \text{u}) = 6.63 \times 10^{-26}\ \text{kg}.$$

Si uno de los átomos está fijo y el otro oscila, la frecuencia de oscilación es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.829\ \text{N/m}}{6.63 \times 10^{-26}\ \text{kg}}} = 5.63 \times 10^{11}\ \text{Hz}$$

La masa oscilante es muy pequeña, así que incluso un resorte laxo causa oscilaciones muy rápidas.

EVALUAR: Sin embargo, la f que calculamos no es del todo correcta. Si no actúa una fuerza externa neta sobre la molécula, su centro de masa (situado a la mitad de la distancia entre los dos átomos) no tiene aceleración. Para que haya aceleración, ambos átomos deben oscilar con la misma amplitud en direcciones opuestas. Nos podemos dar cuenta de esto sustituyendo m por $m/2$ en la expresión para f. (Véase el problema 13.86.) Esto aumenta f en un factor de $\sqrt{2}$, así que $f = \sqrt{2}(5.63 \times 10^{11}\ \text{Hz}) = 7.96 \times 10^{11}\ \text{Hz}$. Una complicación adicional es que, para la escala atómica, debemos usar mecánica cuántica, no newtoniana, para describir la oscilación y otros movimientos; felizmente, la frecuencia tiene el mismo valor en mecánica cuántica.

Evalúe su comprensión de la sección 13.4 Un bloque unido a un resorte ideal colgante oscila verticalmente con un periodo de 10 s en la Tierra. Si usted se lleva el bloque y el resorte a Marte, donde la aceleración debida a la gravedad es sólo el 40% de la terrestre, ¿cuál será el nuevo periodo de oscilación? i) 10 s: ii) más de 10 s; iii) menos de 10 s.

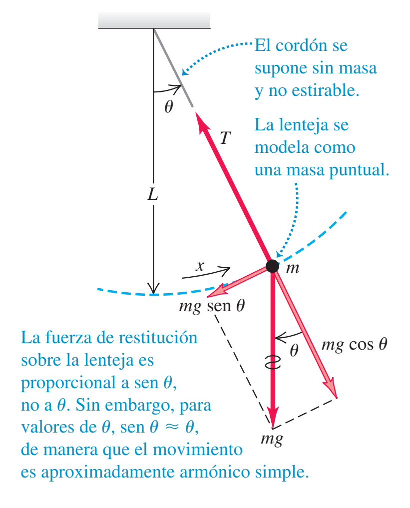


13.21 Dinámica de un péndulo simple.

a) Un péndulo real



b) Un péndulo simple idealizado



13.5 El péndulo simple

Un **péndulo simple** es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de un cordón sin masa y no estirable. Si la masa se mueve a un lado de su posición de equilibrio (vertical), oscilará alrededor de dicha posición. Situaciones ordinarias, como una bola de demolición en el cable de una grúa o un niño en un columpio (figura 13.21a) pueden modelarse como péndulos simples.

La trayectoria de la masa puntual (llamada en ocasiones pesa o lenteja) no es una recta, sino el arco de un círculo de radio L igual a la longitud del cordón (figura 13.21b). Usamos como coordenada la distancia x medida sobre el arco. Si el movimiento es armónico simple, la fuerza de restitución debe ser directamente proporcional a x, o bien (porque $x = L\theta$), a θ. ¿Lo es?

En la figura 13.21b, representamos las fuerzas que actúan sobre la masa en términos de componentes tangencial y radial. La fuerza de restitución F_θ es la componente tangencial de la fuerza total:

$$F_\theta = -mg\,\text{sen}\,\theta \tag{13.30}$$

La fuerza de restitución se debe a la gravedad; la tensión T sólo actúa para hacer que la masa puntual describa un arco. La fuerza de restitución es proporcional *no* a θ sino a sen θ, así que el movimiento *no* es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es *pequeño*, sen θ es casi igual a θ en radianes (figura 13.22). Por ejemplo, si $\theta = 0.1$ rad (unos 6°), sen $\theta = 0.0998$, una diferencia de sólo 0.2%. Con esta aproximación, la ecuación (13.30) se convierte en

$$F_\theta = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} \quad \text{o}$$

$$F_\theta = -\frac{mg}{L}x \tag{13.31}$$

La fuerza de restitución es entonces proporcional a la coordenada para desplazamientos pequeños, y la constante de fuerza es $k = mg/L$. Por la ecuación (13.10), la frecuencia angular ω de un péndulo simple con amplitud pequeña es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{13.32}$$

Las relaciones de frecuencia y periodo correspondientes son

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{13.33}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{(péndulo simple, amplitud pequeña)} \tag{13.34}$$

? Observe que en estas expresiones no interviene la *masa* de la partícula. La razón es que la fuerza de restitución, una componente del peso de la partícula, es proporcional a m. Así, la masa aparece en *ambos* miembros de $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ y se cancela. (Se trata del principio físico, es el mismo que hace que dos cuerpos con diferente masa caigan con la misma aceleración en el vacío.) Si la oscilación es pequeña, el periodo de un péndulo para un valor dado de g depende sólo de su longitud.

La dependencia de L y g en las ecuaciones (13.32) a (13.34) es justo lo esperado. Un péndulo largo tiene un periodo más largo que uno corto. Si aumenta g, aumenta la fuerza de restitución, causando un aumento de la frecuencia y una disminución del periodo.

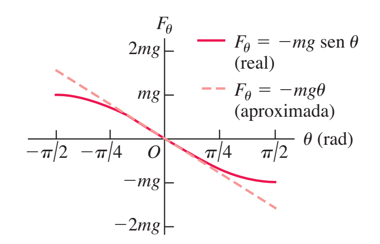
Destacamos nuevamente que el movimiento de un péndulo es *aproximadamente* armónico simple. Si la amplitud no es pequeña, la divergencia con respecto al MAS puede ser considerable. Pero, ¿qué tan pequeña es "pequeña"? El periodo puede expresarse con una serie infinita; si el desplazamiento angular máximo es Θ, el periodo T está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1^2}{2^2}\text{sen}^2\frac{\Theta}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2}\text{sen}^4\frac{\Theta}{2} + \cdots\right) \tag{13.35}$$

Podemos calcular el periodo con la precisión deseada tomando suficientes términos de la serie. Compruebe que, si $\Theta = 15°$ (a cada lado de la posición central), el periodo verdadero es más largo que la aproximación dada por la ecuación (13.34) en menos del 0.5%.

La utilidad del péndulo en relojes depende de que el periodo sea *prácticamente* independiente de la amplitud, siempre que ésta sea pequeña. Así, al perder impulso un reloj de péndulo y disminuir un poco la amplitud de las oscilaciones, la exactitud del reloj casi no se altera.

13.22 Si el desplazamiento angular θ es pequeño, la fuerza de restitución para un péndulo simple es $F_\theta = -mg\,\text{sen}\theta$, aproximadamente igual a $-mg\theta$; es decir, es aproximadamente proporcional al desplazamiento θ; por lo tanto, para ángulos pequeños, las oscilaciones son armónicas simples.



ActivPhysics ONLINE
9.10 Frecuencia de péndulo
9.11 Arriesgado paseo con péndulo
9.12 Péndulo físico

Ejemplo 13.8 Un péndulo simple

Calcule el periodo y la frecuencia de un péndulo simple de 1.000 m de longitud en un lugar donde $g = 9.800\ \text{m/s}^2$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que éste es un péndulo simple, utilizaremos las ideas de esta sección.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (13.34) para determinar el periodo T de un péndulo a partir de su longitud, y la ecuación (13.1) para obtener la frecuencia f a partir de T.

EJECUTAR: Por las ecuaciones (13.34) y (13.1),

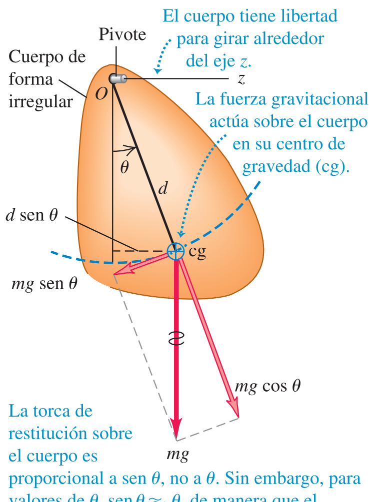
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{1.000\ \text{m}}{9.800\ \text{m/s}^2}} = 2.007\ \text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2.007\text{s}} = 0.4983\ \text{Hz}$$

EVALUAR: El periodo es aproximadamente 2 s. De hecho, cuando se estableció el sistema métrico, el segundo se definió como la mitad del periodo de un péndulo de 1 m. Sin embargo, éste no fue un estándar muy adecuado para el tiempo, porque el valor de g varía según el lugar. Ya hablamos de estándares de tiempo más modernos en la sección 1.3.

Evalúe su comprensión de la sección 13.5 Cuando un cuerpo que oscila en un resorte horizontal pasa por su posición de equilibrio, su aceleración es cero (véase la figura 13.2b). Cuando la lenteja de un péndulo oscilatorio simple pasa por su posición de equilibrio, ¿su aceleración también es cero?

13.23 Dinámica de un péndulo físico.



La torca de restitución sobre el cuerpo es proporcional a sen θ, no a θ. Sin embargo, para valores de θ, sen $\theta \approx \theta$, de manera que el movimiento es aproximadamente armónico simple.

13.6 El péndulo físico

Un **péndulo físico** es cualquier péndulo *real* que usa un cuerpo de tamaño finito, en contraste con el modelo idealizado de péndulo *simple* en el que toda la masa se concentra en un punto. Si las oscilaciones son pequeñas, el análisis del movimiento de un péndulo real es tan sencillo como el de uno simple. La figura 13.23 muestra un cuerpo de forma irregular que puede girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por el punto O. En la posición de equilibrio, el centro de gravedad está directamente abajo del pivote; en la posición mostrada en la figura, el cuerpo está desplazado del equilibrio un ángulo θ que usamos como coordenada para el sistema. La distancia de O al centro de gravedad es d, el momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación es I y la masa total es m. Cuando el cuerpo se desplaza como se muestra, el peso mg causa una torca de restitución

$$\tau_z = -(mg)(d\,\text{sen}\,\theta) \tag{13.36}$$

El signo negativo indica que la torca de restitución es en sentido horario, si el desplazamiento es en sentido antihoriario, y viceversa.

Si se suelta el cuerpo, oscila alrededor de su posición de equilibrio. El movimiento no es armónico simple porque la torca τ_z es proporcional a sen θ, no a θ. No obstante, si θ es pequeño, podemos aproximar sen θ con θ en radianes, tal como lo hicimos al analizar el péndulo simple. De esta manera, el movimiento es *aproximadamente* armónico simple. Con esta aproximación:

$$\tau_z = -(mgd)\theta$$

La ecuación de movimiento es $\sum \tau_z = I\alpha_z$, así que

$$-(mgd)\theta = I\alpha_z = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta \tag{13.37}$$

Si comparamos esto con la ecuación (13.4), vemos que el papel de (k/m) en el sistema masa-resorte lo desempeña aquí la cantidad (mgd/I). Por lo tanto, la frecuencia angular está dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{(péndulo físico, amplitud pequeña)} \tag{13.38}$$

La frecuencia f es $1/2\pi$ veces esto, y el periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad \text{(péndulo físico, amplitud pequeña)} \tag{13.39}$$

La ecuación (13.39) es la base de un método común para determinar experimentalmente el momento de inercia de un cuerpo de forma compleja. Primero, se localiza el centro de gravedad del cuerpo por balanceo. Luego, se suspende el cuerpo de modo que oscile libremente alrededor de un eje, y se mide el periodo T de oscilaciones de amplitud pequeña. Por último, usando la ecuación (13.39) puede calcularse el mo-

mento de inercia I del cuerpo alrededor de ese eje a partir de T, la masa del cuerpo m y la distancia d del eje al centro de gravedad (véase el ejercicio 13.49). Los investigadores en biomecánica usan este método para calcular los momentos de inercia de las extremidades de un animal. Esta información es importante para analizar cómo camina un animal, como veremos en el segundo de los dos ejemplos que siguen.

Ejemplo 13.9 Péndulo físico contra péndulo simple

Suponga que el cuerpo de la figura 13.23 es una varilla uniforme de longitud L cuyo pivote se encuentra en un extremo. Calcule el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es el periodo de oscilación de una varilla, la cual actúa como un péndulo físico. Necesitamos conocer el momento de inercia de la varilla para hacerlo.

PLANTEAR: Usaremos la tabla 9.2 (sección 9.4) para hallar el momento de inercia de la varilla; luego, sustituiremos ese valor en la ecuación (13.39) para determinar el periodo de oscilación.

EJECUTAR: Por la tabla 9.2, el momento de inercia de una varilla uniforme respecto a un eje en su extremo es $I = \frac{1}{3}ML^2$. La distancia del pivote al centro del gravedad es $d = L/2$. Por la ecuación (13.39),

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{MgL/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

EVALUAR: Si la varilla es un metro ($L = 1.00$ m) y $g = 9.80\ \text{m/s}^2$, entonces,

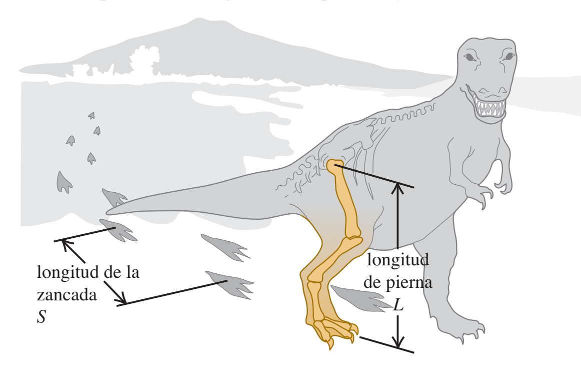
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2(1.00\ \text{m})}{3(9.80\ \text{m/s}^2)}} = 1.64\ \text{s}$$

El periodo es menor en un factor de $\sqrt{2/3} = 0.816$ que el de un péndulo simple con la misma longitud, calculado en el ejemplo 13.8. El cg de la varilla está a la mitad de la distancia del pivote que el cg del péndulo simple, lo cual significa que el valor de la torca es de la mitad. Eso por sí mismo daría a la varilla un periodo $\sqrt{2}$ veces mayor que el del péndulo simple. Sin embargo, el momento de inercia de la varilla alrededor de un extremo, $I = \frac{1}{3}ML^2$, es un tercio del que tiene un péndulo simple, el cual por sí mismo haría que el periodo de la varilla fuera de $\sqrt{1/3}$ del que tiene un péndulo simple. El factor del momento de inercia es más importante en este caso, pues es la causa de que la varilla tenga un periodo más corto que en el péndulo simple.

Ejemplo 13.10 *Tyrannosaurus rex* y el péndulo físico

Todos los animales que caminan, incluido el ser humano, tienen un ritmo (paso) natural para caminar, un número de pasos por minuto, que es más cómodo que un ritmo más rápido o más lento. Suponga que este ritmo natural corresponde a la oscilación de las piernas como un péndulo físico. *a*) ¿Cómo depende el paso natural de la longitud L de la pierna, medida de la cadera al pie? Considere la pierna como una varilla uniforme con pivote en la cadera. *b*) Pruebas fósiles demuestran que el *Tyrannosaurus rex*, un dinosaurio bípedo que vivió hace 65 millones de años al final del periodo Cretácico, tenía una longitud de pierna $L = 3.1$ m y una longitud de paso (la distancia de una huella a la siguiente del mismo pie; figura 13.24) $S = 4.0$ m. Estime la rapidez con que caminaba el *T. rex*.

13.24 La rapidez al caminar del *Tyrannosaurus rex* se puede estimar a partir de la longitud de su pierna L y la de su zancada S.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestras incógnitas son *a*) la relación entre el ritmo al caminar y la longitud de la pierna, y *b*) la rapidez con que caminaba el *T. rex*.

PLANTEAR: Trataremos la pierna como un péndulo físico, con el periodo de oscilación que determinamos en el ejemplo 13.9. Cuanto más corto sea el periodo, el ritmo al caminar será más rápido. Podemos obtener la rapidez al caminar a partir del periodo y la longitud de la zancada.

EJECUTAR: *a*) Por el ejemplo 13.9, el periodo de oscilación de la pierna es $T = 2\pi\sqrt{2L/3g}$, que es proporcional a $\sqrt{L}$. Cada periodo (una oscilación de ida y vuelta de la pierna) corresponde a *dos* pasos, así que el ritmo al caminar en pasos por unidad de tiempo es dos veces la frecuencia de oscilación $f = 1/T$. Por lo tanto, el ritmo al caminar es proporcional a $1/\sqrt{L}$. Los animales con piernas cortas (un valor de L pequeño) como los ratones o perros chihuahueños caminan con ritmo rápido; los seres humanos, las jirafas y otros animales con piernas largas (un valor de L grande) caminan más lentamente.

b) Según nuestro modelo del ritmo del andar natural, el tiempo que el *T. rex* tarda en dar una zancada es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(3.1\ \text{m})}{3(9.8\ \text{m/s}^2)}} = 2.9\ \text{s}$$

La distancia que se mueve en este tiempo es la longitud de zancada S, así que la rapidez al andar es

$$v = \frac{S}{T} = \frac{4.0\ \text{m}}{2.9\ \text{s}} = 1.4\ \text{m/s} = 5.0\ \text{km/h} = 3.1\ \text{mi/h}$$

¡Ésta es más o menos la rapidez con que camina un ser humano!

continúa

EVALUAR: Nuestra estimación debe tener cierto error porque una varilla uniforme no es un buen modelo de una pierna. Las piernas de muchos animales, entre ellos el *T. rex* y las personas, no son uniformes; hay mucho más masa entre la cadera y la rodilla que entre ésta y el pie. Así, el centro de masa está a menos de $L/2$ de la cadera; una estimación razonable sería $L/4$. Por ello, el momento de inercia es *significativamente* menor que $ML^2/3$, tal vez del orden de $ML^2/15$. Pruebe estas cifras con el análisis del ejemplo 13.9; obtendrá un periodo de oscilación más corto y una rapidez al andar aún mayor para el *T. rex.*

Evalúe su comprensión de la sección 13.6 El centro de gravedad de un péndulo simple de masa m y longitud L se ubica en la posición de la lenteja del péndulo, a una distancia L del punto del pivote. El centro de gravedad de una varilla uniforme de la misma masa m y longitud $2L$ que pivotea en un extremo está también a una distancia L del punto del pivote. ¿Cómo se compara el periodo de esta varilla uniforme con el periodo de un péndulo simple? i) La varilla tiene un periodo más largo; ii) la varilla tiene un periodo más corto; iii) la varilla tiene el mismo periodo.

13.7 Oscilaciones amortiguadas

Los sistemas oscilantes idealizados que hasta ahora hemos visto no tienen fricción; no hay fuerzas no conservativas, la energía mecánica total es constante y un sistema puesto en movimiento sigue oscilando eternamente sin disminución de la amplitud.

13.25 Si una campana que oscila se deja de impulsar, tarde o temprano las fuerzas amortiguadoras (resistencia del aire y fricción en el punto de suspensión) harán que deje de oscilar.



Sin embargo, los sistemas del mundo real siempre tienen fuerzas disipadoras, y las oscilaciones cesan con el tiempo, a menos que un mecanismo reponga la energía mecánica disipada (figura 13.25). Un reloj mecánico de péndulo sigue andando porque la energía potencial almacenada en el resorte, o en un sistema de pesos colgantes, repone la energía mecánica perdida por fricción en el pivote y los engranes. A final de cuentas, el resorte perderá su tensión o los pesos llegarán al fondo de su trayecto. Al no haber más energía disponible, la amplitud de las oscilaciones del péndulo disminuirá, y el reloj se detendrá.

La disminución de la amplitud causada por fuerzas disipadoras se denomina **amortiguamiento**, y el movimiento correspondiente se llama **oscilación amortiguada**. El caso más sencillo para un análisis detallado es un oscilador armónico simple, con una fuerza de amortiguamiento por fricción directamente proporcional a la *velocidad* del cuerpo oscilante. Este comportamiento se observa en la fricción por flujo de fluidos viscosos, como en los amortiguadores de los automóviles o el deslizamiento entre superficies lubricadas con aceite. Así, sobre el cuerpo actúa una fuerza adicional debida a la fricción, $F_x = -bv_x$, donde $v_x = dx/dt$ es la velocidad y b es una constante que describe la intensidad de la fuerza amortiguadora. El signo menos indica que la fuerza siempre tiene dirección opuesta a la velocidad. La fuerza *total* que actúa sobre el cuerpo es, entonces,

$$\sum F_x = -kx - bv_x \tag{13.40}$$

y la segunda ley de Newton para el sistema es

$$-kx - bv_x = ma_x \qquad \text{o bien,} \qquad -kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{13.41}$$

La ecuación (13.41) es una ecuación diferencial en x; sería igual a la ecuación (13.4), que da la aceleración en un MAS, si no fuera por el término adicional $-bdx/dt$. La resolución de esta ecuación es un problema sencillo en ecuaciones diferenciales, pero no entraremos aquí en detalles. Si la fuerza de amortiguamiento es relativamente pequeña, el movimiento está descrito por

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega' t + \phi) \quad \text{(oscilador con poco amortiguamiento)} \tag{13.42}$$

La frecuencia angular de la oscilación ω' está dada por

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad \text{(oscilador con poco amortiguamiento)} \tag{13.43}$$

El lector puede verificar que la ecuación (13.42) es una solución de la ecuación (13.41) calculando la primera y segunda derivadas de x, sustituyéndolas en la ecuación (13.41) y verificando si los miembros derecho e izquierdo son iguales. Este procedimiento es sencillo aunque algo tedioso.

El movimiento descrito por la ecuación (13.42) difiere del caso no amortiguado en dos aspectos. Primero, la amplitud $Ae^{-(b/2m)t}$ no es constante, sino que disminuye con el tiempo a causa del factor exponencial decreciente $e^{-(b/2m)t}$. La figura 13.26 es una gráfica de la ecuación (13.42) para el caso $\phi = 0$; muestra que, cuanto mayor sea el valor de b, la amplitud disminuirá más rápidamente.

Segundo, la frecuencia angular ω', dada por la ecuación (13.43), ya no es igual a $\omega = \sqrt{k/m}$, sino un poco menor, y se vuelve cero si b es tan grande que

$$\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2} = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad b = 2\sqrt{km} \tag{13.44}$$

Si se satisface la ecuación (13.44), la condición se denomina **amortiguamiento crítico**. El sistema ya no oscila, sino que vuelve a su posición de equilibrio sin oscilar cuando se le desplaza y suelta.

Si b es mayor que $2\sqrt{km}$, la condición se denomina **sobreamortiguamiento**. Aquí tampoco hay oscilación, pero el sistema regresa al equilibrio más lentamente que con amortiguamiento crítico. En este caso, las soluciones de la ecuación (13.41) tienen la forma

$$x = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

donde C_1 y C_2 son constantes que dependen de las condiciones iniciales y a_1 y a_2 son constantes determinadas por m, k y b.

Si b es menor que el valor crítico, como en la ecuación (13.42), la condición se llama **subamortiguamiento**. El sistema oscila con amplitud constantemente decreciente.

En un diapasón o cuerda de guitarra que vibra, normalmente queremos el mínimo amortiguamiento posible. En cambio, el amortiguamiento es benéfico en las oscilaciones de la suspensión de un automóvil. Los amortiguadores proveen una fuerza amortiguadora dependiente de la velocidad para que, cuando el auto pase por un bache, no siga rebotando eternamente (figura 13.27). Para optimizar la comodidad de los pasajeros, el sistema debería estar críticamente amortiguado o un poco subamortiguado. Demasiado amortiguamiento sería contraproducente: si la suspensión está sobreamortiguada y el auto cae en otro bache, justo después del primero, los resortes de la suspensión todavía estarán comprimidos un poco por el primer golpe, y no podrán absorber plenamente el impacto.

Energía en oscilaciones amortiguadas

En oscilaciones amortiguadas, la fuerza amortiguadora no es conservativa; la energía mecánica del sistema no es constante, sino que disminuye continuamente, acercándose a cero después de un tiempo largo. Si queremos deducir una expresión para la rapidez de cambio de energía, primero escribimos una expresión para la energía mecánica total E en cualquier instante:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Para calcular la rapidez de cambio de esta cantidad, la derivamos con respecto al tiempo:

$$\frac{dE}{dt} = mv_x\frac{dv_x}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

Pero $dv_x/dt = a_x$ y $dx/dt = v_x$, así que

$$\frac{dE}{dt} = v_x(ma_x + kx)$$

Por la ecuación (13.41), $ma_x + kx = -bdx/dt = -bv_x$, así que

$$\frac{dE}{dt} = v_x(-bv_x) = -bv_x^2 \qquad \text{(oscilaciones amortiguadoras)} \tag{13.45}$$

13.26 Gráfica de desplazamiento contra tiempo para un oscilador con poco amortiguamiento [véase la ecuación (13.42)] y ángulo de fase $\phi = 0$. Se muestran curvas para dos valores de la constante de amortiguamiento b.

13.27 Amortiguador de automóvil. El fluido viscoso causa una fuerza amortiguadora que depende de la velocidad relativa de los dos extremos de la unidad.

El miembro derecho de la ecuación (13.45) es **negativo**, siempre que el cuerpo que oscila esté en movimiento, sea la velocidad v_x positiva o negativa. Esto indica que conforme el cuerpo se mueve la energía disminuye, aunque no con rapidez uniforme. El término $-bv_x^2 = (-bv_x)v_x$ (fuerza multiplicada por velocidad) es la rapidez con que la fuerza amortiguadora efectúa trabajo (negativo) sobre el sistema (es decir, la *potencia* amortiguadora). Esto es igual a la rapidez de cambio de la energía mecánica total del sistema.

Se observa un comportamiento similar en circuitos eléctricos que contienen inductancia, capacitancia y resistencia. Hay una frecuencia de oscilación natural, y la resistencia desempeña el papel de la constante de amortiguamiento b. Estudiaremos estos circuitos con detalle en los capítulos 30 y 31.

Evalúe su comprensión de la sección 13.7 Un avión vuela en línea recta a una altitud constante. Si una ráfaga de viento golpea la punta del aparato y la eleva, la punta se balanceará verticalmente hasta que finalmente regrese a su altitud original. ¿Tales oscilaciones son i) no amortiguadas, ii) subamortiguadas, iii) críticamente amortiguadas o iv) sobreamortiguadas?

MP

13.8 Oscilaciones forzadas y resonancia

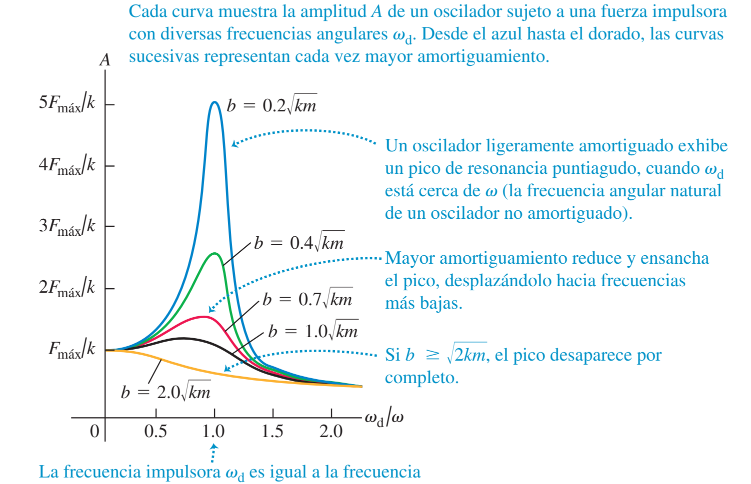
Un oscilador amortiguado aislado dejará de moverse tarde o temprano; no obstante, podemos mantener una oscilación de amplitud constante aplicando una fuerza que varíe con el tiempo periódica o cíclicamente, con periodo y frecuencia definidos. Por ejemplo, considere a su primo Morton en un columpio. Usted puede mantenerlo oscilando con amplitud constante dándole un empujoncito a la vez en cada ciclo. Llamamos a esta fuerza adicional **fuerza impulsora**.

Oscilación amortiguada con una fuerza impulsora periódica

Si aplicamos una fuerza impulsora que varíe periódicamente con frecuencia angular ω_d a un oscilador armónico amortiguado, el movimiento resultante se llama **oscilación forzada**, o bien, *oscilación impulsada*, y es diferente del movimiento que se da cuando el sistema se desplaza del equilibrio y luego se deja suelto, en cuyo caso el sistema oscilará con una **frecuencia angular natural** ω' determinada por m, k y b, como en la ecuación (13.43). En una oscilación forzada, en cambio, la frecuencia angular con que la masa oscila es igual a la frecuencia angular impulsora, ω_d, la cual *no* tiene que ser igual a la frecuencia angular ω' con que el sistema oscilaría sin una fuerza impulsora. Si usted sujeta las cuerdas del columpio de Morton, puede obligar al columpio a oscilar con cualquier frecuencia que desee.

Suponga que se obliga al oscilador a vibrar con una frecuencia angular ω_d casi *igual* a la frecuencia angular ω' que tendría sin fuerza impulsora. ¿Qué sucede? El oscilador tiende naturalmente a oscilar con $\omega = \omega'$, y esperaríamos que la amplitud de la oscilación resultante fuera mayor que cuando las dos frecuencias son muy diferentes. Análisis y experimentos detallados muestran que esto es lo que sucede. El caso más fácil de analizar es una fuerza que varía *senoidalmente*, digamos $F(t) = F_{máx} \cos \omega_d t$. Si variamos la frecuencia ω_d de la fuerza impulsora, la amplitud de la oscilación forzada resultante variará de manera interesante (figura 13.28). Si hay muy poco amortiguamiento (b pequeño), la amplitud tendrá un pico marcado conforme la frecuencia angular impulsora ω_d se acerca a la frecuencia angular de oscilación natural ω'. Si se aumenta el amortiguamiento (b mayor), el pico se ensancha y se hace más bajo, desplazándose hacia menores frecuencias.

Podríamos deducir una expresión que muestre cómo la amplitud A de la oscilación forzada depende de la frecuencia de una fuerza impulsora senoidal, con valor máximo



13.28 Gráfica de la amplitud A de oscilación forzada en función de la frecuencia angular ω_d de la fuerza impulsora. El eje horizontal indica el cociente de ω_d y la frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ de un oscilador no amortiguado. Cada curva tiene un valor distinto de la constante de amortiguamiento b.

$F_{máx}$. Ello implicaría resolver ecuaciones diferenciales para las que aún no estamos preparados, aunque el resultado sería:

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \quad \text{(amplitud de un oscilador impulsado)} \qquad (13.46)$$

Si $k - m\omega_d^2 = 0$, el primer término bajo el radical es cero, y A tiene un máximo cerca de $\omega_d = \sqrt{k/m}$. La altura de la curva en este punto es proporcional a $1/b$; cuanto menor sea el amortiguamiento, más alto será el pico. En el extremo de baja frecuencia, con $\omega_d = 0$, obtenemos $A = F_{máx}/k$. Esto corresponde a una fuerza *constante* $F_{máx}$ y un desplazamiento constante $A = F_{máx}/k$ con respecto al equilibrio, como esperaríamos.

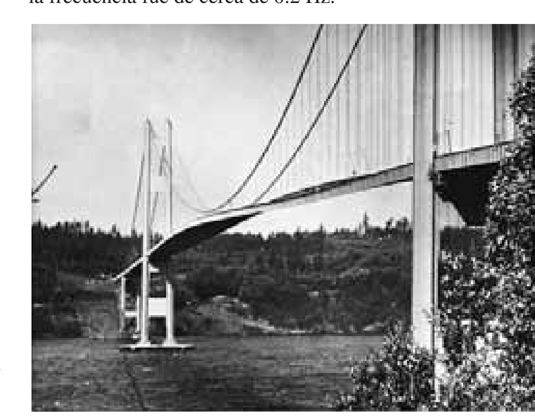
Resonancia y sus consecuencias

El hecho de que haya un pico de amplitud a frecuencias impulsoras cercanas a la frecuencia natural del sistema se denomina **resonancia**. En física, abundan los ejemplos de resonancia; uno es aumentar las oscilaciones de un niño en un columpio, empujando con una frecuencia igual a la frecuencia natural del columpio. Un ruido vibratorio en un automóvil que se escucha sólo a cierta rapidez del motor o de rotación de las ruedas es un ejemplo muy conocido. Los altavoces de bajo precio a menudo emiten un retumbo o zumbido molesto, cuando una nota musical coincide con la frecuencia de resonancia del cono del altavoz o de la carcasa. En el capítulo 16 estudiaremos otros ejemplos de resonancia que implican sonido. La resonancia también ocurre en los circuitos eléctricos, como veremos en el capítulo 31. Un circuito sintonizado en una radio o un televisor responden vigorosamente a ondas con frecuencias cercanas a su frecuencia de resonancia, y aprovechamos esto para seleccionar una estación específica y rechazar las demás.

La resonancia en los sistemas mecánicos puede ser destructiva. Una compañía de soldados una vez destruyó un puente marchando sobre él al mismo paso; la frecuencia de sus pasos era cercana a una frecuencia de vibración natural del puente, y la oscilación resultante tuvo suficiente amplitud para desgarrar el puente. Desde entonces, se ha ordenado a los soldados que rompan el paso antes de cruzar un puente. Hace algunos años, las vibraciones de los motores de cierto avión tuvieron justo la frecuencia adecuada para resonar con las frecuencias naturales de las alas. Las oscilaciones iban creciendo y a veces se caían las alas.

Casi todo mundo ha visto la película del colapso del puente colgante de Tacoma Narrows en 1940 (figura 13.29). Esto suele citarse como ejemplo de resonancia impulsada por el viento, pero hay dudas al respecto. El viento no tenía que variar

13.29 El puente Tacoma Narrows se desplomó cuatro meses y seis días después de abrirse al tráfico. El claro principal tenía 2800 pies de longitud y 39 pies de ancho, con vigas de acero de 8 pies de altura para darle rigidez en ambos costados. La amplitud máxima de las vibraciones torsionales fue de 35°; la frecuencia fue de cerca de 0.2 Hz.





periódicamente con una frecuencia cercana a la natural del puente. El flujo de aire por el puente era turbulento, y se formaban remolinos en el aire con una frecuencia regular que dependía de la rapidez de flujo. Es concebible que esta frecuencia haya coincidido con una frecuencia natural del puente; sin embargo, la causa quizás haya sido algo más sutil llamado *oscilación autoexcitada*, donde las fuerzas aerodinámicas causadas por un viento *constante* al soplar sobre el puente tendieron a alejarlo más del equilibrio, en momentos en que ya se estaba alejando del equilibrio. Es como si tuviéramos una fuerza amortiguadora como el término $-bv_x$ de la ecuación (13.40), pero con el signo invertido. En vez de extraer energía mecánica del sistema, esta fuerza antiamortiguadora bombea energía a él, aumentando las oscilaciones hasta amplitudes destructivas. La ecuación diferencial aproximada es la (13.41) con el signo del término en b invertido, y la solución oscilante es la ecuación (13.42) con un signo *positivo* en el exponente. Puede verse que nos aguardan problemas. Los ingenieros han aprendido a estabilizar los puentes suspendidos, tanto estructural como aerodinámicamente, con la finalidad de evitar tales desastres.

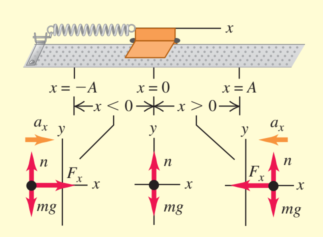
Evalúe su comprensión de la sección 13.8 Al impulsarse con una frecuencia cercana a su frecuencia natural, un oscilador con muy poco amortiguamiento tiene mucho mayor respuesta, que el mismo oscilador más amortiguamiento. Cuando se impulsa con una frecuencia que es mucho mayor o mucho menor que la frecuencia natural, ¿qué oscilador tendrá la mayor respuesta: i) aquel con muy poco amortiguamiento o ii) el que tiene más amortiguamiento?

CAPÍTULO 13 RESUMEN

Movimiento periódico: Un movimiento periódico se repite en un ciclo definido; se presenta siempre que un cuerpo tiene una posición de equilibrio estable y una fuerza de restitución que actúa cuando el cuerpo se desplaza del equilibrio. El periodo T es lo que tarda un ciclo. La frecuencia f es el número de ciclos por unidad de tiempo. La frecuencia angular ω es 2π veces la frecuencia. (Véase el ejemplo 13.1.)

$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{1}{f} \tag{13.1}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{13.2}$$



Movimiento armónico simple: Si en el movimiento periódico la fuerza de restitución F_x es directamente proporcional al desplazamiento x, el movimiento se denomina armónico simple (MAS). En muchos casos, esta condición se satisface si el desplazamiento con respecto al equilibrio es pequeño. La frecuencia angular, la frecuencia y el periodo en un MAS no dependen de la amplitud, sólo dependen de la masa m y la constante de fuerza k. En un MAS, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración son funciones senoidales del tiempo; la amplitud A y el ángulo de fase ϕ de la oscilación están determinados por la posición y velocidad iniciales del cuerpo. (Véanse los ejemplos 13.2, 13.3, 13.6 y 13.7.)

$$F_x = -kx \tag{13.3}$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{k}{m}x \tag{13.4}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.10}$$

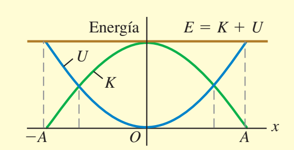
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{13.11}$$

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{13.12}$$

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \tag{13.13}$$

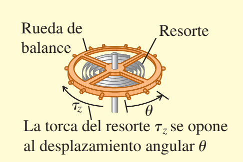
Energía en movimiento armónico simple: La energía se conserva en un MAS. La energía total se puede expresar en términos de la constante de fuerza k y la amplitud A. (Véanse los ejemplos 13.4 y 13.5.)

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{constante} \tag{13.21}$$



Movimiento armónico simple angular: En el MAS angular, la frecuencia y la frecuencia angular están relacionados con el momento de inercia I y la constante de torsión κ.

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad \text{y} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{13.24}$$

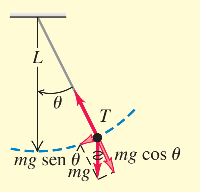


Péndulo simple: Un péndulo simple consiste en una masa puntual m en el extremo de un cordón sin masa de longitud L. Su movimiento es aproximadamente armónico simple si la amplitud es lo bastante pequeña; entonces, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo dependen sólo de g y L, no de la masa ni de la amplitud. (Véase el ejemplo 13.8.)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.32}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{13.33}$$

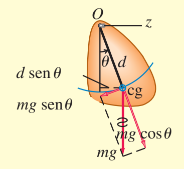
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{13.34}$$



Péndulo físico: Un péndulo físico es un cuerpo suspendido de un eje de rotación. La frecuencia angular y el periodo para oscilaciones de amplitud pequeña son independientes de la amplitud, aunque dependen de la masa m, la distancia d del eje de rotación a su centro de gravedad, y del momento de inercia I con respecto al eje. (Véanse los ejemplos 13.9 y 13.10.)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \qquad (13.38)$$

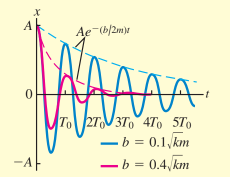
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (13.39)$$



Oscilaciones amortiguadas: Si a un oscilador armónico simple se le aplica una fuerza $F_x = -bv_x$ proporcional a la velocidad, el movimiento se denomina oscilación amortiguada. Si $b < 2\sqrt{km}$ (condición de subamortiguamiento), el sistema oscila con amplitud decreciente y una frecuencia angular ω' que es más baja de la que tendría sin amortiguamiento. Si $b = 2\sqrt{km}$ (condición de amortiguamiento crítico) o $b > 2\sqrt{km}$ (condición de sobreamortiguamiento), cuando el sistema se desplaza regresa a su posición de equilibrio sin oscilar.

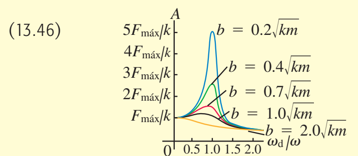
$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos\omega' t \qquad (13.42)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (13.43)$$



Oscilaciones impulsadas y resonancia: Si a un oscilador armónico amortiguado se aplica una fuerza impulsora que varía senoidalmente, el movimiento resultante se denomina oscilación forzada. La amplitud es función de la frecuencia impulsora ω_d y alcanza un máximo con una frecuencia impulsora cercana a la frecuencia natural del sistema. Este comportamiento se denomina resonancia.

$$A = \frac{F_{máx}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \qquad (13.46)$$



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Ninguna de ellas; el reloj seguiría marcando correctamente el tiempo. Si la masa de su varilla es despreciable, el péndulo es simple y su periodo es independiente de la masa [véase la ecuación (13.34)]. Si se incluye la masa de la varilla, se trata de un péndulo físico. Un aumento de su masa m al doble también duplica su momento de inercia I, así que la razón I/m no cambia y el periodo $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$ [ecuación (13.39)] sigue siendo el mismo.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

13.1 Respuestas: ***a)*** $x < 0$, ***b)*** $x > 0$, ***c)*** $x < 0$, ***d)*** $x > 0$, ***e)*** $x = 0$, ***f)*** $x > 0$ La figura 13.2 muestra que la componente x de la fuerza total F_x y la aceleración a_x son ambas positivas cuando $x < 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la izquierda y el resorte se comprime); mientras que F_x y a_x son ambas negativas cuando $x > 0$ (así que el cuerpo se desplaza hacia la derecha y el resorte se estira). Por lo tanto, F_x y a_x siempre tienen signos *opuestos*. Esto es válido si el objeto se mueve a la derecha ($v_x > 0$), a la izquierda ($v_x < 0$), o no se mueve ($v_x = 0$), ya que la fuerza ejercida por el resorte depende de si se comprime o se estira, y con qué distancia. Esto explica las respuestas *a*) a *e*). Si la aceleración es cero como en *f*), la fuerza total también debe ser cero y por ello el resorte debe estar relajado: $x = 0$.

13.2 Respuestas: ***a)*** $A > 0.10$ **m**, $\phi < 0$; ***b)*** $A > 0.10$ **m**, $\phi > 0$ En ambas situaciones, la velocidad v_{0x} inicial ($t = 0$) no es cero, de manera que de la ecuación (13.19) la amplitud $A = \sqrt{x_0^2 + (v_{0x}^2/\omega^2)}$ es mayor que la coordenada inicial $x_0 = 0.10$ m. A partir de la ecuación (13.18), el ángulo de fase es $\phi = \arctan(-v_{0x}/\omega x_0)$, el cual es positivo si la cantidad $-v_{0x}/\omega x_0$ (el argumento de la función arcotangente) es positivo, y es negativo si $-v_{0x}/\omega x_0$ es negativo. En el inciso *a*) x_0 y v_{0x} son ambos positivos, así que $-v_{0x}/\omega x_0 < 0$ y $\phi < 0$. En el inciso *b*) x_0 es positivo y v_{0x} es negativo, por lo que $-v_{0x}/\omega x_0 > 0$ y $\phi > 0$.

13.3 Respuestas: a) iii), b) v) Para aumentar la energía total $E = \frac{1}{2}kA^2$ en un factor de 2, la amplitud A debe aumentar en un factor de $\sqrt{2}$. Puesto que es MAS, un cambio de amplitud no afecta la frecuencia.

13.4 Respuesta: i) El periodo de oscilación de un cuerpo de masa m unido a un resorte colgante de constante de fuerza k está dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, la misma expresión que para el cuerpo unido al resorte

horizontal. Ni m ni k cambian cuando el aparato se lleva a Marte, por lo que no cambia el periodo. La única diferencia es que en el equilibrio, el resorte se estirará una distancia más corta en Marte que en la Tierra, debido a la gravedad más débil.

13.5 Respuesta: no Al igual que para un objeto que oscila en un resorte, en la posición de equilibrio la *rapidez* de la lenteja del péndulo no cambia instantáneamente (es donde la rapidez es máxima, así que su derivada en este tiempo es cero). Sin embargo, la *dirección* del movimiento es variable porque la lenteja del péndulo sigue una trayectoria circular. Por ello, la lenteja debe tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria y hacia el centro del círculo (véase la sección 3.4). Para originar esta aceleración en la posición de equilibrio cuando el cordón es vertical, la fuerza de tensión hacia arriba en esta posición debe ser mayor que el peso de la lenteja. Esto provoca una fuerza total hacia arriba sobre la lenteja y una aceleración hacia arriba y al centro de la trayectoria circular.

13.6 Respuesta: i) El periodo de un péndulo físico está dado por la ecuación (13.39), $T = 2\pi\sqrt{I/mgd}$. La distancia $d = L$ desde el pivote hasta el centro de gravedad es la misma tanto para la varilla como para el péndulo simple, cuando la masa es m. Esto significa que para cualquier ángulo de desplazamiento θ actúa la misma torca de restitución sobre la varilla y sobre el péndulo simple. Sin embargo, la varilla tiene un momento de inercia mayor: $I_{\text{varilla}} = \frac{1}{3}m(2L)^2 = \frac{4}{3}mL^2$ e $I_{\text{simple}} = mL^2$ (toda la masa del péndulo está a una distancia L del pivote). Por lo tanto, la varilla tiene un periodo mayor.

13.7 Respuesta: ii) Las oscilaciones son subamortiguadas con una amplitud decreciente en cada ciclo de oscilación, como las que se grafican en la figura 13.26. Si las oscilaciones fueran no amortiguadas, continuarían con la misma amplitud indefinidamente. Si fueran críticamente amortiguadas, la punta no se balancearía verticalmente, sino que suavemente regresaría a su posición de equilibrio original sin sobreamortiguamiento.

13.8 Respuesta: i) La figura 13.28 muestra que la curva de amplitud contra frecuencia impulsora se mueve hacia arriba con *todas* las frecuencias, conforme el valor de la constante de amortiguamiento b disminuye. Así, para valores fijos de k y m, el oscilador con el amortiguamiento mínimo (el menor valor de b) tendrá la respuesta más grande en cualquier frecuencia impulsora.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P13.1. Un objeto se mueve con MAS de amplitud A en el extremo de un resorte. Si la amplitud se duplica, ¿qué sucede con la distancia total que el objeto recorre en un periodo? ¿Qué sucede con el periodo? ¿Qué sucede con la rapidez máxima del objeto? Analice la relación entre estas respuestas.

P13.2. Piense en varios ejemplos cotidianos de movimiento que sea, al menos, aproximadamente armónico simple. ¿Cómo difiere cada uno del MAS?

P13.3. ¿Un diapasón u otro instrumento de afinación similar tiene MAS? ¿Por qué es algo esencial para los músicos?

P13.4. Una caja que contiene un guijarro se conecta a un resorte horizontal ideal y oscila sobre una mesa de aire sin fricción. Cuando la caja ha alcanzado su distancia máxima a partir del punto de equilibrio, repentinamente el guijarro se sale por arriba sin perturbar la caja. ¿Las siguientes características del movimiento aumentarán, disminuirán o permanecerán igual en el movimiento subsecuente de la caja? Justifique cada respuesta. *a*) Frecuencia, *b*) periodo; *c*) amplitud; *d*) la energía cinética máxima de la caja; *e*) la rapidez máxima de la caja.

P13.5. Si un resorte uniforme se corta a la mitad, ¿qué constante de fuerza tendrá cada mitad? Justifique su respuesta. ¿Cómo diferiría la frecuencia del MAS usando la misma masa y medio resorte, en vez del resorte completo?

P13.6. En el análisis del MAS de este capítulo se despreció la masa del resorte. ¿Cómo cambia esta masa las características del movimiento?

P13.7. Dos deslizadores idénticos en un riel de aire están conectados por un resorte ideal. ¿Podría tal sistema ser un MAS? Explique su respuesta. ¿Cómo sería el periodo en comparación con el de un solo deslizador unido a un resorte, donde el otro extremo está unido rígidamente a un objeto estacionario? Explique su respuesta.

P13.8. Imagine que lo capturan unos extraterrestres, lo meten en su nave y lo duermen con un sedante. Tiempo después, despierta y se encuentra encerrado en un compartimento pequeño sin ventanas. Lo único que le dejaron es su reloj digital, su anillo escolar y su largo collar de cadena de plata. Explique cómo podría determinar si todavía estuviera en la Tierra o si habría sido transportado a Marte.

P13.9. El sistema de la figura 13.17 se monta en un elevador. ¿Qué le sucede al periodo del movimiento (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 m/s^2; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 m/s^2? Justifique su respuesta.

P13.10. Si un péndulo tiene un periodo de 2.5 s en la Tierra, ¿qué periodo tendría en una estación espacial en órbita terrestre? Si una masa colgada de un resorte vertical tiene un periodo de 5.0 s en la Tierra, ¿qué periodo tendrá en la estación espacial? Justifique sus respuestas.

P13.11. Un péndulo simple se monta en un elevador. ¿Qué le sucede al periodo del péndulo (aumenta, disminuye o no cambia), cuando el elevador *a*) acelera hacia arriba a 5.0 m/s^2; *b*) se mueve hacia arriba a 5.0 m/s constantes; *c*) acelera hacia abajo a 5.0 m/s^2; *d*) acelera hacia abajo a 9.8 m/s^2? Justifique sus respuestas.

P13.12. ¿Qué debe hacerse a la longitud del cordón de un péndulo simple para *a*) duplicar su frecuencia, *b*) duplicar su periodo, *c*) duplicar su frecuencia angular?

P13.13. Si un reloj de péndulo se sube a la cima de una montaña, ¿se adelanta o se atrasa? Explique, suponiendo que marca la hora correcta a menor altitud.

P13.14. Si la amplitud de un péndulo simple aumenta, ¿debería aumentar o disminuir su periodo? Mencione un argumento cualitativo; no se base en la ecuación (13.35). ¿Su argumento también es válido para un péndulo físico?

P13.15. ¿Porqué los perros pequeños (como los chihuahueños) caminan con zancadas más rápidas que los perros grandes (como los daneses)?

P13.16. ¿En qué punto del movimiento de un péndulo simple es máxima la tensión en el cordón? ¿Y mínima? En cada caso, explique su razonamiento.

P13.17. ¿Un estándar de tiempo podría basarse en el periodo de cierto péndulo estándar? ¿Qué ventajas y desventajas tendría tal estándar con respecto al estándar actual descrito en la sección 1.3?

P13.18. Para un péndulo simple, diferencie claramente entre ω (la velocidad angular) y ω la frecuencia angular). ¿Cuál es constante y cuál es variable?

P13.19. Un deslizador está conectado a un resorte ideal fijo y oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción. Se coloca una moneda encima del deslizador y oscila con éste. ¿En qué puntos del movimiento es máxima la fuerza de fricción sobre la moneda? ¿En qué puntos es mínima? Justifique sus respuestas.

P13.20. Al diseñar estructuras en una región de alta sismicidad, ¿qué relación debe haber entre las frecuencias naturales de oscilación de una estructura y las frecuencias típicas de terremoto? ¿Por qué? ¿La estructura debe tener mucho o poco amortiguamiento?

Ejercicios

Sección 13.1 Descripción de la oscilación

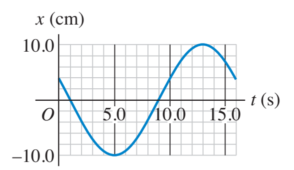
13.1. Una cuerda de piano produce una nota la medio vibrando primordialmente a 220 Hz. *a*) Calcule su periodo y frecuencia angular. *b*) Calcule el periodo y la frecuencia angular de una soprano que canta un la una octava más arriba, que tiene el doble de la frecuencia de la cuerda de piano.

13.2. Si un objeto en una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte, se desplaza y después se suelta, oscilará. Si se desplaza 0.120 m de su posición de equilibrio y se suelta con rapidez inicial cero, después de 0.800 s su desplazamiento es de 0.120 m en el lado opuesto, habiendo pasado la posición de equilibrio una vez durante este intervalo. Calcule *a*) la amplitud, *b*) el periodo y *c*) la frecuencia.

13.3. La punta de un diapasón efectúa 440 vibraciones completas en 0.500 s. Calcule la frecuencia angular y el periodo del movimiento.

13.4. En la figura 13.30 se muestra el desplazamiento de un objeto oscilante en función del tiempo. Calcule *a*) la frecuencia, *b*) la amplitud, *c*) el periodo y *d*) la frecuencia angular de este movimiento.

Figura 13.30 Ejercicio 13.4.



Sección 13.2 Movimiento armónico simple

13.5. Una pieza de una máquina está en MAS con frecuencia de 5.00 Hz y amplitud de 1.80 cm. ¿Cuánto tarda la pieza en ir de $x = 0$ a $x = -1.80$ cm?

13.6. En un laboratorio de física, se conecta un deslizador de riel de aire de 0.200 kg al extremo de un resorte ideal de masa despreciable y se pone a oscilar. El tiempo transcurrido entre la primera vez que el deslizador pasa por la posición de equilibrio y la segunda vez que pasa por este punto es de 2.60 s. Determine la constante de fuerza del resorte.

13.7. Un cuerpo de masa desconocida se une a un resorte ideal con constante de fuerza de 120 N/m. Se observa que vibra con una frecuencia de 6.00 Hz. Calcule *a*) el periodo del movimiento; *b*) la frecuencia angular; y *c*) la masa del cuerpo.

13.8. Cuando una masa de 0.750 kg oscila en un resorte ideal, la frecuencia es de 1.33 Hz. *a*) ¿Cuál será la frecuencia si se agregan 0.220 kg a la masa original, y *b*) y si se restan de la masa original? Intente resolver este problema *sin* calcular la constante de fuerza del resorte.

13.9. Un oscilador armónico tiene una masa de 0.500 kg unida a un resorte ideal con constante de fuerza de 140 N/m. Calcule *a*) el periodo, *b*) la frecuencia y *c*) la frecuencia angular de las oscilaciones.

13.10. Tirón. Una cuerda de guitarra vibra con una frecuencia de 440 Hz. Un punto en su centro se mueve en MAS con amplitud de 3.0 mm y ángulo de fase cero. *a*) Escriba una ecuación para la posición del centro de la cuerda en función del tiempo. *b*) ¿Qué magnitud máxima tienen la velocidad y la aceleración del centro de la cuerda? *c*) La derivada de la aceleración con respecto al tiempo es una cantidad llamada *tirón*. Escriba una ecuación para el tirón del centro de la cuerda en función del tiempo, y calcule el valor máximo de la magnitud del tirón.

13.11. Un bloque de 2.00 kg, que se desliza sin fricción, se conecta a un resorte ideal con constante de fuerza de 300 N/m. En $t = 0$, el resorte no está estirado ni comprimido, y el bloque se mueve en la dirección negativa a 12.0 m/s. Calcule *a*) la amplitud y *b*) el ángulo de fase. *c*) Escriba una ecuación para la posición en función del tiempo.

13.12. Repita el ejercicio 13.11, pero suponga que en $t = 0$ el bloque tiene una velocidad de -4.00 m/s y un desplazamiento de $+0.200$ m.

13.13. La punta de la aguja de una máquina de coser se mueve en MAS, sobre el eje x con una frecuencia de 2.5 Hz. En $t = 0$, sus componentes de posición y velocidad son, respectivamente, $+1.1$ cm y -15 cm/s. *a*) Calcule la componente de aceleración de la aguja en $t = 0$. *b*) Escriba ecuaciones para las componentes de posición, velocidad y aceleración de la punta en función del tiempo.

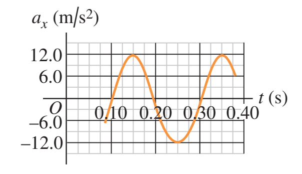
13.14. Un objeto está en MAS con periodo de 1.200 s y una amplitud de 0.600 m. En $t = 0$, el objeto está en $x = 0$. ¿A qué distancia está el objeto de la posición de equilibrio cuando $t = 0.480$ s?

13.15. Peso de los astronautas. Este procedimiento se utiliza realmente para "pesar" a los astronautas en el espacio. Se une una silla de 42.5 kg a un resorte y se le deja oscilar cuando está vacía, la silla tarda 1.30 s en efectuar una vibración completa. En cambio, con un astronauta sentado en ella, sin tocar el piso con sus pies, la silla tarda 2.54 s en completar un ciclo. ¿Cuál debe ser la masa del astronauta?

13.16. Un objeto de 0.400 kg en MAS tiene $a_x = -2.70$ m/s^2 cuando $x = 0.300$ m. ¿Cuánto tarda una oscilación?

13.17. Sobre una pista de aire horizontal sin fricción, un deslizador oscila en el extremo de un resorte ideal, cuya constante de fuerza es 2.50 N/cm. En la figura 13.31 la gráfica muestra la aceleración del deslizador en función del tiempo. Calcule *a*) la masa del deslizador; *b*) el desplazamiento máximo del deslizador desde el punto de equilibrio; *c*) la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre el deslizador.

Figura 13.31 Ejercicio 13.17.



13.18. La velocidad de una masa de 0.500 kg en un resorte está dada en función del tiempo por $v_x(t) = (3.60 \text{ cm/s}) \operatorname{sen}[(4.71 \text{ s}^{-1})t - \pi/2]$. Calcule *a*) el periodo, *b*) la amplitud, *c*) la aceleración máxima de la masa y *d*) la constante de fuerza del resorte.

13.19. El desplazamiento en función del tiempo de una masa de 1.50 kg en un resorte está dado por la ecuación

$$x(t) = (7.40 \text{ cm}) \cos[(4.16 \text{ s}^{-1})t - 2.42].$$

Calcule *a*) el tiempo que tarda una vibración completa; *b*) la constante de fuerza del resorte; *c*) la rapidez máxima de la masa; *d*) la fuerza máxima que actúa sobre la masa; *e*) la posición, rapidez y aceleración de la masa en $t = 1.00$ s; *f*) y la fuerza que actúa sobre la masa en ese momento.

13.20. Un objeto está en MAS con periodo de 0.300 s y una amplitud de 6.00 cm. En $t = 0$, el objeto está instantáneamente en reposo en $x =$ 6.00 cm. Calcule el tiempo que el objeto tarda en ir de $x = 6.00$ cm a $x = -1.50$ cm.

Sección 13.3 Energía en el movimiento armónico simple

13.21. Las puntas de un diapasón rotulado con 392 Hz están vibrando con una amplitud de 0.600 mm. *a*) ¿Qué rapidez máxima tiene una punta? *b*) Una mosca común (*Musca domestica*) con masa de 0.0270 g está sujeta en el extremo de una de las puntas. Al vibrar la punta, ¿qué energía cinética máxima tiene la mosca? Suponga que el efecto de la masa de la mosca sobre la frecuencia de oscilación es despreciable.

13.22. Un oscilador armónico tiene frecuencia angular ω y amplitud A. *a*) Calcule la magnitud del desplazamiento y de la velocidad cuando la energía potencial elástica es igual a la energía cinética. (Suponga que $U = 0$ en el equilibrio.) *b*) ¿Cuántas veces sucede eso en cada ciclo? ¿Cada cuándo sucede? *c*) En un instante en que el desplazamiento es igual a $A/2$, ¿qué fracción de la energía total del sistema es cinética y qué fracción es potencial?

13.23. Un deslizador de 0.500 kg, conectado al extremo de un resorte ideal con constante de fuerza $k = 450$ N/m, está en MAS con una amplitud de 0.040 m. Calcule *a*) la rapidez máxima del deslizador; *b*) su rapidez cuando está en $x = -0.015$ m; *c*) la magnitud de su aceleración máxima; *d*) su aceleración en $x = -0.015$ m; *e*) su energía mecánica total en cualquier punto de su movimiento.

13.24. Una porrista ondea su pompón en MAS con amplitud de 18.0 cm y frecuencia de 0.850 Hz. Calcule *a*) la magnitud máxima de la aceleración y de la velocidad; *b*) la aceleración y rapidez cuando la coordenada del pompón es $x = +9.0$ cm; *c*) el tiempo que tarda en moverse directamente de la posición de equilibrio a un punto situado a 12.0 cm de distancia. *d*) ¿Cuáles de las cantidades pedidas en los incisos *a*), *b*) y *c*) pueden obtenerse empleando el enfoque de energía de la sección 13.3 y cuáles no? Explique su respuesta.

13.25. Para la situación descrita en el inciso *a*) del ejemplo 13.5, ¿qué masa m deberá tener la masilla para que la amplitud después del choque sea la mitad de la amplitud original? Con ese valor de m, ¿qué fracción de la energía mecánica original se convierte en calor?

13.26. Un juguete de 0.150 kg está en MAS en el extremo de un resorte horizontal con constante de fuerza $k = 300$ N/m. Cuando el objeto está a 0.0120 m de su posición de equilibrio, tiene una rapidez de 0.300 m/s. Calcule *a*) la energía total del objeto en cualquier punto de su movimiento; *b*) la amplitud del movimiento; *c*) la rapidez máxima alcanzada por el objeto durante su movimiento.

13.27. Usted observa un objeto que se mueve en MAS. Cuando dicho objeto está desplazado 0.600 m a la derecha de su posición de equilibrio, tiene una velocidad de 2.20 m/s a la derecha y una aceleración de 8.40 m/s^2 a la izquierda. ¿A qué distancia de este punto se desplazará el objeto, antes de detenerse momentáneamente para iniciar su movimiento a la izquierda?

13.28. En una mesa horizontal sin fricción, una caja de 5.20 kg abierta de arriba se sujeta a un resorte ideal, cuya constante de fuerza es de 375 N/m. Dentro de la caja hay una piedra de 3.44 kg. El sistema oscila con una amplitud de 7.50 cm. Cuando la caja ha alcanzado su rapidez máxima, la piedra se sale repentinamente de la caja hacia arriba sin tocar ésta. Calcule *a*) el periodo y *b*) la amplitud del movimiento resultante de la caja. *c*) Sin realizar cálculos, ¿el nuevo periodo es mayor o menor que el periodo original? ¿Cómo lo sabe?

13.29. Dentro de un vehículo de prueba de la NASA, se tira de una esfera de 3.50 kg mediante un resorte ideal horizontal que está unido a una mesa sin fricción. La constante de fuerza del resorte es de 225 N/m. El vehículo tiene una aceleración constante de 5.00 m/s^2, y la esfera no oscila. De repente, cuando la rapidez del vehículo llega a 45.0 m/s, sus motores se apagan, eliminando así su aceleración pero no su velocidad. Calcule *a*) la amplitud y *b*) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de la esfera. *c*) ¿Cuál será la rapidez máxima de la esfera en relación con el vehículo?

Sección 13.4 Aplicaciones del movimiento armónico simple

13.30. Un orgulloso pescador de alta mar cuelga un pez de 65.0 kg de un resorte ideal con masa despreciable, estirando el resorte 0.120 m. *a*) Calcule la constante de fuerza del resorte. Ahora se tira del pez 5.00 cm hacia abajo y luego se suelta. *b*) ¿Qué periodo de oscilación tiene el pez? *c*) ¿Qué rapidez máxima alcanzará?

13.31. Un deslizador de 175 g sobre una pista de aire horizontal sin fricción está unido a un resorte ideal fijo, cuya constante de fuerza es de 155 N/m. En el momento en que usted mide el deslizador, éste se mueve a 0.815 m/s y está a 3.00 cm de su posición de equilibrio. Utilice la *conservación de la energía* para calcular *a*) la amplitud del movimiento y *b*) la rapidez máxima del deslizador. *c*) ¿Cuál es la frecuencia angular de las oscilaciones?

13.32. Un gato con masa de 4.00 kg que gusta de las emociones fuertes está unido mediante un arnés a un resorte ideal de masa despreciable y oscila verticalmente en MAS. La amplitud es de 0.050 m y, en el punto más alto del movimiento, el resorte tiene su longitud natural no estirada. Calcule la energía potencial elástica del resorte (suponga que es cero cuando el resorte no está estirado); la energía cinética del gato; la energía potencial gravitacional del sistema relativa al punto más bajo del movimiento; y la suma de estas tres energías cuando el gato está *a*) en su punto más alto, *b*) en su punto más bajo, y *c*) en su posición de equilibrio.

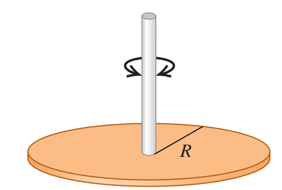
13.33. Una esfera de 1.50 kg y otra de 2.00 kg se pegan entre sí colocando la más ligera debajo de la más pesada. La esfera superior se conecta a un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 165 N/m, y el sistema vibra verticalmente con una amplitud de 15.0 cm. El pegamento que une las esferas es débil y antiguo, y de repente falla cuando las esferas están en la posición más baja de su movimiento. *a*) ¿Por qué es más probable que el pegamento falle en el *punto más bajo*, que en algún otro punto del movimiento? *b*) Calcule la amplitud y la frecuencia de las vibraciones después de que la esfera inferior se despega.

13.34. Un disco uniforme sólido de metal con masa de 6.50 kg y diámetro de 24.0 cm cuelga en un plano horizontal, apoyado en su centro con un alambre metálico vertical. Usted sabe que se requiere una fuerza horizontal de 4.23 N tangente al borde del disco para girarlo 3.34°, y así torcer el alambre. Ahora usted elimina esta fuerza y suelta el disco del reposo. *a*) ¿Cuál es la constante de torsión para el alambre metálico? *b*) ¿Cuáles son la frecuencia y el periodo de las oscilaciones de torsión del disco? *c*) Escriba la ecuación del movimiento para $\theta(t)$ del disco.

13.35. Cierto reloj despertador hace tic cuatro veces cada segundo, y cada tic representa medio periodo. La rueda de balance consiste en un aro delgado con 0.55 cm de radio, conectada al vástago de balance por rayos de masa despreciable. La masa total de la rueda es de 0.90 g. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la rueda con respecto a su eje? *b*) ¿Qué constante de torsión tiene la espiral?

13.36. Un disco metálico delgado con masa de 2.00×10^{-3} kg y radio de 2.20 cm se une en su centro a una fibra larga (figura 13.32). Si se tuerce y suelta, el disco oscila con un periodo de 1.00 s. Calcule la constante de torsión de la fibra.

Figura 13.32 Ejercicio 13.36.



13.37. Imagine que quiere determinar el momento de inercia de una pieza mecánica complicada, con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, así que la cuelga de un alambre a lo largo de ese eje. El alambre tiene una constante de torsión de 0.450 $N \cdot m/rad$. Usted gira un poco la pieza alrededor del eje y la suelta, cronometrando 125 oscilaciones en 265 s. ¿Cuánto vale el momento de inercia buscado?

13.38. La rueda de balance de un reloj vibra con amplitud angular Θ, frecuencia angular ω y ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Deduzca expresiones para la velocidad angular $d\theta/dt$ y la aceleración angular $d^2\theta/dt^2$ en función del tiempo. *b*) Calcule la velocidad angular y la aceleración angular de la rueda de balance, cuando su desplazamiento angular sea Θ, y cuando su desplazamiento sea $\Theta/2$ y θ esté disminuyendo. (*Sugerencia:* haga una gráfica de θ contra *t*.)

***13.39.** Para la interacción de Van der Waals con la función de energía potencial dada por la ecuación (13.25), demuestre que, cuando la magnitud del desplazamiento *x* con respecto al equilibrio ($r = R_0$) es pequeña, la energía potencial es aproximadamente $U \approx \frac{1}{2}kx^2 - U_0$. [*Sugerencia:* en la ecuación (13.25), sea $r = R_0 + x$ y $u = x/R_0$. Luego, aproxime $(1 + u)^n$ con los primeros *tres* términos de la ecuación (13.28).] Compare *k* de esta ecuación con la constante de fuerza de la ecuación (13.29) para la fuerza.

***13.40.** Cuando los dos átomos de hidrógeno de una molécula de H_2 se desplazan del equilibrio, una fuerza de restitución $F_x = -kx$, con $k =$ 580 N/m, actúa sobre ellos. Calcule la frecuencia de oscilación de la molécula de H_2. (*Sugerencia:* la masa de un átomo de hidrógeno es 1.008 unidades de masa atómica, es decir, 1 u; vea el Apéndice E. Como en el ejemplo 13.7 de la sección 13.4, use $m/2$ en vez de *m* en la expresión para *f*.)

Sección 13.5 El péndulo simple

13.41. Se tira de un péndulo simple de 0.240 m de longitud para moverlo 3.50° a un lado y luego se suelta. *a*) ¿Cuánto tarda la lenteja del péndulo en alcanzar su rapidez máxima? *b*) ¿Cuánto tarda si el ángulo es de 1.75° en vez de 3.50°?

13.42. Un alpinista de 85.0 kg planea balancearse, partiendo del reposo, desde una saliente utilizando una cuerda ligera de 6.50 m de largo. Sujeta un extremo de la cuerda, en tanto que el otro extremo está unido más arriba a la cara de una roca. Como la saliente no está muy lejos de la cara de la roca, la cuerda forma un ángulo pequeño con la vertical. En su punto más bajo de su balanceo, planea soltarse y dejarse caer una distancia corta hacia el suelo. *a*) ¿Cuánto tiempo después de que empieza a balancearse el alpinista alcanzará su punto de oscilación más alto? *b*) Si falla en la primera oportunidad de soltarse, ¿cuánto tiempo después de iniciar su balanceo, el alpinista llegará a su punto más bajo por segunda vez?

13.43. En San Francisco un edificio tiene aditamentos ligeros que consisten en bombillas pequeñas de 2.35 kg con pantallas, que cuelgan del techo en el extremo de cordones ligeros y delgados de 1.50 de longitud. Si ocurre un terremoto leve, ¿cuántas oscilaciones por segundo harán tales aditamentos?

13.44. Un péndulo en Marte. En la Tierra cierto péndulo simple tiene un periodo de 1.60 s. ¿Qué periodo tendrá en Marte, donde $g = 3.71 \text{ m/s}^2$?

13.45. Una manzana pesa 1.00 N. Si la colgamos del extremo de un resorte largo con constante de fuerza de 1.50 N/m y masa despreciable, rebota verticalmente en MAS. Si detenemos el rebote y dejamos que la manzana oscile de lado a lado con un ángulo pequeño, la frecuencia de este péndulo simple es la mitad de la del rebote. (Puesto que el ángulo es pequeño, las oscilaciones de lado a lado no alteran apreciablemente la longitud del resorte.) ¿Qué longitud tiene el resorte no estirado (sin la manzana)?

13.46. Una esfera pequeña de masa *m* está unida a una varilla sin masa de longitud *L* con un pivote en el extremo de arriba, formando un péndulo simple. Se tira del péndulo hacia un lado, hasta que la varilla forma un ángulo Θ con la vertical y se suelta del reposo. *a*) Dibuje un diagrama del péndulo justo después de soltarse; incluya vectores que representen las *fuerzas* que actúan sobre la esfera pequeña y la *aceleración* de la esfera. ¡La exactitud es importante! En este punto, ¿qué aceleración lineal tiene la esfera? *b*) Repita el inciso *a*) para el instante en que el ángulo de la varilla con la vertical es $\Theta/2$. *c*) Repita el inciso *a*) para el instante en que la varilla del péndulo está vertical. En ese punto, ¿qué rapidez lineal tiene la esfera?

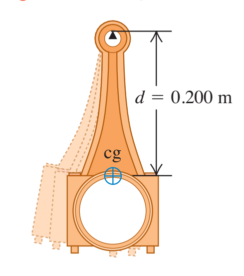
13.47. Después de posarse en un planeta desconocido, una exploradora espacial construye un péndulo simple con longitud de 50.0 cm y determina que efectúa 100 oscilaciones completas en 136 s. ¿Cuánto vale *g* en ese planeta?

13.48. Un péndulo simple de 2.00 m de largo oscila con un ángulo máximo de 30.0° con la vertical. Obtenga su periodo, *a*) suponiendo una amplitud pequeña, y *b*) utilizando los primeros tres términos de la ecuación (13.35). *c*) ¿Cuál de las respuestas a los incisos *a*) y *b*) es más precisa? Para la que es menos precisa, de qué porcentaje es el error con respecto a la más precisa?

Sección 13.6 El péndulo físico

13.49. Una biela de 1.80 kg de un motor de combustión pivota alrededor de un filo de navaja horizontal como se muestra en la figura 13.33. El centro de gravedad de la biela se encontró por balanceo y está a 0.200 m del pivote. Cuando la biela se pone a oscilar con amplitud corta, completa 100 oscilaciones en 120 s. Calcule el momento de inercia de la biela respecto al eje de rotación en el pivote.

Figura 13.33 Ejercicio 13.49.



13.50. Queremos colgar un aro delgado de un clavo horizontal y hacer que tenga una oscilación completa con ángulo pequeño una vez cada 2.0 s. ¿Qué radio debe tener el aro?

13.51. Demuestre que la expresión para el periodo de un péndulo físico se reduce a la del péndulo simple, si el péndulo físico consiste en una partícula de masa *m* en el extremo de un cordón sin masa de longitud *L*.

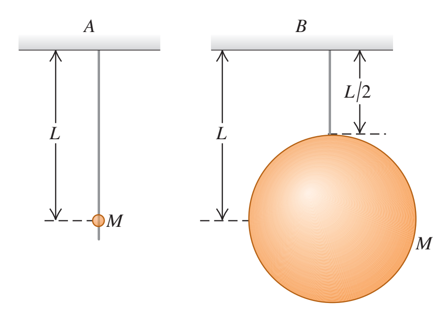
13.52. Una llave inglesa de 1.80 kg tiene su pivote a 0.250 m de su centro de masa y puede oscilar como péndulo físico. El periodo para oscilaciones de ángulo pequeño es de 0.940 s. *a*) ¿Qué momento de inercia tiene la llave con respecto a un eje que pasa por el pivote? *b*) Si la llave inicialmente se desplaza 0.400 rad de la posición de equilibrio, ¿qué rapidez angular tiene al pasar por dicha posición?

13.53. Dos péndulos tienen las mismas dimensiones (longitud *L*) y masa total (*m*). El péndulo *A* es una esfera muy pequeña que oscila en el extremo de una varilla uniforme sin masa. En el péndulo *B*, la mitad de la masa está en la esfera y la otra mitad en la varilla uniforme. Calcule el periodo de cada péndulo para oscilaciones pequeñas. ¿Cuál tarda más tiempo en una oscilación?

13.54. Un adorno navideño con forma de esfera hueca de masa $M =$ 0.015 kg y radio $R = 0.050$ m se cuelga de una rama con un lazo de alambre unido a la superficie de la esfera. Si el adorno se desplaza una distancia corta y se suelta, oscila como péndulo físico con fricción despreciable. Calcule su periodo. (*Sugerencia:* use el teorema de los ejes paralelos para determinar momento de inercia de la esfera con respecto al pivote en la rama.)

13.55. Cada uno de los dos péndulos que se muestran en la figura 13.34 consiste en una esfera sólida uniforme de masa M sostenida por un cordón sin masa; no obstante, la esfera del péndulo A es muy pequeña, en tanto que la esfera del péndulo B es mucho más grande. Obtenga el periodo de cada péndulo para desplazamientos cortos. ¿Qué esfera tarda más en completar una oscilación?

Figura **13.34** Ejercicio 13.55.



Sección 13.7 Oscilaciones amortiguadas

13.56. Una masa de 2.20 kg oscila sobre un resorte cuya constante de fuerza y periodo son de 250.0 N/m y 0.615 s, respectivamente. *a*) ¿Se trata de un sistema amortiguado o no? ¿Cómo lo sabe? Si es amortiguado, calcule la constante de amortiguamiento b. *b*) ¿El sistema es no amortiguado, subamortiguado, críticamente amortiguado o sobreamortiguado? ¿Cómo lo sabe?

13.57. Un ratón de 0.300 kg, nada contento, se mueve en el extremo de un resorte con constante de fuerza $k = 2.50$ N/m, sometido a la acción de una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$. *a*) Si la constante $b = 0.900$ kg/s, ¿qué frecuencia de oscilación tiene el ratón? *b*) ¿Con qué valor de b el amortiguamiento será crítico?

13.58. Un huevo duro (cocido) de 50.0 g se mueve en el extremo de un resorte cuya constante de fuerza es $k = 25.0$ N/m. Su desplazamiento inicial es de 0.300 m. Una fuerza amortiguadora $F_x = -bv_x$ actúa sobre el huevo, y la amplitud del movimiento disminuye a 0.100 m en 5.00 s. Calcule la constante de amortiguamiento b.

13.59. El movimiento de un oscilador subamortiguado está descrito por la ecuación (13.42). Sea el ángulo de fase $\phi = 0$. *a*) Según la ecuación, ¿cuánto vale x en $t = 0$? *b*) ¿Qué magnitud y dirección tiene la velocidad en $t = 0$? ¿Qué nos dice el resultado acerca de la pendiente de la curva de x contra t cerca de $t = 0$? *c*) Deduzca una expresión para la aceleración a_x en $t = 0$. ¿Para qué valor o intervalo de valores de la constante de amortiguamiento b (en términos de k y m) en $t = 0$, la aceleración es negativa, cero o positiva? Comente cada caso en términos de la forma de la curva de x contra t cerca de $t = 0$.

Sección 13.8 Oscilaciones forzadas y resonancia

13.60. Una fuerza impulsora que varía senoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado con constante de fuerza k y masa m. Si la constante de amortiguamiento tiene el valor b_1, la amplitud es A_1 cuando la frecuencia angular impulsora es $\sqrt{k/m}$. En términos de A_1, ¿cuánto vale la amplitud con la misma frecuencia impulsora y la misma amplitud de la fuerza impulsora $F_{máx}$ si la constante de amortiguamiento es *a*) $3b_1$ y *b*) $b_1/2$?

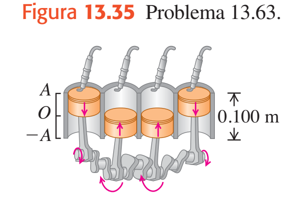
13.61. Una fuerza impulsora que varía senoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado. *a*) ¿Qué unidades tiene la constante de amortiguamiento b? *b*) Demuestre que la cantidad $\sqrt{km}$ tiene las mismas unidades que b. *c*) Determine, en términos de $F_{máx}$ y k, la amplitud de $\omega_d = \sqrt{k/m}$ cuando i) $b = 0.2\sqrt{km}$ y ii) $b = 0.4\sqrt{km}$? Compare sus resultados con la figura 13.28.

13.62. Un paquete experimental y su estructura de soporte que se colocarán a bordo de la Estación Espacial Internacional actúan como sistema de resorte-masa subamortiguado con constante de fuerza de 2.1×10^6 N/m y masa de 108 kg. Un requisito de la NASA es que no haya resonancia para oscilaciones forzadas en ninguna frecuencia menor que 35 Hz. ¿Satisface el paquete tal requisito?

Problemas

13.63. MAS en un motor de combustión. El movimiento del pistón de un motor de automóvil (figura 13.35) es aproximadamente armónico simple. *a*) Si la carrera del pistón (el doble de la amplitud) es de 0.100 m y el motor trabaja a 3500 rev/min, ¿qué aceleración tiene el pistón en el extremo de su carrera? *b*) Si el pistón tiene una masa de 0.450 kg, ¿qué fuerza neta debe ejercerse sobre él en ese punto? *c*) ¿Qué rapidez y energía cinética tiene el pistón en el punto medio de su carrera? *d*) ¿Qué potencia media se requiere para acelerar el pistón desde el reposo, hasta la rapidez determinada en el inciso *c*)? *d*) Repita los incisos *b*), *c*) y *d*) con el motor trabajando a 7000 rev/min.

Figura **13.35** Problema 13.63.



13.64. Cuatro pasajeros cuya masa combinada es de 250 kg comprimen 4.00 cm los resortes de un automóvil con amortiguadores vencidos cuando se suben en él. Modele el auto y los pasajeros como un solo cuerpo sobre un solo resorte ideal. Si el automóvil cargado tiene un periodo de vibración de 1.08 s, ¿qué periodo tiene cuando está vacío?

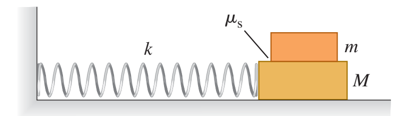
13.65. Un deslizador oscila con MAS y amplitud A_1 en un riel de aire. Usted lo frena hasta reducir la amplitud a la mitad. ¿Qué pasa con sus *a*) periodo, frecuencia y frecuencia angular? *b*) ¿Con su energía mecánica total? *c*) ¿Con su rapidez máxima? *d*) ¿Con su rapidez en $x = \pm A_1/4$? *e*) ¿Y con sus energías cinética y potencial en $x = \pm A_1/4$?

13.66. Un niño malcriado está deslizando su plato de 250 g de un lado a otro, sobre una superficie horizontal en MAS con amplitud de 0.100 m. En un punto a 0.060 m de la posición de equilibrio, la rapidez del plato es de 0.300 m/s. *a*) Calcule el periodo. *b*) Encuentre el desplazamiento cuando la rapidez es de 0.160 m/s. *c*) En el centro del plato hay una rebanada de zanahoria de 10.0 g, que está a punto de resbalar en el extremo de la trayectoria. Calcule el coeficiente de fricción estática entre la rebanada de zanahoria y el plato.

13.67. Una charola (bandeja) horizontal uniforme de 1.50 kg está unida a un resorte ideal vertical con constante de fuerza de 185 N/m y una esfera metálica de 275 g está en la charola. El resorte está debajo de la charola, así que puede oscilar verticalmente. La charola se presiona hacia abajo 15.0 cm por debajo de su posición de equilibrio (llamamos a esto punto A) y se suelta del reposo. *a*) ¿Qué tan alto por encima del punto A estará la charola cuando la esfera metálica salga de la charola? (*Sugerencia:* esto *no* ocurre cuando la esfera y la charola llegan a sus rapideces máximas.) *b*) ¿Cuánto tiempo transcurre desde que el sistema se libera en el punto A y la esfera sale de la charola? *c*) ¿Qué tan rápido se mueve la esfera justo cuando sale de la charola?

13.68. Un bloque de masa M descansa en una superficie sin fricción y está conectado a un resorte horizontal con constante de fuerza k. El otro extremo del resorte está fijo a una pared (figura 13.36). Un segundo bloque de masa m está sobre el primero. El coeficiente de fricción

Figura **13.36** Problema 13.68.



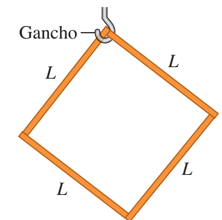
estática entre los bloques es μ_s. Determine la amplitud de oscilación *máxima* que no permite que el bloque superior resbale.

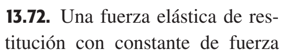
13.69. Una masa de 10.0 kg viaja hacia la derecha con rapidez de 2.00 m/s sobre una superficie horizontal lisa y choca contra una segunda masa de 10.0 kg que inicialmente está en reposo pero unida a un resorte ligero con constante de fuerza de 80.0 N/m. *a*) Calcule la frecuencia, la amplitud y el periodo de las oscilaciones subsecuentes. *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el sistema en regresar por primera vez a la posición inmediatamente después del choque?

13.70. Un cohete acelera hacia arriba a 4.00 m/s^2 desde la plataforma de lanzamiento en la Tierra. En su interior, una esfera pequeña de 1.50 kg cuelga del techo mediante un alambre ligero de 1.10 m. Si la esfera se desplaza 8.50° de la vertical y se suelta, encuentre la amplitud y el periodo de las oscilaciones resultantes de este péndulo.

13.71. Un objeto cuadrado de masa m se construye con cuatro varas uniformes idénticas, cada una con longitud L, unidas entre sí. Este objeto se cuelga de su esquina superior en un gancho (figura 13.37). Si se gira ligeramente a la izquierda y luego se suelta, ¿con qué frecuencia oscilará de un lado a otro?

Figura 13.37 Problema 13.71.





13.72. Una fuerza elástica de restitución con constante de fuerza de 10.0 N/m actúa sobre un objeto con masa de 0.200 kg. *a*) Grafique la energía potencial elástica U en función del desplazamiento x dentro de un intervalo de x desde -0.300 m hasta $+0.300$ m. En su gráfica use la escala 1 cm = 0.05 J verticalmente y 1 cm = 0.05 m horizontalmente. El objeto se pone a oscilar con una energía potencial inicial de 0.140 J y una energía cinética inicial de 0.060 J. Conteste las preguntas que siguen consultando la gráfica. *b*) ¿Qué amplitud tiene la oscilación? *c*) ¿Cuánto vale la energía potencial cuando el desplazamiento es de la mitad de la amplitud? *d*) ¿Con qué desplazamiento son iguales las energías cinética y potencial? *e*) ¿Cuánto vale el ángulo de fase ϕ si la velocidad inicial es positiva y el desplazamiento inicial es negativo?

13.73. Una cubeta de 2.00 kg que contiene 10.0 kg de agua cuelga de un resorte ideal vertical, cuya constante de fuerza es de 125 N/m, y oscila verticalmente con una amplitud de 3.00 cm . De repente, la cubeta dimana una fuga en la base, goteando agua a una tasa constante de 2.00 g/s. Cuando la cubeta se vacía y queda a la mitad de su capacidad, calcule *a*) el periodo de oscilación y *b*) la tasa con la que el periodo cambia con respecto al tiempo. ¿El periodo se vuelve más largo o más corto? *c*) ¿Cuál es el sistema de oscilación más corto que este sistema puede tener?

13.74. Un alambre colgante tiene 1.80 m de longitud. Cuando una bola de acero de 60.0 kg se suspende del alambre, éste se estira 2.00 mm. Si se tira de la bola hacia abajo una distancia pequeña adicional y se le suelta, ¿con qué frecuencia vibrará? Suponga que el esfuerzo aplicado al alambre es menor que el límite proporcional (véase la sección 11.5).

13.75. Una perdiz de 5.00 kg cuelga de un peral mediante un resorte ideal con masa despreciable. Si se tira de la perdiz para bajarla 0.100 m con respecto a su posición de equilibrio y se suelta, vibra con un periodo de 4.20 s. *a*) ¿Qué rapidez tiene al pasar por su posición de equilibrio? *b*) ¿Qué aceleración tiene cuando está 0.050 m arriba de dicha posición? *c*) Cuando está subiendo, ¿qué tiempo tarda en moverse de un punto 0.050 m debajo de su posición de equilibrio a un punto que está 0.050 m arriba? *d*) La perdiz se detiene y se retira del resorte. ¿Cuánto se acorta éste?

13.76. Un perno de 0.0200 kg se mueve en MAS con amplitud de 0.240 m y periodo de 1.500 s. El desplazamiento del perno es de $+0.240$ m cuando $t = 0$. Calcule *a*) el desplazamiento del perno cuando $t = 0.500$ s; *b*) la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre el perno en $t = 0.500$ s; *c*) el tiempo mínimo que el perno tarda en moverse de su posición inicial al punto donde $x = -0.180$ m; *d*) la rapidez del perno cuando $x = -0.180$ m.

13.77. MAS de una balanza de carnicero. Un resorte con masa despreciable y constante de fuerza $k = 400$ N/m cuelga verticalmente, y una bandeja de 0.200 kg se suspende de su extremo inferior. Un carnicero deja caer un filete de 2.2 kg sobre la bandeja desde una altura de 0.40 m. El choque es totalmente inelástico y el sistema queda en MAS vertical. Calcule *a*) la rapidez de la bandeja y el filete justo después del choque; *b*) la amplitud del movimiento subsecuente; *c*) el periodo de ese movimiento.

13.78. Una viga uniforme de 225 kg se suspende horizontalmente de dos resortes verticales idénticos que sujetan cada extremo de la viga con el techo. Un saco de 175 kg de grava se coloca sobre el punto medio de la viga. Ésta oscila en MAS con amplitud de 40.0 cm y frecuencia de 0.600 ciclos/s. *a*) El saco de grava se cae de la viga cuando ésta tiene su desplazamiento máximo hacia arriba. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsecuente de la viga. *b*) Suponga ahora que el saco de grava se cae cuando la viga tiene su rapidez máxima. Calcule la frecuencia y amplitud del MAS subsecuente de la viga.

13.79. En el planeta Newtonia, un péndulo simple tiene una lenteja con masa de 1.25 kg y longitud de 185.0 cm cuando se suelta del reposo, tarda 1.42 s en describir un ángulo de 12.5° hasta un punto donde otra vez tiene rapidez cero. Se determinó que la circunferencia de Newtonia es de 51,400 km. Calcule la masa del planeta.

13.80. Una fuerza de 40.0 N estira un resorte vertical 0.250 m. *a*) ¿Qué masa debe colgarse del resorte para que el sistema oscile con un periodo de 1.00 s? *b*) Si la amplitud del movimiento es de 0.050 m y el periodo es el especificado en *a*), ¿dónde está el objeto y en qué dirección se mueve 0.35 s después de haber pasado hacia abajo la posición de equilibrio? *c*) ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el resorte sobre el objeto cuando éste está 0.030 m bajo la posición de equilibrio al subir?

13.81. Que no la deje el barco. En una visita a Minnesota (la "tierra de los 10,000 lagos"), una turista se inscribe en una excursión por uno de los lagos más grandes. Cuando llega al muelle donde está atracado el barco de 1,500 kg, ve que la embarcación oscila verticalmente sobre las olas, en movimiento armónico simple con amplitud de 20 cm. El barco tarda 3.5 s en efectuar un ciclo completo de subida-bajada. Cuando está en su punto más alto, la cubierta está a la misma altura que el muelle estacionario. Al ver cómo se mece el barco, la turista (masa 60 kg) comienza a sentirse mareada (debido en parte a que la noche anterior cenó bacalao noruego), por lo que se niega a subir a bordo, a menos que la cubierta esté a menos de 10 cm del nivel del muelle. ¿De cuánto tiempo dispone para abordar el barco cómodamente durante cada ciclo de movimiento vertical?

13.82. Un ejemplo interesante pero muy poco práctico de oscilación es el movimiento de un objeto que se deja caer por un agujero que va de un lado de la Tierra a otro pasando por el centro. Suponiendo (lo cual no es realista) que la Tierra es una esfera con densidad uniforme, demuestre que el movimiento es armónico simple y calcule el periodo. [*Nota:* la fuerza gravitacional sobre el objeto en función de la distancia r del objeto al centro de la Tierra se dedujo en el ejemplo 12.10 (sección 12.6). El movimiento es MAS si la aceleración a_x y el desplazamiento con respecto al equilibrio x están relacionados por la ecuación (13.8), y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$.]

13.83. Dos masas puntuales m se sostienen separadas una distancia d. Otra masa puntual M está a la mitad entre ellas. Después, M se despla-

za una distancia pequeña x perpendicular a la línea que conecta las dos masas fijas y se libera. *a*) Demuestre que la magnitud de la fuerza de gravedad neta sobre M debida a las masas fijas está dada aproximadamente por $F_{net} = \dfrac{16\,GmMx}{d^3}$ si $x \ll d$. ¿Cuál es la dirección de esta fuerza? ¿Se trata de una fuerza de restitución? *b*) Demuestre que la masa M oscilará con una frecuencia angular de $(4/d)\sqrt{Gm/d}$ y un periodo $\pi d/2\sqrt{d/Gm}$. *c*) ¿Cuál sería el periodo si $m = 100$ kg y $d = 25.0$ cm? ¿Parece que este periodo se podría medir con facilidad? ¿Qué hace que este experimento sea difícil de realizar en un laboratorio de física común? *d*) ¿M oscilará si se desplaza una distancia pequeña x desde el centro hasta cualquiera de las otras masas fijas? ¿Por qué?

13.84. Para cierto oscilador, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo de masa m está dada por $F_x = -cx^3$. *a*) ¿Qué función de energía potencial describe este oscilador, si tomamos $U = 0$ en $x = 0$? *b*) El cuerpo se mueve de $x = 0$ a $x = A$ en un cuarto de periodo. Calcule este tiempo y de ahí el periodo. [*Sugerencia:* empiece en la ecuación (13.20), modificada para incluir la función de energía potencial que obtuvo en el inciso *a*), y despeje la velocidad v_x en función de x. Luego, sustituya v_x por dx/dt y separe la variable escribiendo todos los factores que contienen x de un lado y los que contienen t del otro, de manera que pueda integrarse cada lado. En la integral de x, haga el cambio de variables $u = x/A$. La integral resultante puede evaluarse usando métodos numéricos en una computadora y tiene el valor $\int_0^1 du/\sqrt{1 - u^4} = 1.31$.] *c*) Según el resultado obtenido en el inciso *b*), ¿el periodo depende de la amplitud A del movimiento? ¿Las oscilaciones son armónicas simples?

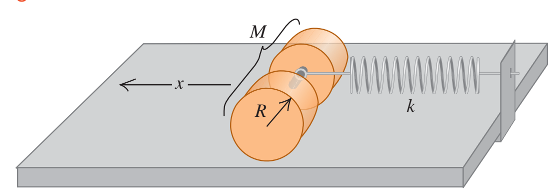
13.85. Considere el círculo de referencia de la figura 13.6. La componente x de la velocidad de Q es la velocidad de P. Calcule esta componente y muestre que la velocidad de P está dada por la ecuación (13.15).

***13.86. Molécula diatómica.** Dos átomos idénticos de una molécula diatómica vibran como osciladores armónicos; no obstante, su centro de masa, que está a la mitad del camino, no se mueve. *a*) Demuestre que, en cualquier instante, los momentos lineales de los átomos con respecto al centro de masa son $\vec{p}$ y $-\vec{p}$. *b*) Demuestre que la energía cinética total K de los dos átomos en cualquier instante es la misma que tiene un solo objeto de masa $m/2$ con momento lineal de magnitud p. (Use $K = p^2/2m$.) Este resultado muestra por qué debe usarse $m/2$ en la expresión para f del ejemplo 13.7 (sección 13.4). *c*) Si los átomos no son idénticos, y tienen masas m_1 y m_2, demuestre que aún se cumple el resultado del inciso *a*), y que la masa del objeto único del inciso *b*) es $m_1m_2/(m_1 + m_2)$. La cantidad $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ se denomina *masa reducida* del sistema.

***13.87.** Una aproximación de la energía potencial de una molécula de KCl es $U = A[(R_0^7/8r^8) - 1/r]$, donde $R_0 = 2.67 \times 10^{-10}$ m y $A = 2.31 \times 10^{-28}$ J · m. Use esto para *a*) demostrar que la componente radial de la fuerza sobre cada átomo es $F_r = A[(R_0^7/r^9) - 1/r^2]$ y *b*) demostrar que R_0 es la separación de equilibrio. *c*) Calcule la energía potencial máxima. *d*) Use $r = R_0 + x$ y los primeros dos términos del teorema binomial (ecuación 13.28) para demostrar que $F_r \approx -(7A/R_0^3)x$, de modo que la constante de fuerza de la molécula sea $k = 7A/R_0^3$. *e*) Si los átomos de K y Cl vibran en direcciones opuestas en lados opuestos del centro de masa de la molécula, $m_1m_2/(m_1 + m_2) = 3.06 \times 10^{-26}$ kg es la masa que debe usarse para calcular la frecuencia (véase el problema 13.86). Calcule la frecuencia de las vibraciones de amplitud pequeña.

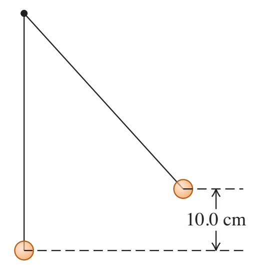
13.88. Dos cilindros sólidos conectados a lo largo de su eje común por una varilla corta y ligera tienen radio R y masa total M, y descansan sobre una mesa horizontal. Un resorte con constante de fuerza k tiene un extremo sujeto a un soporte fijo, y el otro, a un anillo sin fricción en el centro de masa de los cilindros (figura 13.38). Se tira de los cilindros hacia la izquierda una distancia x, estirando el resorte, y se sueltan. Hay suficiente fricción entre la mesa y los cilindros para que éstos rueden sin resbalar al oscilar horizontalmente. Demuestre que el movimiento del centro de masa de los cilindros es armónico simple, y calcule su periodo en términos de M y k. [*Sugerencia:* el movimiento es armónico simple si a_x y x están relacionados por la ecuación (13.8) y por lo tanto, el periodo es $T = 2\pi/\omega$. Aplique $\sum\tau_z = I_{cm}\alpha_z$ y $\sum F_x = Ma_{cm\text{-}x}$ a los cilindros con la finalidad de relacionar $a_{cm\text{-}x}$ con el desplazamiento x de los cilindros con respecto a su posición de equilibrio.]

Figura 13.38 Problema 13.88.



13.89. En la figura 13.39, la esfera superior se suelta del reposo, choca contra la esfera inferior estacionaria y se pega a ella. Ambos cordones tienen 50.0 cm de longitud. La esfera superior tiene masa de 2.00 kg y está inicialmente 10.0 cm más alta que la inferior, cuya masa es de 3.00 kg. Calcule la frecuencia y el desplazamiento angular máximo del movimiento después del choque.

Figura 13.39 Problema 13.89.



13.90. *T. rex.* Modele la pierna del *T. rex* del ejemplo 13.10 (sección 13.6) como dos varillas uniformes con longitud de 1.55 m cada una y unidas rígidamente por un extremo. La varilla inferior tiene masa M, y la superior, $2M$. El objeto compuesto pivota en torno a la parte superior de la varilla de arriba. Calcule el periodo de oscilación de este objeto para oscilaciones de amplitud pequeña. Compare su resultado con el del ejemplo 13.10.

13.91. Una varilla metálica delgada y uniforme con masa M pivota sin fricción sobre un eje que pasa por su punto medio y es perpendicular a la varilla. Un resorte horizontal con constante de fuerza k se conecta al extremo inferior de la varilla, y el otro extremo del resorte se fija a un soporte rígido. La varilla se desplaza un ángulo pequeño Θ con respecto a la vertical (figura 13.40) y se suelta. Demuestre que se mueve en MAS angular y calcule su periodo. (*Sugerencia:* suponga que Θ es suficientemente pequeño para que las aproximaciones $\operatorname{sen}\Theta \approx \Theta$ y $\cos\Theta \approx 1$ sean válidas. El movimiento es armónico simple si $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$, y el periodo es entonces $T = 2\pi/\omega$.)

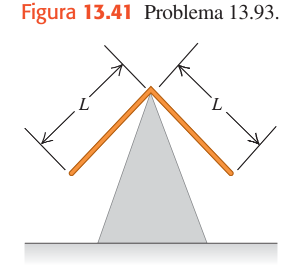
Figura 13.40 Problema 13.91.

13.92. El problema de la campana que suena en silencio. Una campana grande de 34.0 kg cuelga de una viga de madera, de modo que puede oscilar con fricción despreciable. Su centro de masa está 0.60 m bajo el pivote, y su momento de inercia con respecto a un eje en el pivote es de 18.0 kg · m². El badajo es una masa de 1.8 kg que

cuelga del extremo de una varilla delgada de longitud L y masa despreciable. El otro extremo de la varilla está sujeto al interior de la campana, de modo que puede oscilar libremente sobre el mismo eje de la campana. ¿Qué longitud L debe tener la varilla para que la campana suene en silencio, es decir, para que el periodo de oscilación de la campana sea igual a la del badajo?

13.93. Dos varillas delgadas idénticas, cada una con masa m y longitud L, se unen en ángulo recto para formar un objeto en forma de L, el cual se balancea sobre la cúspide de un triángulo agudo (figura 13.41). Si el objeto en forma de L se desvía un poco, oscila. Calcule la frecuencia de oscilación.

Figura 13.41 Problema 13.93.



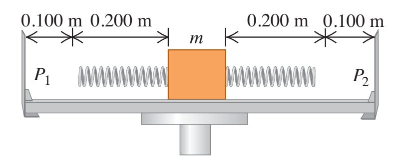
13.94. Se desea construir un péndulo con un periodo de 4.00 s en un lugar donde $g = 9.80\ \text{m/s}^2$. *a*) ¿Qué longitud tiene un péndulo *simple* con este periodo? *b*) Suponga que el péndulo debe montarse en una caja que no puede tener más de 0.50 m de altura. ¿Puede inventar un péndulo con un periodo de 4.00 s que cumpla este requisito?

13.95. Una varilla uniforme de longitud L oscila con ángulo pequeño alrededor de un punto a una distancia x de su centro. *a*) Demuestre que su frecuencia angular es $\sqrt{gx/[(L^2/12) + x^2]}$. *b*) Demuestre que su frecuencia angular máxima se da cuando $x = L/\sqrt{12}$. *c*) ¿Qué longitud tiene la varilla si la frecuencia angular máxima es 2π rad/s?

Problemas de desafío

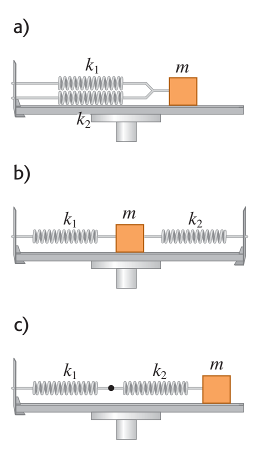
13.96. Dos resortes, ambos con longitud no estirada de 0.200 m, pero con diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, están unidos a extremos opuestos de un bloque de masa m en una superficie plana sin fricción. Ahora los extremos exteriores de los resortes se unen a dos agujas P_1 y P_2 que están a 0.100 m de las posiciones originales de los extremos de los resortes (figura 13.42). Sea $k_1 = 2.00$ N/m, $k_2 = 6.00$ N/m y $m = 0.100$ kg. *a*) Calcule la longitud de cada resorte cuando el bloque está en su nueva posición de equilibrio, después de que los resortes se fijan a las agujas. *b*) Calcule el periodo de vibración del bloque, si se desplaza un poco de su nueva posición de equilibrio y se suelta.

Figura 13.42 Problema de desafío 13.96.



13.97. Constante de fuerza efectiva de dos resortes. Dos resortes con la misma longitud no estirada, pero diferentes constantes de fuerza k_1 y k_2, se unen a un bloque de masa m en una superficie plana sin fricción. Calcule la constante de fuerza efectiva k_{efe} en cada uno de los tres casos: *a*), *b*) y *c*) de la figura 13.43. (La constante de fuerza efectiva está definida por $\sum F_x = -k_{efe}x$.) *d*) Un objeto de masa m, suspendido de un resorte uniforme con constante de fuerza k, vibra con una frecuencia f_1. Si el resorte se parte a la mitad y el mismo objeto se cuelga de una de las mitades, la frecuencia es f_2. Determine la relación f_2/f_1.

Figura 13.43 Problema de desafío 13.97.



13.98. *a*) Determine el cambio ΔT del periodo de un péndulo simple cuando la aceleración debida a la gravedad cambia en Δg. (*Sugerencia:* el nuevo periodo $T + \Delta T$ se obtiene sustituyendo $g + \Delta g$ por g:

$$T + \Delta T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + \Delta g}}$$

Para obtener una expresión aproximada, expanda el factor $(g + \Delta g)^{-1/2}$ usando el teorema binomial (Apéndice B) y conservando sólo los primeros dos términos:

$$(g + \Delta g)^{-1/2} = g^{-1/2} - \frac{1}{2}g^{-3/2}\Delta g + \cdots$$

Los demás términos contienen potencias mayores de Δg y son muy pequeños si Δg es pequeño.) Exprese su resultado como el cambio *fraccionario* del periodo $\Delta T/T$, en términos del cambio fraccionario $\Delta g/g$. *b*) Un reloj de péndulo da la hora correcta en un punto donde $g = 9.8000\ \text{m/s}^2$, pero se atrasa 4.0 s cada día a una altura mayor. Use el resultado del inciso *a*) para calcular el valor aproximado de g en este nuevo lugar.

13.99. Resorte con masa. En todos los problemas anteriores del capítulo, hemos supuesto que los resortes tienen masa despreciable aunque, desde luego, ningún resorte carece por completo de masa. Para determinar el efecto de la masa de un resorte, considere un resorte de masa M, con longitud de equilibrio L_0 y constante de fuerza k. Si el resorte se estira o comprime a una longitud L, la energía potencial es $\frac{1}{2}kx^2$, donde $x = L - L_0$. *a*) Considere un resorte como éste con un extremo fijo y el otro en movimiento con rapidez v. Suponga que la rapidez de los puntos a lo largo del resorte varía linealmente con la distancia l al extremo fijo, y que la masa M del resorte está distribuida uniformemente a todo lo largo del resorte. Calcule la energía cinética del resorte en términos de M y v. (*Sugerencia:* divida el resorte en partes de longitud dl; determine la rapidez de cada parte en términos de l, v y L; determine la masa de cada parte en términos de dl, M y L; e integre de 0 a L. El resultado *no* es $\frac{1}{2}Mv^2$, ya que no todo el resorte se mueve con la misma rapidez.) *b*) Obtenga la derivada de la ecuación de conservación de la energía (ecuación 13.21) con respecto al tiempo, para una masa m que se mueve en el extremo de un resorte *sin masa*. Comparando sus resultados con la ecuación (13.8), que define ω, demuestre que la frecuencia angular de oscilación es $\omega = \sqrt{k/m}$. *c*) Aplique el procedimiento del inciso *b*) para obtener la frecuencia angular de oscilación ω del resorte considerado en el inciso *a*). Si la

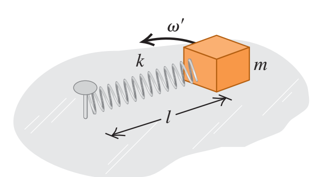
masa efectiva M' del resorte está definida por $\omega = \sqrt{k/M'}$, exprese M' en términos de M.

13.100. Una cinta métrica uniforme (con longitud de 1.00 m) cuelga de un eje horizontal por un extremo y oscila como péndulo físico. Un objeto pequeño con masa igual a la de la cinta métrica se sujeta a la misma a una distancia y por debajo del eje. Sea T el periodo del sistema con el cuerpo pegado y T_0 el periodo de la cinta métrica sola. *a*) Determine la relación T/T_0. Evalúe su expresión para valores de y desde 0 hasta 1.0 m en incrementos de 0.1 m, y grafique T/T_0 contra y. *b*) ¿Hay algún valor de y, distinto de $y = 0$, para el que $T = T_0$? Si lo hay, encuéntrelo y explique por qué el periodo no cambia cuando y tiene ese valor.

13.101. Se determina que el periodo de un péndulo físico alrededor de un punto pivote es T. Luego se encuentra otro punto pivote en el lado opuesto del centro de masa que da el mismo periodo. Los dos puntos están separados una distancia L. Use el teorema de ejes paralelos para demostrar que $g = L(2\pi/T)^2$. (Este resultado sugiere una forma de calcular g sin conocer la masa ni ningún momento de inercia del péndulo físico.)

13.102. Resonancia en un sistema mecánico. Una masa m está unida al extremo de un resorte sin masa con constante de fuerza k y longitud no estirada l_0. El otro extremo del resorte puede girar libremente alrededor de un clavo incrustado en una superficie horizontal sin fricción (figura 13.44). Se hace que la masa gire en un círculo con frecuencia angular de ω'. *a*) Calcule la longitud l del resorte en función de ω'. *b*) ¿Cómo cambia el resultado del inciso *a*) cuando ω' se acerca a la frecuencia natural $\omega = \sqrt{k/m}$ del sistema masa-resorte? (Si el resultado le parece extraño, recuerde que los resortes sin masa y las superficies sin fricción no existen; sólo son descripciones aproximadas de resortes y superficies reales. Además, la ley de Hooke misma es sólo una aproximación al comportamiento de los resortes reales; cuanto más se alargue un resorte, más se desviará su comportamiento de la ley de Hooke.)

Figura 13.44 Problema de desafío 13.102.



***13.103. Vibración de una molécula con enlace covalente.** Muchas moléculas diatómicas (de dos átomos) están unidas por *enlaces covalentes* que son mucho más fuertes que la interacción de Van der Waals. Ejemplos de ello son H_2, O_2 y N_2. Los experimentos indican que, en el caso de muchas de tales moléculas, la interacción puede describirse con una fuerza de la forma

$$F_r = A\left[e^{-2b(r-R_0)} - e^{-b(r-R_0)}\right]$$

donde A y b son constantes positivas, r es la separación de los centros de los átomos y R_0 es la separación de equilibrio. Para la molécula de hidrógeno (H_2), $A = 2.97 \times 10^{-8}$ N, $b = 1.95 \times 10^{10}\ \text{m}^{-1}$, y $R_0 = 7.4 \times 10^{-11}$ m. Calcule la constante de fuerza para oscilaciones pequeñas alrededor del equilibrio. (*Sugerencia:* use la expansión de e^x dada en el Apéndice B.) Compare su resultado con el valor dado en el ejercicio 13.40.

14 MECÁNICA DE FLUIDOS

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de la densidad de un material y la densidad media de un cuerpo.
- Qué se entiende por presión en un fluido y cómo se mide.
- Cómo calcular la fuerza de flotación que ejerce un fluido sobre un cuerpo sumergido en ella.
- La importancia de un flujo laminar contra un flujo de fluido turbulento, y cómo la rapidez del flujo en un tubo depende del tamaño de éste.
- Cómo utilizar la ecuación de Bernoulli para relacionar la presión y la rapidez de flujo en diferentes puntos en ciertos tipos de fluidos.

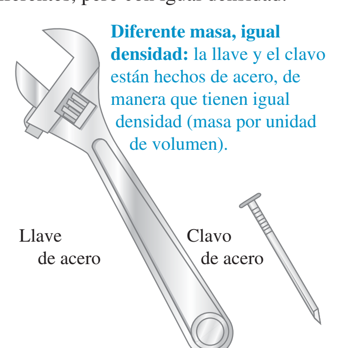
? Este tiburón debe nadar constantemente para no hundirse en el fondo del océano; sin embargo, los peces tropicales anaranjados pueden permanecer en el mismo nivel del agua con poco esfuerzo. ¿Por qué existe esta diferencia?



Los fluidos desempeñan un papel crucial en muchos aspectos de la vida cotidiana. Los bebemos, respiramos y nadamos en ellos; circulan por nuestro organismo y controlan el clima. Los aviones vuelan a través de ellos y los barcos flotan en ellos. Un fluido es cualquier sustancia que puede fluir; usamos el término tanto para líquidos como para gases. Por lo regular, pensamos que los gases son fáciles de comprimir y que los líquidos son casi incompresibles, aunque hay casos excepcionales.

Comenzaremos nuestro estudio con la **estática de fluidos**, es decir, el estudio de fluidos en reposo en situaciones de equilibrio. Al igual que otras situaciones de equilibrio, ésta se basa en la primera y la tercera leyes de Newton. Exploraremos los conceptos clave de densidad, presión y flotación. La **dinámica de fluidos** —es decir, el estudio de fluidos en movimiento— es mucho más compleja; de hecho, es una de las ramas más complejas de la mecánica. Por fortuna, podemos analizar muchas situaciones importantes usando modelos idealizados sencillos y los principios que ya conocemos, como las leyes de Newton y la conservación de la energía. Aun así, apenas si rozaremos la superficie de este tema tan amplio e interesante.

14.1 Dos objetos con masas y volúmenes diferentes, pero con igual densidad.



14.1 Densidad

Una propiedad importante de cualquier material es su **densidad**, que se define como su masa por unidad de volumen. Un material homogéneo, como el hielo o el hierro, tiene la misma densidad en todas sus partes. Usamos la letra griega ρ (rho) para denotar la densidad. Si una masa m de material homogéneo tiene un volumen V, la densidad ρ es

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad \text{(definición de densidad)} \tag{14.1}$$

Dos objetos hechos del mismo material tienen igual densidad aunque tengan masas y volúmenes diferentes. Eso se debe a que la *razón* entre masa y volumen es la misma para ambos objetos (figura 14.1).

Tabla 14.1 Densidades de algunas sustancias comunes

Material	Densidad (kg/m^3)*	Material	Densidad (kg/m^3)*
Aire (1 atm, 20°C)	1.20	Hierro, acero	7.8×10^3
Etanol	0.81×10^3	Latón	8.6×10^3
Benceno	0.90×10^3	Cobre	8.9×10^3
Hielo	0.92×10^3	Plata	10.5×10^3
Agua	1.00×10^3	Plomo	11.3×10^3
Agua de mar	1.03×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Sangre	1.06×10^3	Oro	19.3×10^3
Glicerina	1.26×10^3	Platino	21.4×10^3
Concreto	2×10^3	Estrella enana blanca	10^{10}
Aluminio	2.7×10^3	Estrella de neutrones	10^{18}

*Para obtener las densidades en gramos por centímetro cúbico, divida entre 10^3.

La unidad de densidad en el SI es el kilogramo por metro cúbico ($1\ kg/m^3$). También se usa mucho la unidad cgs, gramo por centímetro cúbico ($1\ g/cm^3$):

$$1\ g/cm^3 = 1000\ kg/m^3$$

En la tabla 14.1, se indican las densidades de varias sustancias comunes a temperaturas ordinarias. Observe la amplia gama de magnitudes (figura 14.2). El material más denso que se encuentra en la Tierra es el metal osmio ($\rho = 22{,}500\ kg/m^3$), pero esto no es nada en comparación con la densidad de los objetos astronómicos exóticos, como las estrellas enanas blancas y las estrellas de neutrones.



14.2 El precio del oro se cotiza por peso (digamos, en dólares por onza). Puesto que el oro es uno de los metales más densos, es posible almacenar una fortuna en oro en un volumen pequeño.

La **gravedad específica** de un material es la razón entre su densidad y la del agua a 4.0°C, $1000\ kg/m^3$; es un número puro, sin unidades. Por ejemplo, la gravedad específica del aluminio es 2.7. Aunque el término “gravedad específica” es inadecuado, ya que nada tiene que ver con la gravedad; habría sido mejor utilizar el término “densidad relativa”.

La densidad de algunos materiales varía de un punto a otro dentro del material. Un ejemplo es el material del cuerpo humano, que incluye grasa de baja densidad (940 kg/m^3 aproximadamente) y huesos de elevada densidad (de 1700 a 2500 kg/m^3). Otros dos ejemplos son la atmósfera terrestre (que es menos densa a mayores altitudes) y los océanos (que son más densos a mayores profundidades). Para estos materiales, la ecuación (14.1) describe la **densidad media**. En general, la densidad de un material depende de factores ambientales, como la temperatura y la presión.

La medición de la densidad es una técnica analítica importante. Por ejemplo, podemos determinar el nivel de carga de un acumulador midiendo la densidad de su electrólito, que es una disolución de ácido sulfúrico (H_2SO_4). Al descargarse la batería, el H_2SO_4 se combina con el plomo de las placas del acumulador para formar sulfato de plomo ($PbSO_4$) insoluble, lo que reduce la concentración de la disolución. La densidad baja de cerca de $1.30 \times 10^3\ kg/m^3$ en un acumulador completamente cargado a $1.15 \times 10^3\ kg/m^3$ en uno descargado.

Otro ejemplo relacionado con automóviles es el anticongelante permanente, que por lo general es una disolución de etilén glicol ($\rho = 1.12 \times 10^3\ kg/m^3$) y agua. El punto de congelación de la disolución depende de la concentración de glicol, y puede determinarse midiendo su gravedad específica. Tales mediciones se realizan en forma rutinaria en los talleres de servicio para automóviles usando un dispositivo llamado hidrómetro, el cual describiremos en la sección 14.3.

Ejemplo 14.1 Peso de un cuarto lleno de aire

Calcule la masa y el peso del aire en una estancia a 20 °C cuyo piso mide 4.0 m × 5.0 m y que tiene una altura de 3.0 m. ¿Qué masa y peso tiene un volumen igual de agua?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Suponemos que el aire es homogéneo, así que la densidad es la misma en todo el cuarto. (Es verdad que el aire es menos den-

continúa

so a gran altitud que cerca del nivel del mar, pero la variación de densidad a lo largo de la altura de 3.0 m del cuarto es despreciable; véase la sección 14.2.)

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (14.1) para relacionar la masa (la incógnita) con el volumen (que calculamos a partir de las dimensiones del cuarto) y la densidad (de la tabla 14.1).

EJECUTAR: El volumen de la habitación es $V = (3.0\text{ m})(4.0\text{ m}) \times (5.0\text{ m}) = 60\text{ m}^3$. La masa m_{aire} está dada por la ecuación (14.1):

$$m_{\text{aire}} = \rho_{\text{aire}} V = (1.20\text{ kg/m}^3)(60\text{ m}^3) = 72\text{ kg}$$

El peso del aire es

$$w_{\text{aire}} = m_{\text{aire}}\, g = (72\text{ kg})(9.8\text{m/s}^2) = 700\text{ N} = 160\text{ lb}$$

La masa de un volumen igual de agua es

$$m_{\text{agua}} = \rho_{\text{agua}} V = (1000\text{ kg/m}^3)(60\text{ m}^3) = 6.0 \times 10^4\text{ kg}$$

El peso es

$$\begin{aligned} w_{\text{agua}} = m_{\text{agua}}\, g &= (6.0 \times 10^4\text{ kg})\,(9.8\text{ m/s}^2) \\ &= 5.9 \times 10^5\text{ N} = 1.3 \times 10^5\text{ lb} = 66\text{ toneladas} \end{aligned}$$

EVALUAR: ¡El aire contenido en un cuarto pesa aproximadamente lo que pesa una persona adulta! El agua es casi mil veces más densa que el aire, y su masa y peso son mayores en la misma proporción. De hecho, el peso de un cuarto lleno de agua seguramente hundiría el piso de una casa común.

Evalúe su comprensión de la sección 14.1 Clasifique los siguientes objetos en orden decreciente de su densidad media: i) masa 4.00 kg, volumen $1.60 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; ii) masa 8.00 kg, volumen $1.60 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; iii) masa 8.00 kg, volumen $3.20 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; iv) masa 2560 kg, volumen 0.640 m^3; v) masa 2560 kg, volumen 1.28 m^3.

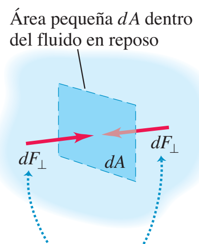


14.2 Presión en un fluido

Cuando un fluido (ya sea líquido o gas) está en reposo, ejerce una fuerza perpendicular a cualquier superficie en contacto con él, como la pared de un recipiente o un cuerpo sumergido en el fluido. Ésta es la fuerza que sentimos en las piernas al meterlas en una piscina. Aunque el fluido considerado como un todo está en reposo, las moléculas que lo componen están en movimiento; la fuerza ejercida por el fluido se debe a los choques de las moléculas con su entorno.

Si imaginamos una superficie *dentro* del fluido, el fluido a cada lado de ella ejerce fuerzas iguales y opuestas sobre la superficie. (De otra forma, la superficie se aceleraría y el fluido no permanecería en reposo.) Considere una superficie pequeña de área dA centrada en un punto en el fluido; la fuerza normal que el fluido ejerce sobre cada lado es $dF_{\perp}$ (figura 14.3). Definimos la **presión** p en ese punto como la fuerza normal por unidad de área, es decir, la razón entre $dF_{\perp}$ y dA (figura 14.4):

14.3 Las fuerzas actúan sobre una pequeña superficie dentro de un fluido en reposo.



$$p = \frac{dF_{\perp}}{dA} \qquad \text{(definición de presión)} \qquad (14.2)$$

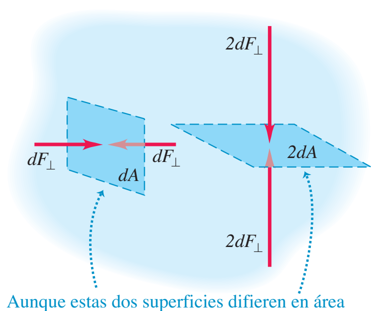
Si la presión es la misma en todos los puntos de una superficie plana finita de área A, entonces

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \qquad (14.3)$$

donde $F_{\perp}$ es la fuerza normal neta en un lado de la superficie. La unidad del SI para la presión es el **pascal**:

$$1\text{ pascal} = 1\text{ Pa} = \text{N/m}^2$$

14.4 La presión sobre cualquiera de los dos lados de una superficie es igual a la fuerza dividida entre el área. La presión es un escalar y sus unidades son newtons por metro cuadrado. En contraste, la fuerza es un vector y sus unidades son newtons.



Ya presentamos el pascal en el capítulo 11. Dos unidades relacionadas, que se emplean sobre todo en meteorología, son el *bar*, igual a 10^5 Pa, y el *milibar*, igual a 100 Pa.

La **presión atmosférica** p_{a} es la presión de la atmósfera terrestre, es decir, la presión en el fondo de este "mar" de aire en que vivimos. Esta presión varía con el estado del tiempo y con la altitud. La presión atmosférica normal al nivel del mar (valor medio) es 1 atmósfera (atm), definida exactamente como 101,325 Pa. Con cuatro cifras significativas,

$$\begin{aligned} (p_{\text{a}})_{\text{med}} &= 1\text{ atm} = 1.013 \times 10^5\text{ Pa} \\ &= 1.013\text{ bar} = 1013\text{ milibares} = 14.70\text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

CUIDADO **No confunda presión con fuerza** En el lenguaje cotidiano, las palabras "presión" y "fuerza" significan casi lo mismo, pero en la mecánica de fluidos describen cantidades distintas con características diferentes. La presión de fluidos actúa en forma perpendicular a cualquier superficie en el fluido, sin importar su orientación (figura 14.4). Por lo tanto, la presión no tiene una dirección intrínseca: es un escalar. En cambio, la fuerza es un vector con dirección definida. Recuerde que la presión es fuerza por unidad de área. Como muestra la figura 14.4, una superficie con el doble de área recibe el doble de fuerza ejercida por un fluido, por lo que la presión es igual.

Ejemplo 14.2 La fuerza del aire

En la estancia descrita en el ejemplo 14.1, ¿qué fuerza total descendente actúa sobre el piso debida a una presión del aire de 1.00 atm?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación entre la presión de un fluido (en este caso, el aire), la fuerza normal ejercida por el fluido y el área sobre la cual actúa esa fuerza. En tal situación, la superficie del piso es horizontal, de manera que la fuerza ejercida por el aire es vertical (hacia abajo).

PLANTEAR: La presión es uniforme, así que usamos la ecuación (14.3) para determinar la fuerza $F_{\perp}$ a partir de la presión y el área.

EJECUTAR: El área del piso es $A = (4.0\text{ m})(5.0\text{ m}) = 20\text{ m}^2$. De acuerdo con la ecuación (14.3), la fuerza total hacia abajo es

$$F_{\perp} = pA = (1.013 \times 10^5\text{ N/m}^2)(20\text{ m}^2)$$
$$= 2.0 \times 10^6\text{ N} = 4.6 \times 10^5\text{ lb} = 230\text{ toneladas}$$

EVALUAR: Al igual que en el ejemplo 14.1, esta fuerza basta para hundir el piso. ¿Por qué no lo hace? Porque hay una fuerza de igual magnitud *hacia arriba* en el lado de abajo del piso. Si la casa tiene sótano, esa fuerza es ejercida por el aire bajo el piso. En este caso, si despreciamos el espesor del piso, la fuerza *neta* debida a la presión del aire es cero.

Presión, profundidad y ley de Pascal

Si podemos despreciar el peso del fluido, la presión en un fluido es la misma en todo su volumen. Usamos esta aproximación al ver el esfuerzo y la deformación de volumen en la sección 11.4, pero muchas veces el peso del fluido *no* es despreciable. La presión atmosférica es menor a gran altitud que al nivel del mar, lo que obliga a presurizar la cabina de un avión que vuela a 35,000 pies. Al sumergirnos en agua profunda, los oídos nos indican que la presión aumenta rápidamente al aumentar la profundidad.

Podemos deducir una relación general entre la presión p en cualquier punto de un fluido en reposo y la altura y del punto. Supondremos que la densidad ρ y la aceleración debida a la gravedad g tienen el mismo valor en todo el fluido (es decir, la densidad es *uniforme*). Si el fluido está en equilibrio, cada elemento de volumen está en equilibrio. Considere un elemento delgado, de altura dy (figura 14.5a). Las superficies inferior y superior tienen área A, y están a distancias y y $y + dy$ por arriba de algún nivel de referencia donde $y = 0$. El volumen del elemento fluido es $dV = A\,dy$, su masa es $dm = \rho\,dV = \rho A\,dy$, y su peso es $dw = dm\,g = \rho g A\,dy$.

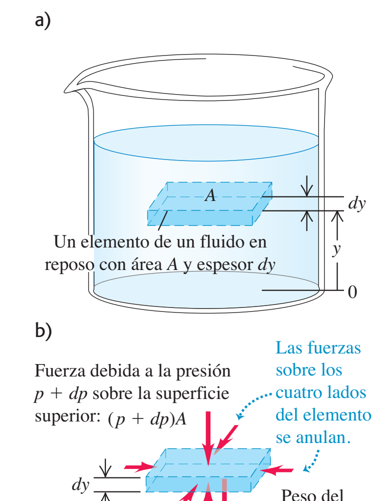
¿Qué otras fuerzas actúan sobre este elemento? (Véase la figura 14.5b.) Llamemos p a la presión en la superficie inferior; la componente y de fuerza total hacia arriba que actúa sobre esa superficie es pA. La presión en la superficie superior es $p + dp$, y la componente y de fuerza total (hacia abajo) sobre esta superficie es $-(p + dp)A$. El elemento de fluido está en equilibrio, así que la componente y de fuerza total, incluyendo el peso y las fuerzas en las superficies superior e inferior, debe ser cero:

$$\sum F_y = 0 \qquad \text{así que} \qquad pA - (p + dp)A - \rho g A\,dy = 0$$

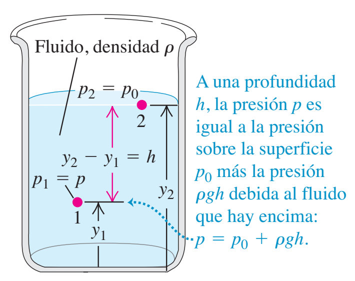
Dividiendo entre el área A y reordenando, obtenemos

$$\frac{dp}{dy} = -\rho g \tag{14.4}$$

14.5 Las fuerzas sobre un elemento de fluido en equilibrio.



14.6 Cómo varía la presión en función de la profundidad en un fluido con densidad uniforme.



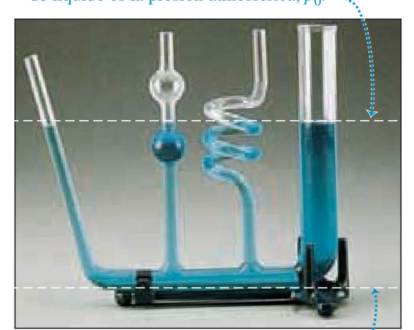
La diferencia de presión entre los niveles 1 y 2:

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$$

La presión es mayor en un nivel más bajo.

14.7 Todas las columnas de fluido tienen la misma altura, sin importar cuál sea su forma.

La presión en la parte superior de cada columna de líquido es la presión atmosférica, p_0.

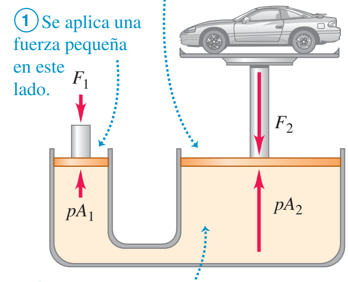


La presión en la parte inferior de cada columna de líquido tiene la misma presión p.

La diferencia entre p y p_0 es ρgh, donde h es la distancia que hay de la parte superior a la parte inferior de la columna de líquido. Por lo tanto, todas las columnas tienen la misma altura.

14.8 El elevador hidráulico es una aplicación de la ley de Pascal. El tamaño del recipiente lleno de fluido se ha exagerado por claridad.

③ Al actuar sobre un pistón con una mayor área, la presión produce una fuerza capaz de sostener el automóvil.



② La presión p tiene el mismo valor en todos los puntos a la misma altura en el fluido (ley de Pascal).

Esta ecuación indica que si y aumenta, p disminuye; es decir, conforme se sube por el fluido, la presión disminuye, como esperaríamos. Si p_1 y p_2 son las presiones en las alturas y_1 y y_2 respectivamente, y si ρ y g son constantes, entonces

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad \text{(presión en un fluido de densidad uniforme)} \tag{14.5}$$

Suele ser útil expresar la ecuación (14.5) en términos de la *profundidad* bajo la superficie de un fluido (figura 14.6). Tomemos el punto 1 en cualquier nivel en el fluido y sea p la presión en ese punto. Tomemos el punto 2 en la *superficie* del fluido, donde la presión es p_0 (el subíndice indica profundidad cero). La profundidad del punto 1 bajo la superficie es $h = y_2 - y_1$, y la ecuación (14.5) se convierte en

$$p_0 - p = -\rho g(y_2 - y_1) = -\rho gh \qquad \text{o bien,}$$

$$p = p_0 + \rho gh \qquad \text{(presión en un fluido de densidad uniforme)} \tag{14.6}$$

La presión p a una profundidad h es mayor que la presión p_0 en la superficie, en una cantidad ρgh. Observe que la presión es la misma en dos puntos cualesquiera situados en el mismo nivel en el fluido. La *forma* del recipiente no importa (figura 14.7).

La ecuación (14.6) nos dice que si aumentamos la presión p_0 en la superficie, tal vez usando un pistón que embona herméticamente en el recipiente para empujar contra la superficie del fluido, la presión p a cualquier profundidad aumenta exactamente en la misma cantidad. El científico francés Blaise Pascal (1623-1662) reconoció este hecho en 1653 y lo enunció en la llamada *ley de Pascal*.

Ley de Pascal: la presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las partes del fluido y las paredes del recipiente.

El elevador hidráulico que se representa en la figura 14.8 ilustra la ley de Pascal. Un pistón con área transversal pequeña A_1 ejerce una fuerza F_1 sobre la superficie de un líquido (aceite). La presión aplicada $p = F_1/A_1$ se transmite a través del tubo conector a un pistón mayor de área A_2. La presión aplicada es la misma en ambos cilindros, así que

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad \text{y} \qquad F_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1 \tag{14.7}$$

El elevador hidráulico es un dispositivo multiplicador de la fuerza con un factor de multiplicación igual al cociente de las áreas de los pistones. Las sillas de los dentistas, los gatos hidráulicos para autos, muchos elevadores y los frenos hidráulicos se basan en este principio.

En el caso de los gases, el supuesto de que la densidad ρ es uniforme sólo es realista en distancias verticales cortas. En un cuarto de 3.0 m de altura lleno de aire con densidad uniforme de 1.2 kg/m^3, la diferencia de presión entre el piso y el techo, dada por la ecuación (14.6), es

$$\rho gh = (1.2 \text{ kg/m}^3)(9.8 \text{ m/s}^2)(3.0 \text{ m}) = 35 \text{ Pa}$$

es decir, cerca de 0.00035 atm, una diferencia muy pequeña. En cambio, entre el nivel del mar y la cumbre del Monte Everest (8882 m) la densidad del aire cambia casi en un factor de 3, y en este caso no podemos usar la ecuación (14.6). Los líquidos, en cambio, son casi incompresibles, y suele ser una buena aproximación considerar su densidad como independiente de la presión. Una presión de varios cientos de atmósferas sólo causa un pequeño incremento porcentual en la densidad de la mayoría de los líquidos.

Presión absoluta y presión manométrica

Si la presión dentro de un neumático es igual a la presión atmosférica, el neumático estará desinflado. La presión debe ser *mayor* que la atmosférica para poder sostener el vehículo, así que la cantidad significativa es la *diferencia* entre las presiones interior y exterior. Cuando decimos que la presión de un neumático es de "32 libras" (en realidad 32 lb/in^2, igual a 220 kPa o 2.2×10^5 Pa), queremos decir que es *mayor* que la

presión atmosférica (14.7 lb/in^2 o 1.01×10^5 Pa) en esa cantidad. La presión *total* en el neumático es de 47 lb/in^2, o 320 kPa. El exceso de presión más allá de la atmosférica suele llamarse **presión manométrica**, y la presión total se llama **presión absoluta**. Los ingenieros usan las abreviaturas psig y psia para "lb/in^2 manométrica" y "lb/in^2 absoluta", respectivamente. Si la presión es *menor* que la atmosférica, como en un vacío parcial, la presión manométrica es negativa.

Ejemplo 14.3 Determinación de las presiones absoluta y manométrica

Un tanque de almacenamiento de 12.0 m de profundidad está lleno de agua. La parte superior del tanque está abierto al aire. ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tanque? ¿Y la presión manométrica?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El agua es casi incompresible. (Imagine que trata de comprimir con un pistón un cilindro lleno de agua. ¡No podría hacerlo!) Por lo tanto, consideramos que el fluido tiene densidad uniforme.

PLANTEAR: El nivel de la parte superior del tanque corresponde al punto 2 de la figura 14.6, y el nivel del fondo del tanque corresponde al punto 1. Por lo tanto, la incógnita es p en la ecuación (14.6); nos indican que $h = 12.0$ m y, como el tanque está abierto a la atmósfera, p_0 es igual a 1 atm $= 1.01 \times 10^{-5}$ Pa.

EJECUTAR: De acuerdo con la ecuación (14.6), la presión absoluta es

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \rho g h \\ &= (1.01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (1000 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(12.0 \text{ m}) \\ &= 2.19 \times 10^5 \text{ Pa} = 2.16 \text{ atm} = 31.8 \text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

La presión manométrica es

$$\begin{aligned} p - p_0 &= (2.19 - 1.01) \times 10^5 \text{ Pa} \\ &= 1.18 \times 10^5 \text{ Pa} = 1.16 \text{ atm} = 17.1 \text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

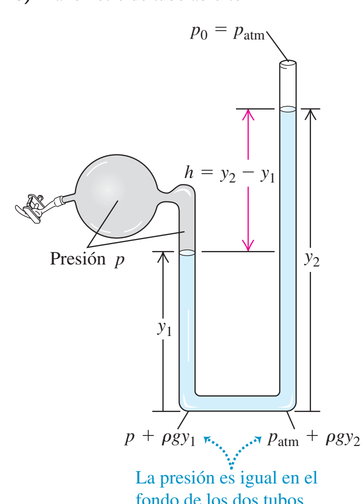
EVALUAR: Si un tanque así tiene un medidor de presión, seguramente estará calibrado para indicar la presión manométrica, no la presión absoluta. Como señalamos, la variación en la presión *atmosférica* a una altura de unos cuantos metros es despreciable.

Medidores de presión

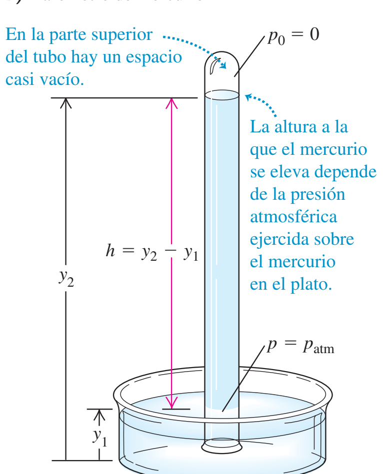
El medidor de presión más sencillo es el *manómetro* de tubo abierto (figura 14.9a). El tubo en forma de U contiene un líquido de densidad ρ, con frecuencia mercurio o agua. El extremo izquierdo del tubo se conecta al recipiente donde se medirá la presión p, y el extremo derecho está abierto a la atmósfera, con $p_0 = p_{atm}$. La presión en el fondo del tubo debida al fluido de la columna izquierda es $p + \rho g y_1$, y la debida al fluido de la columna derecha es $p_{atm} + \rho g y_2$. Estas presiones se miden en el mismo punto, así que deben ser iguales:

$$\begin{aligned} p + \rho g y_1 &= p_{atm} + \rho g y_2 \\ p - p_{atm} &= \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h \end{aligned} \quad (14.8)$$

a) Manómetro de tubo abierto



b) Barómetro de mercurio



14.9 Dos tipos de medidores de presión.

En la ecuación (14.8), p es la *presión absoluta*, y la diferencia $p - p_{atm}$ entre la presión absoluta y la atmosférica es la presión manométrica. Así, la presión manométrica es proporcional a la diferencia de altura $h = y_2 - y_1$ de las columnas de líquido.

Otro medidor de presión común es el **barómetro de mercurio**, que consiste en un largo tubo de vidrio, cerrado por un extremo, que se llena con mercurio y luego se invierte sobre un plato con mercurio (figura 14.9b). El espacio arriba de la columna sólo contiene vapor de mercurio, cuya presión es insignificante, así que la presión p_0 arriba de la columna es prácticamente cero. De acuerdo con la ecuación (14.6),

$$p_a = p = 0 + \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h \quad (14.9)$$

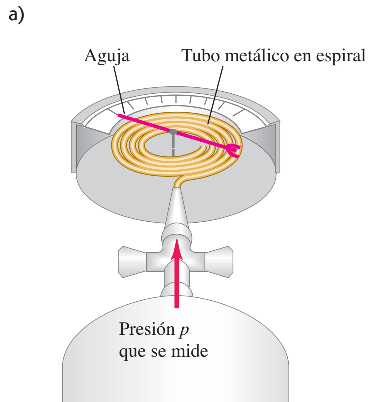
Así, el barómetro de mercurio indica la presión atmosférica p_{atm} directamente por la altura de la columna de mercurio.

Las presiones a menudo se describen en términos de la altura de la columna de mercurio correspondiente, como "pulgadas de mercurio" o "milímetros de mercurio" (que se abrevia mm Hg). Una presión de 1 mm Hg es 1 *torr*, en honor a Evangelista Torricelli, inventor del barómetro de mercurio. Sin embargo, estas unidades dependen de la densidad del mercurio, que varía con la temperatura, y del valor de g, que varía con el lugar, y por ello se prefiere el pascal como unidad de presión.

Un dispositivo común para medir la presión arterial, llamado *esfigmomanómetro*, usa un manómetro lleno de mercurio. Las lecturas de la presión arterial, como 130/80, se refieren a las presiones manométricas máxima y mínima en las arterias, medidas en mm Hg o torr. La presión arterial varía con la altura en el cuerpo; el punto de referencia estándar es la parte superior del brazo, a la altura del corazón.

Muchos tipos de medidores de presión usan un recipiente flexible sellado (figura 14.10). Un cambio en la presión adentro o afuera del recipiente provoca un cambio en sus dimensiones, que se detecta óptica, eléctrica o mecánicamente.

a)



b)



14.10 a) Medidor de presión de Bourdon. Al aumentar la presión dentro del tubo metálico en forma de espiral, éste se endereza y desvía la aguja unida a él. b) Medidor de presión tipo Bourdon empleado en un tanque de gas comprimido.

Ejemplo 14.4 Historia de dos fluidos

Un tubo de manómetro se llena parcialmente con agua. Después se vierte aceite (que no se mezcla con el agua y tiene menor densidad que el agua) en el brazo izquierdo del tubo hasta que la interfaz aceite-agua está en el punto medio del tubo. Ambos brazos del tubo están abiertos al aire. Determine la relación entre las alturas h_{aceite} y h_{agua}.

SOLUCIÓN

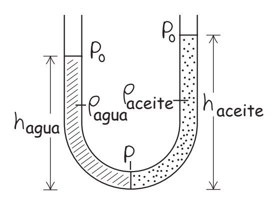
IDENTIFICAR: La relación entre presión y profundidad en un fluido sólo es válida para los fluidos de densidad uniforme. Por lo tanto, no podemos escribir una sola ecuación para el aceite y el agua juntos. Lo que sí podemos hacer es escribir una relación presión-profundidad para cada fluido por separado. Advierta que ambas columnas de fluido tienen la misma presión en la base (donde están en contacto y en equilibrio, así que las presiones deben ser iguales) y en la parte superior (donde ambas están en contacto con la atmósfera y en equilibrio con ella).

PLANTEAR: La figura 14.11 ilustra la situación. Sea p_0 la presión atmosférica, y p la presión en el fondo del tubo. Las densidades de los dos fluidos son ρ_{agua} y ρ_{aceite} (que es menor que ρ_{agua}). Usamos la ecuación (14.6) para cada fluido.

EJECUTAR: Para los dos fluidos, la ecuación (14.6) se convierte en

$$p = p_0 + \rho_{agua} g h_{agua}$$
$$p = p_0 + \rho_{aceite} g h_{aceite}$$

14.11 Nuestro esquema para este problema.



Puesto que la presión p en la base del tubo es la misma para ambos fluidos, igualamos las dos expresiones y despejamos h_{aceite} en términos de h_{agua}. Puede demostrarse que el resultado es

$$h_{aceite} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{aceite}} h_{agua}$$

EVALUAR: Puesto que el aceite es menos denso que el agua, la razón $\rho_{agua}/\rho_{aceite}$ es mayor que la unidad y h_{aceite} es mayor que h_{agua} (como se observa en la figura 14.11). Es decir, se necesita una mayor altura de aceite menos denso para producir la misma presión p en la base del tubo.

Evalúe su comprensión de la sección 4.2 El mercurio es menos denso a altas temperaturas que a bajas temperaturas. Suponga que saca al exterior un barómetro de mercurio que estaba dentro de un refrigerador bien sellado, en un caluroso día de verano, y observa que la columna de mercurio se mantiene a la misma altura en el tubo. En comparación con la presión del aire en el interior del refrigerador, la presión del aire en el exterior es i) mayor, ii) menor o iii) igual. (Ignore el pequeño cambio en las dimensiones del tubo de vidrio debido al cambio de temperatura.)

14.3 Flotación

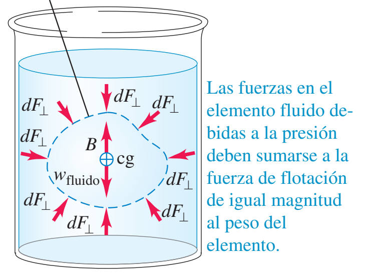
La **flotación** es un fenómeno muy conocido: un cuerpo sumergido en agua parece pesar menos que en el aire. Si el cuerpo es menos denso que el fluido, entonces flota. El cuerpo humano normalmente flota en el agua, y un globo lleno de helio flota en el aire.

El principio de Arquímedes establece lo siguiente: si un cuerpo está parcial o totalmente sumergido en un fluido, éste ejerce una fuerza hacia arriba sobre el cuerpo igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo.

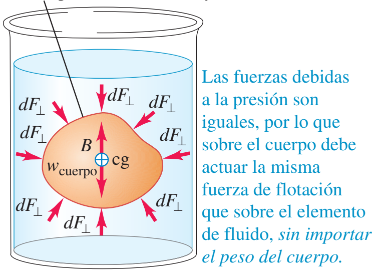
Para demostrar este principio, consideremos una porción arbitraria de fluido en reposo. En la figura 14.12a, el contorno irregular es la superficie que delimita esta porción de fluido. Las flechas representan las fuerzas que el fluido circundante ejerce sobre la superficie de frontera.

Todo el fluido está en equilibrio, así que la suma de todas las componentes y de fuerza sobre esta porción de fluido es cero. Por lo tanto, la suma de todas las componentes y de las fuerzas de *superficie* debe ser una fuerza hacia arriba de igual magnitud que el peso mg del fluido dentro de la superficie. Además, la suma de las torcas sobre la porción de fluido debe ser cero, así que la línea de acción de la componente y resultante de las fuerzas superficiales debe pasar por el centro de gravedad de esta porción de fluido.

a) Elemento arbitrario de un fluido en equilibrio

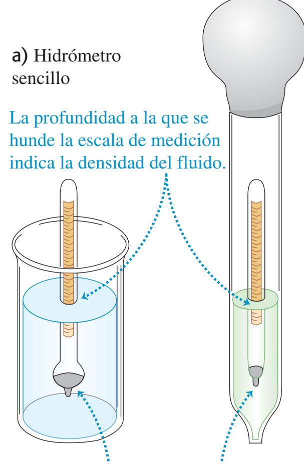


b) El elemento del fluido se sustituye por un cuerpo sólido de forma y tamaño idénticos



14.12 Principio de Arquímedes.

14.13 Medición de la densidad de un fluido.



Ahora retiramos el fluido que está dentro de la superficie y lo sustituimos por un cuerpo sólido cuya forma es idéntica (figura 14.12b). La presión en cada punto es exactamente la misma que antes, de manera que la fuerza total hacia arriba ejercida por el fluido sobre el cuerpo también es la misma, igual en magnitud al peso mg del fluido que se desplazó para colocar el cuerpo. Llamamos a esta fuerza ascendente la **fuerza de flotación** que actúa sobre el cuerpo sólido. La línea de acción de la fuerza de flotación pasa por el centro de gravedad del fluido desplazado (que no necesariamente coincide con el centro de gravedad del cuerpo).

Si un globo flota en equilibrio en el aire, su peso (incluido el gas en su interior) debe ser igual al del aire desplazado por el globo. La carne de un pez es más densa que el agua; sin embargo, el pez puede flotar mientras está sumergido porque tiene una cavidad llena de gas dentro de su cuerpo. Esto hace que la densidad *media* del pez sea igual a la del agua, de manera que su peso neto es igual al peso del agua que desplaza. Un cuerpo cuya densidad media es *menor* que la de un líquido puede flotar parcialmente sumergido en la superficie superior libre del líquido. Cuanto mayor es la densidad del líquido menor será la porción sumergida del cuerpo. Si nadamos en agua de mar (densidad 1030 kg/m^3), flotamos más que en agua dulce (1000 kg/m^3).

Otro ejemplo conocido es el hidrómetro, empleado para medir la densidad de los líquidos (figura 14.13a). El flotador calibrado se hunde en el fluido hasta que el peso del fluido que desplaza es exactamente igual a su propio peso. El hidrómetro flota *más alto* en los líquidos más densos que en los líquidos menos densos, y tiene una escala en el tallo superior que permite leer directamente la densidad. La figura 14.13b ilustra un tipo de hidrómetro de uso común para medir la densidad del ácido de un acumulador o del anticongelante. La base del tubo grande se sumerge en el líquido; se aprieta el bulbo para expulsar el aire y luego se suelta, como si fuera un gotero gigante. El líquido sube por el tubo exterior, y el hidrómetro flota en la muestra de líquido.

Ejemplo 14.5 Flotación

Una estatua de oro sólido de 15.0 kg de peso está siendo levantada de un barco hundido (figura 14.14a). ¿Qué tensión hay en el cable cuando la estatua está *a*) en reposo y totalmente sumergida, y *b*) en reposo y fuera del agua?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Cuando la estatua está sumergida, experimenta una fuerza de flotación hacia arriba igual en magnitud al peso del fluido desplazado. Para calcular la tensión, observamos que la estatua está en equilibrio (en reposo) y consideramos las tres fuerzas que actúan sobre ella: su peso, la fuerza de flotación y la tensión en el cable.

PLANTEAR: La figura 14.14b ilustra el diagrama de cuerpo libre de la estatua en equilibrio. La incógnita es la tensión T. Nos dan el peso mg y podemos calcular la fuerza de flotación B usando el principio de Arquímedes. Haremos esto para dos casos: *a*) cuando la estatua está sumergida en el agua y *b*) cuando está fuera del agua e inmersa en el aire.

EJECUTAR: *a*) Para calcular la fuerza de flotación, primero calculamos el volumen de la estatua usando la densidad del oro de la tabla 14.1:

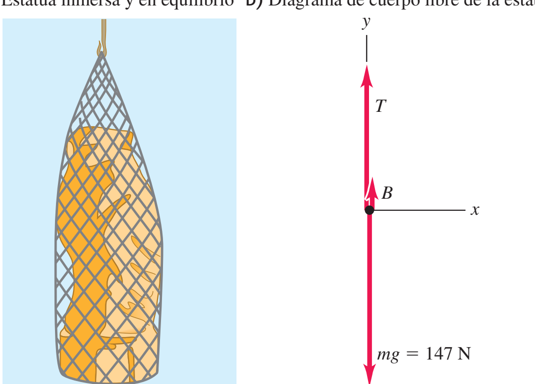
$$V = \frac{m}{\rho_{\text{oro}}} = \frac{15.0\text{ kg}}{19.3 \times 10^3\text{ kg/m}^3} = 7.77 \times 10^{-4}\text{ m}^3$$

Usando otra vez la tabla 14.1, calculamos el peso de ese volumen de agua de mar:

$$\begin{aligned} w_{\text{am}} &= m_{\text{am}}g = \rho_{\text{am}}Vg \\ &= (1.03 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4}\text{ m}^3)(9.80\text{ m/s}^2) \\ &= 7.84\text{ N} \end{aligned}$$

Esto es igual a la fuerza de flotación B.

14.14 ¿Cuál es la tensión en el cable que levanta la estatua?



La estatua está en reposo, así que la fuerza externa neta que actúa sobre ella es igual a cero. De acuerdo con la figura 14.14b,

$$\begin{aligned} \sum F_y &= B + T + (-mg) = 0 \\ T &= mg - B = (15.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) - 7.84\text{ N} \\ &= 147\text{ N} - 7.84\text{ N} = 139\text{ N} \end{aligned}$$

Si hay una balanza de resorte unida al extremo superior del cable, marcará 7.84 N menos de lo que marcaría si la estatua no estuviera sumergida en agua de mar. Por ello, la estatua sumergida parece pesar 139 N, cerca del 5% menos que su peso real de 147 N.

b) La densidad del aire es de cerca de 1.2 kg/m^3, así que la fuerza de flotación del aire sobre la estatua es

$$B = \rho_{\text{aire}} V g = (1.2\ \text{kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(9.80\ \text{m/s}^2)$$
$$= 9.1 \times 10^{-3}\ \text{N}$$

Esto es sólo 62 millonésimas del peso real de la estatua. Este efecto es menor que la precisión de nuestros datos, así que lo despreciamos. Por lo tanto, la tensión en el cable con la estatua en el aire es igual al peso de la estatua, 147 N.

EVALUAR: Advierta que la fuerza de flotación es proporcional a la densidad del *fluido*, no a la densidad de la estatua. Cuanto más denso es el fluido, mayor será la fuerza de flotación y menor será la tensión en el cable. Si el fluido tuviera la misma densidad que la estatua, la fuerza de flotación sería igual al peso de la estatua y la tensión sería cero (el cable se aflojaría). Si el fluido fuera más denso que la estatua, la tensión sería *negativa*: la fuerza de flotación sería mayor que el peso de la estatua, y se requeriría una fuerza hacia abajo para evitar que la estatua se elevara.

Tensión superficial

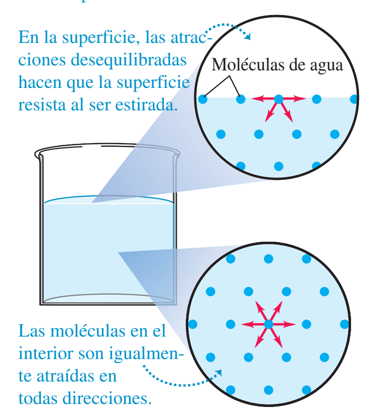
Un objeto menos denso que el agua, como una pelota de playa inflada con aire, flota con una parte de su volumen bajo la superficie. Por otra parte, un *clip* puede descansar *sobre* una superficie de agua aunque su densidad es varias veces mayor que la del agua. Esto es un ejemplo de **tensión superficial**: la superficie del líquido se comporta como una membrana en tensión (figura 14.15). La tensión superficial se debe a que las moléculas del líquido ejercen fuerzas de atracción entre sí. La fuerza neta sobre una molécula dentro del volumen del líquido es cero, pero una molécula en la superficie es atraída hacia el volumen (figura 14.16). Por esa razón, el líquido tiende a reducir al mínimo su área superficial, tal como lo hace una membrana estirada.

La tensión superficial explica por qué las gotas de lluvia en caída libre son esféricas (*no* con forma de lágrima): una esfera tiene menor área superficial para un volumen dado que cualquier otra forma. También explica por qué se usa agua jabonosa caliente en el lavado de la ropa. Para lavarla bien, se debe hacer pasar el agua por los diminutos espacios entre las fibras (figura 14.17). Esto implica aumentar el área superficial del agua, lo que es difícil por la tensión superficial. La tarea se facilita aumentando la temperatura del agua y añadiendo jabón, pues ambas cosas reducen la tensión superficial.

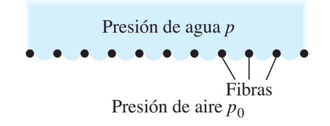
La tensión superficial es importante para una gota de agua de 1 mm de diámetro, que tiene un área relativamente grande en comparación con su volumen. (Una esfera de radio r tiene área $4\pi r^2$ y volumen $(4\pi/3)r^3$. La razón entre la superficie y el área es $3/r$, y aumenta al disminuir el radio.) En cambio, si la cantidad de líquido es grande, la razón entre superficie y volumen es relativamente pequeña y la tensión superficial es insignificante en comparación con las fuerzas de presión. En el resto del capítulo, sólo consideraremos volúmenes grandes de fluidos, así que ignoraremos los efectos de la tensión superficial.



14.15 La superficie del agua actúa como membrana sometida a tensión, y permite a este insecto tejedor o zapatero de agua caminar literalmente sobre el agua.



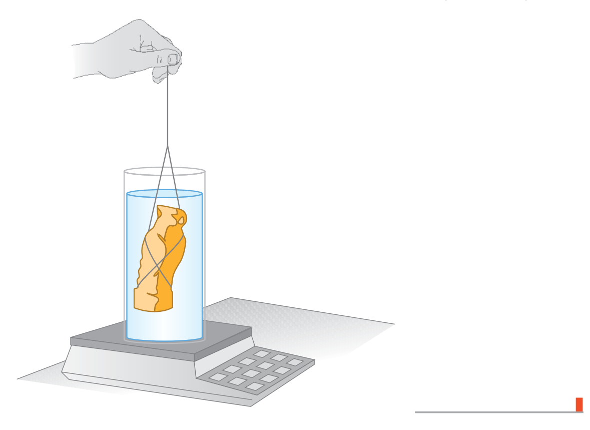
14.16 Una molécula en la superficie es atraída hacia el volumen del líquido, y esto tiende a reducir el área superficial del líquido.



14.17 La tensión superficial dificulta el paso del agua por aberturas pequeñas. La presión requerida p del agua puede reducirse usando agua caliente con jabón, lo que reduce la tensión superficial.

Evalúe su comprensión de la sección 14.3 Usted coloca un recipiente con agua de mar sobre una báscula y toma nota de la lectura que indica la báscula. Ahora usted suspende la estatua del ejemplo 14.5 en el agua (figura 14.18). ¿Cómo cambia la lectura de la báscula? i) Se incrementa en 7.84 N; ii) disminuye en 7.84 N; iii) permanece igual; iv) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

14.18 ¿Cómo cambia la lectura de la báscula cuando la estatua se sumerge en el agua?

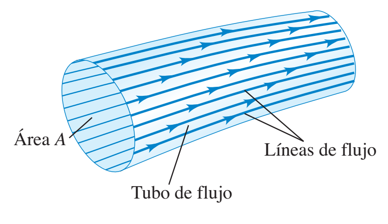


14.4 Flujo de fluido

Ahora ya estamos preparados para considerar el *movimiento* de un fluido. El flujo de fluidos suele ser extremadamente complejo, como se aprecia en las corrientes de los rápidos de los ríos o en las flamas de una fogata, pero algunas situaciones se pueden representar con modelos idealizados relativamente simples. Un **fluido ideal** es *incompresible* (su densidad no puede cambiar) y no tiene fricción interna (llamada **viscosidad**). Los líquidos son aproximadamente incompresibles en casi todas las situaciones, y también podemos tratar un gas como incompresible si las diferencias de presión de una región a otra no son muy grandes. La fricción interna en un fluido causa esfuerzos de corte cuando dos capas adyacentes de fluido se mueven una en relación con la otra, como cuando un fluido fluye dentro de un tubo o alrededor de un obstáculo. En algunos casos, podemos despreciar estas fuerzas de corte en comparación con las fuerzas debidas a la gravedad y a diferencias de presión.

El trayecto de una partícula individual en un fluido en movimiento se llama **línea de flujo**. Si el patrón global de flujo no cambia con el tiempo, entonces tenemos un **flujo estable**. En un flujo estable, cada elemento que pasa por un punto dado sigue la misma línea de flujo. En este caso, el "mapa" de las velocidades del fluido en distintos puntos del espacio permanece constante, aunque la velocidad de una partícula específica pueda cambiar tanto en magnitud como en dirección durante su movimiento. Una **línea de corriente** es una curva cuya tangente en cualquier punto tiene la dirección de la velocidad del fluido en ese punto. Si el patrón de flujo cambia con el tiempo, las líneas de corriente no coinciden con las de flujo. Consideraremos sólo situaciones de flujo estable, en las que las líneas de flujo y las de corriente son idénticas.

14.19 Tubo de flujo delimitado por líneas de flujo. En flujo estable, el fluido no puede cruzar las paredes de un tubo de flujo.



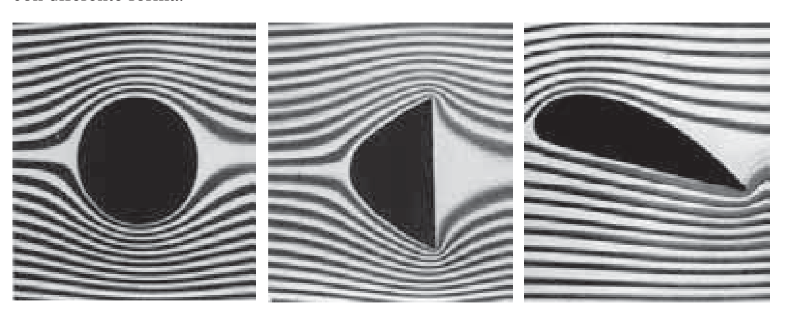
Las líneas de flujo que pasan por el borde de un elemento de área imaginario, como el área A en la figura 14.19, forman un tubo llamado **tubo de flujo**. De acuerdo con la definición de línea de flujo, si el flujo es estable, el fluido no puede cruzar las paredes laterales de un tubo de flujo; los fluidos de diferentes tubos de flujo no pueden mezclarse.

La figura 14.20 ilustra patrones de flujo de fluidos de izquierda a derecha alrededor de varios obstáculos. Las fotografías se tomaron inyectando un tinte en el agua que fluye entre dos placas de vidrio cercanas. Estos patrones son representativos del **flujo laminar**, en el que capas adyacentes de fluido se deslizan suavemente una sobre otra, y el flujo es estable. (Una *lámina* es una hoja delgada.) Si la tasa de flujo es suficientemente alta, o si las superficies de frontera causan cambios abruptos en la velocidad, el flujo puede volverse irregular y caótico. Esto se llama **flujo turbulento** (figura 14.21). En flujo turbulento no hay un patrón de estado estable; el patrón de flujo cambia continuamente.

La ecuación de continuidad

La masa de un fluido en movimiento no cambia al fluir. Esto conduce a una relación cuantitativa importante llamada **ecuación de continuidad**. Considere una porción de un tubo de flujo entre dos secciones transversales estacionarias con áreas A_1 y A_2 (fi-

14.20 Flujo laminar alrededor de obstáculos con diferente forma.



14.21 El flujo de humo que sale de estas varas de incienso es laminar hasta cierto punto; luego se vuelve turbulento.

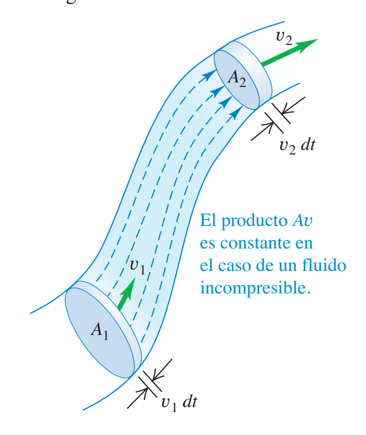


gura 14.22). Los valores de la rapidez del fluido en estas secciones son v_1 y v_2, respectivamente. No fluye fluido a través de los costados del tubo porque la velocidad del fluido es tangente a la pared en todos sus puntos. Durante un breve intervalo de tiempo dt, el fluido en A_1 se mueve una distancia $v_1\,dt$, así que un cilindro de fluido de altura $v_1\,dt$ y volumen $dV_1 = A_1v_1\,dt$ fluye hacia el tubo a través de A_1. Durante ese mismo lapso, un cilindro de volumen $dV_2 = A_2v_2\,dt$ sale del tubo a través de A_2.

Consideremos primero el caso de un fluido incompresible cuya densidad ρ tiene el mismo valor en todos los puntos. La masa dm_1 que fluye al tubo por A_1 en el tiempo dt es $dm_1 = \rho A_1v_1\,dt$. De manera similar, la masa dm_2 que sale por A_2 en el mismo tiempo es $dm_2 = \rho A_2v_2\,dt$. En flujo estable, la masa total en el tubo es constante, así que $dm_1 = dm_2$ y

$$\rho A_1v_1\,dt = \rho A_2v_2\,dt \qquad \text{o bien,}$$

$$A_1v_1 = A_2v_2 \qquad \text{(ecuación de continuidad, fluido incompresible)} \qquad (14.10)$$



14.22 Tubo de flujo con área de sección transversal cambiante. Si el fluido es incompresible, el producto Av tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo del tubo.

El producto Av es la *tasa de flujo de volumen* dV/dt, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo:

$$\frac{dV}{dt} = Av \qquad \text{(tasa de flujo de volumen)} \qquad (14.11)$$

La tasa de flujo de *masa* es el flujo de masa por unidad de tiempo a través de una sección transversal, y es igual a la densidad ρ multiplicada por la tasa de flujo de volumen dV/dt.

La ecuación (14.10) indica que la tasa de flujo de volumen tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de cualquier tubo de flujo. Si la sección transversal de un tubo de flujo disminuye, la rapidez aumenta, y viceversa. La parte profunda de un río tiene mayor área transversal y una corriente más lenta que la parte superficial, pero las tasas de flujo de volumen son iguales en los dos puntos. El chorro de agua que sale de un grifo se adelgaza al adquirir rapidez durante su caída, pero dV/dt tiene el mismo valor en todo el chorro. Si un tubo de agua de 2 cm de diámetro se conecta a un tubo de 1 cm de diámetro, la rapidez de flujo es cuatro veces más grande en el segundo tubo que en el primero.

Podemos generalizar la ecuación (14.10) para el caso en que el fluido *no* es incompresible. Si ρ_1 y ρ_2 son las densidades en las secciones 1 y 2, entonces

$$\rho_1A_1v_1 = \rho_2A_2v_2 \qquad \text{(ecuación de continuidad, fluido compresible)} \qquad (14.12)$$

Si el fluido es más denso en el punto 2 que en el punto 1 ($\rho_1 > \rho_2$), la tasa de flujo de volumen en el punto 2 será menor que en el punto 1 ($A_2v_2 < A_1v_1$). Dejamos los detalles al lector (véase el ejercicio 14.38). Si el fluido es incompresible, de manera que ρ_1 y ρ_2 siempre son iguales, la ecuación (14.12) se reduce a la ecuación (14.10).

Ejemplo 14.6 Flujo de fluido incompresible

Como parte de un sistema de lubricación para maquinaria pesada, un aceite con densidad de 850 kg/m^3 se bombea a través de un tubo cilíndrico de 8.0 cm de diámetro a razón de 9.5 litros por segundo. *a*) Calcule la rapidez del aceite y la tasa de flujo de masa. *b*) Si el diámetro del tubo se reduce a 4.0 cm, ¿qué nuevos valores tendrán la rapidez y la tasa de flujo de volumen? Suponga que el aceite es incompresible.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El punto clave es que el fluido es incompresible, de manera que podemos basarnos en la ecuación de continuidad para relacionar la tasa de flujo de masa, la tasa de flujo de volumen, el área del tubo de flujo y la rapidez de flujo.

PLANTEAR: Usaremos la definición de tasa de flujo de volumen, ecuación (14.11), para determinar la rapidez v_1 en la sección de 8.0 cm de diámetro. La tasa de flujo de masa es el producto de la densidad y la tasa de flujo de volumen. La ecuación de continuidad para flujo incompresible, ecuación (14.10), nos permite obtener la rapidez v_2 en la sección de 4.0 cm de diámetro.

EJECUTAR: *a*) La tasa de flujo de volumen dV/dt es igual al producto A_1v_1, donde A_1 es el área de sección transversal del tubo de 8.0 cm de diámetro (y radio de 4.0 cm). Por lo tanto,

$$v_1 = \frac{dV/dt}{A_1} = \frac{(9.5\ \text{L/s})(10^{-3}\ \text{m}^3/\text{L})}{\pi(4.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2} = 1.9\ \text{m/s}$$

continúa

La tasa de flujo de masa es $\rho\, dV/dt = (850\ \text{kg/m}^3)(9.5 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}) = 8.1\ \text{kg/s}$.

b) Puesto que el aceite es incompresible, la tasa de flujo de volumen tiene el *mismo* valor (9.5 L/s) en ambas secciones del tubo. De acuerdo con la ecuación (14.10),

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{\pi(4.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}{\pi(2.0 \times 10^{-2}\ \text{m})^2}(1.9\ \text{m/s}) = 7.6\ \text{m/s}$$

EVALUAR: La segunda sección de tubo tiene la mitad del diámetro y la cuarta parte del área transversal de la primera sección. Por consiguiente, la rapidez debe ser cuatro veces mayor en la segunda sección, y eso es precisamente lo que indica nuestro resultado ($v_2 = 4v_1$).

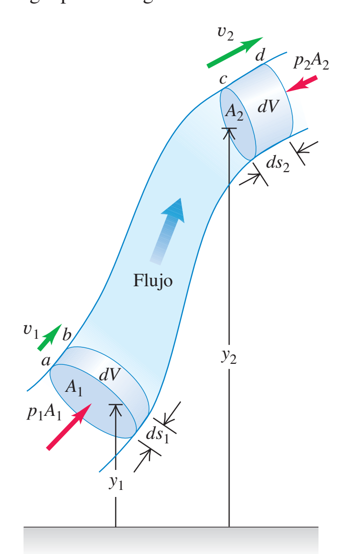
Evalúe su comprensión de la sección 14.4 Una cuadrilla de mantenimiento está trabajando en una sección de una carretera de tres carriles, dejando un solo carril abierto al tránsito. El resultado es un flujo de tránsito mucho más lento (un embotellamiento). ¿Los automóviles en la carretera se comportan como i) moléculas de un fluido incompresible o ii) moléculas de un fluido compresible?

14.5 Ecuación de Bernoulli

Según la ecuación de continuidad, la rapidez de flujo de un fluido puede variar a lo largo de las trayectorias del fluido. La presión también puede variar; depende de la altura, al igual que en la situación estática (sección 14.2) y también de la rapidez de flujo. Podemos deducir una relación importante, llamada *ecuación de Bernoulli*, que relaciona la presión, la rapidez de flujo y la altura para el flujo de un fluido ideal. La ecuación de Bernoulli es una herramienta indispensable para analizar los sistemas de plomería, las plantas hidroeléctricas y el vuelo de los aviones.

La dependencia de la presión con respecto a la rapidez se deduce de la ecuación de continuidad, ecuación (14.10). Si un fluido incompresible fluye por un tubo con sección transversal variable, su rapidez *debe* cambiar, así que un elemento de fluido debe tener una aceleración. Si el tubo es horizontal, la fuerza que causa esta aceleración debe ser aplicada por el fluido circundante. Esto implica que la presión *debe* ser diferente en regiones con diferente sección transversal; si fuera la misma en todos lados, la fuerza neta sobre cada elemento de fluido sería cero. Cuando un tubo horizontal se estrecha y un elemento de fluido se acelera, debe estarse moviendo hacia una región de menor presión para tener una fuerza neta hacia delante que lo acelere. Si la altura también cambia, esto provoca una diferencia de presión adicional.

14.23 Deducción de la ecuación de Bernoulli. El trabajo neto realizado sobre un elemento de fluido por la presión del fluido circundante es igual al cambio en la energía cinética más el cambio en la energía potencial gravitacional.



Deducción de la ecuación de Bernoulli

Para deducir la ecuación de Bernoulli, aplicamos el teorema del trabajo y la energía al fluido en una sección de un tubo de flujo. En la figura 14.23, consideramos el elemento de fluido que en algún instante inicial está entre las dos secciones transversales *a* y *c*. Los valores de la rapidez en los extremos inferior y superior son v_1 y v_2. En un pequeño intervalo de tiempo dt, el fluido que está en *a* se mueve a *b*, una distancia $ds_1 = v_1\, dt$, y el fluido que está inicialmente en *c* se mueve a *d*, una distancia $ds_2 = v_2\, dt$. Las áreas transversales en los dos extremos son A_1 y A_2, como se indica. El fluido es incompresible, así que, por la ecuación de continuidad [ecuación (14.10)], el volumen de fluido dV que pasa por *cualquier* sección transversal durante el tiempo dt es el mismo. Es decir, $dV = A_1\, ds_1 = A_2\, ds_2$.

Calculemos el *trabajo* efectuado sobre este elemento de fluido durante dt. Suponemos que la fricción interna del fluido es despreciable (es decir, no hay viscosidad), así que las únicas fuerzas no gravitacionales que efectúan trabajo sobre el elemento fluido se deben a la presión del fluido circundante. Las presiones en los dos extremos son p_1 y p_2; la fuerza sobre la sección transversal en *a* es p_1A_1, y la fuerza en *c* es p_2A_2. El trabajo neto dW efectuado sobre el elemento por el fluido circundante durante este desplazamiento es, por lo tanto,

$$dW = p_1A_1\, ds_1 - p_2A_2\, ds_2 = (p_1 - p_2)\, dV \tag{14.13}$$

El segundo término tiene signo negativo porque la fuerza en *c* se opone al desplazamiento del fluido.

El trabajo dW se debe a fuerzas distintas de la fuerza de gravedad conservadora, así que es igual al cambio en la energía mecánica total (energía cinética más energía potencial gravitacional) asociada al elemento fluido. La energía mecánica para el flui-

do entre las secciones b y c no cambia. Al principio de dt, el fluido entre a y b tiene volumen $A_1\,ds_1$, masa $\rho A_1\,ds_1$ y energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_1\,ds_1)v_1^2$. Al final de dt, el fluido entre c y d tiene energía cinética $\frac{1}{2}\rho(A_2\,ds_2)v_2^2$. El cambio neto de energía cinética dK durante dt es

$$dK = \frac{1}{2}\rho\,dV(v_2^2 - v_1^2) \tag{14.14}$$

¿Y qué hay del cambio en la energía potencial gravitacional? Al iniciar dt, la energía potencial para la masa que está entre a y b es $dm\,gy_1 = \rho\,dV\,gy_1$. Al final de dt, la energía potencial para la masa que está entre c y d es $dm\,gy_2 = \rho\,dV\,gy_2$. El cambio neto de energía potencial dU durante dt es

$$dU = \rho\,dV\,g(y_2 - y_1) \tag{14.15}$$

Combinando las ecuaciones (14.13), (14.14) y (14.15) en la ecuación de energía $dW = dK + dU$, obtenemos

$$\begin{aligned}(p_1 - p_2)\,dV &= \frac{1}{2}\rho\,dV(v_2^2 - v_1^2) + \rho\,dV\,g(y_2 - y_1)\\ p_1 - p_2 &= \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(y_2 - y_1)\end{aligned} \tag{14.16}$$

Ésta es la **ecuación de Bernoulli**, y dice que el trabajo efectuado sobre una unidad de volumen de fluido por el fluido circundante es igual a la suma de los cambios de las energías cinética y potencial por unidad de volumen que ocurren durante el flujo. También podemos interpretar la ecuación (14.16) en términos de presiones. El primer término de la derecha es la diferencia de presión asociada al cambio de rapidez del fluido; el segundo término a la derecha es la diferencia de presión adicional causada por el peso del fluido y la diferencia de altura de los dos extremos.

También podemos expresar la ecuación (14.16) en una forma más práctica:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \text{(ecuación de Bernoulli)} \tag{14.17}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a dos puntos *cualesquiera* del tubo de flujo, así que también podemos escribir

$$p + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \tag{14.18}$$

Observe que si el fluido *no* se mueve ($v_1 = v_2 = 0$), la ecuación (14.17) se reduce a la relación de presión que dedujimos para un fluido en reposo [ecuación (14.5)].

CUIDADO **El principio de Bernoulli se aplica sólo en ciertas situaciones** Subrayamos de nuevo que la ecuación de Bernoulli sólo es válida para un flujo estable de un fluido incompresible sin fricción interna (sin viscosidad). Es una ecuación sencilla y fácil de usar; ¡cuide de no aplicarla en situaciones en que no es válida!

Estrategia para resolver problemas 14.1 Ecuación de Bernoulli



La ecuación de Bernoulli se deduce del teorema del trabajo y la energía, así que no debe sorprender que gran parte de las estrategias sugeridas en la sección 7.1 se apliquen aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Primero, asegúrese de que el flujo del fluido sea estable y que el fluido sea incompresible y no tenga fricción interna. Este caso es una idealización, pero se acerca mucho a la realidad en el caso de fluidos que fluyen por tubos suficientemente grandes y en el de flujos dentro de grandes cantidades de fluido (por ejemplo, el aire que fluye alrededor de un avión o el agua que fluye alrededor de un pez).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Siempre comience por identificar claramente los puntos 1 y 2 a los que se refiere la ecuación de Bernoulli.
2. Defina su sistema de coordenadas, sobre todo el nivel en que $y = 0$.

continúa

3. Elabore listas de las cantidades conocidas y desconocidas de la ecuación (14.17). Las variables son p_1, p_2, v_1, v_2, y_1 y y_2, y las constantes son ρ y g. Defina qué incógnitas debe determinar.

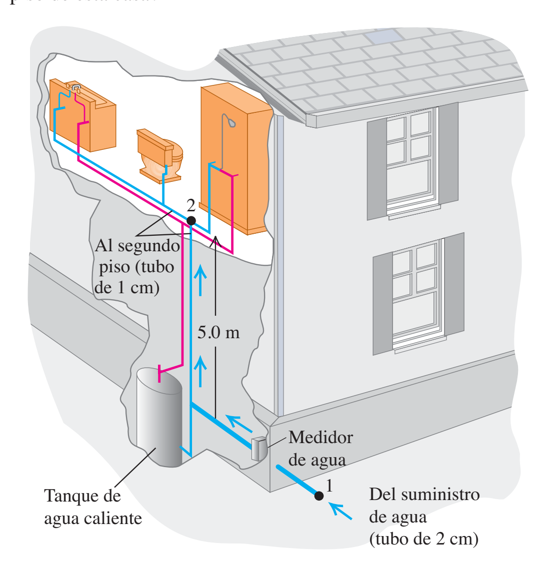
EJECUTAR *la solución* como sigue: Escriba la ecuación de Bernoulli y despeje las incógnitas. En algunos problemas, habrá que usar la ecuación de continuidad, ecuación (14.10), para tener una relación entre los dos valores de rapidez en términos de áreas transversales de tubos o recipientes. O tal vez se tienen ambos valores de rapidez y hay que determinar una de las áreas. Tal vez necesite también la ecuación (14.11) para calcular la tasa de flujo de volumen.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, verifique que los resultados sean lógicos desde el punto de vista de la física. Compruebe que las unidades sean congruentes. En el SI, la presión está en Pa, la densidad en kg/m^3 y la rapidez en m/s. Recuerde también que las presiones deben ser todas absolutas o todas manométricas.

Ejemplo 14.7 Presión de agua en el hogar

En una casa entra agua por un tubo con diámetro interior de 2.0 cm a una presión absoluta de 4.0×10^5 Pa (unas 4 atm). Un tubo de 1.0 cm de diámetro va al cuarto de baño del segundo piso, 5.0 m más arriba (figura 14.24). La rapidez de flujo en el tubo de entrada es de 1.5 m/s. Calcule la rapidez de flujo, la presión y la tasa de flujo de volumen en el cuarto de baño.

14.24 ¿Qué presión tiene el agua en el cuarto de baño del segundo piso de esta casa?



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Suponemos que el agua fluye a una tasa constante. El tubo tiene un diámetro relativamente grande, de manera que es razonable ignorar la fricción interna. El agua es más bien incompresible, por lo que es una buena aproximación utilizar la ecuación de Bernoulli.

PLANTEAR: Tomamos los puntos 1 y 2 en el tubo de entrada y el cuarto de baño, respectivamente. Nos dan la rapidez v_1 y la presión p_1, en el tubo de entrada, y los diámetros de los tubos en los puntos 1 y 2 (con lo cual podemos calcular las áreas A_1 y A_2). Tomamos $y_1 = 0$ (en la entrada) y $y_2 = 5.0$ m (en el cuarto de baño). Las dos primeras incógnitas son la rapidez v_2 y la presión p_2. Puesto que tenemos más de una incógnita, usamos tanto la ecuación de Bernoulli como la ecuación de continuidad para un fluido incompresible. Una vez que obtengamos v_2, calcularemos la tasa de flujo de volumen v_2A_2 en el punto 2.

EJECUTAR: La rapidez v_2 en el cuarto de baño se obtiene de la ecuación de continuidad, ecuación (14.10):

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1 = \frac{\pi(1.0\text{ cm})^2}{\pi(0.50\text{ cm})^2}(1.5\text{ m/s}) = 6.0\text{ m/s}$$

Nos dan p_1 y v_1, y podemos obtener p_2 con la ecuación de Bernoulli, ecuación (14.16):

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g(y_2 - y_1) = 4.0 \times 10^5\text{ Pa} \\ &\quad -\frac{1}{2}(1.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(36\text{ m}^2/\text{s}^2 - 2.25\text{ m}^2/\text{s}^2) \\ &\quad -(1.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(9.8\text{ m/s}^2)(5.0\text{ m}) \\ &= 4.0 \times 10^5\text{ Pa} - 0.17 \times 10^5\text{ Pa} - 0.49 \times 10^5\text{ Pa} \\ &= 3.3 \times 10^5\text{ Pa} = 3.3\text{ atm} = 48\text{ lb/in}^2 \end{aligned}$$

La tasa de flujo de volumen es

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= A_2v_2 = \pi(0.50 \times 10^{-2}\text{ m})^2(6.0\text{ m/s}) \\ &= 4.7 \times 10^{-4}\text{ m}^3/\text{s} = 0.47\text{ L/s} \end{aligned}$$

EVALUAR: Ésta es una tasa de flujo razonable para un lavabo o ducha. Advierta que, al cerrar el agua, v_1 y v_2 son cero, el término $\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ de la ecuación de la presión desaparece, y la presión sube a 3.5×10^5 Pa.

Ejemplo 14.8 Rapidez de salida

La figura 14.25 ilustra un tanque de almacenamiento de gasolina con área transversal A_1, lleno hasta una altura h. El espacio arriba de la gasolina contiene aire a p_0 y la gasolina sale por un tubo corto de área A_2. Deduzca expresiones para la rapidez de flujo en el tubo y la tasa de flujo de volumen.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Podemos considerar todo el volumen de líquido en movimiento como un solo tubo de flujo de un fluido incompresible con fricción interna despreciable. Por lo tanto, podemos usar el principio de Bernoulli.

PLANTEAR: Los puntos 1 y 2 en la figura 14.25 están en la superficie de la gasolina y en el tubo corto de salida, respectivamente. En el punto 1, la presión es p_0; en el punto 2, la presión es la atmosférica, p_{atm}. Tomamos $y = 0$ en el tubo de salida, así que $y_1 = h$ y $y_2 = 0$. Puesto que A_1 es mucho mayor que A_2, el nivel de la gasolina en el tanque bajará con mucha lentitud, así que prácticamente podemos considerar que v_1 es igual a cero. Obtendremos la variable buscada v_2 con la ecuación (14.17) y la tasa de flujo de volumen con la ecuación (14.11).

EJECUTAR: Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 2, tenemos

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g(0)$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2\left(\frac{p_0 - p_{atm}}{\rho}\right) + 2gh$$

Con $v_1 = 0$, tenemos

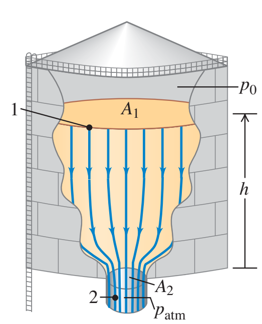
$$v_2^2 = 2\left(\frac{p_0 - p_{atm}}{\rho}\right) + 2gh$$

De acuerdo con la ecuación (14.11), la tasa de flujo de volumen es $dV/dt = v_2 A_2$.

EVALUAR: La rapidez v_2, conocida como *rapidez de salida*, depende tanto de la diferencia de presión $(p_0 - p_{atm})$ como de la altura h del líquido en el tanque. Si el tanque está abierto por arriba a la atmósfera, no habrá exceso de presión: $p_0 = p_{atm}$ y no hay diferencia de presión: $p_0 - p_{atm} = 0$. En ese caso,

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

14.25 Cálculo de la rapidez de salida de gasolina por el fondo de un tanque de almacenamiento.



Esto es, la rapidez de salida por una abertura a una distancia h bajo la superficie del líquido es la *misma* que adquiriría un cuerpo al caer libremente una altura h. Este resultado es el *teorema de Torricelli* y es válido no sólo para una abertura en la base de un recipiente, sino también para un agujero en una pared a una profundidad h bajo la superficie. En este caso, la tasa de flujo de volumen es

$$\frac{dV}{dt} = A_2\sqrt{2gh}$$

Ejemplo 14.9 El medidor Venturi

La figura 14.26 ilustra un *medidor Venturi*, que se usa para medir la rapidez de flujo en un tubo. La parte angosta del tubo se llama *garganta*. Deduzca una expresión para la rapidez de flujo v_1 en términos de las áreas transversales A_1 y A_2 y la diferencia de altura h del líquido en los dos tubos verticales.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El flujo es estable y suponemos que el fluido es incompresible y que tiene fricción interna despreciable. Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación de Bernoulli.

PLANTEAR: Aplicamos la ecuación de Bernoulli a las partes ancha (punto 1) y angosta (punto 2) del tubo. La diferencia de altura entre los dos tubos verticales indica la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2.

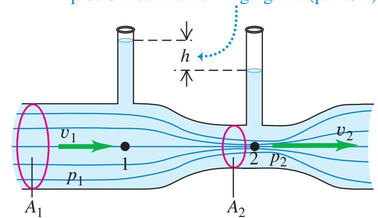
EJECUTAR: Los dos puntos tienen la misma coordenada vertical ($y_1 = y_2$), así que la ecuación (14.17) dice

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad, $p_2 = (A_1/A_2)v_1$. Sustituyendo y reordenando, obtenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right)$$

14.26 El medidor Venturi.



De acuerdo con la sección 14.2, la diferencia de presión $p_1 - p_2$ también es igual a $\rho g h$, donde h es la diferencia de nivel del líquido en los dos tubos. Combinando esto con el resultado anterior y despejando v_1, obtenemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

EVALUAR: Puesto que A_1 es mayor que A_2, v_2 es mayor que v_1 y la presión p_2 en la garganta es *menor* que p_1. Una fuerza neta a la derecha acelera el fluido al entrar en la garganta, y una fuerza neta a la izquierda lo frena al salir.

Ejemplo conceptual 14.10 Sustentación en el ala de un avión

La figura 14.27a muestra líneas de flujo alrededor de un corte del ala de un avión. Las líneas se aprietan arriba del ala, lo que corresponde a una mayor rapidez de flujo y una presión reducida en esta región, igual que en la garganta del medidor Venturi. La fuerza que actúa hacia arriba sobre el lado inferior del ala es mayor que la que actúa hacia abajo sobre el lado superior; hay una fuerza neta hacia arriba, o *sustentación*. La sustentación no se debe sólo al impulso del aire que incide bajo el ala; de hecho, la presión reducida en la superficie superior del ala es lo que más contribuye a la sustentación. (Esta explicación muy simplificada no considera la formación de vórtices; un análisis más completo los tendría en cuenta.)

También podemos entender la fuerza de sustentación en términos de cambios de cantidad de movimiento. La figura 14.27a indica que hay un cambio neto *hacia abajo* en la componente vertical de la cantidad de movimiento del aire que fluye por el ala, correspondiente a la fuerza descendente que el ala ejerce sobre el aire. La fuerza de reacción que actúa *sobre* el ala es *hacia arriba*, como habíamos visto.

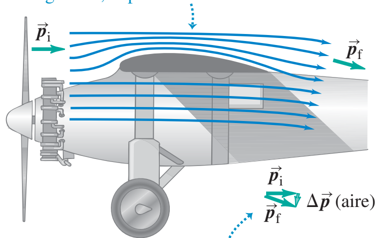
Se observa un patrón de flujo y una fuerza de sustentación similares en las inmediaciones de cualquier objeto saliente cuando hace viento. Cuando sopla un viento bastante intenso, la fuerza de sustentación que actúa sobre la parte superior de un paraguas abierto puede hacer que éste se doble hacia arriba. También actúa una fuerza de sustentación sobre un automóvil que va a gran velocidad porque el aire se mueve sobre el techo curvo del vehículo. Esa sustentación puede reducir la tracción de los neumáticos, y es por ello que muchos automóviles están equipados con un alerón aerodinámico (*spoiler*) en la parte trasera. El alerón se parece a una ala invertida y provee una fuerza descendente que actúa sobre las ruedas traseras.

CUIDADO Una interpretación equívoca acerca de las alas Las explicaciones simplificadas de las alas a menudo afirman que el aire viaja más rápido sobre la parte superior de un ala porque "tiene que viajar una mayor distancia". Esta imagen supone que dos moléculas adyacentes de aire que toman direcciones distintas en la parte anterior del ala —una que se dirige por encima de la superficie superior del ala y la otra por debajo de la superficie inferior— deben encontrarse de nuevo en el borde posterior. ¡Pero no es así! La figura 14.27b presenta una simulación de computadora de parcelas de aire que fluyen alrededor del ala de un avión. Las parcelas de aire adyacentes en la parte anterior del ala *no* se encuentran en la parte posterior, porque el flujo sobre la parte superior del ala en realidad es más rápido que en la imagen simplificada (e incorrecta). De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, esta mayor rapidez significa que hay una presión incluso menor por encima del ala (y, por lo tanto, una mayor sustentación) que lo que sugiere la descripción simplificada.

14.27 a) Líneas de flujo alrededor del ala de un avión. La cantidad de movimiento de una parcela de aire (relativa al ala) es $\vec{p}_i$ antes de llegar al ala y $\vec{p}_f$ después. b) Simulación de la computadora de parcelas de aire que fluyen alrededor del ala de un avión.

a) Líneas de flujo alrededor del ala de un avión

Las líneas de flujo de aire que se desplazan por encima de la parte superior del ala se aprietan, por lo que la rapidez de flujo es mayor y, por consiguiente, la presión es menor.



Una explicación equivalente: la forma del ala imparte una cantidad de movimiento descendente neto al aire, de manera que la fuerza de reacción sobre el avión es hacia arriba.

b) Simulación de computadora del flujo de aire alrededor del ala de un avión

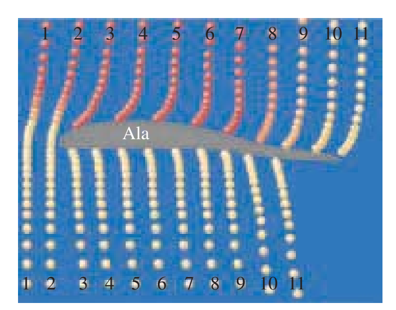


Imagen de parcelas de aire que fluyen alrededor del ala de un avión; en ella se observa que el aire va mucho más rápido por encima de la parte superior que por debajo de la parte inferior (y que las parcelas de aire que están juntas en el borde anterior del ala ¡no se encuentran en el borde posterior!)

Evalúe su comprensión de la sección 14.5 ¿Cuál es el enunciado más exacto del principio de Bernoulli? i) El aire que se desplaza rápidamente provoca presión más baja. ii) La presión más baja provoca que el aire se desplace rápido. iii) Ambas afirmaciones (i y ii) son igualmente exactas.

*14.6 Viscosidad y turbulencia

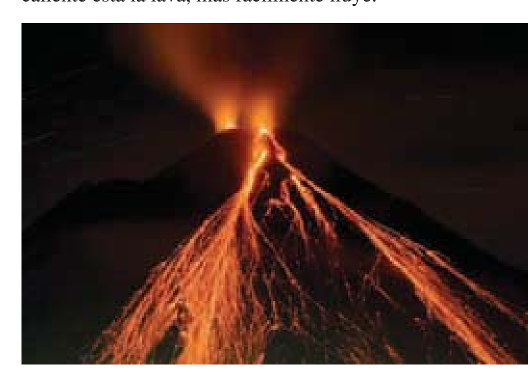
Al hablar del flujo de fluidos supusimos que el fluido no tenía fricción interna y que el flujo era laminar. Aunque en muchos casos esos supuestos son válidos, en muchas situaciones físicas importantes los efectos de la viscosidad (fricción interna) y la turbulencia (flujo no laminar) son extremadamente importantes. Examinemos someramente algunas de esas situaciones.

Viscosidad

La **viscosidad** es fricción interna en un fluido. Las fuerzas viscosas se oponen al movimiento de una porción de un fluido en relación con otra. La viscosidad es la razón por la que se dificulta remar una canoa en aguas tranquilas, pero también es lo que hace que funcione el remo. Los efectos de la viscosidad son importantes en el flujo de fluidos en las tuberías, en el flujo de la sangre, en la lubricación de las partes de un motor y en muchas otras situaciones.

Los fluidos que fluyen con facilidad, como el agua y la gasolina, tienen menor viscosidad que los líquidos "espesos" como la miel o el aceite para motor. Las viscosidades de todos los fluidos dependen mucho de la temperatura, aumentan para los gases y disminuyen para los líquidos al subir la temperatura (figura 14.28). Un objetivo importante en el diseño de aceites para lubricar motores es *reducir* tanto como sea posible la variación de la viscosidad con la temperatura.

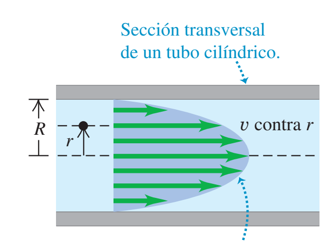
14.28 La lava es un ejemplo de fluido viscoso. La viscosidad disminuye al aumentar la temperatura: cuanto más caliente está la lava, más fácilmente fluye.



Un fluido viscoso tiende a adherirse a una superficie sólida que está en contacto con ella. Siempre hay una *capa de frontera* delgada de fluido cerca de la superficie, en la que el fluido está casi en reposo respecto a ella. Por eso, las partículas de polvo pueden adherirse al aspa de un ventilador aun cuando esté girando rápidamente, y por eso no podemos limpiar bien un auto con sólo dirigir el chorro de agua de una manguera hacia él.

La viscosidad tiene efectos importantes sobre el flujo de los líquidos a través de tuberías, y esto incluye el flujo de la sangre por el sistema circulatorio. Pensemos primero en un fluido con cero viscosidad para poder aplicar la ecuación de Bernoulli, ecuación (14.17). Si los dos extremos de un tubo cilíndrico largo están a la misma altura ($y_1 = y_2$) y la rapidez de flujo es la misma en ambos extremos ($v_1 = v_2$), la ecuación de Bernoulli nos indica que la presión es la misma en ambos extremos. Sin embargo, este resultado simplemente no es válido si tomamos en cuenta la viscosidad. Para ver por qué, considere la figura 14.29, que muestra el perfil de rapidez de flujo para el flujo laminar de un fluido viscoso en un tubo cilíndrico largo. Debido a la viscosidad, la rapidez es *cero* en las paredes del tubo (a las que se adhiere el fluido) y máxima en el centro del tubo. El movimiento semeja muchos tubos concéntricos que se deslizan unos en relación con otros, con el tubo central moviéndose más rápidamente y el más exterior en reposo. Las fuerzas viscosas entre los tubos se oponen a este deslizamiento, de manera que si queremos mantener el flujo, deberemos aplicar una mayor presión atrás del flujo que adelante de él. Por eso también necesitamos seguir apretando un tubo de pasta dentífrica o un envase de salsa de tomate (ambos fluidos viscosos) para que siga saliendo el fluido del interior. Los dedos aplican detrás del flujo una presión mucho mayor que la presión atmosférica al frente del flujo.

14.29 Perfil de velocidad para un fluido viscoso en un tubo cilíndrico.



La diferencia de presión requerida para mantener una tasa determinada de flujo de volumen a través de un tubo cilíndrico de longitud L y radio R resulta ser proporcional a L/R^4. Si disminuimos R a la mitad, la presión requerida aumenta $2^4 = 16$ veces; si disminuimos R en un factor de 0.90 (una reducción del 10%), la diferencia de presión requerida aumentará en un factor de $(1/0.90)^4 = 1.52$ (un aumento del 52%). Esta sencilla relación explica el vínculo entre una dieta alta en colesterol (que tiende a reducir el diámetro de las arterias) y una presión arterial elevada. Debido a la dependencia R^4, incluso un leve estrechamiento de las arterias puede elevar considerablemente la presión arterial y forzar el músculo cardiaco.

Turbulencia

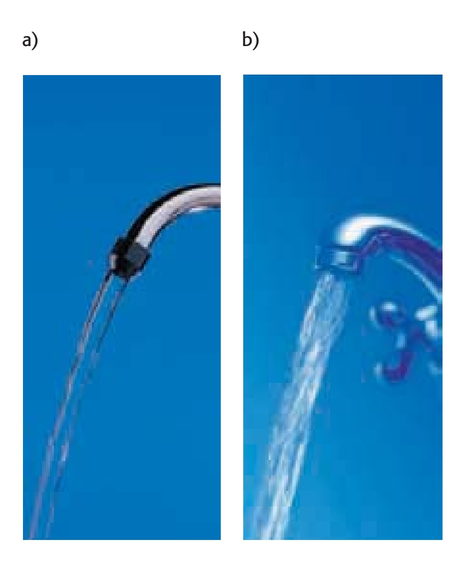
Si la rapidez de un fluido que fluye excede cierto valor crítico, el flujo deja de ser laminar. El patrón de flujo se vuelve muy irregular y complejo, y cambia continuamente con el tiempo; no hay patrón de estado estable. Este flujo irregular y caótico se denomina **turbulencia**. La figura 14.21 muestra el contraste entre flujo laminar y turbulento para humo que asciende en el aire. La ecuación de Bernoulli *no* es aplicable a regiones de turbulencia, pues el flujo no es estable.

El hecho de que un flujo sea laminar o turbulento depende en parte de la viscosidad del fluido. Cuanto mayor es la viscosidad, mayor es la tendencia del fluido a fluir en capas y es más probable que el flujo sea laminar. (Cuando hablamos de la ecuación

de Bernoulli en la sección 14.5, supusimos que el flujo era laminar y que el fluido tenía cero viscosidad. De hecho, se requiere *un poco* de viscosidad para asegurar que el flujo sea laminar.)

Para un fluido de cierta viscosidad, la rapidez de flujo es un factor determinante para que exista turbulencia. Un patrón de flujo que es estable a baja velocidad se vuelve inestable de repente cuando se alcanza una rapidez crítica. Las irregularidades en el patrón de flujo pueden deberse a asperezas en la pared del tubo, variaciones en la densidad del fluido y muchos otros factores. Si la rapidez de flujo es baja, estas perturbaciones se eliminan por amortiguamiento; el patrón de flujo es *estable* y tiende a mantener su naturaleza laminar (figura 14.30a). Sin embargo, cuando se alcanza la rapidez crítica, el patrón de flujo se vuelve inestable; las perturbaciones ya no se amortiguan, sino que crecen hasta destruir el patrón de flujo laminar (figura 14.30b).

El flujo de sangre normal en la aorta humana es laminar, pero una alteración pequeña, como una patología cardiaca, puede hacer que el flujo se vuelva turbulento. La turbulencia hace ruido; por ello, escuchar el flujo sanguíneo con un estetoscopio es un procedimiento de diagnóstico útil.



14.30 El flujo de agua de un grifo es a) laminar cuando sale a baja rapidez, pero b) turbulento cuando tiene rapidez suficientemente alta.

Ejemplo conceptual 14.11 La curva

¿Un lanzamiento de curva en béisbol es *realmente* una curva? Sin duda, y la razón es la turbulencia. La figura 14.31a muestra una bola que se mueve en el aire de izquierda a derecha. Para un observador que se mueve junto con el centro de la bola, la corriente de aire parece moverse de derecha a izquierda, como indican las líneas de flujo de la figura. Las velocidades suelen ser altas (cerca de 160 km/h), así que hay una región de flujo *turbulento* detrás de la bola.

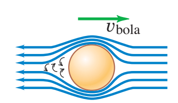
La figura 14.31b ilustra una bola que *gira* con "top spin". Las capas de aire cerca de la superficie de la bola son llevadas en la dirección del giro por la fricción entre la bola y el aire, así como por la fricción interna (viscosidad) del aire. La rapidez del aire en relación con la superficie de la bola se hace menor en la parte de arriba de la bola que en la parte de abajo, y la turbulencia se presenta más hacia delante en el lado de arriba que en el de abajo. Esta asimetría provoca una diferencia de presión; la presión media en la parte de arriba de la bola ahora es mayor que abajo. La fuerza neta desvía la bola hacia abajo, como se observa en la figura 14.31c. Por esa razón se usa el "top spin" en tenis para evitar que un servicio rápido se salga de la cancha (figura 14.31d).

En un lanzamiento de curva en béisbol, la bola gira alrededor de un eje casi vertical, y la desviación real es hacia un lado. En un caso así, la figura 14.31c es una vista *superior* de la situación. Una curva lanzada por un lanzador zurdo se curva *hacia* un bateador diestro, y es más difícil golpearla (figura 14.31e).

Un efecto similar se presenta con las pelotas de golf, que siempre tienen un "giro hacia atrás" por el impacto con la cara inclinada del palo. La diferencia de presión resultante entre la parte de arriba y de abajo de la bola provoca una fuerza de sustentación que mantiene la bola en el aire mucho más tiempo del que sería posible sin el giro. Un golpe fuerte bien dado parece hacer que la bola "flote" o incluso se curve *hacia arriba* durante la parte inicial del vuelo. Éste es un efecto real, no una ilusión. Los hoyuelos de la pelota desempeñan un papel fundamental; la viscosidad del aire hace que una bola sin hoyuelos tenga una trayectoria mucho más corta que una con hoyuelos a la que se imprimen la misma velocidad y giro iniciales. La figura 14.31f ilustra el giro hacia atrás de una pelota de golf justo después de ser golpeada por un palo.

14.31 a) a e) Análisis del movimiento de una pelota que gira a través del aire. f) Fotografía estroboscópica de una pelota de golf golpeada por un palo. La imagen se tomó a 1000 destellos por segundo. La bola gira aproximadamente una vez cada ocho imágenes, lo que corresponde a una rapidez angular de 125 rev/s, o 7500 rpm.

a) Movimiento del aire en relación con una bola que no gira



b) Movimiento de una bola que gira

Este lado de la bola se mueve en oposición al flujo de aire.



Este lado se mueve en la dirección del flujo de aire.

c) Fuerza generada cuando una bola que gira se desplaza a través del aire

Una bola en movimiento arrastra consigo el aire adyacente. Así, cuando el aire se mueve alrededor de una bola que gira:

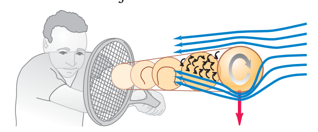


Por un lado, la bola **frena el aire**, creando una región de **alta presión**.

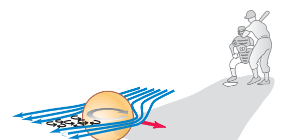
Por el otro lado, la bola **acelera el aire**, creando una región de **baja presión**.

La fuerza resultante apunta en la dirección del lado de baja presión.

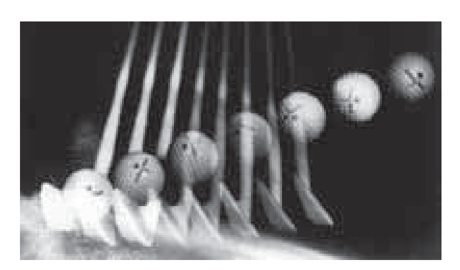
d) Giro que empuja una pelota de tenis hacia abajo



e) Giro que hace que una bola curva se desvíe hacia un lado



f) Giro hacia atrás de una pelota de golf



Evalúe su comprensión de la sección 14.6 ¿Cuánta más presión deberá aplicar una enfermera con el pulgar para administrar una inyección con una aguja hipodérmica cuyo diámetro interno mide 0.30 mm, en comparación con una aguja con diámetro interno de 0.60 mm? Suponga que las dos agujas tienen la misma longitud y que la tasa de flujo de volumen es la misma en ambos casos. i) El doble; ii) 4 veces más; iii) 8 veces más; iv) 16 veces más; v) 32 veces más.

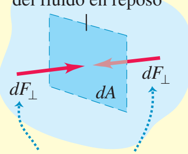
CAPÍTULO 14 RESUMEN

Densidad y presión: Densidad es masa por unidad de volumen. Si una masa m de material homogéneo tiene un volumen V, su densidad ρ es el cociente de la razón m/V. La gravedad específica es la razón entre la densidad de un material y la del agua. (Véase el ejemplo 14.1.)

Presión es fuerza normal por unidad de área. La ley de Pascal establece que la presión aplicada a la superficie de un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las porciones del fluido. La presión absoluta es la presión total en un fluido; la presión manométrica es la diferencia entre la presión absoluta y la atmosférica. La unidad de presión del SI es el pascal (Pa): $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$. (Véase el ejemplo 14.2.)

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (14.1)$$

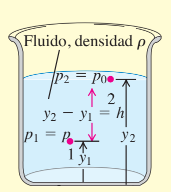
$$p = \frac{dF_\perp}{dA} \quad (14.2)$$



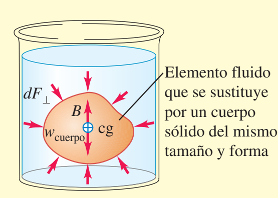
Presiones en un fluido en reposo: La diferencia de presión entre dos puntos 1 y 2 en un fluido estático con densidad uniforme ρ (un fluido incompresible) es proporcional a la diferencia entre las alturas y_1 y y_2. Si la presión en la superficie de un líquido incompresible en reposo es p_0, la presión a una profundidad h es mayor en una cantidad ρgh. (Véanse los ejemplos 14.3 y 14.4.)

$$p_2 - p_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \quad (14.5)$$
(presión en un fluido de densidad uniforme)

$$p = p_0 + \rho gh \quad (14.6)$$
(presión en un fluido de densidad uniforme)



Flotación: El principio de Arquímedes dice que cuando un cuerpo se sumerge en un fluido, éste ejerce sobre el cuerpo una fuerza de flotación hacia arriba igual al peso del fluido que el cuerpo desplaza. (Véase el ejemplo 14.5.)



Flujo de un fluido: Un fluido ideal es incompresible y no tiene viscosidad (no hay fricción interna). Una línea de flujo es la trayectoria de una partícula de fluido; una línea de corriente es una curva tangente en todo punto al vector de velocidad en ese punto. Un tubo de flujo es un tubo delimitado en sus costados por líneas de flujo. En flujo laminar, las capas de fluido se deslizan suavemente unas sobre otras. En flujo turbulento, hay gran desorden y el patrón de flujo cambia constantemente.

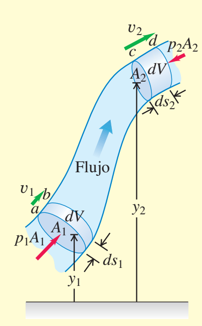
La conservación de la masa en un fluido incompresible se expresa con la ecuación de continuidad, la cual relaciona las rapideces de flujo v_1 y v_2 para dos secciones transversales A_1 y A_2 de un tubo de flujo. El producto Av es igual a la tasa de flujo de volumen, dV/dt, la rapidez con que el volumen cruza una sección del tubo. (Véase el ejemplo 14.6.)

La ecuación de Bernoulli relaciona la presión p, la rapidez de flujo v y la altura y de dos puntos 1 y 2 cualesquiera, suponiendo flujo estable en un fluido ideal. (Véanse los ejemplos 14.7 a 14.10.)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (14.10)$$
(ecuación de continuidad, fluido incompresible)

$$\frac{dV}{dt} = Av \quad (14.11)$$
(tasa de flujo de volumen)

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (14.17)$$
(ecuación de Bernoulli)



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La carne tanto del tiburón como del pez tropical es más densa que el agua de mar, por lo que, por sí solos, se hundirían. Sin embargo, un pez tropical tiene una cavidad llena de gas en su cuerpo llamada vejiga natatoria, de manera que la densidad *media* del cuerpo del pez es igual a la del agua de mar y el pez ni se hunde ni se eleva. Los tiburones no cuentan con esa cavidad. Por consiguiente, deben nadar constantemente para evitar hundirse usando sus aletas pectorales para dar sustentación, de forma muy similar a las alas de un avión (véase la sección 14.5).

Repuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

14.1 **Respuesta: ii), iv), i) y iii) (empatados), v)** En cada caso, la densidad media es igual a la masa dividida entre el volumen. Por lo tanto, tenemos
i) $\rho = (4.00\ \text{kg})/(1.60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 2.50 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
ii) $\rho = (8.00\ \text{kg})/(1.60 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 5.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
iii) $\rho = (8.00\ \text{kg})/(3.20 \times 10^{-3}\ \text{m}^3) = 2.50 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$;
iv) $\rho = (2560\ \text{kg})/(0.640\ \text{m}^3) = 4.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$; **v)** $\rho = (2560\ \text{kg})/(1.28\ \text{m}^3) = 2.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$. Observe que en comparación con el objeto **i)**, el objeto **ii)** tiene el doble de masa, pero el mismo volumen y, por lo tanto, tiene el doble de densidad media. El objeto **iii)** tiene el doble de masa y el doble de volumen que el objeto **i)**, de manera que **i)** y **iii)** tienen la misma densidad media. Por último, el objeto **v)** tiene igual masa que el objeto **iv)**, pero el doble de volumen, de manera que **v)** tiene la mitad de la densidad media de **iv)**.
14.2 **Respuesta: ii)** Por la ecuación (14.9), la presión exterior es igual al producto ρgh. Cuando se saca el barómetro del refrigerador, la densidad ρ decrece, mientras que la altura h de la columna de mercurio no cambia; por lo tanto, la presión debe ser menor afuera que dentro del refrigerador.
14.3 **Respuesta: i)** Considere el agua, la estatua y el recipiente juntos como un sistema; el peso total del sistema no depende de si la estatua está sumergida. La fuerza total de soporte, incluyendo la tensión T y la fuerza ascendente F de la báscula sobre el recipiente (igual a la lectura de la báscula) es la misma en ambos casos. Pero en el ejemplo 14.5 vimos que T disminuye en 7.84 N cuando la estatua está sumergida, por lo que la lectura de la báscula debe *disminuir* en 7.84 N. Un punto de vista alternativo indica que el agua ejerce una fuerza de flotación hacia arriba de 7.84 N sobre la estatua, de manera que ésta ejerce una fuerza igual, sólo que hacia abajo, sobre el agua, haciendo que la lectura de la báscula sea 7.84 N mayor que el peso del agua y el recipiente.
14.4 **Respuesta: ii)** Una carretera cuyo ancho se reduce de tres carriles a uno es como un tubo cuya área transversal se estrecha a un tercio de su valor. Si los vehículos se comportaran como las moléculas de un fluido incompresible, entonces conforme los autos llegaran a la sección de un solo carril, el espaciamiento entre ellos (la "densidad") permanecería igual, pero triplicarían su rapidez. Esto mantendría constante la "tasa de flujo de volumen" (el número de autos por segundo que pasan por un punto de la carretera). En la vida real, los autos se comportan como las moléculas de un fluido *compresible*: quedan más juntos unos de otros (la "densidad" aumenta) y menos autos por segundo pasan por un punto de la carretera (la "tasa de flujo de volumen" disminuye).
14.5 **Respuesta: ii)** La segunda ley de Newton nos dice que un cuerpo acelera (su velocidad cambia) en respuesta a la fuerza neta. En un flujo de fluido, una diferencia de presión entre dos puntos significa que las partículas del fluido que se mueven entre esos dos puntos experimentan una fuerza, y esta fuerza hace que las partículas del fluido aceleren, es decir, que cambien su rapidez.
14.6 **Respuesta: iv)** La presión requerida es proporcional a $1/R^4$, donde R es el radio interior de la aguja (la mitad del diámetro interior). Con la aguja de menor diámetro, la presión es mayor en un factor de $[(0.60\ \text{mm})/(0.30\ \text{mm})]^4 = 2^4 = 16$.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P14.1. Un cubo de madera de roble con caras muy lisas normalmente flota en el agua. Suponga que usted sumerge ese cubo por completo y presiona una de sus caras contra el fondo del tanque, de manera que no haya agua debajo de esa cara. ¿El bloque flotará a la superficie? ¿Existe una fuerza de flotación sobre él? Explique su respuesta.
P14.2. Una manguera de hule se conecta a un embudo y el extremo libre se dobla hacia arriba. Si se vierte agua en el embudo, sube al mismo nivel en la manguera que en el embudo, a pesar de que éste tiene mucha más agua. ¿Por qué? ¿Qué es lo que soporta el peso extra del agua en el embudo?
P14.3. Si compara los ejemplos 14.1 y 14.2 de las secciones 14.1 y 14.2, parece que 700 N de aire ejercen una fuerza hacia abajo de 2.0×10^6 N sobre el piso. ¿Cómo es posible?
P14.4. La ecuación (14.7) indica que una razón de área de 100 a 1 puede dar 100 veces más fuerza de salida que de entrada. ¿No viola esto la conservación de la energía? Explique.
P14.5. Tal vez haya notado que, cuanto menor es la presión de un neumático, mayor es el área de contacto entre él y el pavimento. ¿Por qué?
P14.6. Un globo de aire caliente se llena con aire calentado por un quemador en la base. ¿Por qué debe calentarse el aire? ¿Cómo se controla el ascenso y el descenso?

P14.7. Al describir el tamaño de un barco grande, se dice por ejemplo, "desplaza 20,000 toneladas". ¿Qué significa esto? ¿Se puede obtener el peso del barco a partir de este dato?

P14.8. Se deja caer una esfera sólida de aluminio en un balde de agua que descansa en el suelo. La fuerza de flotación es igual al peso del agua desplazada, que es menor que el peso de la esfera, así que ésta se hunde. Si llevamos el balde a un elevador que acelera hacia arriba, el peso aparente del agua aumenta y, por lo tanto, aumenta la fuerza de flotación que actúa sobre la esfera. ¿La aceleración del elevador podría ser tan grande para hacer que la esfera flote en el agua? Explique su respuesta.

P14.9. Un dirigible rígido más ligero que el aire, lleno de helio, no puede elevarse indefinidamente. ¿Por qué no? ¿Qué determina la altitud máxima alcanzable?

P14.10. La presión del aire disminuye al aumentar la altitud. ¿Por qué entonces el aire cerca de la superficie no es succionado continuamente hacia las regiones altas que están a menor presión?

P14.11. Puede probarse la pureza del oro pesándolo en aire y en agua. ¿Cómo? ¿Cree que podría hacer pasar por oro un lingote de material más barato chapeado con oro?

P14.12. Durante la gran inundación del río Mississippi de 1993, los diques en San Luis tendían a romperse primero en la base. ¿Por qué?

P14.13. Un barco carguero viaja del Océano Atlántico (agua salada) al lago Ontario (agua dulce) por el río San Lorenzo. El barco se sume varios centímetros más en el agua del lago que en el océano. Explique por qué.

P14.14. Usted empuja un trozo de madera para que quede bajo la superficie de una alberca. Después de que está sumergido por completo, usted sigue empujándolo más y más profundamente. Conforme usted hace esto, ¿qué sucederá a la fuerza de flotación sobre el trozo de madera? ¿Esta fuerza seguirá aumentando, permanecerá igual o disminuirá? ¿Por qué?

P14.15. Una antigua pregunta reza así: "¿Qué pesa más, una libra de plumas o una de plomo?" Si el peso en libras es la fuerza gravitacional, ¿una libra de plumas equilibrará una libra de plomo en charolas opuestas de una balanza de brazos iguales? Explique, considerando las fuerzas de flotación.

P14.16. Suponga que la puerta de un cuarto embona herméticamente, pero sin fricción en su marco. ¿Cree que podría abrir la puerta si la presión del aire en un lado fuera la presión atmosférica estándar y en el otro difiriera en un 1%? Explique su respuesta.

P14.17. A cierta profundidad en un líquido incompresible, la presión absoluta es p. Al doble de esa profundidad, ¿la presión absoluta será igual a $2p$, mayor que $2p$ o menor que $2p$? Justifique su respuesta.

P14.18. Un trozo de hierro está pegado encima de un bloque de madera. Si éste se coloca en una cubeta de agua con el hierro arriba, flota. Ahora se voltea el bloque para que el hierro quede sumergido bajo el bloque. ¿El bloque flotará o se hundirá? ¿El nivel de agua en la cubeta subirá, bajará o no cambiará? Explique.

P14.19. Se toma una jarra de vidrio vacía y se mete en un tanque de agua con la boca hacia abajo, atrapando el aire dentro de la jarra. Si se mete más la jarra en el agua, ¿la fuerza de flotación que actúa sobre la jarra permanece igual? Si no es así, ¿aumenta o disminuye? Explique su respuesta.

P14.20. Imagine que flota en una canoa en el centro de una alberca. Una amiga está en la orilla, tomando nota del nivel exacto del agua en la pared de la alberca. Usted lleva consigo en la canoa una bola de boliche, la cual deja caer cuidadosamente por la borda. La bola se hunde hasta el fondo de la alberca. ¿El nivel de agua en la alberca sube o baja?

P14.21. Imagine que flota en una canoa en el centro de una alberca. Un ave grande llega volando y se posa en su hombro. ¿El nivel de agua en la alberca sube o baja?

P14.22. A cierta profundidad en el océano incompresible, la presión manométrica es p_g. Al triple de esa profundidad, ¿la presión manométrica será mayor que $3p_g$, igual a $3p_g$ o menor que $3p_g$? Justifique su respuesta.

P14.23. Un cubo de hielo flota en un vaso de agua. Al derretirse el hielo, ¿el nivel de agua en el vaso subirá, bajará o permanecerá igual? Explique.

P14.24. Alguien afirma lo siguiente: "La ecuación de Bernoulli nos dice que, donde la rapidez del fluido es más alta, la presión es más baja, y viceversa". ¿Es verdad siempre esa afirmación, incluso en el caso de un fluido idealizado? Explique.

P14.25. Si en un fluido en flujo estable la velocidad en cada punto es constante, ¿cómo puede acelerar una partícula de fluido?

P14.26. En una exhibición de escaparate, una pelota de ping-pong está suspendida en un chorro de aire expulsado por la manguera de salida de una aspiradora de tanque. La pelota se mueve un poco pero siempre regresa al centro del chorro, aunque éste no sea vertical. ¿Cómo ilustra este comportamiento la ecuación de Bernoulli?

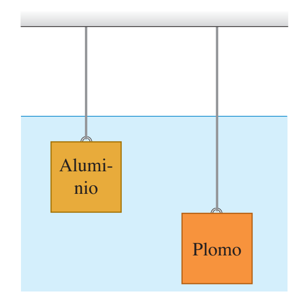
P14.27. Un tornado consiste en un vórtice de aire que gira rápidamente. ¿Por qué la presión es mucho más baja en el centro que afuera? ¿Cómo explica esto la potencia destructiva de un tornado?

P14.28. Los aeropuertos a gran altitud tienen pistas más largas para los despegues y aterrizajes, que los aeropuertos que están al nivel del mar. Una razón para ello es que los motores de los aviones desarrollan menos potencia en el aire enrarecido presente a mayor altitud. Cite otra razón.

P14.29. Cuando un chorro de agua fluye suavemente de un grifo, se adelgaza al caer. Explique este fenómeno.

P14.30. Dos cubos de idéntico tamaño, uno de plomo y el otro de aluminio, están suspendidos a diferentes profundidades por medio de dos alambres en un tanque de agua (figura 14.32). *a*) ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza de flotación? *b*) ¿Para cuál de los dos es mayor la tensión en el alambre? *c*) ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza sobre su cara inferior? *d*) ¿Para cuál de ellos la diferencia en la presión entre las caras superior e inferior es mayor?

Figura 14.32 Pregunta P14.30.



Ejercicios

Sección 14.1 Densidad

14.1. Usted realiza un trabajo de medio tiempo, y un supervisor le pide traer del almacén una varilla cilíndrica de acero de 85.8 cm de longitud y 2.85 cm de diámetro. ¿Necesitará usted un carrito? (Para contestar, calcule el peso de la varilla.)

14.2. Millas por kilogramo. La densidad de la gasolina es de 737 kg/m^3. Si su nuevo auto híbrido rinde 45.0 millas por galón de gasolina, ¿cuál es el millaje en millas por kilogramo de gasolina? (Véase el Apéndice E.)

14.3. Imagine que compra una pieza rectangular de metal de $5.0 \times 15.0 \times 30.0$ mm y masa de 0.0158 kg. El vendedor le dice que es de oro. Para verificarlo, usted calcula la densidad media de la pieza. ¿Qué valor obtiene? ¿Fue una estafa?

14.4. Lingote de oro. Usted gana la lotería y decide impresionar a sus amigos exhibiendo un cubo de oro de un millón de dólares. En ese momento, el oro tiene un precio de venta de $426.60 por onza troy, y 1.0000 onza troy es igual a 31.1035 g. ¿Qué tan alto debe ser su cubo de un millón de dólares?

14.5. Una esfera uniforme de plomo y una de aluminio tienen la misma masa. ¿Cuál es la razón entre el radio de la esfera de aluminio y el de la esfera de plomo?

14.6. *a*) Calcule la densidad media del Sol. *b*) Calcule la densidad media de una estrella de neutrones que tiene la misma masa que el Sol pero un radio de sólo 20.0 km.

14.7. Un tubo cilíndrico hueco de cobre mide 1.50 m de longitud, tiene un diámetro exterior de 3.50 cm y un diámetro interior de 2.50 cm. ¿Cuánto pesa?

Sección 14.2 Presión en un fluido

14.8. Fumarolas oceánicas. Las fumarolas oceánicas son respiraderos volcánicos calientes que emiten humo en las profundidades del lecho oceánico. En muchas de ellas pululan criaturas exóticas, y algunos biólogos piensan que la vida en la Tierra pudo haberse originado alrededor de esos respiraderos. Las fumarolas varían en profundidad de unos 1500 m a 3200 m por debajo de la superficie. ¿Cuál es la presión manométrica en una fumarola oceánica de 3200 m de profundidad, suponiendo que la densidad del agua no varía? Exprese su respuesta en pascales y atmósferas.

14.9. Océanos en Marte. Los científicos han encontrado evidencia de que en Marte pudo haber existido alguna vez un océano de 0.500 km de profundidad. La aceleración debida a la gravedad en Marte es de 3.71 m/s^2. *a*) ¿Cuál habría sido la presión manométrica en el fondo de tal océano, suponiendo que era de agua dulce? *b*) ¿A qué profundidad de los océanos terrestres se experimenta la misma presión manométrica?

14.10. *a*) Calcule la diferencia en la presión sanguínea entre los pies y la parte superior de la cabeza o coronilla de una persona que mide 1.65 m de estatura. *b*) Considere un segmento cilíndrico de un vaso sanguíneo de 2.00 cm de longitud y 1.50 mm de diámetro. ¿Qué fuerza externa *adicional* tendría que resistir tal vaso sanguíneo en los pies de la persona, en comparación con un vaso similar en su cabeza?

14.11. En la alimentación intravenosa, se inserta una aguja en una vena del brazo del paciente y se conecta un tubo entre la aguja y un depósito de fluido (densidad 1050 kg/m^3) que está a una altura h sobre el brazo. El depósito está abierto a la atmósfera por arriba. Si la presión manométrica dentro de la vena es de 5980 Pa, ¿qué valor mínimo de h permite que entre fluido en la vena? Suponga que el diámetro de la aguja es suficientemente grande como para despreciar la viscosidad (véase la sección 14.6) del fluido.

14.12. Un barril contiene una capa de aceite de 0.120 m sobre 0.250 m de agua. La densidad del aceite es de 600 kg/m^3. *a*) ¿Qué presión manométrica hay en la interfaz aceite-agua? *b*) ¿Qué presión manométrica hay en el fondo del barril?

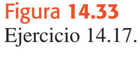
14.13. Los neumáticos de un automóvil de 975 kg están inflados a "32.0 libras". *a*) ¿Cuáles son la presión absoluta y manométrica en estos neumáticos en lb/in^2, Pa y atm? *b*) Si los neumáticos fueran perfectamente redondos, ¿la presión en ellos podría ejercer alguna fuerza sobre el pavimento? (Suponga que las paredes del neumático son flexibles, de manera que la presión ejercida por el neumático sobre el pavimento es igual a la presión de aire dentro del neumático.) *c*) Si examinamos los neumáticos de un auto, es obvio que hay cierto aplanamiento en la parte inferior. ¿Cuál es el área total de contacto de la parte aplanada de los cuatro neumáticos con el pavimento?

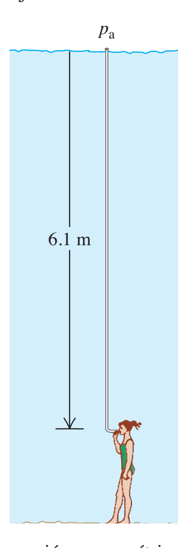
14.14. Se está diseñando una campana de buceo que resista la presión del mar a 250 m de profundidad. *a*) ¿Cuánto vale la presión manométrica a esa profundidad? (Desprecie el cambio en la densidad del agua con la profundidad.) *b*) A esa profundidad, ¿qué fuerza neta ejercen el agua exterior y el aire interior sobre una ventanilla circular de 30.0 cm de diámetro si la presión dentro de la campana es la que hay en la superficie del agua? (Desprecie la pequeña variación de presión sobre la superficie de la ventanilla.)

14.15. ¿Qué presión manométrica debe producir una bomba para subir agua del fondo del Gran Cañón (elevación 730 m) a Indian Gardens (elevación 1370 m)? Exprese sus resultados en pascales y en atmósferas.

14.16. El líquido del manómetro de tubo abierto de la figura 14.9a es mercurio, $y_1 = 3.00$ cm y $y_2 = 7.00$ cm. La presión atmosférica es de 980 milibares. *a*) ¿Qué presión absoluta hay en la base del tubo en U? *b*) ¿Y en el tubo abierto 4.00 cm abajo de la superficie libre? *c*) ¿Qué presión absoluta tiene el aire del tanque? *d*) ¿Qué presión manométrica tiene el gas en pascales?

14.17. Hay una profundidad máxima a la que un buzo puede respirar por un "snorkel" (figura 14.33) pues, al aumentar la profundidad, aumenta la diferencia de presión que tiende a colapsar los pulmones del buzo. Como el *snorkel* conecta los pulmones con la atmósfera, la presión en ellos es la atmosférica. Calcule la diferencia de presión interna-externa cuando los pulmones del buzo están a 6.1 m de profundidad. Suponga que el buzo está en agua dulce. (Un buzo que respira el aire comprimido de un tanque puede operar a mayores profundidades que uno que usa *snorkel*, porque la presión del aire dentro de los pulmones aumenta hasta equilibrar la presión externa del agua.)


Figura 14.33 Ejercicio 14.17.



14.18. Un cilindro alto con área transversal de 12.0 cm^2 se llenó parcialmente con mercurio hasta una altura de 5.00 cm. Se vierte lentamente agua sobre el mercurio (estos dos líquidos no se mezclan). ¿Qué volumen de agua deberá agregarse para aumentar al doble la presión manométrica en la base del cilindro?

14.19. Un lago en el norte de Yukón, Canadá, está cubierto con una capa de hielo de 1.75 m de espesor. Calcule la presión absoluta y la presión manométrica a una profundidad de 2.50 m en el lago.

14.20. Un recipiente cerrado se llena parcialmente con agua. En un principio, el aire arriba del agua está a presión atmosférica (1.01×105 Pa) y la presión manométrica en la base del recipiente es de 2500 Pa. Después, se bombea aire adicional al interior, aumentando la presión del aire sobre el agua en 1500 Pa. *a*) Calcule la nueva presión manométrica en el fondo. *b*) ¿Cuánto deberá reducirse el nivel del agua en el recipiente (extrayendo agua a través de una válvula en el fondo) para que la presión manométrica en el fondo vuelva a ser de 2500 Pa? La presión del aire sobre el agua se mantiene a 1500 Pa sobre la presión atmosférica.

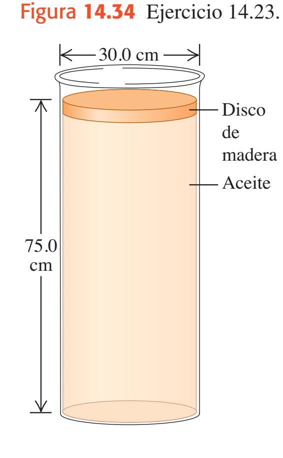
14.21. Un cortocircuito deja sin electricidad a un submarino que está 30 m bajo la superficie del mar. Para escapar, la tripulación debe empujar hacia fuera una escotilla en el fondo que tiene un área de 0.75 m^2

y pesa 300 N. Si la presión interior es de 1.0 atm, ¿qué fuerza hacia abajo se debe ejercer sobre la escotilla para abrirla?

14.22. Exploración de Venus. La presión superficial en Venus es de 92 atm, y la aceleración debida a la gravedad ahí es de 0.894 g. En una futura misión exploratoria, un tanque cilíndrico vertical de benceno está sellado en el extremo superior, pero aun así sigue presurizado a 92 atm justo por encima del benceno. El tanque tiene un diámetro de 1.72 m, y la columna de benceno mide 11.50 m de alto. Ignore los efectos debidos a la temperatura extremadamente alta de Venus. *a*) Calcule la fuerza total ejercida sobre la superficie interior de la base del tanque. *b*) ¿Qué fuerza ejerce la atmósfera de Venus sobre la superficie exterior de la base del tanque? *c*) Calcule la fuerza total interior que ejerce la atmósfera sobre las paredes verticales del tanque.

14.23. Un disco cilíndrico de madera que pesa 45.0 N y tiene un diámetro de 30.0 cm flota sobre un cilindro de aceite cuya densidad es de 0.850 g/cm^3 (figura 14.34). El cilindro de aceite mide 75.0 cm de alto y tiene un diámetro igual al cilindro de madera. *a*) Calcule la presión manométrica en la parte superior de la columna de aceite. *b*) Ahora suponga que alguien coloca un peso de 83.0 N en la parte superior del disco de madera, pero el aceite no se escurre alrededor del borde de la madera. ¿Cuál es el *cambio* en la presión i) en la base del aceite y ii) a la mitad de la columna de aceite?

Figura 14.34 Ejercicio 14.23.



14.24. Elevador hidráulico I. Para el elevador hidráulico que se ilustra en la figura 14.8, ¿cuál debe ser la razón entre el diámetro del recipiente bajo el auto y el diámetro del recipiente donde se aplica la fuerza F_1, de manera que el auto de 1520 kg pueda ser levantado con una fuerza F_1 de sólo 125 N?

14.25. Elevador hidráulico II. El pistón de un elevador hidráulico para autos tiene 0.30 m de diámetro. ¿Qué presión manométrica, en pascales y en atm, se requiere para levantar un auto de 1200 kg?

Sección 14.3 Flotación

14.26. Una plancha de hielo flota en un lago de agua dulce. ¿Qué volumen mínimo debe tener para que una mujer de 45.0 kg pueda ponerse de pie sobre ella sin mojarse los pies?

14.27. Una muestra de mineral pesa 17.50 N en el aire, pero, si se cuelga de un hilo ligero y se sumerge por completo en agua, la tensión en el hilo es de 11.20 N. Calcule el volumen total y la densidad de la muestra.

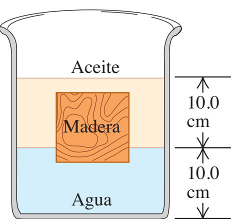
14.28. Usted está preparando un aparato para hacer una visita a un planeta recientemente descubierto llamado Caasi, el cual tiene océanos de glicerina y una aceleración superficial debida a la gravedad de 4.15 m/s^2. Si el aparato flota en los océanos de la Tierra con el 25.0% de su volumen sumergido, ¿qué porcentaje se sumergirá en los océanos de glicerina de Caasi?

14.29. Un objeto con densidad media ρ flota sobre un fluido de densidad ρ_{fluido}. *a*) ¿Qué relación debe haber entre las dos densidades? *b*) A la luz de su respuesta en el inciso *a*), ¿cómo pueden flotar barcos de acero en el agua? *c*) En términos de ρ y ρ_{fluido}, ¿qué fracción del objeto está sumergida y qué fracción está sobre el fluido? Verifique que sus respuestas den el comportamiento correcto en el límite donde $\rho \rightarrow \rho_{\text{fluido}}$ y donde $\rho \rightarrow 0$. *d*) Durante un paseo en yate, un primo suyo recorta una pieza rectangular (dimensiones: 5.0 × 4.0 × 3.0 cm) de un salvavidas y la tira al mar, donde flota. La masa de la pieza es de 42 g. ¿Qué porcentaje de su volumen está sobre la superficie del océano?

14.30. Una esfera hueca de plástico se mantiene por debajo de la superficie de un lago de agua dulce mediante una cuerda anclada al fondo del lago. La esfera tiene un volumen de 0.650 m^3 y la tensión en la cuerda es de 900 N. *a*) Calcule la fuerza de flotación que ejerce el agua sobre la esfera. *b*) ¿Cuál es la masa de la esfera? *c*) La cuerda se rompe y la esfera se eleva a la superficie. Cuando la esfera llega al reposo, ¿qué fracción de su volumen estará sumergida?

14.31. Un bloque cúbico de madera de 10.0 cm por lado flota en la interfaz entre aceite y agua con su superficie inferior 1.50 cm bajo la interfaz (figura 14.35). La densidad del aceite es de 790 kg/m^3. *a*) ¿Qué presión manométrica hay en la superficie superior del bloque? *b*) ¿Y en la cara inferior? *c*) ¿Qué masa y densidad tiene el bloque?

Figura 14.35 Ejercicio 14.31.



14.32. Un lingote de aluminio sólido pesa 89 N en el aire. *a*) ¿Qué volumen tiene? *b*) El lingote se cuelga de una cuerda y se sumerge por completo en agua. ¿Qué tensión hay en la cuerda (el peso *aparente* del lingote en agua)?

14.33. Una roca cuelga de un hilo ligero. Cuando está en el aire, la tensión en el hilo es de 39.2 N. Cuando está totalmente sumergida en agua, la tensión es de 28.4 N. Cuando está totalmente sumergida en un líquido desconocido, la tensión es de 18.6 N. Determine la densidad del líquido desconocido.

Sección 14.4 Flujo de fluido

14.34. Corre agua hacia una fuente, llenando todos los tubos a una tasa constante de 0.750 m/s^3. *a*) ¿Qué tan rápido saldrá por un agujero de 4.50 cm de diámetro? *b*) ¿Con qué rapidez saldrá si el diámetro del agujero es tres veces más grande?

14.35. Una regadera tiene 20 agujeros circulares cuyo radio es de 1.00 mm. La regadera está conectada a un tubo de 0.80 cm de radio. Si la rapidez del agua en el tubo es de 3.0 m/s, ¿con qué rapidez saldrá de los agujeros de la regadera?

14.36. Fluye agua por un tubo de sección transversal variable, llenándolo en todos sus puntos. En el punto 1, el área transversal del tubo es de 0.070 m^2, y la rapidez del fluido es de 3.50 m/s. ¿Qué rapidez tiene el fluido en puntos donde el área transversal es de *a*) 0.105 m^2? *b*) ¿0.047 m^2? *c*) Calcule el volumen de agua descargada del extremo abierto del tubo en 1.00 h.

14.37. Fluye agua por un tubo circular de sección transversal variable, llenándolo en todos sus puntos. *a*) En un punto, el radio del tubo de 0.150 m. ¿Qué rapidez tiene el agua en este punto si la tasa estable de flujo de volumen en el tubo es de 1.20 m^3/s? *b*) En otro punto, la rapidez del agua es de 3.80 m/s. ¿Qué radio tiene el tubo en este punto?

14.38. *a*) Deduzca la ecuación (14.12). *b*) Si la densidad aumenta en 1.50% del punto 1 al 2, ¿qué sucede con la tasa de flujo de volumen?

Sección 14.5 Ecuación de Bernoulli

14.39. Un tanque sellado que contiene agua de mar hasta una altura de 11.0 m contiene también aire sobre el agua a una presión manométrica de 3.00 atm. Sale agua del tanque a través de un agujero pequeño en el fondo. Calcule la rapidez de salida del agua.

14.40. Se corta un agujero circular de 6.00 mm de diámetro en el costado de un tanque grande de agua, 14.0 m debajo del nivel del agua en el tanque. El tanque está abierto al aire por arriba. Calcule *a*) la rapidez de salida del agua y *b*) el volumen descargado por segundo.

14.41. ¿Qué presión manométrica se requiere en una toma municipal de agua para que el chorro de una manguera de bomberos conectada a ella alcance una altura vertical de 15.0 m? (Suponga que la toma tiene un diámetro mucho mayor que la manguera.)

14.42. En un punto de una tubería, la rapidez del agua es de 3.00 m/s y la presión manométrica es de 5.00×10^4 Pa. Calcule la presión manométrica en otro punto de la tubería, 11.0 m más abajo, si el diámetro del tubo ahí es el doble que en el primer punto.

14.43. Sustentación en un avión. El aire fluye horizontalmente por las alas de una avioneta de manera que su rapidez es de 70.0 m/s arriba del ala y 60.0 m/s debajo. Si las alas de la avioneta tienen un área de 16.2 m^2, considerando la parte superior e inferior, ¿qué fuerza vertical neta ejerce el aire sobre la nave? La densidad del aire es de 1.20 kg/m^3.

14.44. Una bebida no alcohólica (principalmente agua) fluye por una tubería de una planta embotelladora con una tasa de flujo de masa que llenaría 220 latas de 0.355 L por minuto. En el punto 2 del tubo, la presión manométrica es de 152 kPa y el área transversal es de 8.00 cm^2. En el punto 1, 1.35 m arriba del punto 2, el área transversal es de 2.00 cm^2. Calcule *a*) la tasa de flujo de masa; *b*) la tasa de flujo de volumen; *c*) la rapidez de flujo en los puntos 1 y 2; *d*) la presión manométrica en el punto 1.

14.45. En cierto punto de una tubería horizontal, la rapidez del agua es de 2.50 m/s y la presión manométrica es de 1.80×10^4 Pa. Calcule la presión manométrica en un segundo punto donde el área transversal es el doble que en el primero.

14.46. Un sistema de riego de un campo de golf descarga agua de un tubo horizontal a razón de 7200 cm^3/s. En un punto del tubo, donde el radio es de 4.00 cm, la presión absoluta del agua es de 2.40×10^5 Pa. En un segundo punto del tubo, el agua pasa por una constricción cuyo radio es de 2.00 cm. ¿Qué presión absoluta tiene el agua al fluir por esa constricción?

Problemas

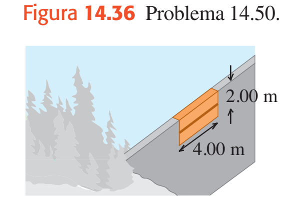
14.47. En una demostración en la clase, el profesor separa con facilidad dos cascos hemisféricos de acero (diámetro D) usando las asas con las que están provistos. Luego los une, extrae el aire hasta una presión absoluta p, y se los da a un fisicoculturista que está sentado en la última fila del salón para que los separe. *a*) Si la presión atmosférica es p_0, ¿qué fuerza deberá ejercer el fisicoculturista sobre cada casco? *b*) Evalúe su respuesta para el caso en que $p = 0.025$ atm y $D = 10.0$ cm.

14.48. El punto más profundo conocido de los océanos es la Fosa de las Marianas, con una profundidad de 10.92 km. *a*) Suponiendo que el agua es incompresible, ¿qué presión hay a esa profundidad? Use la densidad del agua de mar. *b*) La presión real es de 1.16×10^8 Pa; su valor calculado será menor porque la densidad en realidad varía con la profundidad. Usando la compresibilidad del agua y la presión real, calcule la densidad del agua en el fondo de la fosa. ¿Cuál es el cambio porcentual que se registra en la densidad del agua?

14.49. Una piscina mide 5.0 m de longitud, 4.0 m de ancho y 3.0 m de profundidad. Calcule la fuerza que ejerce el agua contra *a*) el fondo y *b*) cualquiera de las paredes. (*Sugerencia:* calcule la fuerza que actúa sobre una tira horizontal delgada a una profundidad h, e integre a lo alto del extremo de la piscina.) No incluya la fuerza debida a la presión del aire.

14.50. El borde superior de una compuerta en una presa está al nivel de la superficie del agua. La compuerta mide 2.00 m de altura y 4.00 m de ancho, y pivota sobre una línea horizontal que pasa por su centro (figura 14.36). Calcule la torca en torno al pivote causado por la fuerza que ejerce el agua. (*Sugerencia:* use un procedimiento similar al del problema 14.49: calcule la torca de una tira horizontal delgada a una profundidad h e integre a lo alto de la compuerta.)

Figura 14.36 Problema 14.50.



14.51. Fuerza y torca sobre una presa. Una presa tiene forma de sólido rectangular. El lado que da al lago tiene área A y altura H. La superficie del lago de agua dulce detrás de la presa llega al borde superior de ésta. *a*) Demuestre que la fuerza horizontal neta ejercida por el agua sobre la presa es $\frac{1}{2}\rho gHA$, es decir, la presión manométrica media sobre la cara de la presa multiplicada por el área (véase el problema 14.49). *b*) Demuestre que la torca que ejerce el agua alrededor de un eje que corre a lo largo de la base de la presa es $\rho gH^2A/6$. *c*) ¿Cómo dependen la fuerza y la torca del tamaño del lago?

14.52. Submarinos en Europa. Algunos científicos están ansiosos por enviar un submarino de control remoto a Europa, una de las lunas de Júpiter, para investigar si hay vida en sus océanos debajo de la capa de hielo. La masa de Europa, según las mediciones, es de 4.78×10^{22} kg, su diámetro es de 3130 km y no tiene una atmósfera apreciable. Suponga que la capa de hielo en la superficie no es suficientemente gruesa para ejercer una fuerza sustancial sobre el agua. Si las ventanillas del submarino que se está diseñando miden 25.0 cm por lado y cada una puede soportar una fuerza interna máxima de 9750 N, ¿cuál es la profundidad máxima a la que el submarino puede sumergirse de manera segura?

14.53. Un astronauta está de pie en el polo norte de un planeta esféricamente simétrico recién descubierto, cuyo radio es R. En las manos, sostiene un recipiente lleno con un líquido de masa m y volumen V. En la superficie del líquido, la presión es p_0; a una profundidad d bajo la superficie, la presión tiene un valor más grande p. A partir de esta información, determine la masa del planeta.

14.54. Globos en Marte. Se ha propuesto que podría explorarse Marte utilizando globos inflados sostenidos justo arriba de la superficie. La flotación de la atmósfera mantendría los globos en el aire. La densidad de la atmósfera marciana es de 0.0154 kg/m^3 (aunque esto varía con la temperatura). Suponga que se fabrican estos globos de un plástico delgado pero resistente con una densidad tal que cada metro cuadrado tiene una masa de 5.00 g. Los inflamos con un gas muy ligero cuya masa puede despreciarse. *a*) ¿Cuáles deberían ser el radio y la masa de estos globos de manera que se sostengan en el aire justo arriba de la superficie de Marte? *b*) Si liberamos uno de esos globos del inciso *a*) en la Tierra, donde la densidad atmosférica es de 1.20 kg/m^3, ¿cuál sería su aceleración inicial suponiendo que el globo tiene el mismo tamaño que en Marte? ¿Ascendería o descendería? *c*) Si en Marte estos globos tienen cinco veces el radio determinado en el inciso *a*), ¿qué peso de un paquete de instrumentos podrían cargar?

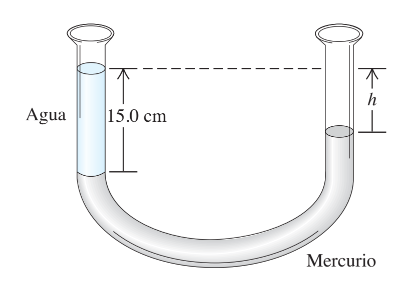
14.55. La Tierra no tiene densidad uniforme; es más densa en el centro y menos densa en la superficie. Una aproximación a su densidad es $\rho(r) = A - Br$, donde $A = 12{,}700\ kg/m^3$ y $B = 1.50 \times 10^{-3}\ kg/m^4$. Utilice $R = 6.37 \times 10^6$ m para el radio de la Tierra aproximada como una esfera. *a*) Los indicios geológicos sugieren que las densidades son 13,100 kg/m^3 en el centro y 2400 kg/m^3 en la superficie. ¿Qué valores da el modelo de aproximación lineal para las densidades en estos dos lugares? *b*) Imagine que divide la Tierra en capas esféricas concéntricas. Cada capa tiene radio r, espesor dr, volumen $dV = 4\pi r^2\,dr$ y masa $dm = \rho(r)dV$. Integrando de $r = 0$ a $r = R$, demuestre que la masa de la Tierra en este modelo es $M = \frac{4}{3}\pi R^3\left(A - \frac{3}{4}BR\right)$. *c*) Demuestre que los valores dados para A y B dan la masa de la Tierra con un error de menos del 0.4%. *d*) En la sección 12.6 vimos que un casco esférico uniforme no contribuye a g en su interior. Demuestre que

$g(r) = \frac{4}{3}\pi Gr\left(A - \frac{3}{4}Br\right)$ dentro de la Tierra en este modelo. *e*) Verifique que la expresión del inciso *d*) da $g = 0$ en el centro de la Tierra y $g = 9.85\ \mathrm{m/s^2}$ en la superficie. *f*) Demuestre que, en este modelo, *g* *no* disminuye de manera uniforme con la profundidad, sino que tiene un máximo de $4\pi GA^2/9B = 10.01\ \mathrm{m/s^2}$ en $r = 2A/3B = 5640$ km.

14.56. En el ejemplo 12.10 (sección 12.6) vimos que, dentro de un planeta con densidad uniforme (una suposición poco realista para la Tierra), la aceleración debida a la gravedad aumenta de manera uniforme con la distancia al centro. Es decir, $g(r) = g_s r/R$, donde g_s es la aceleración debida a la gravedad en la superficie, *r* es la distancia al centro del planeta y *R* es el radio del planeta. El interior del planeta puede tratarse aproximadamente como fluido incompresible con densidad ρ. *a*) Sustituya la altura *y* de la ecuación (14.4) por la coordenada radial *r* e integre para determinar la presión dentro de un planeta uniforme en función de *r*. Sea cero la presión en la superficie. (Esto implica despreciar la presión de la atmósfera del planeta.) *b*) Usando este modelo, calcule la presión en el centro de la Tierra. (Use un valor de ρ igual a la densidad media de la Tierra, calculada con la masa y el radio dados en el Apéndice F.) *c*) Los geólogos estiman que la presión en el centro de la Tierra es de aproximadamente 4×10^{11} Pa. ¿Concuerda esto con su cálculo para la presión en $r = 0$? ¿Qué podría explicar las diferencias, si las hay?

14.57. Un tubo en forma de U abierto por ambos extremos contiene un poco de mercurio. Se vierte con cuidado un poco de agua en el brazo izquierdo del tubo hasta que la altura de la columna de agua es de 15.0 cm (figura 14.37). *a*) Calcule la presión manométrica en la interfaz agua-mercurio. *b*) Calcule la distancia vertical *h* entre la superficie del mercurio en el brazo derecho del tubo y la superficie del agua en el brazo izquierdo.

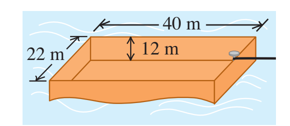
Figura 14.37 Problema 14.57.



14.58. La gran inundación de melaza. En la tarde del 15 de enero de 1919, un día inusitadamente cálido en Boston, se rompió un tanque metálico cilíndrico de 27.4 m de altura y 27.4 m de diámetro usado para almacenar melaza. La melaza fluyó por las calles en una corriente de 9 m de profundidad, matando peatones y caballos y tirando edificios. La melaza tenía una densidad de 1600 kg/m^3. Si el tanque estaba lleno antes del accidente, ¿qué fuerza total ejercía la melaza contra los costados? (*Sugerencia:* considere la fuerza hacia fuera que actúa sobre un anillo de la pared del tanque de anchura *dy* y una profundidad *y* bajo la superficie. Integre para calcular la fuerza total hacia fuera. Suponga que, antes de que el tanque se rompiera, la presión en la superficie de la melaza era igual a la presión del aire afuera del tanque.)

14.59. Un lanchón abierto tiene las dimensiones que se muestran en la figura 14.38. Si el lanchón está hecho con placa de acero de 4.0 cm de espesor en sus cuatro costados y el fondo, ¿qué masa de carbón puede transportar el lanchón en agua dulce sin hundirse? ¿Hay suficiente espacio en el lanchón para contener ese carbón? (La densidad aproximada del carbón es de 1500 kg/m^3.)

Figura 14.38 Problema 14.59.



14.60. Un globo de aire caliente tiene un volumen de 2200 m^3. La tela del globo pesa 900 N. La canasta con su equipo y tanques de propano llenos pesa 1700 N. Si el globo apenas puede levantar otros 3200 N de pasajeros, desayuno y champán cuando la densidad del aire exterior es de 1.23 kg/m^3, ¿qué densidad media tienen los gases calientes del interior?

14.61. Los anuncios de cierto auto aseguran que flota en agua. *a*) Si la masa del auto es de 900 kg y su volumen interior es de 3.0 m^3, ¿qué fracción queda sumergida al flotar? Puede despreciarse el volumen del acero y demás materiales. *b*) Poco a poco se filtra agua y desplaza el aire en el auto. ¿Qué fracción del volumen interior está llena de agua cuando el auto se hunde?

14.62. Un cubo de hielo de 9.70 g flota en un vaso totalmente lleno con 420 cm^3 de agua. Ignore la tensión superficial del agua y su variación de densidad con la temperatura (mientras siga líquida). *a*) ¿Qué volumen de agua desplaza el cubo de hielo? *b*) Una vez derretido el hielo, ¿se habrá desbordado algo de agua? Si así fue, ¿cuánta? Si no, explique por qué. *c*) Suponga que el agua del vaso era muy salada, con densidad de 1050 kg/m^3. ¿Qué volumen de agua salada desplazaría el cubo de hielo de 9.70 g? *d*) Repita el inciso *b*) para el cubo de agua dulce en agua salada.

14.63. Un trozo de madera de 0.600 m de longitud, 0.250 m de ancho y 0.080 m de espesor tiene una densidad de 600 kg/m^3. ¿Qué volumen de plomo debe sujetarse a su base para hundir la madera en agua tranquila de manera que su cara superior esté al ras del agua? ¿Qué masa tiene ese volumen de plomo?

14.64. Un hidrómetro consiste en un bulbo esférico y un tallo cilíndrico con área transversal de 0.400 cm^2 (véase la figura 14.13a). El volumen total es de 13.2 cm^3. Sumergido en agua, el hidrómetro flota con 8.00 cm del tallo sobre la superficie. Sumergido en un líquido orgánico, 3.20 cm del tallo sobresale de la superficie. Calcule la densidad del líquido orgánico. (*Nota:* esto ilustra la precisión de semejante hidrómetro. Variaciones de densidad relativamente pequeñas producen variaciones relativamente grandes en la lectura.)

14.65. Las densidades del aire, el helio y el hidrógeno (a $p = 1.0$ atm y $T = 20°\mathrm{C}$) son 1.20 kg/m^3, 0.166 kg/m^3 y 0.0899 kg/m^3, respectivamente. *a*) ¿Qué volumen en metros cúbicos desplaza un dirigible lleno de hidrógeno que tiene una "sustentación" total de 120 kN? (La "sustentación" es la cantidad en que la fuerza de flotación excede el peso del gas que llena el dirigible.) *b*) Calcule la "sustentación" si se usara helio en vez de hidrógeno. A la luz de su respuesta, ¿por qué se usa helio en los modernos dirigibles publicitarios?

14.66. MAS de un objeto flotante. Un objeto de altura *h*, masa *M* y área de sección transversal uniforme *A* flota erguido en un líquido con densidad ρ. *a*) Calcule la distancia vertical de la superficie del líquido a la base del objeto flotante en equilibrio. *b*) Se aplica una fuerza hacia abajo de magnitud *F* a la cara superior del objeto. En la nueva posición de equilibrio, ¿qué tanto más abajo de la superficie del líquido está la base del objeto en comparación con el inciso *a*)? (Suponga que parte del objeto permanece sobre la superficie del líquido.) *c*) Su resultado

del inciso *b*) indica que si la fuerza se retira de repente, el objeto oscilará verticalmente en movimiento armónico simple. Calcule el periodo de este movimiento en términos de la densidad ρ del líquido y la masa M y área transversal A del objeto. Ignore el amortiguamiento debido a la fricción del fluido (véase la sección 13.7).

14.67. Una boya cilíndrica de 950 kg y 0.900 m de diámetro flota verticalmente en agua salada. *a*) Calcule la distancia adicional que la boya se hundirá si un hombre de 70.0 kg se pone de pie sobre ella. (Utilice la expresión deducida en el inciso *b*) del problema 14.66.) *b*) Calcule el periodo del MAS vertical que se produce cuando el hombre se lanza al agua. (Utilice la expresión deducida en el inciso *c*) del problema 14.66; igual que en ese problema, desprecie el amortiguamiento por fricción del fluido.)

14.68. Una manguera de bomberos debe ser capaz de lanzar agua hacia la parte superior de un edificio de 35.0 m de altura cuando se apunta recta hacia arriba. El agua entra a esta manguera a una tasa constante de 0.500 m^3/s y sale por una boquilla redonda. *a*) ¿Cuál es el diámetro máximo que esta boquilla puede tener? *b*) Si la única boquilla disponible tiene un diámetro que es el doble de grande, ¿cuál es el punto más alto que puede alcanzar el agua?

14.69. Se taladra un pequeño agujero en el lado de un tanque cilíndrico vertical de agua que está sobre el piso con su extremo superior abierto al aire. *a*) Si el nivel del agua tiene una altura H, ¿a qué altura por encima de la base debe taladrarse el agujero para que el agua alcance su distancia máxima con respecto a la base del cilindro cuando toque el piso? *b*) ¿Cuál es la distancia máxima que el agua puede alcanzar?

14.70. Un tanque cilíndrico vertical de área transversal A_1 está abierto al aire en su extremo superior y contiene agua hasta una altura h_0. Accidentalmente, un trabajador perfora un agujero de área A_2 en la base del tanque. *a*) Deduzca una ecuación para la altura h del agua como función del tiempo t después de que se perforó el agujero. *b*) ¿Cuánto tiempo tarda el tanque en vaciarse por completo a partir de que se perfora el agujero?

14.71. Un bloque de madera balsa colocado en una charola de una balanza de brazos iguales se equilibra exactamente con una masa de latón de 0.0950 kg en la otra charola. Calcule la masa verdadera de la madera si su densidad es de 150 kg/m^3. Explique por qué podemos despreciar la flotación en aire del latón pero *no* de la madera balsa sin perder exactitud.

14.72. El bloque A de la figura 14.39 cuelga mediante un cordón de la balanza de resorte D y se sumerge en el líquido C contenido en el vaso de precipitados B. La masa del vaso es 1.00 kg; la del líquido es 1.80 kg. La balanza D marca 3.50 kg, y la E, 7.50 kg. El volumen del bloque A es de 3.80×10^{-3} m^3. *a*) ¿Qué densidad tiene el líquido? *b*) ¿Qué marcará cada balanza si el bloque A se saca del líquido?

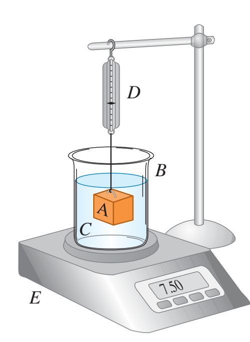


Figura 14.39 Problema 14.72.

14.73. Un trozo de aluminio totalmente cubierto con una capa de oro forma un lingote que pesa 45.0 N. Si el lingote se suspende de una balanza de resorte y se sumerge en agua, la lectura es de 39.0 N. ¿Qué peso de oro hay en el lingote?

14.74. Una pelota de plástico tiene 12.0 cm de radio y flota en agua con el 16.0% de su volumen sumergido. *a*) ¿Qué fuerza deberemos aplicar a la pelota para sostenerla en reposo totalmente bajo la superficie del agua? *b*) Si se suelta la pelota, ¿qué aceleración tendrá en el instante en que se libera?

14.75. El peso de la corona sólida de un rey es w. Si se suspende de una cuerda ligera y se sumerge por completo en agua, la tensión en la cuerda (peso aparente de la corona) es fw. *a*) Demuestre que la densidad relativa (gravedad específica) de la corona es $1/(1 - f)$. Analice el significado de los límites al acercarse f a 0 y a 1. *b*) Si la corona es de oro sólido y pesa 12.9 N en el aire, ¿qué peso aparente tiene cuando está completamente sumergida en agua? *c*) Repita el inciso *b*) considerando que la corona es de plomo chapeada en oro, pero aún pesa 12.9 N en el aire.

14.76. Un trozo de acero pesa w, su peso aparente (véase el problema 14.75) sumergido por completo en agua es w_{agua}, y sumergido en un fluido desconocido, w_{fluido}. *a*) Demuestre que la densidad del fluido relativa al agua (gravedad específica) es $(w - w_{fluido})/(w - w_{agua})$. *b*) ¿Es razonable este resultado para los tres casos de w_{fluido}, mayor, igual o menor que w_{agua}? *c*) El peso aparente de un trozo de acero en agua (densidad = 1000 kg/m^3) equivale al 87.2% de su peso. ¿Qué porcentaje de su peso será su peso aparente en ácido fórmico (densidad = 1220 kg/m^3)?

14.77. Imagine que cuela un metal de densidad ρ_m en un molde, pero le preocupa que pueda haber cavidades en el colado. El peso del colado es w y la fuerza de flotación cuando está rodeado por completo de agua es B. *a*) Demuestre que el volumen total de las cavidades internas es $V_0 = B/(\rho_{agua}g) - w/(\rho_m g)$. *b*) Si el metal es cobre, el peso del colado es de 156 N y la fuerza de flotación es de 20 N, ¿qué volumen total de cavidades contiene el colado? ¿A qué fracción corresponde esto del volumen total del colado?

14.78. Un bloque cúbico de madera de 0.100 m por lado y con densidad de 550 kg/m^3 flota en un frasco de agua. Aceite con densidad de 750 kg/m^3 se vierte sobre el agua hasta que la superficie del aceite está 0.035 m por debajo de la cara superior del bloque. *a*) ¿Qué espesor tiene la capa de aceite? *b*) ¿Qué presión manométrica hay en la cara inferior del bloque?

14.79. Bajen anclas. Una ancla de hierro de 35.0 kg y densidad de 7860 kg/m^3 está en la cubierta de una barcaza pequeña con lados verticales que flota en un río de agua dulce. El área del fondo de la barcaza es de 8.00 m^2. El ancla se tira por la borda, pero queda suspendida arriba del fondo del río por una cuerda, cuya masa y volumen son tan pequeños que los podemos despreciar. Al tirarse el ancla y una vez que la barcaza ha dejado de oscilar, ¿la barcaza está más arriba o más abajo en el agua que antes? ¿Qué distancia sube o baja?

14.80. Suponga que el petróleo crudo de un buque-tanque tiene densidad de 750 kg/m^3. El buque encalla en una barra de arena. Para desencallarlo, el petróleo se bombea a barriles de acero que, cuando están vacíos, tienen una masa de 15.0 kg y capacidad para 0.120 m^3 de petróleo. Puede despreciarse el volumen ocupado por el acero del barril. *a*) Si un rescatista accidentalmente deja caer al mar un barril lleno y sellado, ¿flotará o se hundirá? *b*) Si el barril flota, ¿qué fracción de su volumen estará por arriba de la superficie? Si se hunde, ¿qué tensión mínima habría que ejercer con una cuerda para subir el barril del fondo del océano? *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) si la densidad del petróleo es de 910 kg/m^3 y los barriles vacíos tienen una masa de 32.0 kg.

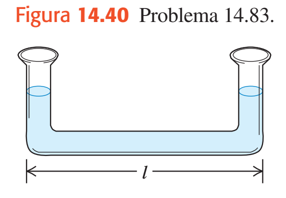
14.81. Un bloque cúbico con densidad ρ_B y lados de longitud L flota en un líquido con densidad mayor ρ_L. *a*) ¿Qué fracción del volumen del bloque está sobre la superficie del líquido? *b*) El líquido es más denso que el agua (densidad ρ_A) y no se mezcla con ella. Si se vierte agua en la superficie del líquido, ¿qué espesor (en términos de L, ρ_B, ρ_L y ρ_A) debe tener la capa de agua para que su superficie esté al ras de la cara superior del bloque? *c*) Calcule la profundidad de la capa de agua en el inciso *b*) si el líquido es mercurio, el bloque está hecho de hierro y la longitud de su lado es de 10.0 cm.

14.82. Una barcaza está en una esclusa rectangular en un río de agua dulce. La esclusa mide 60.0 m. de longitud y 20.0 m de ancho, y las

puertas de acero en sus extremos están cerradas. Con la barcaza flotando en la esclusa, una carga de 2.50×10^6 N de chatarra se coloca en la barcaza. El metal tiene una densidad de 9000 kg/m^3. *a*) Cuando la carga, que inicialmente estaba en tierra, se coloca en la barcaza, ¿qué distancia vertical sube el agua en la esclusa? *b*) Ahora la chatarra se tira de la barcaza al agua. ¿El nivel del agua en la esclusa sube, baja o permanece igual? Si sube o baja, ¿cuánto lo hace?

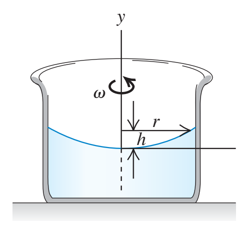
14.83. Un tubo en forma de U con una porción horizontal de longitud l (figura 14.40) contiene un líquido. ¿Qué diferencia de altura hay entre las columnas de líquido en los brazos verticales *a*) si el tubo tiene una aceleración a hacia la derecha? *b*) ¿Y si el tubo se monta en una tornamesa horizontal que gira con rapidez angular ω, con uno de sus brazos verticales en el eje de rotación? *c*) Explique por qué la diferencia de altura no depende de la densidad del líquido ni del área de sección transversal del tubo. ¿Sería lo mismo si los brazos verticales no tuvieran la misma área de sección transversal? ¿Sería lo mismo si la porción horizontal estuviera ahusada de un extremo al otro? Explique.

Figura 14.40 Problema 14.83.



14.84. Un recipiente cilíndrico con un líquido incompresible (de densidad ρ) gira con rapidez angular constante ω alrededor de su eje de simetría, que tomamos como eje y (figura 14.41). *a*) Demuestre que la presión a una altura dada dentro del fluido aumenta en la dirección radial (hacia fuera desde el eje de rotación) de acuerdo con la ecuación $\partial p/\partial r = \rho\omega^2 r$. *b*) Integre esta ecuación diferencial parcial para determinar la presión como función de la distancia del eje de rotación a lo largo de una línea horizontal en $y = 0$. *c*) Combine el resultado del inciso *b*) con la ecuación (14.5) para demostrar que la superficie del líquido en rotación tiene forma *parabólica*, es decir, la altura del líquido está dada por $h(r) = \omega^2 r^2/2g$. (Esta técnica se usa para hacer espejos de telescopio parabólicos; se hace girar vidrio líquido, dejando que se solidifique mientras gira.)

Figura 14.41 Problema 14.84.

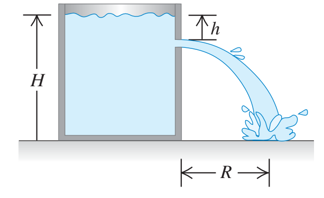


14.85. Un fluido incompresible con densidad ρ está en un tubo de ensayo horizontal con área transversal interior A. El tubo gira en un círculo horizontal en una ultracentrífuga con rapidez angular ω. Las fuerzas gravitacionales son insignificantes. Considere un elemento de volumen del fluido con área A y espesor dr', a una distancia r' del eje de rotación. La presión en su superficie interior es p, y en la exterior, $p + dp$. *a*) Aplique la segunda ley de Newton al elemento de volumen para demostrar que $dp = \rho\omega^2 r' dr'$. *b*) Si la superficie del fluido está en un radio r_0 donde la presión es p_0, demuestre que la presión p a una distancia $r \geq r_0$ es $p = p_0 + \rho\omega^2(r^2 - r_0^2)/2$. *c*) Un objeto con volumen V y densidad ρ_{ob} tiene su centro de masa a una distancia R_{cmob} del eje. Demuestre que la fuerza horizontal neta que actúa sobre el objeto es $\rho V\omega^2 R_{cm}$, donde R_{cm} es la distancia del eje al centro de masa del fluido desplazado. *d*) Explique por qué el objeto se mueve hacia dentro si $\rho R_{cm} > \rho_{ob}R_{cmob}$ y hacia fuera si $\rho R_{cm} < \rho_{ob}R_{cmob}$. *e*) Para objetos pequeños con densidad uniforme, $R_{cm} = R_{cmob}$. ¿Qué sucede con una mezcla de objetos de este tipo con diferentes densidades en una ultracentrífuga?

14.86. Globos sueltos llenos de helio, flotando en un auto con las ventanas y las ventilas cerradas, se mueven en el sentido de la aceleración del auto, pero globos sueltos llenos de aire se mueven en el sentido opuesto. Para comprender por qué, considere sólo las fuerzas horizontales que actúan sobre los globos. Sea a la magnitud de la aceleración hacia delante del auto. Considere un tubo horizontal de aire con área transversal A que se extiende del parabrisas, donde $x = 0$ y $p = p_0$, hacia atrás sobre el eje x. Considere un elemento de volumen de espesor dx en este tubo. La presión en su superficie delantera es p, y en la trasera es $p + dp$. Suponga que el aire tiene una densidad constante ρ. *a*) Aplique la segunda ley de Newton a este elemento para demostrar que $dp = \rho a\,dx$. *b*) Integre el resultado del inciso *a*) para obtener la presión en la superficie delantera en términos de a y x. *c*) Para demostrar que considerar ρ como constante es razonable, calcule la diferencia de presión en atmósferas para una distancia de hasta 2.5 m y una aceleración grande de 5.0 m/s^2. *d*) Demuestre que la fuerza horizontal neta que actúa sobre un globo de volumen V es ρVa. *e*) Si las fuerzas de fricción son insignificantes, demuestre que la aceleración del globo (densidad media ρ_{glo}) es $(\rho/\rho_{glo})a$ y que su aceleración relativa al auto es $a_{rel} = [(\rho/\rho_{glo}) - 1]a$. *f*) Use la expresión para a_{rel} del inciso *e*) para explicar el movimiento de los globos.

14.87. Hay agua hasta una altura H en un tanque abierto grande con paredes verticales (figura 14.42). Se perfora un agujero en una pared a una profundidad h bajo la superficie del agua. *a*) ¿A qué distancia R del pie de la pared tocará el piso el chorro que sale? *b*) ¿A qué distancia sobre la base del tanque debería hacerse un segundo agujero de manera que el chorro que salga por él tenga el mismo alcance que el que sale por el primero?

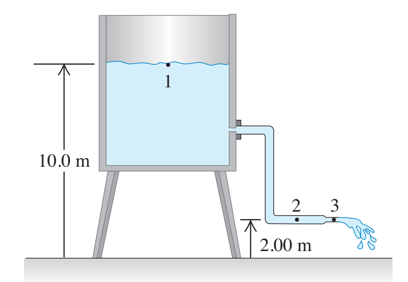
Figura 14.42 Problema 14.87.



14.88. Una cubeta cilíndrica, abierta por arriba, tiene 25.0 cm de altura y 10.0 cm de diámetro. Se perfora un agujero circular con área de 1.50 cm^2 en el centro del fondo de la cubeta. Se vierte agua en la cubeta mediante un tubo situado arriba, a razón de 2.40×10^{-4} m^3/s. ¿A qué altura subirá el agua en la cubeta?

14.89. Fluye agua continuamente de un tanque abierto como en la figura 14.43. La altura del punto 1 es de 10.0 m, y la de los puntos 2 y 3 es de 2.00 m. El área transversal en el punto 2 es de 0.0480 m^2; en el punto 3 es de 0.0160 m^2. El área del tanque es muy grande en comparación con el área transversal del tubo. Suponiendo que puede aplicarse la ecuación de Bernoulli, calcule *a*) la rapidez de descarga en m^3/s; *b*) la presión manométrica en el punto 2.

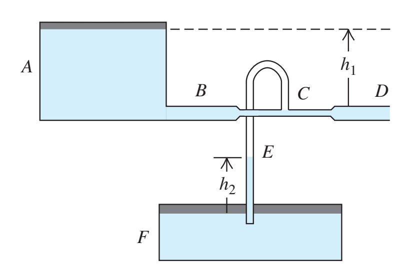
Figura 14.43 Problema 14.89.



14.90. El radio del huracán Emily de 1993 fue de unos 350 km. La rapidez del viento cerca del centro ("ojo") del huracán, cuyo radio fue de unos 30 km, alcanzó cerca de 200 km/h. Al entrar aire del borde del huracán hacia el ojo, su cantidad de movimiento angular se mantuvo casi constante. *a*) Estime la rapidez del viento en el borde del huracán. *b*) Estime la diferencia de presión en el suelo entre el ojo y el borde del huracán. (*Sugerencia:* véase la tabla 14.1.) ¿Dónde es mayor la presión? *c*) Si la energía cinética del aire arremolinado en el ojo pudiera convertirse totalmente en energía potencial gravitacional, ¿cuánto subiría el aire? *d*) De hecho, el aire en el ojo sube a alturas de varios kilómetros. ¿Cómo puede conciliar esto con su respuesta del inciso *c*)?

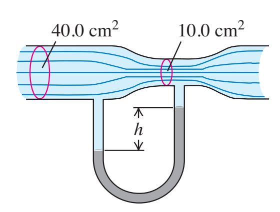
14.91. Dos tanques abiertos muy grandes *A* y *F* (figura 14.44) contienen el mismo líquido. Un tubo horizontal *BCD*, con una constricción en *C* y abierto al aire en *D*, sale del fondo del tanque *A*. Un tubo vertical *E* emboca en la constricción en *C* y baja al líquido del tanque *F*. Suponga flujo de línea de corriente y cero viscosidad. Si el área transversal en *C* es la mitad del área en *D*, y si *D* está a una distancia h_1 bajo el nivel del líquido en *A*, ¿a qué altura h_2 subirá el líquido en el tubo *E*? Exprese su respuesta en términos de h_1.

Figura 14.44 Problema 14.91.



14.92. El tubo horizontal de la figura 14.45 tiene área transversal de 40.0 cm^2 en la parte más ancha y de 10.0 cm^2 en la constricción. Fluye agua en el tubo, cuya descarga es de 6.00×10^{-3} m^3/s (6.00 L/s). Calcule *a*) la rapidez de flujo en las porciones ancha y angosta; *b*) la diferencia de presión entre estas porciones; *c*) la diferencia de altura entre las columnas de mercurio en el tubo con forma de U.

Figura 14.45 Problema 14.92.



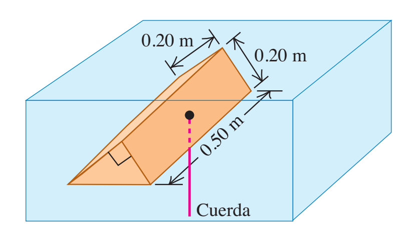
14.93. Un líquido que fluye de un tubo vertical produce un chorro con una forma bien definida. Para obtener la ecuación de esta forma, suponga que el líquido está en caída libre una vez que sale del tubo. Al salir, el líquido tiene rapidez v_0, y el radio del chorro es r_0. *a*) Obtenga una ecuación para la rapidez del líquido en función de la distancia *y* que ha caído. Combinando esto con la ecuación de continuidad, obtenga una expresión para el radio del chorro en función de *y*. *b*) Si fluye agua de un tubo vertical con rapidez de salida de 1.20 m/s, ¿a qué distancia bajo la salida se habrá reducido a la mitad el radio original del chorro?

Problemas de desafío

14.94. Una roca con masa $m = 3.00$ kg cuelga del techo de un elevador con un cordón ligero. La roca está totalmente sumergida en una cubeta con agua que está en el piso del elevador, pero no toca el fondo ni los lados de la cubeta, *a*) Cuando el elevador está en reposo, la tensión en el cordón es de 21.0 N. Calcule el volumen de la piedra. *b*) Deduzca una expresión para la tensión en el cordón cuando el elevador tiene una aceleración de magnitud *a hacia arriba*. Calcule la tensión cuando $a = 2.50$ m/s^2 hacia arriba. *c*) Deduzca una expresión para la tensión en el cordón cuando el elevador tiene una aceleración de magnitud *a hacia abajo*. Calcule la tensión cuando $a = 2.50$ m/s^2 hacia abajo. *d*) Determine la tensión cuando el elevador está en caída libre con aceleración hacia abajo igual a *g*.

14.95. Suponga que un trozo de espuma de poliestireno, $\rho = 180$ kg/m^3, se mantiene totalmente sumergido en agua (figura 14.46). *a*) Calcule la tensión en la cuerda usando el principio de Arquímedes. *b*) Use $p = p_0 + \rho g h$ para calcular directamente la fuerza que ejerce el agua sobre los dos lados inclinados y la base del trozo de poliestireno; luego demuestre que la suma vectorial de estas fuerzas es la fuerza de flotación.

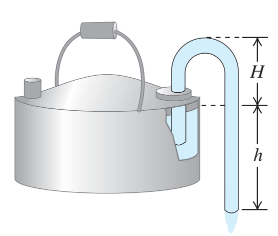
Figura 14.46 Problema de desafío 14.95.



14.96. Un tanque grande con diámetro *D*, abierto al aire, contiene agua hasta una altura *H*. Se perfora un agujero pequeño con diámetro $d (d \ll D)$ en la base del tanque. Ignorando los efectos de viscosidad, calcule el tiempo que el tanque tarda en vaciarse por completo.

14.97. Un *sifón* (figura 14.47) es un dispositivo útil para extraer líquidos de recipientes. Para establecer el flujo, el tubo debe llenarse inicialmente con fluido. Sea ρ la densidad del fluido y p_a la presión atmosférica. Suponga que el área transversal del tubo es la misma en toda su longitud. *a*) Si el extremo inferior del sifón está a una distancia *h* bajo el nivel del líquido en el recipiente, ¿con qué rapidez fluye el líquido por ese extremo? (Suponga que el recipiente tiene un diámetro muy grande e ignore los efectos de viscosidad.) *b*) Una caracterís-

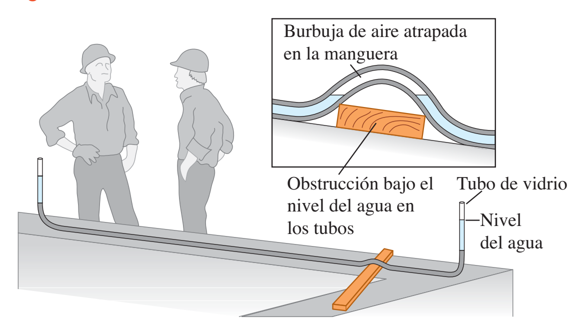
Figura 14.47 Problema de desafío 14.97.



tica curiosa del sifón es que el fluido inicialmente fluye hacia arriba. ¿Qué altura máxima H puede tener el punto alto del tubo sin que deje de haber flujo?

14.98. El siguiente párrafo se tomó de una carta. *Al trazar y nivelar los cimientos de construcciones relativamente largas, los carpinteros de la localidad acostumbran usar una manguera de jardín llena de agua, en cuyos extremos meten tubos de vidrio de 10 a 12 pulgadas de longitud. La teoría es que el agua, buscando un nivel común, tendrá la misma altura en ambos tubos y servirá como nivel. Surge la pregunta de qué pasa si se deja una burbuja de aire en la manguera. Nuestros expertos aseguran que el aire no afecta la lectura de un extremo al otro. Otros dicen que sí habrá una inexactitud importante*. ¿Puede usted dar una respuesta relativamente sencilla a esta pregunta, junto con una explicación? La figura 14.48 bosqueja la situación que causó la disputa.

Figura 14.48 Problema de desafío 14.98.



ONDAS MECÁNICAS

15



?Después de un terremoto, las noticias del suceso viajan por la masa del planeta en forma de ondas sísmicas. ¿Qué aspectos de una onda sísmica determinan la magnitud de la potencia que transporta la onda?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué se entiende por onda mecánica y cuáles son las diferentes variedades de éstas.
- Cómo utilizar la relación entre rapidez, frecuencia y longitud de onda para una onda periódica.
- Cómo interpretar y utilizar la expresión matemática para una onda periódica senoidal.
- Cómo calcular la rapidez de las ondas en una cuerda.
- Cómo calcular la rapidez con la que una onda mecánica transporta energía.
- Qué sucede cuando las ondas mecánicas se traslapan y se interfieren entre sí.
- Las propiedades de las ondas estacionarias sobre una cuerda y cómo analizar tales ondas.
- Cómo los instrumentos de cuerda producen sonidos de frecuencias específicas.

Los rizos en un estanque, los sonidos musicales, los temblores sísmicos producidos por un terremoto: todos éstos son fenómenos *ondulatorios*. Las ondas surgen siempre que un sistema es perturbado de su posición de equilibrio y la perturbación puede viajar o *propagarse* de una región del sistema a otra. Al propagarse una onda, transporta energía. La energía de las ondas de la luz solar calienta la superficie terrestre; en tanto que la energía de las ondas sísmicas puede resquebrajar la corteza terrestre.

Este capítulo y el siguiente tratan las ondas mecánicas, ondas que viajan por algún material llamado *medio*. (El capítulo 16 se ocupa del sonido, que es un tipo importante de onda mecánica.) Iniciaremos deduciendo las ecuaciones básicas que describen a las ondas, incluido el importante caso especial de las ondas *senoidales* donde el patrón de la onda es una función seno o coseno que se repite. Para entender mejor las ondas en general, examinaremos el caso sencillo de las ondas que viajan por una cuerda estirada.

Las ondas en las cuerdas desempeñan un papel importante en música. Cuando un músico toca una guitarra o un violín, produce ondas que viajan en direcciones opuestas por las cuerdas del instrumento. Al traslaparse estas ondas de dirección opuesta, se genera *interferencia*. Descubriremos que, en una cuerda de guitarra o de violín, sólo pueden darse ondas senoidales de ciertas frecuencias especiales, llamadas *frecuencias de modo normal*, determinadas por las propiedades de la cuerda. Las frecuencias de modo normal de los instrumentos de cuerda determinan el tono de los sonidos musicales que se producen. (En el próximo capítulo veremos que la interferencia también ayuda a explicar los tonos de los instrumentos de *viento*, como las flautas y los órganos.)

No todas las ondas son mecánicas. Las ondas *electromagnéticas* —que incluyen la luz, las ondas de radio, las radiaciones infrarrojas y ultravioleta, y los rayos X— se pueden propagar incluso en el espacio vacío, donde *no* hay un medio. Exploraremos éstas y otras ondas no mecánicas en capítulos posteriores.



10.1 Propiedades de las ondas mecánicas

15.1 Tipos de ondas mecánicas

Una **onda mecánica** es una perturbación que viaja por un material o una sustancia que es el **medio** de la onda. Al viajar la onda por el medio, las partículas que constituyen el medio sufren desplazamientos de varios tipos, dependiendo de la naturaleza de la onda.

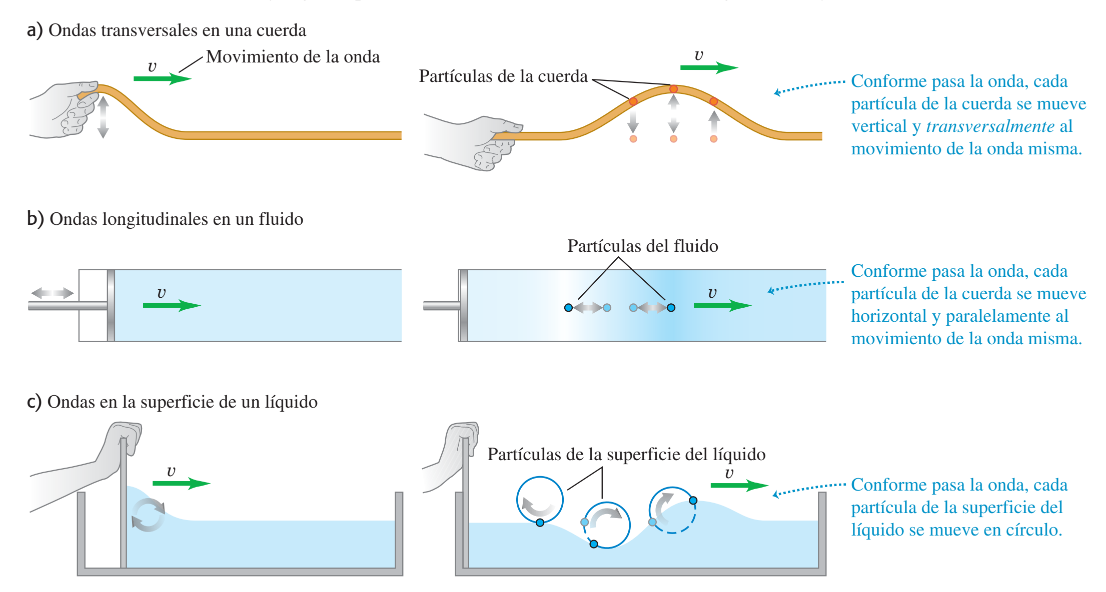
La figura 15.1 muestra tres variedades de ondas mecánicas. En la figura 15.1a, el medio es una cuerda tensada. Si imprimimos al extremo izquierdo una ligera sacudida hacia arriba, la sacudida viaja a lo largo de la cuerda. Secciones sucesivas de la cuerda repiten el movimiento que dimos al extremo, pero en instantes posteriores sucesivos. Puesto que los desplazamientos del medio son perpendiculares o *transversales* a la dirección en que la onda viaja por el medio, decimos que se trata de una **onda transversal**.

En la figura 15.1b, el medio es un líquido o un gas en un tubo con una pared rígida en el extremo derecho y un pistón móvil en el izquierdo. Si imprimimos al pistón un solo movimiento hacia adelante y hacia atrás, el desplazamiento y las fluctuaciones de presión viajarán a lo largo del medio. En esta ocasión, los movimientos de las partículas del medio son hacia adelante y hacia atrás en la *misma* línea en que viaja la onda, y decimos que se trata de una **onda longitudinal**.

En la figura 15.1c, el medio es líquido en un canal, como agua en una zanja de irrigación. Si movemos la tabla plana de la izquierda hacia adelante y hacia atrás una vez, una perturbación de onda viajará a lo largo del canal. En este caso, los desplazamientos del agua tienen componentes *tanto* longitudinal *como* transversal.

Cada uno de estos sistemas tiene un estado de equilibrio. En el caso de la cuerda estirada, es el estado en que el sistema está en reposo, estirada en línea recta. Para el fluido en un tubo, es un estado en que el fluido está en reposo con presión uniforme; y para el agua en una zanja, es una superficie lisa y plana. En cada caso, el movimiento ondulatorio es una perturbación del estado de equilibrio que viaja de una región del medio a otra, y siempre hay fuerzas que tienden a volver el sistema a su posición de equilibrio cuando se le desplaza, así como la gravedad tiende a llevar un péndulo hacia su posición de equilibrio vertical cuando se le desplaza.

15.1 Tres formas de producir una onda que se mueve hacia la derecha. a) La mano mueve la cuerda hacia arriba y regresa, produciendo una onda transversal. b) El pistón se mueve a la derecha, comprimiendo el líquido o gas, y regresa, produciendo una onda longitudinal. c) La tabla se mueve a la derecha y regresa, produciendo una combinación de ondas longitudinales y transversales.



Estos ejemplos tienen tres cosas en común. Primera, la perturbación siempre viaja o *se propaga* por el medio con una rapidez definida llamada rapidez de propagación o, simplemente, **rapidez de la onda**, determinada en cada caso por las propiedades mecánicas del medio. Usaremos el símbolo v para esta rapidez. (La rapidez de la onda *no* es la rapidez con que se mueven las partículas cuando son perturbadas por la onda. Volveremos a esto en la sección 15.3.) Segunda, el medio mismo no viaja por el espacio; sus partículas individuales realizan movimientos verticales y horizontales alrededor de sus posiciones de equilibrio. Lo que viaja es el patrón general de la perturbación ondulatoria. Tercera, para poner en movimiento cualesquiera de estos sistemas, debemos aportar energía realizando trabajo mecánico sobre el sistema. La onda transporta esta energía de una región del medio a otra. *Las ondas transportan energía, pero no materia, de una región a otra* (figura 15.2).

15.2 "Haciendo la ola" en un estadio deportivo es un ejemplo de onda mecánica: la perturbación propaga en la multitud, pero no transporta materia (ninguno de los espectadores se mueve de un asiento a otro).



Evalúe su comprensión de la sección 15.1 ¿Qué tipo de onda es "la ola" que se muestra en la figura 15.2? i) transversal; ii) longitudinal; iii) una combinación de transversal y longitudinal.

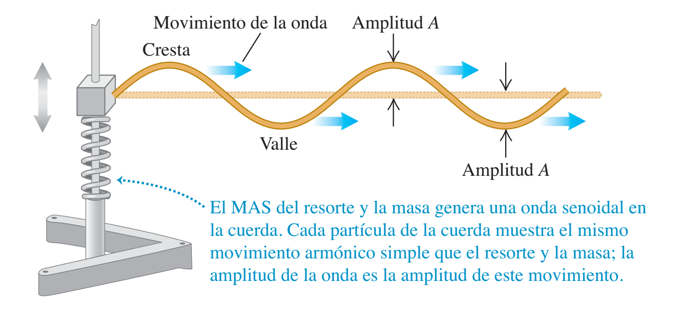
15.2 Ondas periódicas

La onda transversal en una cuerda estirada de la figura 15.1a es un ejemplo de *un pulso de onda*. La mano sacude la cuerda verticalmente una vez, ejerciendo una fuerza transversal sobre ella. El resultado es un solo pulso que viaja a lo largo de la cuerda. La tensión de la cuerda restablece su forma recta una vez que el pulso ha pasado.

Se da una situación más interesante cuando imprimimos un movimiento repetitivo, *o periódico* al extremo libre de la cuerda. (Tal vez el lector desee repasar la explicación del movimiento periódico del capítulo 13 antes de continuar.) Entonces, cada partícula de la cuerda tendrá un movimiento periódico al propagarse la onda, y tendremos una **onda periódica**.

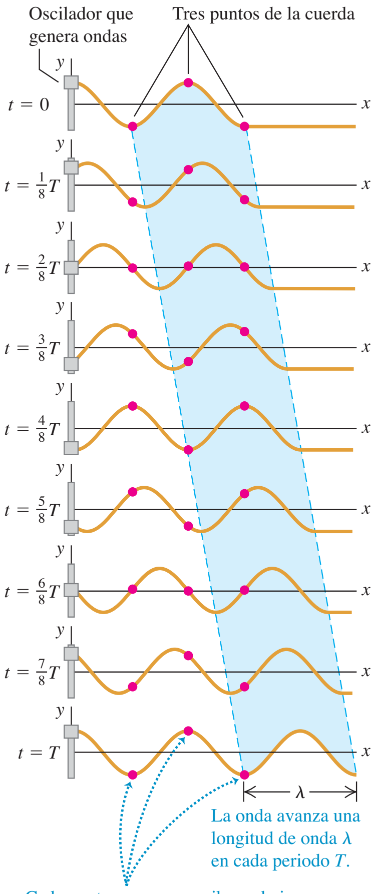
Ondas transversales periódicas

En particular, suponga que movemos verticalmente la cuerda con un *movimiento armónico simple* (MAS) con amplitud A, frecuencia f, frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, y periodo $T = 1/f = 2\pi/\omega$. En la figura 15.3 se muestra una forma de hacerlo. La onda producida es una sucesión simétrica de *crestas* y *valles*. Como veremos, las ondas periódicas con movimiento armónico simple son especialmente fáciles de analizar; las llamamos **ondas senoidales**. Resulta también que *cualquier* onda periódica puede representarse como una combinación de ondas senoidales. Por lo tanto, este tipo de movimiento ondulatorio merece atención especial.



15.3 Un bloque con masa m unido a un resorte tiene un movimiento armónico simple y produce una onda senoidal que viaja a la derecha por la cuerda. (En un sistema real, se tendría que aplicar una fuerza impulsora al bloque para reponer la energía que la onda se lleva.)

15.4 Onda senoidal transversal que viaja a la derecha por una cuerda. La escala vertical está exagerada.



15.5 Una serie de gotas que cae en agua produce una onda periódica que se extiende radialmente hacia afuera. Las crestas y los valles de la onda son círculos concéntricos. La longitud de onda λ es la distancia radial entre crestas adyacentes o valles adyacentes.



En la figura 15.3, la onda que avanza por la cuerda es una *sucesión continua* de perturbaciones senoidales transversales. La figura 15.4 muestra la forma de una parte de la cuerda cerca del extremo izquierdo a intervalos de $\frac{1}{8}$ de periodo, para un tiempo total de un periodo. La forma de onda avanza uniformemente hacia la derecha, como indica el área sombreada. Al moverse la onda, cualquier punto de la cuerda (cualquiera de los puntos rojos, por ejemplo) oscila verticalmente alrededor de su posición de equilibrio con movimiento armónico simple. *Cuando una onda senoidal pasa por un medio, todas las partículas del medio sufren movimiento armónico simple con la misma frecuencia.*

CUIDADO **Movimiento ondulatorio contra movimiento de partículas** No confunda el movimiento de la *onda transversal* a lo largo de la cuerda con el de una *partícula* de la cuerda. La onda avanza con rapidez constante v *a lo largo* de la cuerda; mientras que el movimiento de la partícula es armónico simple y *transversal* (perpendicular) a la longitud de la cuerda.

En el caso de una onda periódica, la forma de la cuerda en cualquier instante es un patrón repetitivo. La longitud de un patrón de onda completo es la distancia entre una cresta y la siguiente, o de un valle al siguiente, o de cualquier punto al punto correspondiente en la siguiente repetición de la forma. Llamamos a esta distancia **longitud de onda**, denotada con λ (la letra griega lambda). El patrón de onda viaja con rapidez constante v y avanza una longitud de onda λ en el lapso de un periodo T. Por lo tanto, la rapidez de la onda v está dada por $v = \lambda/T$, dado que $f = 1/T$,

$$v = \lambda f \qquad \text{(onda periódica)} \qquad (15.1)$$

La rapidez de propagación es igual al producto de la longitud de onda y la frecuencia. La frecuencia es una propiedad de *toda* la onda periódica, porque todos los puntos de la cuerda oscilan con la misma frecuencia f.

Las ondas en una cuerda se propagan en una sola dimensión (en la figura 15.4, a lo largo del eje x). No obstante, los conceptos de frecuencia, longitud de onda y amplitud son igualmente aplicables a las ondas que se propagan en dos o en tres dimensiones. La figura 15.5 muestra una onda que se propaga en dos dimensiones en la superficie de un tanque de agua. Igual que en las ondas de una cuerda, la longitud de onda es la distancia entre una cresta y la siguiente, y la amplitud es la altura de una cresta sobre el nivel de equilibrio.

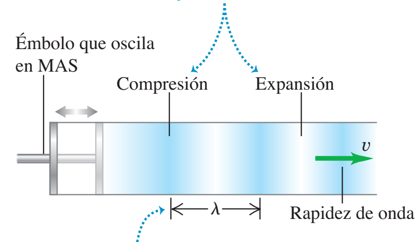
En muchas situaciones importantes, que incluyen las ondas en cuerdas, la rapidez de la onda v depende únicamente de las propiedades mecánicas del medio. En este caso, aumentar f hace que λ disminuya, de modo que el producto $v = \lambda f$ no cambie, y las ondas de *todas* las frecuencias se propagan con la misma rapidez. En este capítulo, *sólo* consideraremos las ondas de este tipo. (En capítulos posteriores estudiaremos la propagación de las ondas de luz en sustancias en las cuales la rapidez de la onda depende de la frecuencia; ésta es la razón por la que los prismas descomponen la luz blanca en un espectro y por la que las gotas de lluvia crean un arco iris.)

Ondas periódicas longitudinales

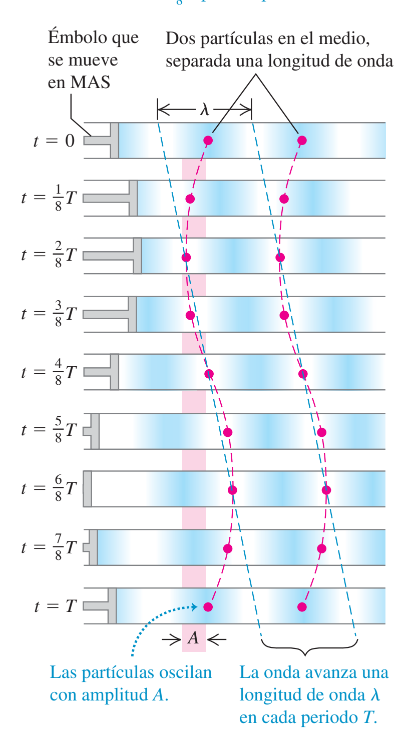
Para entender la mecánica de una onda periódica *longitudinal*, consideramos un tubo largo lleno con un fluido, con un pistón en el extremo izquierdo como en la figura 15.1b. Si empujamos el pistón, comprimimos el fluido cerca de él, aumentando la presión en esta región. Luego, esta región empuja la región vecina de fluido, y así sucesivamente, de modo que un pulso de onda viaja por el tubo.

Suponga ahora que movemos el pistón con un movimiento armónico simple a lo largo de una línea paralela al eje del tubo (figura 15.6). Este movimiento forma regiones en el fluido donde la presión y la densidad son mayores o menores que los valores de equilibrio. Llamamos *compresión* a una región donde se ha aumentado la densidad; y *expansión*, a una donde se ha reducido. En la figura 15.6 se muestran las compresiones con regiones oscuras y las expansiones con regiones claras. La longitud de onda es la distancia de una compresión a la siguiente o de una expansión a la siguiente.

15.6 Uso de un pistón que oscila para hacer una onda longitudinal senoidal en un fluido.



15.7 Onda senoidal longitudinal que viaja a la derecha por un fluido. La onda tiene la misma amplitud A y periodo T que la oscilación del pistón.



La figura 15.7 muestra la onda que se propaga en el tubo lleno de fluido a intervalos de $\frac{1}{8}$ de un periodo, para un tiempo total de un periodo. El patrón de compresiones y expansiones se mueve uniformemente a la derecha, al igual que el patrón de crestas y valles de una onda transversal seniodal (compare con la figura 15.4). Cada partícula en el fluido oscila en MAS paralelo a la dirección de la propagación de la onda (es decir, izquierda y derecha), con la misma amplitud A y periodo T que el pistón. Las partículas mostradas con los dos puntos rojos de la figura 15.7 están separadas una longitud de onda, por lo que oscilan en fase entre sí.

Al igual que la onda transversal senoidal de la figura 15.4, en un periodo T la onda longitudinal de la figura 15.7 viaja una longitud de onda λ a la derecha. Por lo tanto, la ecuación fundamental $v = \lambda f$ se cumple para las ondas longitudinales igual que para las transversales y, de hecho, para *todos* los tipos de ondas periódicas. Como haremos con las ondas transversales, en este capítulo y en el siguiente, sólo consideraremos las situaciones en que la rapidez de las ondas longitudinales no dependa de la frecuencia.

Ejemplo 15.1 Longitud de onda de un sonido musical

Las ondas sonoras son ondas longitudinales en aire. La rapidez del sonido depende de la temperatura; a 20 °C, es de 344 m/s (1130 ft/s). Calcule la longitud de onda de una onda sonora en aire a 20 °C, si la frecuencia es de 262 Hz (la frecuencia aproximada del do medio de un piano).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la relación entre rapidez de onda, longitud de onda y frecuencia para una onda periódica. La incógnita es la longitud de onda λ.

PLANTEAR: Nos dan la rapidez de la onda $v = 344$ m/s y la frecuencia $f = 262$ Hz, así que podemos usar la relación de la ecuación (15.1) entre v, λ y f.

EJECUTAR: Despejamos la incógnita λ de la ecuación (15.1):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{344 \text{ m/s}}{262 \text{ Hz}} = \frac{344 \text{ m/s}}{262 \text{ s}^{-1}} = 1.31 \text{ m}$$

Observe que las unidades de frecuencia son hertz (Hz), o bien, inversa de segundos (s^{-1}).

EVALUAR: ¿Qué sucede con la longitud de onda si cambia la frecuencia? Los cambios de frecuencia no afectan la rapidez de las ondas sonoras, así que la relación $\lambda = v/f$ nos indica que la longitud de onda cambiará en proporción inversa con la frecuencia. Por ejemplo, el do alto que cantan las sopranos coloratura está dos octavas arriba del do medio. Cada octava corresponde a un factor de 2 en la frecuencia, así que la frecuencia del do alto es cuatro veces la del do medio: $f = 4(262 \text{ Hz}) = 1048$ Hz. Por lo tanto, la *longitud de onda* del do alto es *la cuarta parte* de la del do medio: $\lambda = (1.31 \text{ m})/4 = 0.328$ m.

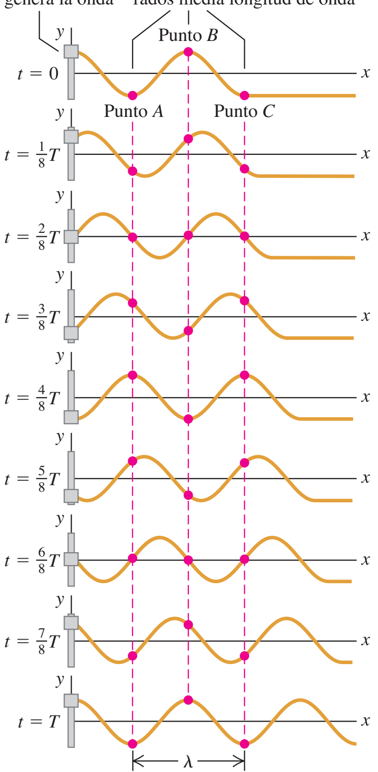
Evalúe su comprensión de la sección 15.2 Si se aumenta al doble la longitud de onda en una cuerda, ¿qué sucede con la rapidez de la onda? ¿Y con su frecuencia? i) v se duplica y f permanece igual; ii) v permanece igual y f se duplica; iii) v se reduce a la mitad y f permanece igual; iv) v permanece igual y f se reduce a la mitad; v) ninguna de las anteriores.

15.3 Descripción matemática de una onda

Muchas características de las ondas periódicas pueden describirse usando los conceptos de rapidez de onda, amplitud, periodo, frecuencia y longitud de onda; sin embargo, es común que necesitemos una descripción más detallada de las posiciones y los movimientos de las partículas individuales del medio en instantes específicos durante la propagación de una onda. Para esta descripción, necesitamos el concepto de *función de onda*, una función que describe la posición de cualquier partícula en el medio en cualquier instante. Nos concentraremos en las ondas *senoidales*, en las que cada partícula tiene un MAS alrededor de su posición de equilibrio.

Como ejemplo específico, examinemos las ondas en una cuerda estirada. Si despreciamos el pandeo de la cuerda por la gravedad, su posición de equilibrio es en una línea recta, la cual tomamos como el eje x de un sistema de coordenadas. Las ondas en una cuerda son *transversales*; durante el movimiento ondulatorio una partícula con posición de equilibrio x se desplaza cierta distancia y en la dirección perpendicular al eje x. El valor de y depende de cuál partícula estamos considerando (es decir, y depende de x) y también del instante t en que la consideramos. Así, y es *función* tanto de x como de t; $y = y(x, t)$. Llamamos a $y(x, t)$ la **función de onda** que describe la onda. Si conocemos esta función para cierto movimiento ondulatorio, podemos usarla para calcular el desplazamiento (con respecto al equilibrio) de cualquier partícula en cualquier instante. Con esto podemos calcular la velocidad y la aceleración de cualquier partícula, la forma de la cuerda y todo lo que nos interese acerca del comportamiento de la cuerda en cualquier instante.

15.8 Seguimiento de las oscilaciones de tres puntos en una cuerda, conforme la onda senoidal se propaga por ella.



Función de onda de una onda senoidal

Veamos cómo se determina la forma de la función de onda para una onda senoidal. Supongamos que una onda senoidal viaja de izquierda a derecha (dirección de x creciente) por la cuerda, como en la figura 15.8. Cada partícula de la cuerda oscila en movimiento armónico simple con la misma amplitud y frecuencia; pero las oscilaciones de partículas en diferentes puntos de la cuerda *no* están todas coordinadas. La partícula marcada con el punto B en la figura 15.8 está en su máximo valor positivo de y en $t = 0$ y vuelve a $y = 0$ en $t = \frac{2}{8}T$; esto mismo sucede con una partícula en el punto A o en el punto C en $t = \frac{4}{8}T$ y $t = \frac{6}{8}T$, exactamente medio periodo después. Para cualesquiera dos partículas de la cuerda, el movimiento de la partícula de la derecha (en términos de la onda, la partícula "de bajada") se retrasa con respecto al movimiento de la partícula de la izquierda en una cantidad proporcional a la distancia entre las partículas.

Así, los movimientos cíclicos de diversos puntos de la cuerda están desfasados entre sí en diversas fracciones de un ciclo. Llamamos a éstas *diferencias de fase*, y decimos que la *fase* del movimiento es diferente para diferentes puntos. Por ejemplo, si un punto tiene su desplazamiento positivo máximo al mismo tiempo que otro tiene su desplazamiento negativo máximo, los dos están desfasados medio ciclo. (Éste es el caso de los punto A y B, o de los puntos B y C.)

Suponga que el desplazamiento de una partícula en el extremo izquierdo de la cuerda ($x = 0$), donde la onda se origina, está dado por

$$y(x = 0, t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi ft \qquad (15.2)$$

Es decir, la partícula oscila en movimiento armónico simple con amplitud A, frecuencia f y frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. La notación $y(x = 0, t)$ nos recuerda que el movimiento de esta partícula es un caso especial de la función de onda $y(x, t)$ que describe toda la onda. En $t = 0$, la partícula en $x = 0$ tiene máximo desplazamiento positivo ($y = A$) y está instantáneamente en reposo (porque el valor de y es un máximo).

La perturbación ondulatoria viaja de $x = 0$ a algún punto x a la derecha del origen en un tiempo dado por x/v, donde v es la rapidez de la onda. Así, el movimiento del punto x en el instante t es el mismo que el movimiento del punto $x = 0$ en el instante anterior $t - x/v$. Por lo tanto, podemos obtener el desplazamiento del punto x en el

instante t con sólo sustituir t en la ecuación (15.2) por $(t - x/v)$. Al hacerlo, obtenemos la siguiente expresión para la función de onda:

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

Dado que $\cos(-\theta) = \cos\theta$, podemos rescribir la función de onda así:

$$y(x, t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right) \quad \text{(onda senoidal que avanzan en la dirección } +x\text{)} \tag{15.3}$$

El desplazamiento $y(x, t)$ es función tanto de la posición x del punto como del tiempo t. Podemos hacer más general la ecuación (15.3) contemplando diferentes valores del ángulo de fase, como hicimos para el movimiento armónico simple en la sección 13.2, pero por ahora omitiremos esto.

Podemos rescribir la función de onda dada por la ecuación (15.3) de varias formas distintas pero útiles. Una es expresarla en términos del periodo $T = 1/f$ y la longitud de onda $\lambda = v/f$:

$$y(x, t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \quad \text{(onda senoidal que se mueve en la dirección } +x\text{)} \tag{15.4}$$

Obtenemos otra forma útil de la función de onda, si definimos una cantidad k llamada **número de onda**:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{(número de onda)} \tag{15.5}$$

Sustituyendo $\lambda = 2\pi/k$ y $f = \omega/2\pi$ en la relación longitud de onda-frecuencia $v = \lambda f$ obtenemos

$$\omega = vk \quad \text{(onda periódica)} \tag{15.6}$$

Ahora podemos rescribir la ecuación (15.4) como

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \quad \text{(onda senoidal que se mueve en la dirección } +x\text{)} \tag{15.7}$$

Cuál de estas formas de la función de onda $y(x, t)$ usemos en un problema específico es cuestión de comodidad. Observe que ω está en rad/s, así que, por consistencia con las unidades, el número de onda k debe estar en rad/m en las ecuaciones (15.6) y (15.7). (Algunos físicos definen el número de onda como $1/\lambda$ en vez de $2\pi/\lambda$. Al leer otros textos, verifique cómo se definió este término.)

Graficación de la función de onda

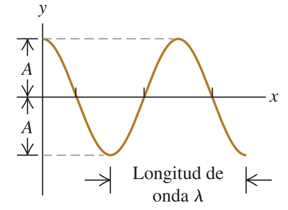
En la figura 15.9a, se grafica la función de onda $y(x, t)$ en función de x para un instante específico t. Esta gráfica da el desplazamiento y de una partícula con respecto a su posición de equilibrio en función de la coordenada x de la partícula. Si se trata de una onda transversal en una cuerda, la gráfica de la figura 15.9a representa la forma de la cuerda en ese instante, como una fotografía instantánea de la cuerda. En particular, en $t = 0$,

$$y(x, t = 0) = A\cos kx = A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}$$

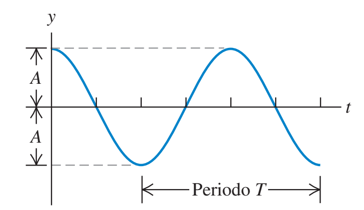
En la figura 15.9b, se muestra una gráfica de la función de onda contra el tiempo t para una coordenada x específica. Esta curva da el desplazamiento y de la partícula en

15.9 Dos gráficas de la función ondulatoria $y(x, t)$ en la ecuación (15.7). a) La gráfica de desplazamiento y contra la coordenada x en el tiempo $t = 0$. b) La gráfica de desplazamiento y contra el tiempo t en la coordenada $x = 0$. La escala vertical se exageró en a) y en b).

a) Si usamos la ecuación (15.7) para graficar y en función de x para el tiempo $t = 0$, la curva muestra la *forma* de la cuerda en $t = 0$.



b) Si usamos la ecuación (15.7) para graficar y en función de t para la posición $x = 0$, la curva muestra el *desplazamiento* y de la partícula en $x = 0$ en función del tiempo.



esa coordenada en función del tiempo; es decir, describe el movimiento de la partícula. Específicamente, en la posición $x = 0$,

$$y(x = 0, t) = A\cos(-\omega t) = A\cos\omega t = A\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

Esto es congruente con lo que dijimos originalmente acerca del movimiento en $x = 0$, ecuación (15.2).

CUIDADO **Gráficas de ondas** Aunque a primera vista las figuras 15.9a y 15.9b parecerían iguales, *no* son idénticas. La figura 15.9a es una imagen de la forma de la cuerda en $t = 0$, mientras que la figura 15.9b es una gráfica del desplazamiento y de una partícula en $x = 0$ en función del tiempo.

Más acerca de la función de onda

Podemos modificar las ecuaciones (15.3) a (15.7) para representar una onda que viaja en la dirección x *negativa*. En este caso, el desplazamiento del punto x en el instante t es el mismo que el del punto $x = 0$ en un instante *posterior* $(t + x/v)$, así que sustituimos t por $(t + x/v)$ en la ecuación (15.2). Para una onda que viaja en la dirección $-x$,

$$y(x, t) = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} + t\right) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) = A\cos(kx + \omega t) \quad (15.8)$$

(onda senoidal que se mueve en la dirección $-x$)

En la expresión $y(x, t) = A\cos(kx \pm \omega t)$ para una onda que viaja en la dirección $-x$ o bien $+x$, la cantidad $(kx \pm \omega t)$ se denomina **fase**, y desempeña el papel de cantidad angular (siempre en radianes) en la ecuación (15.7) o (15.8); su valor para cualesquiera valores de x y t determina qué parte del ciclo senoidal existe en un punto e instante dados. Para una cresta (donde $y = A$ y la función coseno vale 1), la fase podría ser 0, 2π, 4π, etcétera; para un valle (donde $y = -A$ y el coseno tiene el valor -1), podría ser π, 3π, 5π, etcétera.

La rapidez de onda es la rapidez con que tenemos que movernos con la onda para mantenernos junto a un punto que tiene una fase dada, como una cresta específica de una onda en una cuerda. Para una onda que viaja en la dirección $+x$, eso implica $kx - \omega t =$ constante. Derivando con respecto a t, obtenemos $k\,dx/dt = \omega$, o bien,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

Si comparamos esto con la ecuación (15.6), vemos que dx/dt es igual a la rapidez v de la onda. Por esta relación, a veces v se denomina la *velocidad de fase* de la onda. (Aunque *rapidez de fase* sería más correcto.)

Estrategia para resolver problemas 15.1 Ondas mecánicas



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Los problemas de ondas se dividen en dos grandes categorías. Los problemas de *cinemática* se ocupan de describir el movimiento de las ondas; en ellos intervienen la rapidez de onda v, la longitud de onda λ (o el número de onda k), la frecuencia f (o la frecuencia angular ω) y la amplitud A. También podría intervenir la posición, velocidad y aceleración de partículas individuales del medio. En problemas de *dinámica*, también se usan conceptos de las leyes de Newton, como fuerza y masa. Por ejemplo, más adelante en este capítulo encontraremos problemas donde interviene la relación entre la rapidez de onda y las propiedades mecánicas del medio.

Como siempre, identifique la(s) incógnita(s) del problema. En algunos casos, será la función de onda.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Elabore una lista de las cantidades cuyos valores se dan. Para visualizar mejor la situación, podría ser útil trazar gráficas de y contra x (como la figura 15.9a) y de y contra t (como la figura 15.9b). Rotule sus gráficas con los valores de las cantidades conocidas.

2. Decida qué ecuaciones necesitará. Si se dan dos de las tres cantidades v, f y λ, se puede obtener la tercera con la ecuación (15.1), ($v = \lambda f$) (véase el ejemplo 15.1). Si en el problema interviene la frecuencia angular ω o el número de onda k, se necesitarán las definiciones de esas cantidades y la ecuación (15.6), ($\omega = vk$). También podrían necesitarse las diversas formas de la función de onda dadas en las ecuaciones (15.3), (15.4) y (15.7).
3. Si no se da la rapidez de onda y no se tiene suficiente información para calcularla usando $v = \lambda f$, podría obtenerse a partir de las relaciones entre v y las propiedades mecánicas del sistema. (En la siguiente sección desarrollaremos esta relación para ondas en una cuerda.)

EJECUTAR *la solución como sigue:* Despeje las cantidades desconocidas empleando las ecuaciones que seleccionó. En algunos problemas sólo habrá que hallar el valor de una de las variables de onda.

Si le piden determinar la función de onda, necesitará conocer A y dos de las tres cantidades v, λ y f (o bien, v, k y ω). Una vez que tenga esa información, podrá usarla en la ecuación (15.3), (15.4) o (15.7) para obtener la función específica de onda para el problema en cuestión. Con ella, podrá obtener el valor de y en cualquier punto (valor de x) y en cualquier instante sustituyendo en la función de onda.

EVALUAR *la respuesta:* Examine de forma crítica sus resultados. Compruebe que los valores de v, f y λ (o bien, v, ω y k) concuerden con las relaciones dadas en la ecuación (15.1) o la (15.6). Si calculó la función de onda, revise uno o más casos especiales para los cuales pueda inferir los resultados.

Ejemplo 15.2 Onda en un tendedero

Su primo Morton está jugando con la cuerda para tender: desata un extremo, tensa la cuerda y mueve el extremo hacia arriba y hacia abajo senoidalmente, con una frecuencia de 2.00 Hz y una amplitud de 0.075 m. La rapidez de onda es $v = 12.0$ m/s. En $t = 0$, el extremo tiene desplazamiento positivo máximo y está en reposo instantáneamente. Suponga que ninguna onda rebota del extremo lejano para complicar el patrón. *a*) Calcule la amplitud, la frecuencia angular, el periodo, la longitud de onda y el número de onda. *b*) Obtenga una función de onda que la describa. *c*) Escriba las ecuaciones para el desplazamiento, en función del tiempo, del extremo que Morton sujeta y de un punto a 3.00 m de ese extremo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de cinemática acerca del movimiento de la cuerda. Puesto que Morton mueve la mano senoidalmente, produce una onda senoidal que se propaga por la cuerda. Por lo tanto, podemos usar todas las expresiones que desarrollamos en esta sección. Las incógnitas en el inciso *a*) son amplitud A, frecuencia angular ω, periodo T, longitud de onda λ y número de onda k, así que necesitamos usar las ecuaciones que relacionan estas cantidades. En los incisos *b*) y *c*), las “incógnitas” son en realidad expresiones de desplazamiento; para obtenerlas, usaremos las ecuaciones generales para la función de onda de una onda senoidal.

PLANTEAR: Una fotografía de la cuerda en el instante $t = 0$ se vería como la figura 15.9a, con el desplazamiento máximo en $x = 0$ (el extremo que sujeta Morton). Tomamos como dirección $+x$ la dirección en que se propaga la onda, para utilizar las ecuaciones (15.4) y (15.7) como descripción del desplazamiento de la cuerda en función de la posición x y el tiempo t. También usaremos las relaciones $f = 1/T$, $\omega = 2\pi f$, $k = 2\pi/\lambda$, $v = \lambda f$ y $\omega = vk$.

EJECUTAR: *a*) La amplitud A de la onda es la del movimiento del extremo de la cuerda, $A = 0.075$ m. Asimismo, la frecuencia de la onda es $f = 2.00$ Hz, igual a la frecuencia del extremo de la cuerda. La frecuencia angular es

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f = (2\pi \text{ rad/ciclo})(2.00 \text{ ciclos/s}) = 4.00\pi \text{ rad/s}\\ &= 12.6 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

El periodo es $T = 1/f = 0.500$ s. Obtenemos la longitud de onda de la ecuación (15.1):

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{12.0 \text{ m/s}}{2.00 \text{ s}^{-1}} = 6.00 \text{ m}$$

Calculamos el número de onda de la ecuación (15.5) o la (15.6):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{6.00 \text{ m}} = 1.05 \text{ rad/m} \qquad \text{o bien,}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{4.00\pi \text{ rad/s}}{12.0 \text{ m/s}} = 1.05 \text{ rad/m}$$

b) Puesto que obtuvimos los valores de A, T y λ en el inciso *a*), podemos escribir la función de onda empleando la ecuación (15.4):

$$\begin{aligned}y(x,t) &= A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\\ &= (0.075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{x}{6.00 \text{ m}} - \frac{t}{0.500 \text{ s}}\right)\\ &= (0.075 \text{ m})\cos[(1.05 \text{ rad/m})x - (12.6 \text{ rad/s})t]\end{aligned}$$

Podemos obtener esta misma ecuación de la ecuación (15.7) usando los valores de ω y k que obtuvimos en el inciso *a*).

c) Con la dirección $+x$ que elegimos, los dos puntos en cuestión están en $x = 0$ y $x = +3.00$ m. Para cada uno, podemos obtener una expresión para el desplazamiento en función de t, sustituyendo estos valores de x en la función de onda obtenida en el inciso *b*):

$$\begin{aligned}y(x = 0, t) &= (0.075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{0}{6.00 \text{ m}} - \frac{t}{0.500 \text{ s}}\right)\\ &= (0.075 \text{ m})\cos(12.6 \text{ rad/s})t\\ y(x = +3.00 \text{ m}, t) &= (0.075 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{3.00 \text{ m}}{6.00 \text{ m}} - \frac{t}{0.500 \text{ s}}\right)\\ &= (0.075 \text{ m})\cos[\pi - (12.6 \text{ rad/s})t]\\ &= -(0.075 \text{ m})\cos(12.6 \text{ rad/s})t\end{aligned}$$

continúa

EVALUAR: En el inciso *b*), la cantidad (1.05 rad/m)x − (12.6 rad/s)t es la *fase* de un punto x de la cuerda en el instante t. Las fases de los dos puntos de el inciso *c*) difieren en π porque los puntos están separados por media longitud de onda ($\lambda/2 = (6.00 \text{ m})/2 = 3.00$ m). Ambos puntos oscilan en un MAS con la misma frecuencia y amplitud; pero sus oscilaciones están desfasadas medio ciclo. Así, mientras que una gráfica de y contra t para el punto en $x = 0$ es una curva de coseno (como la figura 15.9b), una gráfica de y contra t para el punto $x = 3.00$ m es un coseno *negativo* (igual a una curva de coseno desplazada medio ciclo).

Usando la expresión para $y(x = 0, t)$ del inciso *c*), ¿puede demostrar que el extremo de la cuerda en $x = 0$ está instantáneamente en reposo en $t = 0$, como se dijo al principio del ejemplo? (*Sugerencia:* calcule la velocidad en este punto derivando y con respecto a t.)

Velocidad y aceleración de partículas en una onda senoidal

De la función de onda podemos obtener una expresión para la velocidad transversal de cualquier *partícula* en una onda transversal, que llamaremos v_y para distinguirla de la rapidez de propagación de la onda, v. Para calcular v_y en un punto x dado, derivamos la función de onda $y(x, t)$ con respecto a t, manteniendo x constante. Si la función de onda es

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$$

entonces,

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \tag{15.9}$$

En esta expresión, ∂ es una d modificada para recordarnos que $y(x, t)$ es una función de *dos* variables y que sólo estamos permitiendo que una de ellas (t) varíe. La otra (x) es constante porque estamos examinando un punto dado de la cuerda. Ésta es una *derivada parcial.* Si no ha llegado a ese punto en sus cursos de cálculo, no se preocupe; es una idea sencilla.

La ecuación (15.9) muestra que la velocidad transversal de una partícula varía con el tiempo, lo esperado en movimiento armónico simple. La rapidez máxima de una partícula es ωA; ésta puede ser mayor, menor o igual que la rapidez de onda v, dependiendo de la amplitud y la frecuencia de la onda.

La *aceleración* de cualquier partícula es la *segunda* derivada parcial de $y(x, t)$ con respecto a t:

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t) = -\omega^2 y(x, t) \tag{15.10}$$

La aceleración de una partícula es igual a $-\omega^2$ por su desplazamiento, que es el resultado que obtuvimos en la sección 13.2 para el movimiento armónico simple.

También podemos calcular derivadas parciales de $y(x, t)$ con respecto a x, manteniendo t constante. Esto equivale a estudiar la forma de la cuerda en un momento dado, como una fotografía instantánea. La primera derivada $\partial y(x, t)/\partial x$ es la *pendiente* de la cuerda en cualquier punto. La segunda derivada parcial con respecto a x es la *curvatura* de la cuerda:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t) = -k^2 y(x, t) \tag{15.11}$$

Por las ecuaciones (15.10) y (15.11), y la relación $\omega = vk$, vemos que

$$\frac{\partial^2 y(x, t)/\partial t^2}{\partial^2 y(x, t)/\partial x^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = v^2 \qquad \text{y}$$
$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \qquad \text{(ecuación de onda)} \tag{15.12}$$

Dedujimos la ecuación (15.12) para una onda que viaja en la dirección $+x$. Se pueden seguir los mismos pasos para demostrar que la función de onda para una onda senoidal que se propaga en la dirección *x negativa*, $y(x, t) = A \cos(kx + \omega t)$, también satisface esta ecuación.

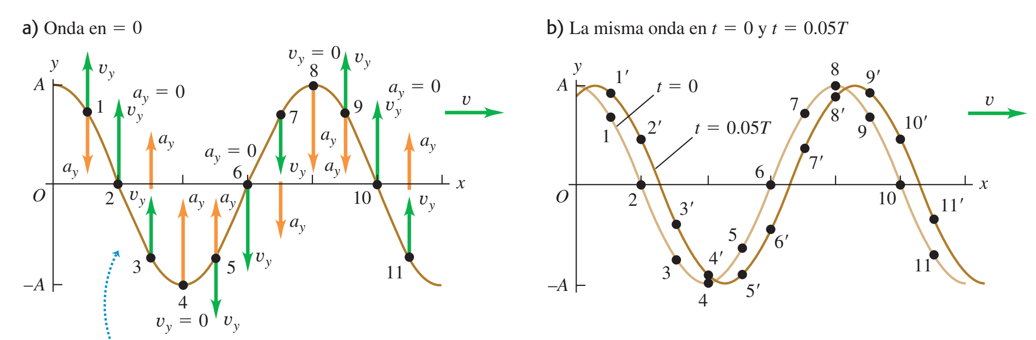
La ecuación (15.12), llamada **ecuación de onda**, es una de las más importantes en física. Siempre que ocurre, sabemos que una perturbación puede propagarse como onda a lo largo del eje x con rapidez v. La perturbación no tiene que ser una onda senoidal; veremos en la siguiente sección que *cualquier* onda en una cuerda obedece la ecuación (15.12), sea periódica o no (véase también el problema 15.61). En el capítulo 32 veremos que los campos eléctricos y magnéticos satisfacen la ecuación de onda; la rapidez de la onda resulta ser la de la luz, lo que nos llevará a la conclusión de que la luz es una onda electromagnética.

La figura 15.10a muestra la velocidad v_y y la aceleración a_y transversales, dadas por las ecuaciones (15.9) y (15.10), para varios puntos de una cuerda cuando una onda senoidal pasa por ella. Observe que, en puntos donde la cuerda tiene curvatura hacia arriba $\left(\partial^2 y/\partial x^2 > 0\right)$, la aceleración del punto es positiva $\left(a_y = \partial^2 y/\partial t^2 > 0\right)$; esto se sigue de la ecuación de onda, ecuación (15.12). Por la misma razón, la aceleración es negativa $\left(a_y = \partial^2 y/\partial t^2 < 0\right)$ en puntos donde la cuerda tiene curvatura hacia abajo $\left(\partial^2 y/\partial x^2 < 0\right)$, y la aceleración es cero $\left(a_y = \partial^2 y/\partial t^2 = 0\right)$ en los puntos de inflexión donde la curvatura es cero $\left(\partial^2 y/\partial x^2 = 0\right)$. Destacamos otra vez que v_y y a_y son la velocidad y la aceleración *transversales* de puntos en la cuerda; estos puntos se mueven en la dirección y, no en la dirección de propagación de la onda. Los movimientos transversales de varios puntos de la cuerda pueden verse en la figura 15.10b.

El concepto de función de onda es igualmente útil para las ondas *longitudinales*, y todo lo que hemos dicho acerca de funciones de onda se puede adaptar a este caso. La cantidad y sigue midiendo el desplazamiento de una partícula del medio con respecto a su posición de equilibrio; la diferencia es que, para una onda longitudinal, el desplazamiento es *paralelo* al eje x en vez de perpendicular a él. Veremos las ondas longitudinales con detalle en el capítulo 16.

Evalúe su comprensión de la sección 15.3 La figura 15.8 muestra una onda senoidal de periodo T en una cuerda en los instantes $0, \frac{1}{8}T, \frac{2}{8}T, \frac{3}{8}T, \frac{4}{8}T, \frac{5}{8}T, \frac{6}{8}T, \frac{7}{8}T$ y T *a*) ¿En qué instante el punto A está en la cuerda que se mueve hacia arriba con rapidez máxima? *b*) En qué instante el punto B en la cuerda tiene la máxima aceleración hacia arriba? *c*) ¿En qué instante el punto C en la cuerda tiene una aceleración hacia abajo, pero una velocidad hacia arriba?

15.10 a) Otra vista de la onda en $t = 0$ de la figura 15.9a. Los vectores muestran la velocidad transversal v_y y la aceleración transversal a_y en varios puntos de la cuerda. b) Desde $t = 0$ hasta $t = 0.05\,T$, una partícula en el punto 1 se desplaza al punto 1′, una partícula en el punto 2 se desplaza al punto 2′, y así sucesivamente.



ActivPhysics ONLINE

10.2 Rapidez de las ondas en una cuerda

15.4 Rapidez de una onda transversal

Una de las propiedades clave de cualquier onda es su *rapidez*. Las ondas de luz en aire tienen una rapidez de propagación mucho mayor que las del sonido (3.00×10^8 m/s contra 344 m/s); por esto vemos el destello de un relámpago antes de oír el trueno. En esta sección veremos qué determina la rapidez de propagación de un tipo de onda específico: ondas transversales en una cuerda. La rapidez de estas ondas es importante por derecho propio, ya que es una parte fundamental del análisis de los instrumentos musicales de cuerda, como veremos más adelante en este capítulo. Además, la rapidez de muchos tipos de ondas mecánicas tiene la misma expresión matemática básica que la rapidez de ondas en una cuerda.

Las cantidades físicas que determinan la rapidez de las ondas transversales en una cuerda son la *tensión* de la cuerda y su *masa por unidad de longitud* (también llamada *densidad de masa lineal*). Podríamos suponer que aumentar la tensión aumenta las fuerzas de restitución que tienden a enderezar la cuerda cuando se le perturba, aumentando así la rapidez de la onda. También podríamos suponer que aumentar la masa haría el movimiento más lento, reduciendo la rapidez. Resulta que ambas ideas son correctas. Desarrollaremos la relación exacta entre rapidez de onda, tensión y masa por unidad de longitud usando dos métodos distintos. El primero es conceptualmente sencillo y considera una forma de onda específica; el segundo es más general pero también más formal. Seleccione el que más le guste.

Rapidez de una onda en una cuerda: Primer método

Consideramos una cuerda perfectamente flexible (figura 15.11). En la posición de equilibrio, la tensión es F y la densidad de masa lineal (masa por unidad de longitud) es μ. (Si porciones de la cuerda se desplazan con respecto al equilibrio, la masa por unidad de longitud disminuye un poco y la tensión aumenta un poco.) despreciaremos el peso de la cuerda, de modo que cuando la cuerda esté en reposo en la posición de equilibrio forme una línea perfectamente recta como en la figura 15.11a.

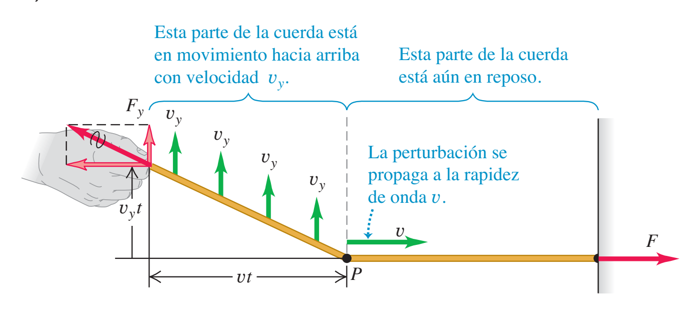
Comenzando en el instante $t = 0$, aplicamos una fuerza constante hacia arriba F_y al extremo izquierdo de la cuerda. Esperaríamos que el extremo se moviera con aceleración constante; eso sucedería si la fuerza se aplicara a una masa *puntual*. Aquí, el efecto de la fuerza F_y es poner sucesivamente cada vez más masa en movimiento. La onda viaja con rapidez constante v, así que el punto de división P entre la porciones en movimiento y estáticas se mueve con la misma rapidez constante v (figura 15.11b).

15.11 Propagación de onda transversal en una cuerda.

a) Cuerda en equilibrio



b) Parte de la cuerda en movimiento



La figura 15.11b muestra que todas las partículas de la porción en movimiento de la cuerda se mueven hacia arriba con *velocidad* constante v_y, no aceleración constante. Para entender esto, observamos que el *impulso* de la fuerza F_y hasta el instante t es $F_y t$. Según el teorema del impulso y momento lineal (sección 8.1), el impulso es igual al cambio en la componente transversal total del momento lineal ($mv_y - 0$) de la parte de la cuerda en movimiento. Dado que el sistema inició *sin* momento lineal transversal, esto es igual al momento lineal total en el instante t:

$$F_y t = mv_y$$

Así, el momento lineal total debe aumentar proporcionalmente con el tiempo. Sin embargo, dado que el punto de división P se mueve con rapidez constante, la longitud de la cuerda que está en movimiento y, por lo tanto, la masa total m en movimiento, también son proporcionales al tiempo t durante el cual la fuerza ha estado actuando. De esta manera, el *cambio* de momento lineal debe estar asociado únicamente a la cantidad creciente de masa en movimiento, no a una velocidad creciente de un elemento de masa individual. Es decir, mv_y cambia porque m cambia, no porque v_y cambie.

En el instante t, el extremo izquierdo de la cuerda ha subido una distancia $v_y t$, en tanto que el punto de frontera P ha avanzado una distancia vt. La fuerza total en el extremo izquierdo de la cuerda tiene componentes F y F_y. ¿Por qué F? No hay movimiento en la dirección a lo largo de la cuerda, así que no hay ninguna fuerza horizontal no balanceada. Por lo tanto F, la magnitud de la componente horizontal, no cambia cuando la cuerda se desplaza. En la posición desplazada, la tensión es $\left(F^2 + F_y^2\right)^{1/2}$ (mayor que F), y la cuerda se estira un poco.

Para deducir una expresión para la rapidez de la onda v, aplicamos otra vez el teorema del impulso y momento lineal a la porción de la cuerda en movimiento en el instante t, es decir, la porción a la izquierda de P en la figura 15.11b. El *impulso* transversal (fuerza transversal multiplicada por el tiempo) es igual al cambio de *momento lineal* transversal de la porción en movimiento (masa multiplicada por la componente transversal de velocidad). El impulso de la fuerza transversal F_y en el instante t es $F_y t$. En la figura 15.11b, el triángulo rectángulo cuyo vértice está en P, con catetos $v_y t$ y vt, es semejante al triángulo rectángulo cuyo vértice está en la posición de la mano, con catetos F_y y F. Entonces,

$$\frac{F_y}{F} = \frac{v_y t}{vt} \qquad F_y = F\frac{v_y}{v}$$

e

$$\text{Impulso transversal} = F_y t = F\frac{v_y}{v}t$$

La masa de la porción en movimiento de la cuerda es el producto de la masa por unidad de longitud μ y la longitud vt, es decir, μvt. El momento lineal transversal es el producto de esta masa y la velocidad transversal v_y:

$$\text{Momento lineal transversal} = (\mu vt)v_y$$

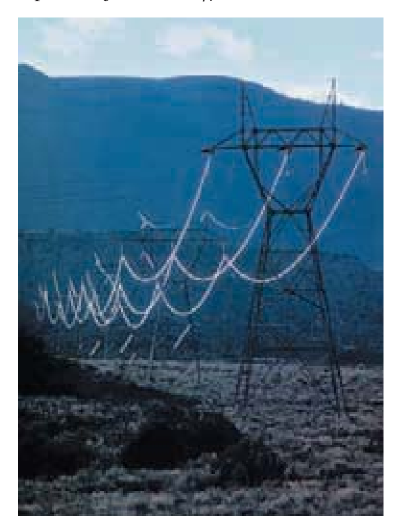
Observamos una vez más que el momento lineal aumenta con el tiempo, *no* porque la masa se mueva con mayor rapidez, como solía suceder en el capítulo 8, sino porque *más masa* se pone en movimiento. No obstante, el impulso de la fuerza F_y sigue siendo igual al cambio total de momento lineal del sistema. Aplicando esta relación, obtenemos

$$F\frac{v_y}{v}t = \mu vtv_y$$

Despejando v, obtenemos

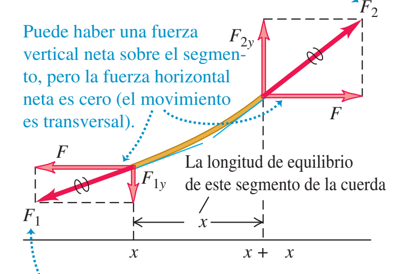
$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(rapidez de una onda transversal en una cuerda)} \qquad (15.13)$$

15.12 Estos cables tienen una cantidad relativamente grande de masa por unidad de longitud (μ) y una tensión (F) baja. Si los cables sufren una perturbación (como cuando un ave se posa sobre ellos), viajarán ondas transversales en ellos con rapidez baja $v = \sqrt{F/\mu}$.



15.13 Diagrama de cuerpo libre de un segmento de cuerda. La fuerza en cada extremo de la cuerda es tangente a la cuerda en el punto de aplicación.

La cuerda a la derecha del segmento (no se muestra) ejerce una fuerza $\vec{F}_2$ en un segmento.



La cuerda a la izquierda del segmento (no se muestra) ejerce una fuerza $\vec{F}_1$ sobre el segmento.

La ecuación (15.13) confirma nuestra predicción de que la rapidez de onda v debería aumentar al incrementarse la tensión F, pero disminuir cuando la masa por unidad de longitud μ aumenta (figura 15.12).

Observe que v_y no aparece en la ecuación (15.13); por lo tanto, la rapidez de la onda no depende de v_y. Nuestro cálculo consideró sólo un tipo muy especial de pulso, pero podemos considerar *cualquier* forma de perturbación ondulatoria como una serie de pulsos con diferentes valores de v_y. Así, aunque dedujimos la ecuación (15.13) para un caso especial, es válida para *cualquier* movimiento ondulatorio transversal en una cuerda, incluidas la onda senoidal y las otras ondas periódicas que vimos en la sección 15.3. Observe también que la rapidez de onda no depende de la amplitud ni la frecuencia de la onda, en congruencia con nuestros supuestos de la sección 15.3.

Rapidez de una onda en una cuerda: segundo método

Veamos una deducción alterna de la ecuación (15.13). Si el lector no maneja con confianza las derivadas parciales, puede omitirlas. Aplicamos la segunda ley de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, a un pequeño segmento de cuerda, cuya longitud en la posición de equilibrio es Δx (figura 15.13). La masa del segmento es $m = \mu\,\Delta x$; las fuerzas en los extremos se representan en términos de sus componentes x y y. Las componentes x tienen magnitud igual F y su suma es cero, porque el movimiento es transversal y no hay componente de aceleración en la dirección x. Para obtener F_{1y} y F_{2y}, observamos que el cociente F_{1y}/F es igual en magnitud a la *pendiente* de la cuerda en el punto x y que F_{2y}/F es igual a la pendiente en el punto $x + \Delta x$. Teniendo cuidado con los signos, vemos que

$$\frac{F_{1y}}{F} = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \qquad \frac{F_{2y}}{F} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \tag{15.14}$$

La notación nos recuerda que las derivadas se evalúan en los puntos x y $x + \Delta x$, respectivamente. Por la ecuación (15.14), vemos que la componente y de fuerza neta es

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \tag{15.15}$$

Ahora igualamos F_y de la ecuación (15.15) a la masa $\mu\,\Delta x$ multiplicada por la componente y de aceleración, $\partial^2 y/\partial t^2$. Obtenemos

$$F\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] = \mu\,\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.16}$$

o bien, dividiendo entre $F\,\Delta x$,

$$\frac{\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.17}$$

Ahora tomamos el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$. En este límite, el lado izquierdo de la ecuación (15.17) se convierte en la derivada de $\partial y/\partial x$ con respecto a x (con t constante), es decir, la *segunda* derivada (parcial) de y con respecto a x:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{15.18}$$

Por fin llegamos al desenlace de nuestra historia. La ecuación (15.18) tiene exactamente la misma forma que la *ecuación de onda*, ecuación (15.12), que dedujimos al final de la sección 15.3. Esa ecuación y la (15.18) describen el mismo movimiento, así que deben ser idénticas. Si comparamos las dos ecuaciones, vemos que, para que así suceda, debemos tener

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \tag{15.19}$$

que es la misma expresión que la ecuación (15.13).

En esta deducción no hicimos supuestos especiales acerca de la forma de la onda. Puesto que nuestra deducción nos llevó a redescubrir la ecuación (15.12), la ecuación de onda, concluimos que la ecuación de onda es válida para las ondas en una cuerda, *sea cual fuere* su forma.

La rapidez de las ondas mecánicas

La ecuación (15.13) o la (15.19) da la rapidez de la onda únicamente para el caso especial de las ondas mecánicas en un hilo o una cuerda estirados. Curiosamente, para muchos tipos de ondas mecánicas, incluidas las ondas en una cuerda, la expresión para la rapidez de la onda tiene la misma forma general:

$$v = \sqrt{\frac{\text{Fuerza de restitución que vuelve el sistema al equilibrio}}{\text{Inercia que resiste el retorno al equilibrio}}}$$

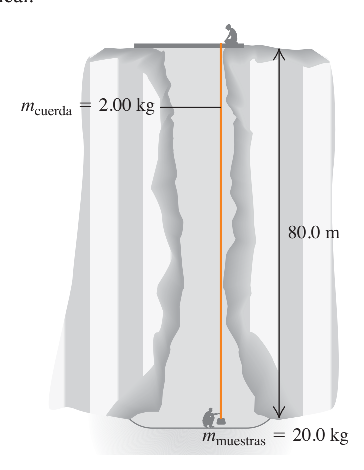
Para interpretar esta expresión, examinemos una vez más el caso de ondas en una cuerda. La tensión F en la cuerda desempeña el papel de la fuerza de restitución; tiende a hacer que la cuerda vuelva a su configuración de equilibrio, no perturbada. La masa de la cuerda —o, mejor dicho, la densidad lineal de masa μ— proporciona la inercia que evita que la cuerda regrese instantáneamente al equilibrio. Por lo tanto, tenemos $v = \sqrt{F/\mu}$ para la rapidez de ondas en una cuerda.

En el capítulo 16 veremos una expresión similar para la rapidez de las ondas sonoras en un gas. A grandes rasgos, la presión del gas proporciona la fuerza que tiende a volver al gas a su estado no perturbado después de que una onda sonora pasa por él. La inercia proviene de la densidad, o masa por unidad de volumen, del gas.

Ejemplo 15.3 Cálculo de la rapidez de onda

Un extremo de una cuerda de nylon está atado a un soporte estacionario en la boca de un tiro de mina vertical de 80.0 m de profundidad (figura 15.14). La cuerda está tensada por una caja de muestras de minerales con masa de 20.0 kg atada al extremo inferior. La masa de la cuerda es de 2.00 kg. El geólogo que está hasta abajo envía señales a su colega de arriba tirando lateralmente de la cuerda. *a*) Calcule la rapidez de una onda transversal en la cuerda. *b*) Si a un punto de la cuerda se imparte un movimiento armónico simple transversal con frecuencia de 2.00 Hz, ¿cuántos ciclos de la onda habrá en la cuerda?

15.14 Envío de señales mediante ondas transversales en una cuerda vertical.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En el inciso *a*), la incógnita es la rapidez de la onda. Esta parte tiene aspectos de *dinámica*, que es la relación entre la rapidez de la onda y las propiedades de la cuerda (tensión y densidad de masa lineal). El inciso *b*) implica *cinemática*, pues necesitamos conocer cómo se relacionan la rapidez, la frecuencia y la longitud de la onda. (La incógnita es en realidad el número de longitudes de onda que caben en la longitud de la cuerda.)

Supondremos que la tensión en la cuerda se debe al peso de la caja de muestras. De hecho, el peso de la cuerda misma contribuye a la tensión, lo que implica que la tensión sea diferente tanto en la parte de arriba de la cuerda, como en la parte de abajo. Despreciaremos este efecto porque el peso de la cuerda es pequeño en comparación con el peso de las muestras de minerales.

PLANTEAR: Usaremos la relación $v = \sqrt{F/\mu}$ en el inciso *a*). Si despreciamos el peso de la cuerda, la tensión F será igual al peso de la caja. En el inciso *b*), usaremos la ecuación $v = f\lambda$ para obtener la longitud de onda, que compararemos después con la longitud de la cuerda (80.0 m).

EJECUTAR: *a*) La tensión en la cuerda (debida a la caja de muestras) es:

$$F = m_{\text{muestras}}g = (20.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 196\ \text{N}$$

continúa

y la masa por unidad de longitud de la cuerda es

$$\mu = \frac{m_{\text{cuerda}}}{L} = \frac{2.00\text{ kg}}{80.0\text{ m}} = 0.0250\text{ kg/m}$$

Entonces, por la ecuación (15.13), la rapidez de la onda es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{196\text{ N}}{0.0250\text{ kg/m}}} = 88.5\text{ m/s}$$

b) Por la ecuación (15.1),

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{88.5\text{ m/s}}{2.00\text{ s}^{-1}} = 44.3\text{ m}$$

La longitud de la cuerda es de 80.0 m, así que el número de ciclos que caben en la cuerda es

$$\frac{80.0\text{ m/s}}{44.3\text{ m/ciclo}} = 1.81\text{ ciclos}$$

EVALUAR: Si consideramos el peso de la cuerda, la tensión es mayor en la parte de arriba de la cuerda que abajo. Por lo tanto, la rapidez de la onda aumentará y la longitud de onda disminuirá conforme la onda suba por la cuerda. ¿Puede comprobar que la rapidez de la onda al llegar a la parte superior es de 92.9 m/s?

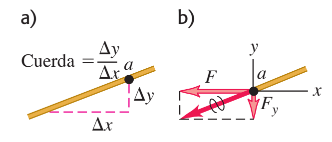
Evalúe su comprensión de la sección 15.4 Las seis cuerdas de una guitarra tienen la misma longitud y están sometidas a una tensión muy parecida, pero tienen diferente espesor. ¿En qué cuerda viajan con mayor rapidez las ondas? i) la cuerda más gruesa; ii) la cuerda más delgada; iii) la rapidez de onda es la misma en todas las cuerdas.

15.5 Energía del movimiento ondulatorio

Todo movimiento ondulatorio tiene *energía* asociada a él. La energía que recibimos del Sol y los efectos destructivos del oleaje y los terremotos lo atestiguan. Para producir cualesquiera de los movimientos ondulatorios que hemos visto en este capítulo, necesitamos aplicar una fuerza a una porción del medio de la onda; el punto de aplicación se mueve, así que efectuamos *trabajo* sobre el sistema. Al propagarse la onda, cada porción del medio ejerce una fuerza y realiza trabajo sobre la porción adyacente. De este modo, una onda puede transportar energía de una región del espacio a otra.

Como ejemplo de las consideraciones de energía en el movimiento ondulatorio, examinemos otra vez las ondas transversales en una cuerda. ¿Cómo se transfiere energía de una porción de la cuerda a otra? Imagine una onda que viaja de izquierda a derecha (dirección $+x$) y un punto a específico de la cuerda (figura 15.15a). La cuerda a la izquierda de a ejerce una fuerza sobre la cuerda a la derecha, y viceversa. En la figura 15.15b, se ha quitado la cuerda a la izquierda de a, y la fuerza que ejerce en a se representa con las componentes F y F_y, como en las figuras 15.11 y 15.13. Destacamos que F_y/F es igual al negativo de la *pendiente* de la cuerda en a, que también está dada por $\partial y/\partial x$. Juntando esto, tenemos

15.15 a) Punto a en una cuerda que lleva una onda de izquierda a derecha. b) Componentes de la fuerza ejercida sobre la parte derecha de la cuerda por la parte izquierda en el punto a.



$$F_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \tag{15.20}$$

Necesitamos el signo negativo porque F_y es negativa cuando la pendiente es positiva. Escribimos la fuerza vertical como $F_y(x, t)$ para recordar que su valor puede variar en diferentes puntos de la cuerda y con el tiempo.

Cuando el punto a se mueve en la dirección y, la fuerza F_y efectúa *trabajo* sobre este punto y, por lo tanto, transfiere energía a la parte de la cuerda que está a la derecha de a. La potencia correspondiente P (rapidez con que se hace trabajo) en el punto a es la fuerza transversal $F_y(x, t)$ en a multiplicada por la velocidad transversal $v_y(x, t) = \partial y(x, t)/\partial t$ de ese punto:

$$P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = -F\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \tag{15.21}$$

Esta potencia es la razón *instantánea* con que se transfiere energía por la cuerda; su valor depende de la posición x en la cuerda y del tiempo t. Sólo se transfiere energía en los puntos en que la cuerda tiene pendiente distinta de cero ($\partial y/\partial x$), de modo que hay una componente transversal de la tensión, y en los que la cuerda tiene velocidad transversal distinta de cero ($\partial y/\partial t$), de modo que la fuerza transversal puede efectuar trabajo.

La ecuación (15.21) es válida para *cualquier* onda en una cuerda, sea senoidal o no. Para una onda senoidal con función de onda dada por la ecuación (15.7), tenemos

$$\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos(kx-\omega t) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} &= -kA\,\mathrm{sen}(kx-\omega t) \\ \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} &= \omega A\,\mathrm{sen}(kx-\omega t) \\ P(x,t) &= Fk\omega A^2\,\mathrm{sen}^2(kx-\omega t) \end{aligned} \tag{15.22}$$

Usando las relaciones $\omega = vk$ y $v^2 = F/\mu$, también podemos expresar la ecuación (15.22) en la forma alterna

$$P(x,t) = \sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2\,\mathrm{sen}^2(kx-\omega t) \tag{15.23}$$

La función sen^2 nunca es negativa, así que la potencia instantánea de una onda senoidal es positiva (con flujo de energía en la dirección $+x$), o bien, cero (donde no hay transferencia de energía). Nunca se transfiere energía en la dirección opuesta a la de propagación de la onda (figura 15.16).

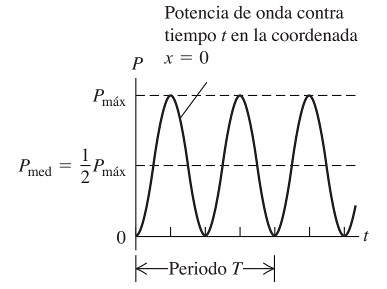
El valor máximo de la potencia instantánea $P(x, t)$ se da cuando la función sen^2 vale la unidad:

$$P_{\text{máx}} = \sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2 \tag{15.24}$$

Para obtener la potencia *media* a partir de la ecuación (15.23), observamos que el valor *medio* de la función sen^2 en cualquier número entero de ciclos es $\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la potencia media es

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2 \quad \text{(potencia media, onda senoidal en una cuerda)} \tag{15.25}$$

15.16 La potencia instantánea $P(x, t)$ de una onda senoidal, dada por la ecuación (15.23), se muestra en función del tiempo en la coordenada $x = 0$. La potencia nunca es negativa, lo que implica que la energía nunca fluye en dirección opuesta a la de propagación de la onda.



La potencia media es la mitad de la potencia instantánea máxima (véase la figura 15.16).

La razón media de transferencia de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia. Esta proporcionalidad es un resultado general para ondas mecánicas de todo tipo, incluidas las ondas sísmicas (véase la fotografía inicial del capítulo). En el caso de una onda mecánica, la razón de transferencia de energía se cuadruplica, si se duplica la frecuencia (sin variar la amplitud) o si se duplica la amplitud (sin variar la frecuencia). ?

Las ondas electromagnéticas son un poco diferentes. Aunque la razón media de transferencia de energía en una onda electromagnética es proporcional al cuadrado de la amplitud, como sucede con las ondas mecánicas, es independiente del valor de ω.

Ejemplo 15.4 Potencia en una onda

a) En el ejemplos 15.2, ¿con qué rapidez máxima Morton aporta energía a la cuerda? Es decir, ¿cuál es su potencia instantánea máxima? Suponga que la densidad de masa lineal de la cuerda es $\mu = 0.250$ kg/m y que Morton aplica una tensión $F = 36.0$ N. *b*) ¿Cuál es su potencia media? *c*) Al cansarse Morton, la amplitud disminuye. Calcule la potencia media cuando la amplitud ha bajado a 7.50 mm.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita en el inciso *a*) es la potencia *instantánea máxima*, mientras que en *b*) y en *c*) es la potencia *media*. Como vimos, estas dos cantidades tienen valores distintos para una onda senoidal. Podremos calcular los valores de ambas cantidades porque conocemos todas las demás propiedades de la onda gracias al ejemplo 15.2.

PLANTEAR: En el inciso *a*) usaremos la ecuación (15.24); en *b*) y *c*), usaremos la ecuación (15.25).

EJECUTAR: *a*) La potencia instantánea máxima es

$$\begin{aligned} P_{\text{máx}} &= \sqrt{\mu F}\,\omega^2A^2 \\ &= \sqrt{(0.250\text{ kg/m})(36.0\text{ N})}\,(4.00\pi\text{ rad/s})^2(0.075\text{ m})^2 \\ &= 2.66\text{ W} \end{aligned}$$

continúa

b) Por las ecuaciones (15.24) y (15.25), la potencia media es la mitad de la potencia instantánea máxima, así que

$$P_{\text{med}} = \frac{1}{2}(2.66\ \text{W}) = 1.33\ \text{W}$$

c) La nueva amplitud es $\frac{1}{10}$ del valor empleado en los incisos *a*) y *b*). La potencia media es proporcional al *cuadrado* de la amplitud, que ahora es

$$P_{\text{med}} = \left(\frac{1}{10}\right)^2(1.33\ \text{W}) = 0.0133\ \text{W} = 13.3\ \text{mW}$$

EVALUAR: La potencia instantánea *máxima* en el inciso *a*) se da cuando la cantidad $\text{sen}^2(kx - \omega t)$ de la ecuación (15.23) es igual a 1. En cualquier valor de x, eso sucede dos veces durante cada periodo de la onda: una vez cuando la función seno es igual a $+1$ y otra vez cuando es igual a -1. La potencia instantánea *mínima* es cero; se da cuando $\text{sen}(kx - \omega t) = 0$, lo cual también sucede dos veces por periodo.

¿Puede usted confirmar que los valores dados de μ y F imprimen la rapidez de onda mencionada en el ejemplo 15.2?

Intensidad de las ondas

Las ondas en una cuerda transfieren energía en una sola dimensión del espacio (a lo largo de la cuerda). Sin embargo, otros tipos de ondas, incluidas las ondas sonoras en el aire y las ondas sísmicas en la Tierra, transportan energía en las tres dimensiones espaciales. Para ondas que viajan en tres dimensiones, definimos su **intensidad** (denotada con I) como *la rapidez media con que la onda transporta energía, por unidad de área*, a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación. Es decir, la intensidad I es la potencia media por unidad de área. Por lo regular, se mide en watts por metro cuadrado (W/m^2).

Si las ondas se propagan igualmente en todas direcciones a partir de una fuente, la intensidad a una distancia r de la fuente es inversamente proporcional a r^2 (figura 15.17). Esto es consecuencia directa de la conservación de la energía. Si la potencia desarrollada por la fuente es P, entonces la intensidad media I_1 en una esfera con radio r_1 y superficie $4\pi r_1^2$ es

$$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$$

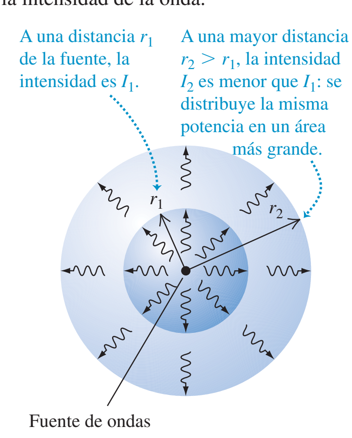
La intensidad media I_2 en una esfera con diferente radio r_2 está dada por una expresión similar. Si no se absorbe energía entre las dos esferas, la potencia P deberá ser la misma en ambas, así que

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \text{(ley del inverso del cuadrado para la intensidad)} \qquad (15.26)$$

Por lo tanto, la intensidad I a cualquier distancia r es inversamente proporcional a r^2. Esta relación se denomina *ley del inverso del cuadrado* para la intensidad.

15.17 Cuanto mayor sea la distancia desde la fuente de una onda, mayor será el área sobre la cual se distribuye la potencia de la onda, y menor será la intensidad de la onda.



Ejemplo 15.5 La ley del inverso del cuadrado

Una sirena del sistema de advertencia de tornados que está colocada en un poste alto radia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. A una distancia de 15.0 m, la intensidad del sonido es de 0.250 W/m^2. ¿A qué distancia de la sirena la intensidad es de 0.010 W/m^2?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Dado que las ondas se propagan igualmente en todas direcciones, podemos usar la ley del inverso del cuadrado. La incógnita es la distancia de la fuente del sonido.

PLANTEAR: La relación que debemos usar es la ecuación (15.26). Nos dan la distancia $r_1 = 15.0$ m a la que la intensidad es $I_1 = 0.250$ W/m^2; queremos encontrar la distancia r_2 a la que la intensidad es $I_2 = 0.010\ \text{W/m}^2$.

EJECUTAR: Despejamos r_2 de la ecuación (15.26):

$$r_2 = r_1\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = (15.0\ \text{m})\sqrt{\frac{0.250\ \text{W/m}^2}{0.010\ \text{W/m}^2}} = 75.0\ \text{m}$$

EVALUAR: Para comprobar nuestra respuesta, observamos que r_2 es cinco veces mayor que r_1. Por la ley del inverso del cuadrado, la intensidad I_2 debería ser $1/5^2 = 1/25$ de la intensidad I_1, y así es.

Al usar la ley del inverso del cuadrado, hemos supuesto que las ondas sonoras viajan en línea recta desde la sirena. Una solución más realista tendría en cuenta la reflexión de las ondas sonoras en el suelo. Sin embargo, semejante solución rebasa el alcance de este libro.

Evalúe su comprensión de la sección 15.5 Cada una de cuatro cuerdas idénticas transportan una onda senoidal de frecuencia 10 Hz. La tensión de la cuerda y la amplitud de onda son diferentes para diferentes para cuerdas: Ordene de mayor a menor los valores de la potencia media de la onda en las siguientes cuerdas: i) tensión 10 N, amplitud 1.0 mm; ii) tensión 40 N, amplitud 1.0 mm; iii) tensión 10 N, amplitud 4.0 mm; iv) tensión 20 N, amplitud 2.0 mm.

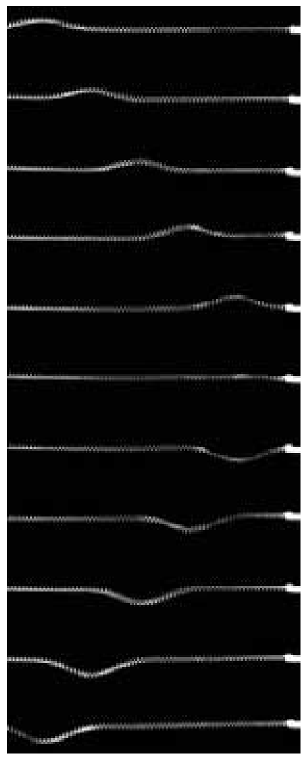
15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición

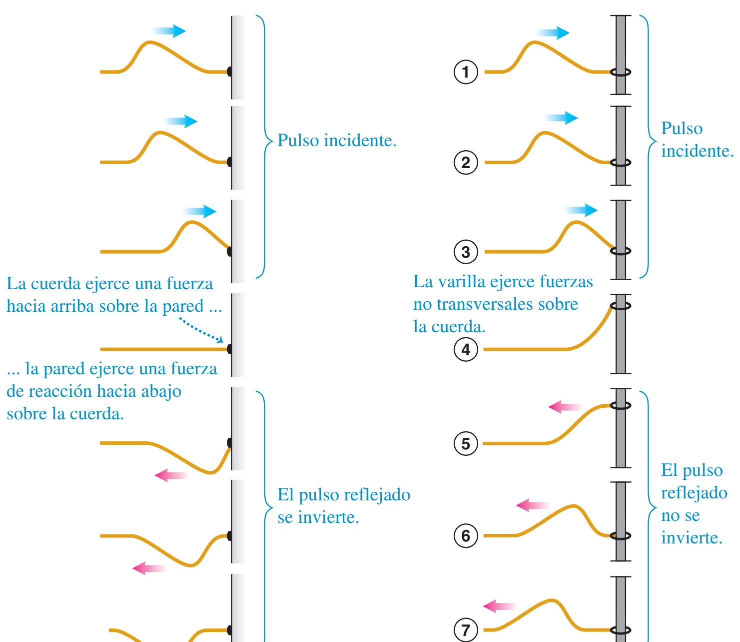
Hasta aquí, hemos hablado de ondas que se propagan continuamente en la misma dirección. Sin embargo, cuando una onda choca contra las fronteras de su medio, se *refleja* parcial o totalmente. Si gritamos hacia la pared de un edificio o hacia un acantilado que está a cierta distancia, la onda sonora se refleja en la superficie rígida, y escuchamos un eco. Si sacudimos el extremo de una cuerda cuyo otro extremo está atado a un soporte rígido, una pulsación viajará a lo largo de la cuerda y se reflejará hacia nosotros. En ambos casos, la onda inicial y la reflejada se traslapan en la misma región del medio. Este traslape de ondas se denomina **interferencia**. (En general, el término "interferencia" se refiere a lo que sucede cuando dos o más ondas pasan por la misma región al mismo tiempo.)

Como ejemplo sencillo de reflexión de ondas y el papel de la frontera de un medio de onda, veamos otra vez las ondas transversales en una cuerda estirada. ¿Qué sucede cuando un pulso de onda o una onda senoidal llega al *extremo* de la cuerda?

Si el extremo está sujeto a un soporte rígido, es un extremo *fijo* que no puede moverse. La onda incidente ejerce una fuerza sobre el soporte; la reacción a esta fuerza, ejercida *por* el soporte *sobre* la cuerda, "recula" sobre la cuerda y crea una pulsación u onda *reflejada* que viaja en la dirección opuesta. La figura 15.18 es una serie de fotografías que muestran la reflexión de un pulso en el extremo fijo de un resorte espiral largo. El pulso reflejado se mueve en la dirección opuesta a la del pulso inicial, o *incidente*, y su desplazamiento también es opuesto. Esta situación se ilustra para un pulso ondulatorio en una cuerda en la figura 15.19a.

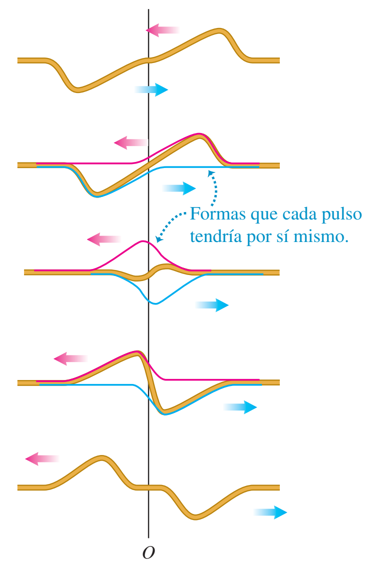
15.18 Serie de imágenes de un pulso de onda, tomadas a intervalos iguales de arriba a abajo. El pulso comienza a la izquierda en la imagen superior, viaja a la derecha, y es reflejado por el extremo derecho fijo.



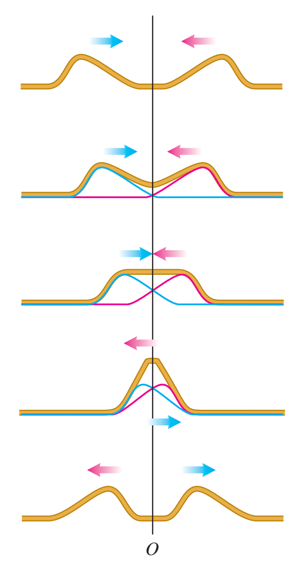


15.19 Reflexión de un pulso de onda a) en un extremo fijo de una cuerda y b) en un extremo libre. El tiempo aumenta hacia abajo en cada figura.

15.20 Traslape de dos pulsos de onda (uno hacia arriba, el otro invertido) que viajan en direcciones opuestas. El tiempo aumenta hacia abajo.



15.21 Traslape de dos pulsos de onda (ambos arriba de la cuerda) que viajan en direcciones opuestas. El tiempo aumenta hacia abajo. Compárelo con la figura 15.20.



La situación opuesta a un extremo fijo es un extremo *libre* que puede moverse sin resistencia en la dirección perpendicular a la longitud de la cuerda. Por ejemplo, la cuerda podría estar atada a un anillo ligero que se desliza sin fricción en una varilla perpendicular a la cuerda, como en la figura 15.19b. El anillo y la varilla mantienen la tensión pero no ejercen una fuerza transversal. Cuando una onda llega a este extremo libre, el anillo se desliza por la varilla. El anillo alcanza un desplazamiento máximo y tanto él como la cuerda se detienen momentáneamente, como en el cuarto dibujo de la figura15.19b. La cuerda ahora está estirada, aumentando la tensión, así que el extremo libre de la cuerda es llevado otra vez hacia abajo, produciéndose otra vez un pulso reflejado (dibujo 7). Como en el caso del extremo fijo, el pulso reflejado se mueve en dirección opuesta a la del pulso inicial, pero ahora la dirección del desplazamiento es la misma que en el pulso inicial. Las condiciones en el extremo de la cuerda, como un soporte rígido o la ausencia total de fuerza transversal, se denominan **condiciones de frontera**.

La formación del pulso reflejado es similar al traslape de dos pulsos que viajan en direcciones opuestas. La figura 15.20 muestra dos pulsos con la misma forma, una invertida con respecto a la otra, que viajan en direcciones opuestas. Al traslaparse los pulsos y pasarse mutuamente, el desplazamiento total de la cuerda es la *suma algebraica* de los desplazamientos en ese punto en los pulsos individuales. Puesto que estos dos pulsos tienen la misma forma, el desplazamiento total en el punto O a la mitad de la figura es cero en todo momento. Así, el movimiento de la mitad derecha de la cuerda sería el mismo si cortáramos la cuerda en el punto O, desecháramos el lado derecho, y sostuviéramos el extremo en O fijo. Así, los dos pulsos del lado izquierdo corresponden a los pulsos incidente y reflejado, combinándose de modo que el desplazamiento total en O *siempre* sea cero. Para que esto ocurra, el pulso reflejado debe estar invertido relativo al pulso incidente.

La figura 15.21 muestra dos pulsos con la misma forma, que viajan en direcciones opuestas pero *no* invertidas entre sí. El desplazamiento en O a la mitad de la figura no es cero, pero la pendiente de la cuerda en este punto siempre es cero. Según la ecuación (15.20), esto corresponde a la ausencia de fuerza transversal en este punto. En tal caso, el movimiento de la mitad derecha de la cuerda sería el mismo que si cortáramos la cuerda en O y ancláramos el extremo con un anillo deslizante sin fricción (figura 15.19b) que mantiene la tensión sin ejercer fuerza transversal. En otras palabras, esta situación corresponde a la reflexión de un pulso en un extremo libre de una cuerda en el punto O. En este caso, el pulso reflejado *no* se invierte.

Principio de superposición

Combinar los desplazamientos de los pulsos individuales en cada punto para obtener el desplazamiento real es un ejemplo del **principio de superposición**: cuando dos ondas se traslapan, el desplazamiento real de cualquier punto de la cuerda en cualquier instante se obtiene sumando el desplazamiento que tendría el punto si sólo estuviera presente la primera onda, con el desplazamiento que tendría si sólo estuviera presente la segunda. Dicho de otro modo, la función de onda $y(x, t)$ que describe el movimiento resultante en esta situación se obtiene *sumando* las dos funciones de onda de las ondas individuales.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \qquad \text{(principio de superposición)} \qquad (15.27)$$

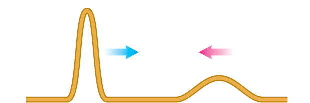
Matemáticamente, esta propiedad aditiva es consecuencia de la forma de la ecuación de onda, ecuación (15.12) o (15.18), que toda onda físicamente posible debe satisfacer. Específicamente, la ecuación de onda es *lineal*; es decir, sólo contiene la función $y(x, t)$ a la primera potencia (no hay términos en $y(x, t)^2$, $y(x, t)^{1/2}$, etcétera). Por lo tanto, si cualesquiera dos funciones $y_1(x, t)$ y $y_2(x, t)$ satisfacen la ecuación de onda por separado, su suma $y_1(x, t) + y_2(x, t)$ también la satisface y por ello es un movimiento físicamente posible. Puesto que este principio depende de la linealidad de la ecuación de onda y la propiedad de combinación lineal correspondiente de sus soluciones, también se denomina *principio de superposición lineal*. En algunos sistemas

físicos, como un medio que no obedece la ley de Hooke, la ecuación de onda *no* es lineal, y el principio no se cumple.

El principio de superposición es muy importante para todo tipo de ondas. Si un amigo nos habla mientras escuchamos música, podemos distinguir el sonido de su voz del sonido de la música. Esto es precisamente porque la onda sonora total que llega a nuestros oídos es la suma algebraica de la onda producida por la voz del amigo y la producida por los altavoces (bocinas) de su equipo modular. Si dos ondas sonoras *no* se combinaran de esta sencilla forma lineal, el sonido que oiríamos en esta situación sería una revoltura incomprensible. La superposición también se aplica a las ondas electromagnéticas (como la luz) y de muchos otros tipos.

Evalúe su comprensión de la sección 15.6 La figura 15.22 muestra dos pulsos de onda con diferente forma que viajan en direcciones opuestas por una cuerda. Haga una serie de dibujos como los de la figura 15.21 que muestren la forma de la cuerda al aproximarse, traslaparse y pasarse los dos pulsos.

15.22 Dos pulsos de onda con diferente forma.



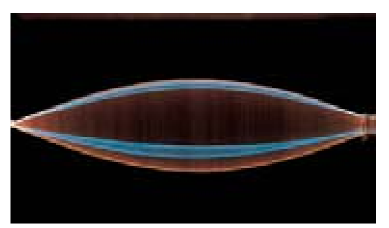
15.7 Ondas estacionarias en una cuerda

Hemos hablado de la reflexión de un *pulso* de onda en una cuerda cuando llega a una frontera (un extremo fijo o libre). Veamos ahora lo que sucede cuando una onda *senoidal* es reflejada por un extremo fijo de una cuerda. Otra vez enfocaremos el problema considerando la superposición de dos ondas que se propagan por la cuerda, una que representa la onda original o incidente, y otra que representa la onda reflejada en el extremo fijo.

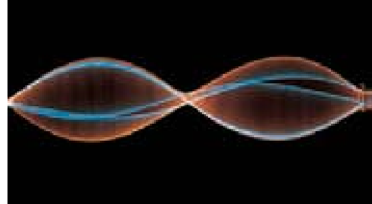
La figura 15.23 muestra una cuerda fija en su extremo izquierdo. El extremo derecho se sube y baja en movimiento armónico simple para producir una onda que viaja a la izquierda; la onda reflejada del extremo fijo viaja a la derecha. El movimiento resultante cuando se combinan las dos ondas ya no parece dos ondas que viajan en direcciones opuestas. La cuerda parece subdividirse en segmentos, como

15.23 a) a d) Exposiciones sucesivas de ondas estacionarias en una cuerda estirada. De *a*) a *d*), la frecuencia de oscilación del extremo derecho aumenta, y la longitud de la onda estacionaria disminuye. e) Los extremos del movimiento de la onda estacionaria de *b*), con nodos en el centro y en los extremos. El extremo derecho de la cuerda se mueve muy poco en comparación con los antinodos, así que es prácticamente un nodo.

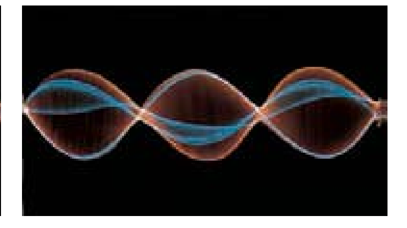
a) La cuerda tiene media longitud de onda



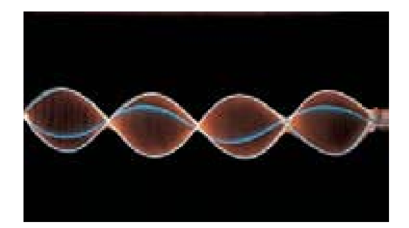
b) La cuerda es de una longitud de onda



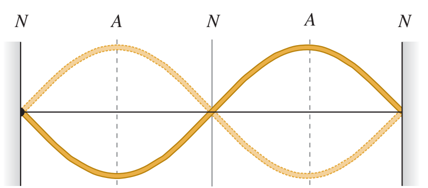
c) La cuerda es de una y media longitudes de onda



d) La cuerda es de dos longitudes de onda



e) La forma de la cuerda en b) en dos instantes diferentes



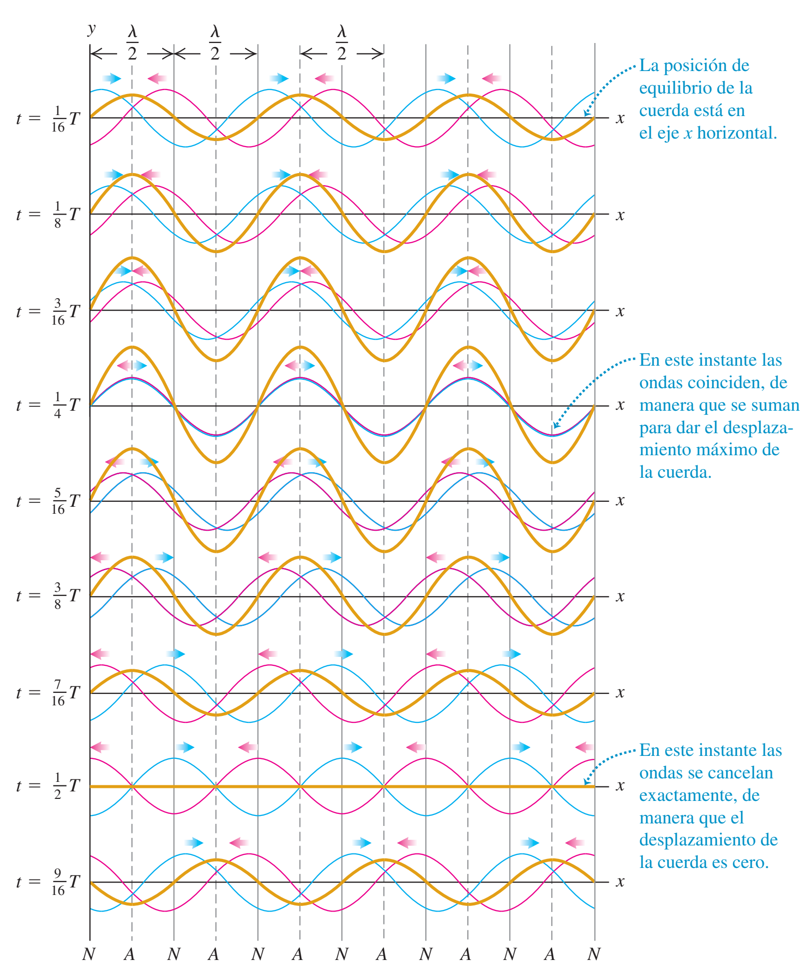
N = **nodos**: puntos donde la cuerda nunca se mueve.

A = **antinodos**: puntos donde la amplitud del movimiento de la cuerda es máximo.

en las exposiciones de tiempo de las figuras 15.23a, 15.23b, 15.23c y 15.23d. La figura 15.23e muestra dos formas instantáneas de la cuerda de la figura 15.23b. Comparemos este comportamiento con las ondas que estudiamos en las secciones 15.1 a 15.5. En una onda que viaja por la cuerda, la amplitud es constante y el patrón de la onda se mueve con rapidez igual a la rapidez de la onda. Aquí, en cambio, el patrón de la onda permanece en la misma posición en la cuerda, y su amplitud fluctúa. Hay ciertos puntos llamados **nodos** (rotulados con N en la figura 15.23e) que nunca se mueven. A la mitad del camino entre los nodos hay puntos llamados **antinodos** (rotulados con A en la figura 15.23e) donde la amplitud de movimiento es máxima. Dado que el patrón no parece estarse moviendo a lo largo de la cuerda, se denomina **onda estacionaria**. (Para enfatizar la diferencia, una onda que *sí* se mueve por la cuerda es una **onda viajera**.)

El principio de superposición explica cómo la onda incidente y la reflejada se combinan para formar una onda estacionaria. En la figura 15.24, las curvas rojas indican una onda que viaja a la izquierda. La curvas azules muestran una onda que viaja a la derecha con la misma rapidez de propagación, longitud de onda y amplitud. Las ondas se muestran en nueve instantes, separados por un $\frac{1}{16}$ de periodo. En cada punto de la cuerda, sumamos los desplazamientos (valores de y) para las dos ondas individuales; el resultado es la onda total en la cuerda, dibujada en color marrón.

15.24 Formación de una onda estacionaria. Una onda que viaja a la izquierda (curvas rojas) se combina con otra que viaja a la derecha (curvas azules) para formar una onda estacionaria (curvas marrón).



En ciertos instantes, como $t = \frac{1}{4}T$, los dos patrones de onda están exactamente en fase entre sí, y la forma de la cuerda es una curva senoidal con el doble de amplitud que las ondas individuales. En otros instantes, como $t = \frac{1}{2}T$, las dos ondas están totalmente desfasadas y la onda total en ese instante es cero. El desplazamiento resultante *siempre* es cero en los lugares marcados con N en la base de la figura 15.24. Éstos son los *nodos*. En un nodo, los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son iguales y opuestos, y se cancelan. Esta cancelación se llama **interferencia destructiva**. A la mitad del camino entre los nodos están los puntos de *máxima* amplitud o *antinodos*, marcados con A**.** En los antinodos, los desplazamientos de las dos ondas en rojo y azul siempre son idénticos, dando un desplazamiento resultante grande; este fenómeno se llama **interferencia constructiva**. Podemos ver que la distancia entre nodos o antinodos sucesivos es media longitud de onda, $\lambda/2$.

Podemos deducir una función de onda para la onda estacionaria de la figura 15.24, sumando las funciones de onda $y_1(x, t)$ y $y_2(x, t)$ para dos ondas con amplitud, periodo y longitud de onda iguales que viajan en direcciones opuestas. Aquí, $y_1(x, t)$ (las curvas rojas de la figura 15.24) representa una onda *incidente* que viaja a la izquierda por el eje $+x$, llegando al punto $x = 0$ y reflejándose; $y_2(x, t)$ (las curvas azules de la figura 15.24) representa la onda *reflejada* que viaja a la derecha desde $x = 0$. En la sección 15.6 señalamos que la onda reflejada del extremo fijo de una cuerda se invierte, así que anteponemos un signo negativo a una de las ondas:

$$y_1(x, t) = -A\cos(kx + \omega t) \qquad \text{(onda incidente que viaja a la izquierda)}$$

$$y_2(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad \text{(onda reflejada que viaja a la derecha)}$$

Observe también que el cambio de signo corresponde a un *desfasamiento* de 180° o π radianes. En $x = 0$, el movimiento de la onda reflejada es $A \cos \omega t$; y el de la incidente, $-A \cos \omega t$, que también podemos escribir como $A \cos (\omega t + \pi)$. Por la ecuación (15.27), la función de onda para la onda estacionaria es la suma de las funciones de ondas individuales:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$$

Podemos replantear los términos coseno usando las identidades para el coseno de la suma y la diferencia de dos ángulos: $\cos (a \pm b) = \cos a \cos b \pm \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$. Haciéndolo y combinando términos, obtenemos la función de la onda estacionaria:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = (2A \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{o bien,}$$

$$y(x, t) = (A_{SW} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{(onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en } x = 0) \qquad (15.28)$$

La amplitud de la onda estacionaria, A_{SW}, es dos veces la amplitud A de cualquiera de las ondas viajeras originales:

$$A_{SW} = 2A$$

La ecuación (15.28) tiene dos factores: una función de x y una de t. El factor A_{SW} sen kx indica que, en cada instante, la forma de la cuerda es una curva senoidal. No obstante, a diferencia de una onda que viaja por una cuerda, la forma de la onda permanece en la misma posición, oscilando verticalmente según el factor sen ωt. Este comportamiento se muestra gráficamente con las curvas marrón de la figura 15.24. Todos los puntos de la cuerda están en movimiento armónico simple, pero todos los que están entre cualquier par sucesivo de nodos oscilan *en fase*. Esto contrasta con las diferencias de fase entre oscilaciones de puntos adyacentes, que vemos en las ondas que viajan en una dirección.

Podemos usar la ecuación (15.28) para determinar las posiciones de los nodos; éstos son los puntos en los que sen $kx = 0$, de modo que el desplazamiento *siempre* es cero. Esto sucede cuando $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, es decir, usando $k = 2\pi/\lambda$,

$$\begin{aligned} x &= 0, \frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}, \ldots \\ &= 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{2\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots \end{aligned} \quad \text{(nodos de una onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en } x = 0\text{)} \tag{15.29}$$

En particular, hay un nodo en $x = 0$, como debería ser, ya que este punto es un extremo fijo de la cuerda.

A diferencia de una onda viajera, una onda estacionaria *no* transfiere energía de un extremo al otro. Las dos ondas que la forman transportarían individualmente cantidades iguales de potencia en direcciones opuestas. Hay un flujo local de energía de cada nodo a los antinodos adyacentes, y de regreso; pero la razón *media* de transferencia de energía es cero en todos los puntos. Si el lector evalúa la potencia de onda dada por la ecuación (15.21) usando la función de onda de la ecuación (15.28), encontrará que la potencia media es cero (véase el problema de desafío 15.84).

Estrategia para resolver problemas 15.2 Ondas estacionarias



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Al igual que con las ondas viajeras, resulta útil distinguir entre las cantidades puramente cinemáticas, como la rapidez de onda v, longitud de onda λ y frecuencia f, y las cantidades dinámicas donde intervienen las propiedades del medio, como F y μ para ondas transversales en una cuerda. Una vez que distinga la incógnita, intente determinar si el problema es de naturaleza exclusivamente cinemática o si también intervienen las propiedades del medio.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Al visualizar nodos y antinodos en ondas estacionarias, siempre es útil hacer diagramas. Para una cuerda, podemos dibujar la forma en un instante, y rotular los nodos N y antinodos A. La distancia entre dos nodos o antinodos adyacentes siempre es $\lambda/2$; y entre un nodo y el antinodo adyacente, $\lambda/4$.
2. Decida qué ecuaciones necesitará. La función de onda para la onda estacionaria casi siempre es útil [como la ecuación (15.28)].
3. Se puede calcular la rapidez de onda si se conocen λ y f (o, lo que es equivalente, $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$) o las propiedades del medio (en el caso de una cuerda, F y μ).

EJECUTAR *la solución como sigue:* Despeje las incógnitas utilizando las ecuaciones seleccionadas. Una vez que tenga la función de onda, podrá obtener el valor del desplazamiento y en cualquier punto del medio de la onda (valor de x) y en cualquier instante. Se puede calcular la velocidad de una partícula en el medio de la onda obteniendo la derivada parcial de y con respecto al tiempo. Para calcular la aceleración de la partícula, obtenga la segunda derivada parcial de y con respecto al tiempo.

EVALUAR *la respuesta:* Compare sus respuestas numéricas con su diagrama. Compruebe que la función de onda sea compatible con las condiciones de frontera (por ejemplo, el desplazamiento deberá ser cero en un extremo fijo).

Ejemplo 15.6 Ondas estacionarias en una cuerda de guitarra

Una de las cuerdas de una guitarra está en el eje x cuando está en equilibrio. El extremo en $x = 0$ (el puente de la guitarra) está fijo. Una onda senoidal incidente (correspondiente a las curvas rojas de la figura 15.24) viaja por la cuerda en la dirección $-x$ a 143.0 m/s, con amplitud de 0.750 mm y frecuencia de 440 Hz. Esta onda se refleja del extremo fijo en $x = 0$, y la superposición de las ondas viajeras incidente y reflejada forma una onda estacionaria. *a*) Obtenga la ecuación que da el desplazamiento de un punto de la cuerda en función de la posición y el tiempo. *b*) Encuentre los puntos de la cuerda que no se mueven. *c*) Calcule la amplitud, la velocidad transversal máxima y la aceleración transversal máxima en los puntos de máxima oscilación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de *cinemática* donde nos piden describir el movimiento de la cuerda (véase la Estrategia para resolver problemas 15.1 de la sección 15.3). Ahora, las incógnitas son la función de onda de la onda estacionaria [inciso *a*)], la ubicación de los puntos que no se mueven [*nodos*, inciso *b*)] y los valores máximos de desplazamiento y, velocidad transversal v_y y aceleración transversal a_y [inciso *c*)]. (Las ondas en una cuerda son ondas transversales, así que *transversal* significa "en la dirección del desplazamiento", es decir, en la dirección y.) Para obtener estas cantidades, usamos la expresión que dedujimos en esta sección para una onda estacionaria en una cuerda con un extremo fijo, así como otras relaciones de las secciones 15.2 y 15.3.

PLANTEAR: Puesto que hay un extremo fijo en $x = 0$, podemos usar las ecuaciones (15.28) y (15.29) para describir esta onda estacionaria. También usaremos las relaciones entre ω, k, f, λ y la rapidez de onda v.

EJECUTAR: *a*) Para usar la ecuación (15.28), necesitamos los valores de A_{SW}, ω y k. La amplitud de la onda incidente es $A = 0.750 \text{ mm} =$

7.50×10^{-4} m; la onda reflejada tiene la misma amplitud, y la amplitud de la onda estacionaria es $A_{SW} = 2A = 1.50 \times 10^{-3}$ m. La frecuencia angular ω y el número de onda k son

$$\omega = 2\pi f = (2\pi \text{ rad})(440 \text{ s}^{-1}) = 2760 \text{ rad/s}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2760 \text{ rad/s}}{143 \text{ m/s}} = 19.3 \text{ rad/m}$$

Entonces, la ecuación (15.28) da

$$\begin{aligned} y(x,t) &= (A_{SW} \operatorname{sen} kx) \operatorname{sen} \omega t \\ &= [(1.50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \operatorname{sen}(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

b) Las posiciones de los *nodos* están dadas por la ecuación (15.29): $x = 0, \lambda/2, \lambda, 3\lambda/2, \ldots$. La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{143 \text{ m/s}}{440 \text{ Hz}} = 0.325 \text{ m}$$

así que los nodos estarán a estas distancias del extremo fijo:

$$x = 0, 0.163 \text{ m}, 0.325 \text{ m}, 0.488 \text{ m}, \ldots$$

c) Por la expresión del inciso *a*) para $y(x, t)$, vemos que el desplazamiento máximo con respecto al equilibrio es 1.50×10^{-3} m $= 1.50$ mm, que es dos veces la amplitud de la onda incidente. Este máximo se da en los *antinodos*, que están a medio camino entre nodos adyacentes (es decir, en $x = 0.081$ m, 0.244 m, 0.406 m, ...).

Para una partícula de la cuerda en cualquier punto x, la velocidad transversal (en la dirección y) es

$$\begin{aligned} v_y(x,t) &= \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \\ &= [(1.50 \times 10^{-3} \text{ m}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \\ &\quad \times [(2760 \text{ rad/s}) \cos(2760 \text{ rad/s})t] \\ &= [(4.15 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \cos(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

En un antinodo, $\operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x = \pm 1$, y el valor de la velocidad transversal varía entre 4.15 m/s y -4.15 m/s. Como sucede siempre en movimiento armónico simple, la velocidad máxima se da cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio ($y = 0$).

La aceleración transversal $a_y(x, t)$ es la primera derivada parcial de $v_y(x, t)$ con respecto a t (es decir, la *segunda* derivada parcial de $y(x, t)$ con respecto al tiempo). Dejamos el cálculo al lector; el resultado es

$$\begin{aligned} a_y(x,t) &= \frac{\partial v_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \\ &= [(-1.15 \times 10^4 \text{ m/s}^2) \operatorname{sen}(19.3 \text{ rad/m})x] \\ &\quad \times \operatorname{sen}(2760 \text{ rad/s})t \end{aligned}$$

En los antinodos, el valor de la aceleración transversal varía entre $+1.15 \times 10^4$ m/s^2 y -1.15×10^4 m/s^2.

EVALUAR: La velocidad transversal máxima en un antinodo es muy respetable (unos 15 km/h o unas 9.3 mi/h); pero la aceleración transversal máxima es formidable: ¡1170 veces la aceleración debida a la gravedad! Las cuerdas de guitarra se hacen de material resistente para aguantar semejante aceleración.

En realidad, las cuerdas de guitarra se fijan en *ambos* extremos. Veremos las consecuencias de esto en la sección siguiente.

Evalúe su comprensión de la sección 15.7 Suponga que se duplica la frecuencia de la onda estacionaria del ejemplo 15.6, de 440 Hz a 880 Hz. ¿Todos los nodos con $f = 440$ Hz serían también nodos con $f = 880$ Hz? Si es así, ¿habría nodos adicionales con $f = 880$ Hz? Si no, ¿qué nodos faltan con $f = 880$ Hz?

15.8 Modos normales de una cuerda



10.4 Ondas estacionarias en cuerdas
10.5 Afinación de un instrumento de cuerda: ondas estacionarias
10.6 Masa de una cuerda y ondas estacionarias

Hemos descrito ondas estacionarias en una cuerda sujeta rígidamente por un extremo, como en la figura 15.23. No supusimos nada acerca de la longitud de la cuerda ni de lo que sucedía en el otro extremo. Consideremos ahora una cuerda de longitud definida L, sujeta rígidamente en *ambos* extremos. Tales cuerdas se encuentran en muchos instrumentos musicales, como pianos, violines y guitarras. Cuando se pulsa una cuerda de guitarra, se produce una onda en ella; esta onda se refleja una y otra vez en los extremos de la cuerda, formando una onda estacionaria. Ésta, a la vez, produce una onda sonora en el aire, cuya frecuencia está determinada por las propiedades de la cuerda. Esto es lo que hace a los instrumentos de cuerda tan útiles para producir música.

Para entender estas propiedades de las ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos, veamos primero lo que sucede cuando establecemos una onda senoidal en una cuerda así. La onda estacionaria que resulta debe tener un nodo en *ambos* extremos de la cuerda. En la sección anterior, vimos que dos nodos adyacentes están separados media longitud de onda ($\lambda/2$), así que la longitud de la cuerda debe ser $\lambda/2$, o $2(\lambda/2)$, o $3(\lambda/2)$ o, en general, un número entero de medias longitudes de onda:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \qquad (15.30)$$

15.25 Cada cuerda de un violín oscila naturalmente en una o más de sus frecuencias armónicas, produciendo en el aire ondas sonoras con las mismas frecuencias.



Esto es, si una cuerda de longitud L está fija en ambos extremos, sólo puede existir una onda estacionaria si su longitud de onda satisface la ecuación (15.30).

Despejando λ de esta ecuación y denotando los posibles valores de λ con λ_n, tenemos

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \qquad (15.31)$$

Pueden existir ondas en la cuerda si la longitud de onda *no* es igual a uno de estos valores; sin embargo, no puede haber un patrón de onda estable con nodos y antinodos, y la onda total no puede ser estacionaria. Las ondas estacionarias de las figuras 15.23a, 15.23b, 15.23c y 15.23d ilustran la ecuación (15.31); éstas representan $n = 1$, 2, 3 y 4, respectivamente.

A la serie de posibles longitudes de onda estacionaria λ_n corresponde una serie de posibles frecuencias de onda estacionaria f_n, cada una relacionada con su longitud de onda correspondiente por $f_n = v/\lambda_n$. La frecuencia más pequeña f_1 corresponde a la longitud de onda más grande (el caso $n = 1$), $\lambda_1 = 2L$:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \qquad (15.32)$$

Ésta se llama **frecuencia fundamental**. Las otras frecuencias de onda estacionaria son $f_2 = 2v/2L$, $f_3 = 3v/2L$, etcétera. Todas éstas son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental f_1, como $2f_1$, $3f_1$, $4f_1$, y así sucesivamente, y podemos expresar *todas* las frecuencias como

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \qquad (15.33)$$

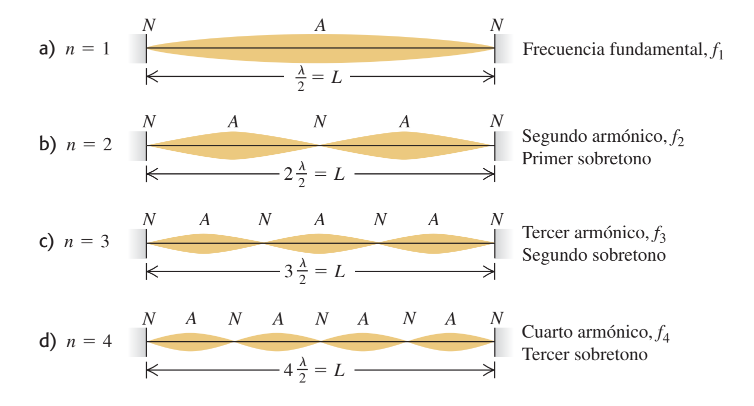
Estas frecuencias se llaman **armónicos**, y la serie es una **serie armónica**. Algunos músicos llaman a f_2, f_3, etcétera, **sobretonos**; f_2 es el segundo armónico o el primer sobretono, f_3 es el tercer armónico o el segundo sobretono, y así sucesivamente. El primer armónico es la frecuencia fundamental (figura 15.25).

Para una cuerda con extremos fijos en $x = 0$ y $x = L$, la función de onda $y(x, t)$ de la n-ésima onda estacionaria está dada por la ecuación (15.28) (que satisface la condición de que haya un nodo en $x = 0$), con $\omega = \omega_n = 2\pi f_n$ y $k = k_n = 2\pi/\lambda_n$:

$$y_n(x, t) = A_{SW} \operatorname{sen} k_n x \operatorname{sen} \omega_n t \qquad (15.34)$$

Es fácil demostrar que esta función de onda tiene nodos en $x = 0$ y $x = L$, como debe ser.

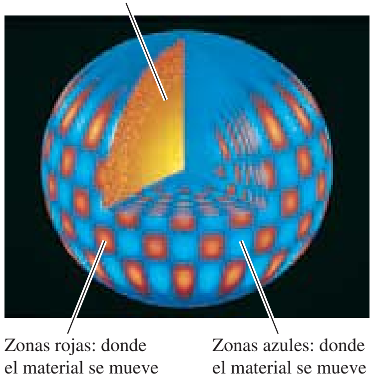
Un **modo normal** de un sistema oscilante es un movimiento en el que todas las partículas del sistema se mueven senoidalmente con la misma frecuencia. En el caso de un sistema compuesto por una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, cada una de las longitudes de onda dadas por la ecuación (15.31) corresponde al patrón y a la frecuencia de un posible modo normal. Hay un número infinito de modos normales, cada uno con su frecuencia y patrón de vibración característicos. La figura 15.26 muestra los primeros cuatro patrones de modo normal y sus respectivas frecuencias



15.26 Los primeros cuatro modos normales de una cuerda fija en ambos extremos. (Compare éstos con las fotografías de la figura 15.23.)

y longitudes de onda, que corresponden a la ecuación (15.34) con $n = 1, 2, 3$ y 4. En contraste, un oscilador armónico, que sólo tiene una partícula oscilante, tiene un solo modo normal y una sola frecuencia característica. La cuerda fija en ambos extremos tiene un número infinito de modos normales, porque se compone de un número muy grande (efectivamente infinito) de partículas. Otros sistemas oscilantes más complejos también tienen una infinidad de modos normales, aunque con patrones más complejos de modo normal que una cuerda (figura 15.27).

15.27 Los astrónomos han descubierto que el Sol oscila en varios modos normales distintos. En esta simulación por computadora muestra de uno de esos modos.



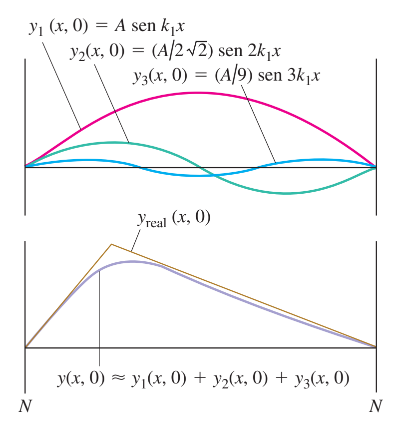
Ondas estacionarias complejas

Si pudiéramos desplazar una cuerda de modo que su forma tuviera la de uno de los patrones de modo normal, y luego soltarla, vibraría con la frecuencia de ese modo. Tal cuerda vibrante desplazaría el aire circundante con la misma frecuencia, produciendo una onda sonora senoidal viajera que nuestro oído percibiría como un tono puro. Sin embargo, cuando una cuerda se golpea (como en un piano) o pulsa (como en una guitarra), la forma de la cuerda desplazada *no* es tan sencilla como uno de los patrones de la figura 15.26. En la vibración resultante están presentes la frecuencia fundamental y muchos sobretonos. Por lo tanto, ese movimiento es una combinación o *superposición* de muchos modos normales. Varios movimientos armónicos simples de diferentes frecuencias están presentes simultáneamente, y el desplazamiento de cualquier punto de la cuerda es la suma (o superposición) de los desplazamientos asociados a los modos individuales. El sonido producido por la cuerda vibrante es igualmente una superposición de ondas sonoras senoidales viajeras, que percibimos como un tono rico y complejo con la frecuencia fundamental f_1. La onda estacionaria en la cuerda y la onda sonora viajera en el aire tienen el mismo **contenido armónico** (el grado en que están presentes frecuencias más altas que la fundamental). El contenido armónico depende de cómo se pone en movimiento inicialmente la cuerda. Si pulsamos las cuerdas de una guitarra acústica en el lugar normal sobre el agujero, el sonido tiene diferente contenido armónico, que si las pulsamos cerca del extremo fijo en el cuerpo de la guitarra.

ActivPhysics ONLINE
10.10 Ondas complejas: análisis de Fourier

Es posible representar cada posible movimiento de la cuerda como una superposición de movimientos de modo normal. Encontrar esta representación para un patrón de vibración dado se denomina *análisis armónico*. La suma de funciones senoidales que representa una onda compleja se llama *serie de Fourier*. La figura 15.28 muestra cómo una onda estacionaria que se produce pulsando una cuerda de guitarra de longitud L en un punto a $L/4$ de un extremo puede representarse como una combinación de funciones senoidales.

15.28 Cuando se pulsa una cuerda de guitarra (dándole una forma triangular) y se suelta, se produce una onda estacionaria. Esa onda se representa bien (excepto en el punto máximo agudo) con la suma de sólo tres funciones senoidales. Si incluimos funciones senoidales adicionales, mejora aún más la representación.

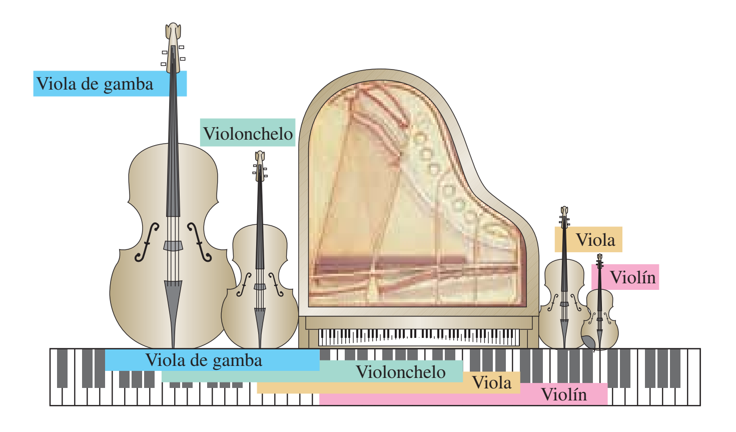


Ondas estacionarias e instrumentos de cuerda

Como hemos visto, la frecuencia fundamental de una cuerda que vibra es $f_1 = v/2L$. La rapidez v de las ondas en la cuerda está determinada por la ecuación (15.13), $v = \sqrt{F/\mu}$. Combinando éstas, vemos que

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \qquad \text{(cuerda fija en ambos extremos)} \qquad (15.35)$$

Ésta también es la frecuencia fundamental de la onda sonora creada en el aire circundante por la cuerda al vibrar. Los instrumentos musicales comunes muestran cómo f_1 depende de las propiedades de la cuerda. Las cuerdas largas de un contrabajo o de la sección grave (de baja frecuencia) de un piano y las cuerdas más cortas del violín o de la sección aguda de un piano ilustran la dependencia inversa de la frecuencia con respecto a la longitud L (figura 15.29). El tono de un violín o una guitarra normalmente se varía presionando las cuerdas contra el bastidor con los dedos para cambiar la longitud L de la porción vibrante de la cuerda. Al aumentar la tensión F, aumenta la rapidez de la onda v y, por lo tanto, la frecuencia (y el tono). Todos los instrumentos de cuerda se "afinan" a las frecuencias correctas variando la tensión; se aprieta la cuerda para aumentar el tono. Por último, al aumentar la masa por unidad de longitud μ, disminuye la rapidez de la onda y, por lo tanto, la frecuencia. Las notas más bajas de una



15.29 Comparación de la gama de un piano de cola para concierto, con las gamas de una viola de gamba, un violonchelo, una viola y un violín. En todos los casos, las cuerdas más largas producen notas graves y las más cortas producen notas agudas.

guitarra se producen con cuerdas más gruesas, y una razón para devanar las cuerdas graves de un piano con alambre es obtener la baja frecuencia deseada sin usar una cuerda demasiado larga.

Los instrumentos de viento, como los saxofones y los trombones, tienen también modos normales. En los instrumentos de cuerda, las frecuencias de estos modos normales determinan los tonos musicales que producen estos instrumentos. En el capítulo 16 trataremos estos instrumentos y muchos otros aspectos del sonido.

Ejemplo 15.7 Contrabajo gigante

En un intento por entrar en el *Libro Guiness de récords mundiales*, usted se propone construir un contrabajo con cuerdas de 5.00 m de longitud entre puntos fijos. Una cuerda tiene densidad lineal de masa de 40.0 g/m y una frecuencia fundamental de 20.0 Hz (la frecuencia más baja que puede detectar el oído humano). Calcule *a*) la tensión de esta cuerda, *b*) la frecuencia y la longitud de onda del segundo armónico en la cuerda, y *c*) la frecuencia y la longitud de onda del segundo sobretono en la cuerda.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita en el inciso *a*) es la tensión de la cuerda; la obtendremos de la expresión para la frecuencia fundamental de la cuerda, en la que interviene la tensión. En los incisos *b*) y *c*), las incógnitas son la frecuencia y la longitud de onda de diferentes armónicos. Las determinaremos a partir de la longitud dada de la cuerda y la frecuencia fundamental.

PLANTEAR: La ecuación que usaremos en el inciso *a*) es la ecuación (15.35); en ella intervienen los valores que conocemos de f_1, L y μ, así como la incógnita F. Resolveremos los incisos *b*) y *c*) usando las ecuaciones (15.31) y (15.33).

EJECUTAR: *a*) Despejamos la tensión de la cuerda F de la ecuación (15.35):

$$F = 4\mu L^2 f_1^2 = 4(40.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/m})(5.00\ \text{m})^2(20.0\ \text{s}^{-1})^2$$
$$= 1600\ \text{N} = 360\ \text{lb}$$

b) El segundo armónico corresponde a $n = 2$. Por la ecuación (15.33), su frecuencia es

$$f_2 = 2f_1 = 2(20.0\ \text{Hz}) = 40.0\ \text{Hz}$$

Por la ecuación (15.31) la longitud de onda del segundo armónico en la cuerda es

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = 5.00\ \text{m}$$

c) El segundo sobretono es el "segundo tono sobre" (arriba de) la fundamental, es decir, $n = 3$. Su frecuencia y longitud de onda son

$$f_3 = 3f_1 = 3(20.0\ \text{Hz}) = 60.0\ \text{Hz}$$
$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = 3.33\ \text{m}$$

EVALUAR: En el inciso *a*) la tensión es un poco mayor que en un contrabajo real, en el que la tensión normal de las cuerdas es de unos cuantos cientos de newtons. Las longitudes de onda de los incisos *b*) y *c*) son iguales a la longitud de la cuerda y dos tercios de esa longitud, respectivamente; estos resultados concuerdan con los dibujos de ondas estacionarias de la figura 15.26.

Ejemplo 15.8 De ondas en una cuerda a ondas sonoras en el aire

Calcule la frecuencia y longitud de onda de las ondas sonoras que se producen en el aire cuando la cuerda del ejemplo anterior vibra a su frecuencia fundamental. La rapidez del sonido en aire a 20 °C es de 344 m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las incógnitas son f y λ de la onda sonora producida por el contrabajo, *no* de la onda estacionaria en la cuerda. Sin embar-

go, cuando la cuerda vibra a una frecuencia dada, el aire circundante tiene que vibrar a la misma frecuencia, así que la frecuencia de la onda sonora es la misma que la de la onda estacionaria en la cuerda. Sin embargo, la relación $\lambda = v/f$ indica que la *longitud de onda* de la onda sonora normalmente es diferente de la de la onda estacionaria en la cuerda, porque las dos ondas tienen diferente rapidez.

PLANTEAR: La única ecuación que necesitamos es $v = \lambda f$, que aplicaremos tanto a la onda estacionaria en la cuerda (rapidez v_{cuerda}) como a la onda sonora viajera (rapidez v_{sonido}).

EJECUTAR: La frecuencia de la onda sonora es la misma que la frecuencia fundamental de la onda estacionaria: $f = f_1 = 20.0$ Hz. La longitud de onda de la onda sonora es

$$\lambda_{1(sonido)} = \frac{v_{sonido}}{f_1} = \frac{344 \text{ m/s}}{20.0 \text{ Hz}} = 17.2 \text{ m}$$

EVALUAR: Observe que $\lambda_{1(sonido)}$ es mayor que la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda, $\lambda_{1(cuerda)} = 2L = 2(5.00 \text{ m}) = 10.0$ m. Básicamente, esto se debe a que la rapidez del sonido es mayor que la rapidez de las ondas en la cuerda, $v_{cuerda} = \lambda_{1(sonido)} f_1 = (10.0 \text{ m})(20.0 \text{ Hz}) = 200$ m/s. Por lo tanto, para *cualquier* modo normal en esta cuerda, la onda sonora que se produce tiene la misma frecuencia que la onda en la cuerda, pero una longitud de onda mayor por un factor de $v_{sonido}/v_{cuerda} = (344 \text{ m/s})/(200 \text{ m/s}) = 1.72$.

Evalúe su comprensión de la sección 15.8 Mientras vibra una cuerda de guitarra, se toca suavemente el punto medio de la cuerda para asegurar que la cuerda no vibre en ese punto. ¿Cuáles modos normales *no pueden* estar presentes en la cuerda cuando se está tocando de este modo?

CAPÍTULO 15 RESUMEN

Ondas y sus propiedades: Una onda es cualquier perturbación con respecto a una condición de equilibrio que se propaga de una región a otra. Una onda mecánica siempre viaja dentro de un material llamado medio. La perturbación ondulatoria se propaga con la rapidez de onda v, que depende del tipo de onda y de las propiedades del medio.

En una onda periódica, el movimiento de cada punto del medio es periódico. Una onda senoidal es una onda periódica especial, donde todos los puntos tienen movimiento armónico simple. La frecuencia f de cualquier onda periódica es el número de ciclos por unidad de tiempo, el periodo T es el tiempo que dura un ciclo, la longitud de onda λ es la distancia en la que se repite el patrón de la onda, y la amplitud A es el desplazamiento máximo de una partícula en el medio. El producto de λ y f es igual a la rapidez de la onda. (Véase el ejemplo 15.1.)

$$v = \lambda f \quad (15.1)$$

Rapidez de onda v
Longitud de onda λ
Amplitud A
Cada partícula de la cuerda oscila en MAS.

Funciones de onda y dinámica de onda: La función de onda y(x, t) describe los desplazamientos de partículas individuales del medio. Las ecuaciones (15.3), (15.4) y (15.7) dan la ecuación de una onda senoidal que viaja en la dirección $+x$. Si la onda se mueve en la dirección $-x$, el signo menos de las funciones coseno se cambia por un signo más. (Véase el ejemplo 15.2.)

La función de onda debe obedecer una ecuación diferencial parcial llamada ecuación de onda, ecuación (15.12).

La rapidez de una onda transversal en una cuerda depende de la tensión F y de la masa por unidad de longitud μ. (Véase el ejemplo 15.3.)

$$y(x,t) = A\cos\left[\omega\left(\frac{x}{v} - t\right)\right] = A\cos 2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right) \quad (15.3)$$

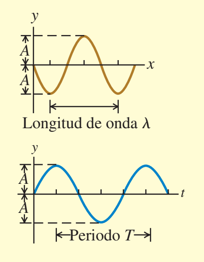
$$y(x,t) = A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \quad (15.4)$$

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \quad (15.7)$$

donde $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f = vk$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (15.12)$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{(ondas en una cuerda)} \quad (15.13)$$



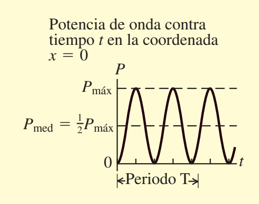
Potencia de onda: El movimiento ondulatorio transporta energía de una región a otra. En el caso de una onda mecánica senoidal, la potencia media P_{med} es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de la frecuencia. En el caso de ondas que se propagan en tres dimensiones, la intensidad de la onda I es inversamente proporcional a la distancia de la fuente. (Véanse los ejemplos 15.4 y 15.5.)

$$P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2 \quad (15.25)$$

(potencia media, onda senoidal)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (15.26)$$

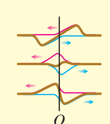
(ley del inverso del cuadrado para la intensidad)



Superposición de ondas: Una onda que llega a una frontera del medio de propagación se refleja. El principio de superposición indica que el desplazamiento de onda total en cualquier punto donde se traslapan dos o más ondas es la suma de los desplazamientos de las ondas individuales.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) \quad (15.27)$$

(principio de superposición)



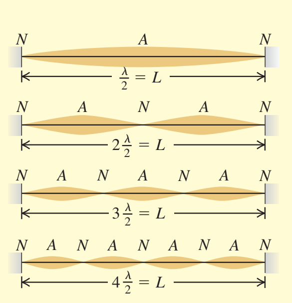
Ondas estacionarias sobre una cuerda: Cuando una onda senoidal se refleja de un extremo fijo o libre de una cuerda estirada, las ondas incidente y reflejada se combinan para formar una onda senoidal estacionaria que contiene nodos y antinodos. Dos nodos adyacentes están separados una distancia $\lambda/2$, lo mismo que dos antinodos adyacentes. (Véase el ejemplo 15.6.)

Si ambos extremos de una cuerda con longitud L están fijos, sólo puede haber ondas estacionarias si L es un múltiplo entero de $\lambda/2$. Cada frecuencia y su patrón de vibración asociado se denomina modo normal. La frecuencia más baja f_1 es la frecuencia fundamental. (Véanse los ejemplos 15.7 y 15.8.)

$$y(x, t) = (A_{SW}\,\mathrm{sen}\,kx)\,\mathrm{sen}\,\omega t \quad (15.28)$$
(onda estacionaria en una cuerda, extremo fijo en $x = 0$)

$$f_n = n\frac{v}{2L} = nf_1 \;(n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (15.33)$$

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (15.35)$$
(cuerda fija en ambos extremos)



Términos clave

onda mecánica, *488*
medio, *488*
onda transversal, *488*
onda longitudinal, *488*
rapidez de la onda, *489*
onda periódica, *489*
onda senoidal, *489*
longitud de onda, *490*
función de onda, *492*
número de onda, *493*
fase, *494*
ecuación de onda, *497*
intensidad, *504*
interferencia, *505*
condición de frontera, *506*
principio de superposición, *506*
nodo, *508*
antinodo, *508*
onda estacionaria, *508*
onda viajera, *508*
interferencia destructiva, *509*
interferencia constructiva, *509*
frecuencia fundamental, *512*
armónicos, *512*
serie armónica, *512*
sobretono, *512*
modo normal, *512*
contenido armónico, *513*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

La potencia de una onda mecánica depende de su frecuencia y su amplitud [véase la ecuación (15.25)].

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

15.1 Respuesta: i) La “ola” viaja horizontalmente de un espectador al siguiente en cada fila del estadio, pero el desplazamiento de cada espectador es verticalmente hacia arriba. Puesto que el desplazamiento es perpendicular a la dirección en que viaja la onda, la onda es transversal.

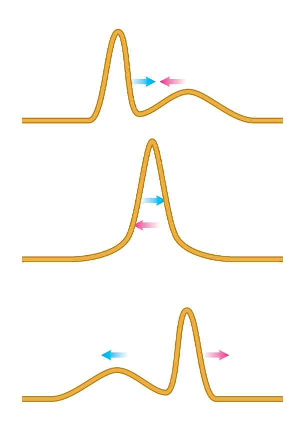
15.2 Respuesta: iv) La rapidez de las ondas en una cuerda, v, no depende de su longitud de onda. Podemos rescribir la relación $v = \lambda f$ como $f = v/\lambda$, la cual nos indica que si se duplica la longitud de onda λ, la frecuencia f se reduce a la mitad.

15.3 Respuestas: a. $\frac{2}{8}T$, b. $\frac{4}{8}T$, c. $\frac{5}{8}T$ Puesto que la onda es senoidal, cada punto en la cuerda oscila en movimiento armónico simple (MAS). Puesto que podemos aplicar todas las ideas del capítulo 13 acerca del MAS a la onda descrita en la figura 15.8. *a*) Una partícula en MAS tiene su rapidez máxima cuando pasa por la posición de equilibrio ($y = 0$ en la figura 15.8). La partícula en el punto A se mueve hacia arriba por tal posición en $t = \frac{2}{8}T$. *b*) En MAS vertical la aceleración máxima *hacia arriba* ocurre cuando una partícula está en su desplazamiento máximo *hacia abajo*. Esto sucede para la partícula en el punto B en $t = \frac{4}{8}T$. *c*) Una partícula en MAS vertical tiene una aceleración *hacia abajo* cuando su desplazamiento es *hacia arriba*. La partícula en C tiene un desplazamiento hacia arriba y se mueve hacia abajo en $t = \frac{5}{8}T$.

15.4 Respuesta: iii) La relación $v = \sqrt{F/\mu}$ [ecuación (15.13)] indica que la rapidez de onda es máxima en una cuerda con densidad lineal de masa mínima. Ésa es la cuerda más delgada, que tiene menor masa m y, por lo tanto, menor densidad lineal de masa $m = \mu/L$ (todas las cuerdas tienen la misma longitud).

15.5 Respuesta: iii), iv), ii), i) La ecuación (15.25) indica que la potencia media es una onda senoidal en una cuerda es $P_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2 A^2$. Las cuatro cuerdas son idénticas, así que todas tienen la misma masa, la misma longitud y la misma densidad de masa lineal μ la frecuencia f es la misma para cada onda, como la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$. Por lo tanto, la potencia de onda media para cada cuerda es proporcional a la raíz cuadrada de la tensión de la cuerda F y el cuadrado de la amplitud A. En comparación con la cuerda i) la potencia media en cada cuerda es iii) $\sqrt{4} = 2$ veces mayor; ii) $4^2 = 16$ veces mayor; y iv) $\sqrt{2}(2)^2 = 4\sqrt{2}$ veces mayor.

15.6 Respuesta:



15.7 Respuestas: sí, sí Un aumento de la frecuencia al doble reduce la longitud de onda a la mitad. Por lo tanto, el espaciado entre nodos (igual a $\lambda/2$) también es la mitad. Hay nodos en todas las posiciones anteriores, pero también hay un nuevo nodo entre cada par de nodos anteriores.

15.8 Respuesta: n = 1, 3, 5, … Al tocar la cuerda en el centro, se está haciendo que haya un nodo en el centro. Por ello, sólo estarán permitidas ondas estacionarias que tengan un nodo en $x = L/2$. Por la figura 15.26, puede verse que se excluyen los modos normales $n = 1, 3, 5, \ldots$

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P15.1. Dos ondas viajan en la misma cuerda. ¿Es posible para ambas tener *a*) diferentes frecuencias, *b*) diferentes longitudes de onda, *c*) diferentes rapideces, *d*) diferentes amplitudes, *e*) la misma frecuencia, pero diferentes longitudes de onda? Explique su razonamiento.

P15.2. Bajo una tensión F, un pulso tarda 2.00 s en recorrer la longitud de un alambre tensado. ¿Qué tensión se requiere (en términos de F) para que el pulso tarde 6.00 s en hacer ese recorrido?

P15.3. ¿Qué tipos de energía se asocian a las ondas en una cuerda estirada? ¿Cómo podría detectarse experimentalmente tal energía?

P15.4. La amplitud de una onda disminuye gradualmente a medida que la onda viaja por una cuerda larga y estirada. ¿Qué sucede con la energía de la onda en ese caso?

P15.5. Para los movimientos ondulatorios estudiados en el capítulo, ¿la rapidez de propagación depende de la amplitud? ¿Cómo lo sabe?

P15.6. La rapidez de las olas oceánicas depende de la profundidad del agua; cuanto más profunda sea ésta, más rápidamente viajará la ola. Use esto para explicar por qué las olas forman crestas y "rompen" al acercarse a la costa.

P15.7. ¿Es posible tener una onda longitudinal en una cuerda estirada? ¿Por qué? ¿Es posible tener una onda transversal en una varilla de acero? ¿Por qué? En caso de una respuesta afirmativa, explique cómo crearía tal onda.

P15.8. Un eco es sonido reflejado de un objeto distante, como una pared o un risco. Explique cómo determinaría la distancia al objeto cronometrando el eco.

P15.9. ¿Por qué vemos los rayos antes de escuchar el relámpago? Una regla práctica común es comenzar a contar lentamente, una vez por segundo, al ver el relámpago; cuando se oye el trueno, se divide el número entre 3 para obtener la distancia a la que cayó el relámpago, en kilómetros (o dividiendo entre 5 para calcularla en millas). ¿Por qué funciona esto? ¿O no funciona?

P15.10. En el caso de ondas transversales en una cuerda, ¿la rapidez de la onda es la misma que la rapidez de cualquier parte de la cuerda? Explique la diferencia entre ambas rapideces. ¿Cuál es constante?

P15.11. Los niños hacen teléfonos de juguete metiendo cada extremo de un hilo o cordón largo, por un agujero en la base de un vaso de cartón y anudándolo para que no se salga. Si el hilo se tensa, es posible transmitir sonido de un vaso al otro. ¿Cómo funciona esto? ¿Por qué es más fuerte el sonido transmitido que el que viaja por aire a la misma distancia?

P15.12. Las cuatro cuerdas de un violín tienen diferente espesor, pero aproximadamente la misma tensión. ¿Las ondas viajan más rápidamente en las cuerdas gruesas o en las delgadas? ¿Por qué? Compare la frecuencia fundamental de vibración de las cuerdas gruesas y delgadas.

P15.13. Una onda senoidal puede describirse mediante una función coseno, que es negativa tan a menudo como es positiva. Entonces, ¿por qué la potencia media producida por esta onda no es cero?

P15.14. Dos cuerdas con diferente masa por unidad de longitud μ_1 y μ_2 se unen y se estiran con una tensión F. Una onda viaja por la cuerda y pasa por la discontinuidad de μ. Indique cuáles de las siguientes propiedades de la onda serán iguales a ambos lados de la discontinuidad y cuáles cambiarán: rapidez de la onda, frecuencia, longitud de onda. Justifique físicamente cada respuesta.

P15.15. Una cuerda larga con masa m se sujeta del techo y cuelga verticalmente. Se produce un pulso de onda en el extremo inferior, el cual viaja cuerda arriba. ¿La rapidez del pulso cambia al subir por la cuerda y, si lo hace, aumenta o disminuye?

P15.16. En una onda transversal en una cuerda, ¿el movimiento de la cuerda es perpendicular a la longitud? ¿Cómo es posible entonces que se transporte energía a lo largo de la cuerda?

P15.17. Tanto la intensidad de onda como la gravitación obedecen las leyes del cuadrado inverso. ¿Lo hacen por la misma razón? Analice la razón de cada una de estas leyes del cuadrado inverso tan óptimamente como sea posible.

P15.18. Podemos transferir energía por una cuerda con un movimiento ondulatorio; sin embargo, en una onda estacionaria en una cuerda nunca podremos transferir energía más allá de un nodo. ¿Por qué?

P15.19. ¿Podemos producir una onda estacionaria en una cuerda superponiendo dos ondas que viajan en direcciones opuestas con la misma frecuencia pero diferente amplitud? ¿Por qué? ¿Podemos producirla superponiendo dos ondas que viajen en direcciones opuestas con diferente frecuencia, pero la misma amplitud? ¿Por qué?

P15.20. Si estiramos una liga de hule y la punteamos, oímos un tono (más o menos) musical. ¿Cómo cambia la frecuencia de este tono, si estiramos más la liga? (¡Inténtelo!) ¿Concuerda esto con la ecuación (15.35) para una cuerda fija en ambos extremos? Explique su respuesta.

P15.21. Un intervalo musical de una *octava* corresponde a un factor de 2 en frecuencia. ¿En qué factor debe aumentarse la tensión en una cuerda de guitarra o violín para aumentar su tono una octava? ¿Y dos octavas? Explique su razonamiento. ¿Se corre algún riesgo al intentar esos cambios de tono?

P15.22. Si toca una cuerda levemente en su centro mientras la frota con el arco, un violinista puede producir una nota exactamente una octava arriba de aquella para la cual se afinó la cuerda, es decir, una nota con una frecuencia de exactamente el doble. ¿Cómo es posible esto?

P15.23. Como vimos en la sección 15.1, las olas en el agua son una combinación de ondas longitudinales y transversales. Defienda la siguiente afirmación: "Cuando las olas chocan contra una pared vertical, ese punto es un nodo del desplazamiento longitudinal, pero un antinodo del desplazamiento transversal".

P15.24. Los violines son instrumentos cortos, mientras que los violonchelos y los contrabajos son largos. Explique esto en términos de la frecuencia de las ondas que producen.

P15.25. ¿Para qué sirven los trastes de una guitarra? Explique su uso en términos de la frecuencia de la vibración de las cuerdas.

Ejercicios

Sección 15.2 Ondas periódicas

15.1. La rapidez del sonido en aire a 20 °C es de 344 m/s. *a*) Calcule la longitud de onda de una onda sonora con frecuencia de 784 Hz, que corresponde a la nota sol de la quinta octava de un piano, y cuántos milisegundos dura cada vibración. *b*) Calcule la longitud de onda de una onda sonora una octava más alta que la nota del inciso *a*).

15.2. Sonido audible. Siempre que la amplitud sea lo suficientemente grande, el oído humano puede responder a ondas longitudinales dentro de un intervalo de frecuencias que aproximadamente va de los 20.0 Hz a los 20.0 kHz. *a*) Si usted tuviera que marcar el comienzo de cada patrón de onda completo con un punto rojo para el sonido de longitud de onda larga y con un punto azul el sonido de longitud de onda corta, ¿qué distancia habría entre los puntos rojos y qué distancia habría entre los puntos azules? *b*) En realidad, ¿los puntos adyacentes en cada conjunto estarían suficientemente alejados para que usted pudiera medir fácilmente su distancia de separación con una cinta métrica? *c*) Suponga que repite el inciso *a*) en agua, donde el sonido viaja a 1480 m/s. ¿Qué tan alejados estarían los puntos en cada conjunto? ¿Podría medir fácilmente su separación con una cinta métrica?

15.3. ¡Tsunami! El 26 de diciembre de 2004 ocurrió un intenso terremoto en las costas de Sumatra, y desencadenó olas inmensas (un tsunami) que provocaron la muerte de 200,000 personas. Gracias a los satélites que observaron esas olas desde el espacio, se pudo establecer que había 800 km de la cresta de una ola a la siguiente, y que el periodo entre una y otra fue de 1.0 hora. ¿Cuál fue la rapidez de esas olas en m/s y en km/h? ¿Su respuesta le ayudaría a comprender por qué las olas causaron tal devastación?

15.4. Imágenes por ultrasonido. Se llama *ultrasonido* a las frecuencias más arriba de la gama que puede detectar el oído humano, esto es, aproximadamente mayores que 20,000 Hz. Se pueden usar ondas de ultrasonido para penetrar en el cuerpo y producir imágenes al reflejarse en las superficies. En una exploración típica con ultrasonido, las ondas viajan con una rapidez de 1500 m/s. Para obtener una imagen detallada, la longitud de onda no debería ser mayor que 1.0 mm. ¿Qué frecuencia se requiere entonces?

15.5. Luz visible. La luz es una onda, pero no una onda mecánica. Las cantidades que oscilan son campos eléctricos y magnéticos. La luz que es visible para los seres humanos tiene longitudes de onda de entre 400 nm (violeta) y 700 nm (rojo), en tanto que toda la luz viaja en el vacío a una rapidez $c = 3.00 \times 10^8$ m/s. *a*) ¿Cuáles son los límites de la frecuencia y el periodo de la luz visible? *b*) ¿Usando un cronómetro podría usted medir el tiempo que dura una sola vibración de luz?

Sección 15.3 Descripción matemática de una onda

15.6. La ecuación de cierta onda transversal es

$$y(x, t) = (6.50 \text{ mm})\cos 2\pi\left(\frac{x}{28.0 \text{ cm}} - \frac{t}{0.0360 \text{ s}}\right)$$

Determine la *a*) amplitud, *b*) longitud de onda, *c*) frecuencia, *d*) rapidez de propagación y *e*) dirección de propagación de la onda.

15.7. Ciertas ondas transversales en una cuerda tienen rapidez de 8.00 m/s, amplitud de 0.0700 m y longitud de onda de 0.320 m. Las ondas viajan en la dirección $-x$, y en $t = 0$ el extremo $x = 0$ de la cuerda tiene su máximo desplazamiento hacia arriba. *a*) Calcule la frecuencia, el periodo y el número de onda de estas ondas. *b*) Escriba una función de onda que describa la onda. *c*) Calcule el desplazamiento transversal de una partícula en $x = 0.360$ m en el tiempo $t = 0.150$ s. *d*) ¿Cuánto tiempo debe pasar después de $t = 0.150$ s para que la partícula en $x = 0.360$ m vuelva a tener su desplazamiento máximo hacia arriba?

15.8. Una onda de agua que viaja en línea recta en un lago queda descrita por la ecuación

$$y(x, t) = (3.75 \text{ cm})\cos(0.450 \text{ cm}^{-1} x + 5.40 \text{ s}^{-1} t)$$

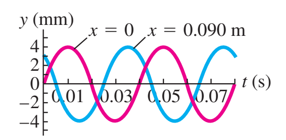
donde y es el desplazamiento perpendicular a la superficie tranquila del lago. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda un patrón de onda completo en pasar por un pescador en un bote anclado, y qué distancia horizontal viaja la cresta de la onda en ese tiempo? *b*) ¿Cuál es el número de onda y el número de ondas por segundo que pasan por el pescador? *c*) ¿Qué tan rápido pasa una cresta de onda por el pescador y cuál es la rapidez máxima de su flotador de corcho cuando la onda provoca que éste oscile verticalmente?

15.9. ¿Cuál de las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda, ecuación (15.12)? *a*) $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$; *b*) $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx + \omega t)$; *c*) $y(x, t) = A(\cos kx + \cos\omega t)$. *d*) Para la onda del inciso *b*), escriba las ecuaciones para la velocidad y la aceleración transversales de una partícula en el punto x.

15.10. *a*) Para una onda en una cuerda descrita por $y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$, *a*) grafique y, v_y y a_y en función de x para $t = 0$. *b*) Considere los siguientes puntos de la cuerda: i) $x = 0$; ii) $x = \pi/4k$; iii) $x = \pi/2k$; iv) $x = 3\pi/4k$; v) $x = \pi/k$; vi) $x = 5\pi/4k$; vii) $x = 3\pi/2k$; viii) $x = 7\pi/4k$. Para una partícula en cada uno de estos puntos en $t = 0$, indique con palabras si la partícula se está moviendo y en qué dirección, y si se está acelerando, frenando o tiene aceleración instantánea cero.

15.11. Una onda senoidal se propaga por una cuerda estirada en el eje x. El desplazamiento de la cuerda en función del tiempo se grafica en la figura 15.30 para partículas en $x = 0$ y en $x = 0.0900$ m. *a*) Calcule la amplitud de la onda. *b*) Calcule el periodo de la onda. *c*) Se sabe que los puntos en $x = 0$ y $x = 0.0900$ m están separados una longitud de onda. Si la onda se mueve en la dirección $+x$, determine la longitud de onda y la rapidez de la onda. *d*) Si ahora la onda se mueve en la dirección $-x$, determine la longitud de onda y la rapidez de la onda. *e*) ¿Sería posible determinar de manera definitiva la longitud de onda en los incisos *c*) y *d*) si no supiéramos que los dos puntos están separados una longitud de onda? ¿Por qué?

Figura 15.30 Ejercicio 15.11.



15.12. Rapidez de propagación contra rapidez de partículas. *a*) Demuestre que la ecuación (15.3) puede escribirse como

$$y(x, t) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

b) Use $y(x, t)$ para obtener una expresión para la velocidad transversal v_y de una partícula de la cuerda en la que viaja la onda. *c*) Calcule la rapidez máxima de una partícula de la cuerda. ¿En qué circunstancias es igual a la rapidez de propagación v? ¿Menor que v? ¿Y mayor que v?

15.13. Una onda transversal que viaja en una cuerda tiene amplitud de 0.300 cm, longitud de onda de 12.0 cm y rapidez de 6.00 cm/s y se representa con $y(x, t)$ del ejercicio 15.12. *a*) En el tiempo $t = 0$, calcule y

a intervalos de x de 1.5 cm (es decir, en $x = 0$, $x = 1.5$ cm, $x = 3.0$ cm, etcétera) de $x = 0$ a $x = 12.0$ cm. Muestre los resultados en una gráfica. Ésta es la forma de la cuerda en el tiempo $t = 0$. *b*) Repita los cálculos para los mismos valores de x en $t = 0.400$ s y $t = 0.800$ s. Muestre gráficamente la forma de la cuerda en esos instantes. ¿En qué dirección viaja la onda?

Sección 15.4 Rapidez de una onda transversal

15.14. ¿Con qué tensión debe estirarse una cuerda de 2.50 m de longitud y masa de 0.120 kg para que ondas transversales con frecuencia de 40.0 Hz tengan una longitud de onda de 0.750 m?

15.15. Un extremo de una cuerda horizontal se conecta a una punta de un diapasón eléctrico que vibra a 120 Hz. El otro extremo pasa por una polea y sostiene una masa de 1.50 kg. La densidad lineal de masa de la cuerda es de 0.0550 kg/m. *a*) ¿Qué rapidez tiene una onda transversal en la cuerda? *b*) ¿Qué longitud de onda tiene? *c*) ¿Cómo cambian las respuestas a los incisos *a*) y *b*), si la masa se aumenta a 3.00 kg?

15.16. Una cuerda de 1.50 m y que pesa 1.25 N está atada al techo por su extremo superior, mientras que el extremo inferior sostiene un peso W. Cuando usted da un leve pulso a la cuerda, las ondas que viajan hacia arriba de ésta obedecen la ecuación

$$y(x, t) = (8.50\text{ mm})\cos(172\text{ m}^{-1}\, x - 2730\text{ s}^{-1}\, t)$$

a) ¿Cuánto tiempo tarda un pulso en viajar a todo lo largo de la cuerda? *b*) ¿Cuál es el peso W? *c*) ¿Cuántas longitudes de onda hay en la cuerda en cualquier instante? *d*) ¿Cuál es la ecuación para las ondas que viajan *hacia abajo* de la cuerda?

15.17. Un alambre delgado de 75.0 cm tiene una masa de 16.5 g. Un extremo está amarrado a un clavo y el otro extremo está amarrado a un tornillo que puede ajustarse para variar la tensión en el alambre. *a*) ¿A qué tensión (en newtons) debe ajustarse el tornillo para que la onda transversal cuya longitud de onda es de 3.33 cm registre 875 vibraciones por segundo? *b*) ¿Con qué rapidez viajaría esta onda?

15.18. Cuerda pesada. Si en el ejemplo 15.3 (sección 15.4) *no* despreciamos el peso de la cuerda, ¿qué rapidez tiene la onda *a*) en la base de la cuerda? *b*) ¿En la parte media? *c*) ¿En la parte superior?

15.19. Un oscilador armónico simple en el punto $x = 0$ genera una onda en una cuerda. El oscilador opera con una frecuencia de 40.0 Hz y una amplitud de 3.00 cm. La cuerda tiene una densidad lineal de masa de 50.0 g/m y se le estira con una tensión de 5.00 N. *a*) Determine la rapidez de la onda. *b*) Calcule la longitud de onda. *c*) Describa la función $y(x, t)$ de la onda. Suponga que el oscilador tiene su desplazamiento máximo hacia arriba en el instante $t = 0$. *d*) Calcule la aceleración transversal máxima de las partículas de la cuerda. *e*) Al tratar las ondas transversales en este capítulo, despreciamos la fuerza de la gravedad. ¿Esa aproximación es razonable en el caso de esta onda? Explique su respuesta.

Sección 15.5 Energía del movimiento ondulatorio

15.20. Un alambre de piano con masa de 3.00 g y longitud de 80.0 cm se estira con una tensión de 25.0 N. Una onda con frecuencia de 120.0 Hz y amplitud de 1.6 mm viaja por el alambre. *a*) Calcule la potencia media que transporta esta onda. *b*) ¿Qué sucede con la potencia media si la amplitud de la onda se reduce a la mitad?

15.21. Cuando despega un avión a propulsión, produce un sonido con intensidad de 10.0 W/m^2 a 30.0 m de distancia. Usted prefiere el tranquilo sonido de la conversación normal, que es de 1.0 μW/m^2. Suponga que el avión se comporta como una fuente puntual de sonido. *a*) ¿Cuál es la distancia mínima a la pista de aterrizaje a la que usted podría vivir para conservar su estado de paz mental? *b*) ¿Qué intensidad del sonido de los aviones experimenta un amigo suyo, quien vive a una distancia de la pista de aterrizaje que es el doble de la distancia a la que usted vive? *c*) ¿Qué potencia de sonido produce el avión en el despegue?

15.22. Umbral del dolor. Imagine que investiga un informe del aterrizaje de un OVNI en una región despoblada de Nuevo México, y encuentra un objeto extraño que radia ondas sonoras uniformemente en todas direcciones. Suponga que el sonido proviene de una fuente puntual y que puede despreciar las reflexiones. Está caminando lentamente hacia la fuente. Cuando está a 7.5 m de ella, determina que la intensidad es de 0.11 W/m^2. Comúnmente, se considera que una intensidad de 1.0 W/m^2 es el "umbral del dolor". ¿Cuánto más podrá acercarse a la fuente antes de que la intensidad del sonido alcance ese umbral?

15.23. Desarrollo de energía. Imagine que efectúa mediciones y determina que se están propagando ondas sonoras igualmente en todas direcciones desde una fuente puntual y que la intensidad es de 0.026 W/m^2 a una distancia de 4.3 m de la fuente. *a*) Calcule la intensidad a una distancia de 3.1 m de la fuente. *b*) ¿Cuánta energía sonora emite la fuente en una hora si su emisión se mantiene constante?

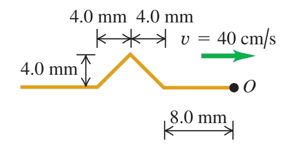
15.24. Imagine que un compañero con dotes matemáticas le dice que la función de onda de una onda viajera en una cuerda delgada es $y(x, t) = 2.30\text{ mm}\cos[(6.98\text{ rad/m})x + (742\text{ rad/s})t]$. Usted, que es una persona más práctica, efectúa mediciones y determina que la cuerda tiene una longitud de 1.35 m y una masa de 0.00338 kg. Ahora le piden determinar lo siguiente: *a*) amplitud; *b*) frecuencia; *c*) longitud de onda; *d*) rapidez de la onda; *e*) dirección en que viaja la onda; *f*) tensión en la cuerda; *g*) potencia media transmitida por la onda.

15.25. ¿Cuánta potencia total desarrolla la sirena del ejemplo 15.5?

Sección 15.6 Interferencia de ondas, condiciones de frontera y superposición

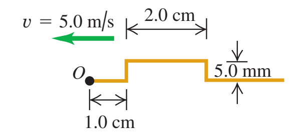
15.26. Reflexión. Un pulso de onda en una cuerda tiene las dimensiones que se muestran en la figura 15.31 en $t = 0$. La rapidez de la onda es de 40 cm/s. *a*) Si el punto O es un extremo fijo, dibuje la onda total en $t = 15$ ms, 20 ms, 25 ms, 30 ms, 35 ms, 40 ms y 45 ms. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que O es un extremo libre.

Figura 15.31 Ejercicio 15.26.



15.27. Reflexión. Un pulso ondulatorio en una cuerda tiene las dimensiones que se muestran en la figura 15.32 en $t = 0$. La rapidez de la onda es de 5.0 m/s. *a*) Si el punto O es un extremo fijo, dibuje la onda total a $t = 1.0$ ms, 2.0 ms, 3.0 ms, 4.0 ms, 5.0 ms, 6.0 ms y 7.0 ms. *b*) Repita el inciso *a*) para el caso en que el punto O es un extremo libre.

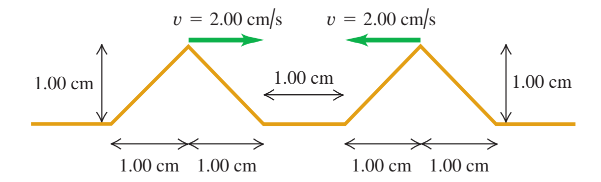
Figura 15.32 Ejercicio 15.27.



15.28. Interferencia de pulsos triangulares. Dos pulsos ondulatorios triangulares viajan uno hacia el otro por una cuerda estirada, como

se muestra en la figura 15.33. Los pulsos son idénticos y viajan a 2.00 cm/s. Los bordes delanteros de los pulsos están separados 1.00 cm en $t = 0$. Dibuje la forma de la cuerda en $t = 0.250$ s, $t = 0.500$ s, $t = 0.750$ s, $t = 1.000$ s y $t = 1.250$ s.

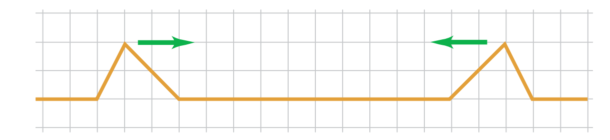
Figura 15.33 Ejercicio 15.28.



15.29. Suponga que el pulso que viaja hacia la izquierda en el ejercicio 15.28 está *debajo* del nivel de la cuerda sin estirar y no por encima. Trace los mismos dibujos que realizó para ese ejercicio.

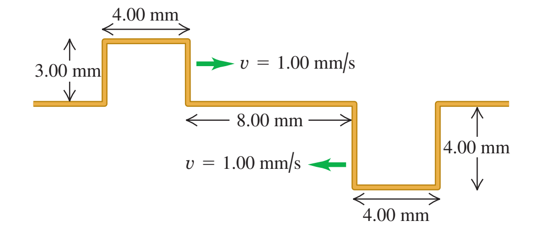
15.30. Dos pulsos se desplazan en sentidos opuestos a 1.0 cm/s en una cuerda tensada, como se ilustra en la figura 15.34. Cada cuadro representa 1.0 cm. Dibuje la forma de la cuerda al final de *a*) 6.0 s, *b*) 7.0 s, *c*) 8.0 s.

Figura 15.34 Ejercicio 15.30.



15.31. Interferencia de pulsos rectangulares. La figura 15.35 muestra dos pulsos ondulatorios rectangulares en una cuerda estirada, que viajan uno hacia el otro. Su rapidez es de 1.00 mm/s y su peso y su anchura se muestran en la figura. Los bordes delanteros de los pulsos están separadas 8.00 mm en $t = 0$. Dibuje la forma de la cuerda en $t = 4.00$ s, $t = 6.00$ s y $t = 10.0$ s.

Figura 15.35 Ejercicio 15.31.



15.32. Dos ondas viajeras que se mueven por una cuerda son idénticas, excepto que sus velocidades son opuestas. Obedecen la ecuación $y(x, t) = A\,\text{sen}(kx \pm \omega t)$, donde el signo más-menos del argumento depende de la dirección en que viaje la onda. *a*) Demuestre que la cuerda que vibra está descrita por la ecuación $y_{\text{net}}(x, t) = 2A\,\text{sen}\,kx\cos\omega t$. (*Sugerencia:* utilice las fórmulas trigonométricas para $\text{sen}(a \pm b)$.) *b*) Demuestre que la cuerda nunca se mueve en los lugares en que $x = n\lambda/2$, donde n es un entero no negativo.

Sección 15.7 Ondas estacionarias en una cuerda

15.33. Ciertas ondas estacionarias en un alambre se describen con la ecuación (15.28), si $A_{SW} = 2.50$ mm, $\omega = 942$ rad/s, y $k = 0.750\pi$ rad/m. El extremo izquierdo del alambre está en $x = 0$. ¿A qué distancias de ese extremo están *a*) los nodos y *b*) los antinodos de la onda estacionaria?

15.34. Los antinodos adyacentes de una onda estacionaria en una cuerda están separados 15.0 cm. Una partícula en un antinodo oscila en movimiento armónico simple con amplitud de 0.850 cm y periodo de 0.0750 s. La cuerda está en el eje $+x$, fija en $x = 0$. *a*) ¿Qué tan separados están los nodos adyacentes? *b*) ¿Cuáles son la longitud de onda, la amplitud, la rapidez de las dos ondas viajeras que forman este patrón? *c*) Calcule las rapideces transversales máxima y mínima de un punto en un antinodo. *d*) ¿Cuál es la distancia mínima en la cuerda entre un nodo a un antinodo?

15.35. Ecuación de onda y ondas estacionarias. *a*) Por sustitución directa demuestre que $y(x, t) = (A_{SW}\,\text{sen}\,kx)\,\text{sen}\,\omega t$ es una solución de la ecuación de onda [ecuación (15.12)] para $v = \omega/k$. *b*) Explique por qué la relación $v = \omega/k$ para ondas *viajeras* también es válida para ondas *estacionarias*.

15.36. Dé los detalles de la deducción de la ecuación (15.28) a partir de $y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[-\cos(kx + \omega t) + \cos(kx - \omega t)]$.

15.37. Sean $y_1(x, t) = A\cos(k_1x - \omega_1t)$ y $y_2(x, t) = A\cos(k_2x - \omega_2t)$ dos soluciones de la ecuación de onda (ecuación 15.12) para la misma v. Demuestre que $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ también es una solución de la ecuación de onda.

Sección 15.8 Modos normales de una cuerda

15.38. Una cuerda de 1.50 m de largo se estira entre dos soportes con una tensión que hace que la rapidez de las ondas transversales sea de 48.0 m/s. ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de *a*) la fundamental, *b*) el segundo sobretono y *c*) el cuarto armónico?

15.39. Un alambre con masa de 40.0 g está estirado de modo que sus extremos están fijos en puntos separados 80.0 cm. El alambre vibra en su modo fundamental con frecuencia de 60.0 Hz y amplitud en los antinodos de 0.300 cm. *a*) Calcule la rapidez de propagación de ondas transversales en el alambre. *b*) Calcule la tensión en el alambre. *c*) Determine la velocidad y aceleración transversales máximas de las partículas del alambre.

15.40. Un afinador de pianos estira un alambre de piano de acero con una tensión de 800 N. El alambre tiene 0.400 m de longitud y una masa de 3.00 g. *a*) Calcule la frecuencia de su modo fundamental de vibración. *b*) Determine el número del armónico más alto que podría escuchar una persona que capta frecuencias de hasta 10,000 Hz.

15.41. La forma de una cuerda delgada tensa que está atada por ambos extremos y oscila en su tercer armónico se describe con la ecuación $y(x, t) = (5.60\text{ cm})\,\text{sen}[(0.0340\text{ rad/cm})x]\,\text{sen}[(50.0\text{ rad/s})t]$, donde el origen está en el extremo izquierdo de la cuerda, el eje x está a lo largo de la cuerda y el eje y es perpendicular a la cuerda. *a*) Dibuje el patrón de onda estacionaria. *b*) Calcule la amplitud de las dos ondas viajeras que constituyen esta onda estacionaria. *c*) ¿Qué longitud tiene la cuerda? *d*) Calcule la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la rapidez de las ondas viajeras. *e*) Calcule la rapidez transversal máxima de la cuerda. *f*) ¿Qué ecuación $y(x, t)$ tendría esta cuerda si vibrara en su octavo armónico?

15.42. La función de onda de una onda estacionaria es $y(x, t) = 4.44\text{ mm}\,\text{sen}[(32.5\text{ rad/m})x]\,\text{sen}[(754\text{ rad/s})t]$. Para las dos ondas viajeras que forman esta onda estacionaria, determine *a*) la amplitud; *b*) la longitud de onda; *c*) la frecuencia; *d*) la rapidez; *e*) las funciones

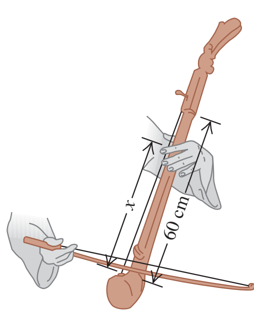
de onda. *f*) Con la información dada, ¿puede determinar de qué armónico se trata? Explique su respuesta.

15.43. Considere otra vez la cuerda y la onda viajera del ejercicio 15.24. Suponga que los extremos de la cuerda se mantienen fijos, y que tanto esta onda como la onda reflejada viajan por la cuerda en direcciones opuestas. *a*) Determine la función de onda $y(x, t)$ de la onda estacionaria que se produce. *b*) ¿En qué armónico está oscilando la onda estacionaria? *c*) Calcule la frecuencia de la oscilación fundamental.

15.44. Una cuerda de cierto instrumento musical mide 75.0 cm de longitud y tiene una masa de 8.75 g. Se toca en una habitación donde la rapidez del sonido es de 344 m/s. *a*) ¿A qué tensión debe ajustarse la cuerda de manera que, cuando vibre en su segundo sobretono, produzca un sonido cuya longitud de onda es de 3.35 cm? *b*) ¿Qué frecuencia de sonido produce la cuerda en su modo fundamental de vibración?

15.45. La porción de una cuerda de cierto instrumento musical que está entre el puente y el extremo superior del batidor (o sea, la porción que puede vibrar libremente) mide 60.0 cm y tiene una masa de 2.00 g. La cuerda produce una nota A_4 (440 Hz) al tocarse. *a*) ¿A qué distancia x del puente debe una ejecutante poner un dedo para tocar una nota D_5 (587 Hz)? (Vea la figura 15.36.) En ambos casos, la cuerda vibra en su modo fundamental. *b*) Sin reafinar, ¿es posible tocar una nota G_4 (392 Hz) en esta cuerda? ¿Por qué?

Figura 15.36 Ejercicio 15.45.



15.46. *a*) Una cuerda horizontal atada en ambos extremos vibra en su modo fundamental. Las ondas viajeras tienen rapidez v, frecuencia f, amplitud A y longitud de onda λ. Calcule la velocidad y la aceleración transversales máximas de puntos situados a i) $x = \lambda/2$, ii) $x = \lambda/4$ y iii) $x = \lambda/8$ del extremo izquierdo. *b*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿qué amplitud tiene el movimiento? *c*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿cuánto tarda la cuerda en ir desde su desplazamiento máximo hacia arriba, hasta su desplazamiento máximo hacia abajo?

15.47. Cuerda de guitarra. Una de las cuerdas de 63.5 cm de una guitarra ordinaria se afina para producir la nota B_3 (frecuencia de 245 Hz) vibrando en su modo fundamental. *a*) Calcule la rapidez de las ondas transversales en esta cuerda. *b*) Si la tensión de la cuerda se aumenta en 1.0%, ¿cuál será su nueva frecuencia fundamental? *c*) Si la rapidez del sonido en el aire circundante es de 344 m/s, ¿cuánto valdrán la frecuencia y la longitud de onda de la onda sonora producida en el aire por la vibración de esta cuerda? Compárelas con f y ω de la onda estacionaria en la cuerda.

15.48. Ondas en una vara. Una vara flexible de 2.0 m de longitud no está fija de ningún modo y está libre para vibrar. Elabore dibujos claros de esta vara cuando vibra en sus primeros tres armónicos, y luego utilice sus dibujos para determinar las longitudes de onda de cada uno de estos armónicos. (*Sugerencia:* pregúntese si los extremos deberían ser nodos o antinodos.)

Problemas

15.49. Una onda senoidal transversal con amplitud de 2.50 mm y longitud de onda de 1.80 m viaja de izquierda a derecha por una cuerda larga y estirada horizontal, con rapidez de 36.0 m/s. Tome como origen el extremo izquierdo de la cuerda no perturbada. En $t = 0$, el extremo izquierdo de la cuerda tiene su desplazamiento máximo hacia arriba. *a*) Calcule la frecuencia, frecuencia angular y el número de onda. *b*) ¿Qué función $y(x, t)$ describe la onda? *c*) Determine $y(t)$ para una partícula en el extremo izquierdo de la cuerda. *d*) Determine $y(t)$ para una partícula situada 1.35 m a la derecha del origen. *e*) Calcule la magnitud máxima de la velocidad transversal de cualquier partícula de la cuerda. *f*) Calcule el desplazamiento transversal y la velocidad transversal de una partícula que está 1.35 m a la derecha del origen en $t = 0.0625$ s.

15.50. La ecuación de una onda transversal que viaja por una cuerda es

$$y(x, t) = (0.750 \text{ cm}) \cos \pi[(0.400 \text{ cm}^{-1})x + (250 \text{ s}^{-1})t]$$

a) Calcule la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la rapidez de propagación. *b*) Dibuje la forma de la cuerda en los siguientes valores de t: 0, 0.0005 s y 0.0010 s. *e*) ¿La onda viaja en la dirección $+x$ o $-x$? *d*) La masa por unidad de longitud de la cuerda es de 0.0500 kg/m. Calcule la tensión. *e*) Calcule la potencia media de esta onda.

15.51. Tres trozos de cuerda, todos con longitud L, se atan extremo con extremo para formar una cuerda combinada de longitud $3L$. La masa por unidad de longitud de los tres trozos es, respectivamente, μ_1, $\mu_2 = 4\mu_1$ y $\mu_3 = \mu_1/4$. *a*) Si la cuerda combinada está sometido a una tensión F, ¿cuánto tiempo tarda una onda transversal en recorrer la longitud total $3L$? Dé su respuesta en términos de L, F y μ_1. *b*) ¿Su respuesta al inciso *a*) depende del orden en que se unieron los tres trozos? Explique su respuesta.

15.52. Una viga irregular de 1750 N cuelga horizontalmente del techo amarrada por sus extremos mediante dos alambres verticales (A y B), cada uno de los cuales mide 1.25 cm de longitud y pesa 2.50 N. El centro de gravedad de esta viga está a un tercio de la viga a partir del extremo donde el alambre A está amarrado. Si usted da un tirón a ambas cuerdas en la viga al mismo tiempo, ¿cuál es la diferencia entre las llegadas de los dos pulsos al techo? ¿Qué pulso llega primero?

15.53. Juego de feria para hormigas. Imagine que tiene como mascota una hormiga llamada Chepina (masa m) y la coloca sobre una cuerda horizontal estirada, a la que se aferra. La cuerda tiene masa M y longitud L, y está sometida a una tensión F. Usted inicia una onda transversal senoidal con longitud de onda λ y amplitud A que se propaga por la cuerda, cuyo movimiento es en un plano vertical. La masa de Chepina es tan pequeña que no afecta la propagación de la onda. *a*) Calcule la rapidez máxima de Chepina al oscilar verticalmente. *b*) A Chepina le gusta el movimiento y quiere más. Usted decide aumentar al doble su rapidez máxima alterando la tensión, sin variar la longitud de onda ni la amplitud. ¿Deberá aumentar o disminuir la tensión, y en qué factor?

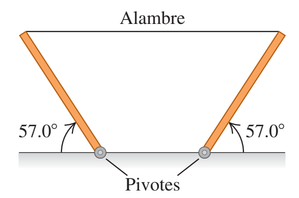
15.54. Hormiga en ingravidez. Una hormiga con masa m está parada tranquilamente sobre una cuerda horizontal, con masa por unidad de longitud μ, estirada mediante una tensión F. De repente, su primo Morton comienza a propagar por la cuerda una onda senoidal transversal con longitud de onda λ. El movimiento de la cuerda es en un plano vertical. ¿Qué amplitud mínima de la onda hará que la hormiga sienta momentáneamente que no pesa nada? Suponga que m es tan pequeña que la presencia de la hormiga no afecta la propagación de la onda.

15.55. Cuando hay una onda transversal senoidal en una cuerda, las partículas de la cuerda están en MAS. Éste es el mismo movimiento que el de una masa m unida a un resorte ideal con constante de fuerza k', cuya frecuencia angular de oscilación (como determinamos en el capítulo 13) es $\omega = \sqrt{k'/m}$. Considere una cuerda con tensión F y masa por unidad de longitud μ por la cual se propaga una onda senoidal con amplitud A y longitud de onda λ. *a*) Calcule la "constante de fuerza" k' de la fuerza de restitución que actúa sobre un segmento cor-

to de la cuerda con longitud Δx (donde $\Delta x \ll \lambda$). *b*) Determine la dependencia de la "constante de fuerza" calculada en *a*) con respecto a F, μ, A y λ. Explique las razones físicas de tal dependencia.

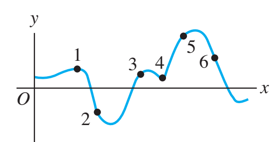
15.56. Un alambre de 5.00 m y 0.732 kg se utiliza para sostener dos postes uniformes de 235 N con igual longitud (figura 15.37). Suponga que, en esencia, el alambre es horizontal y que la rapidez del sonido es de 344 m/s. Está soplando un fuerte viento, lo que provoca que el alambre vibre en su séptimo sobretono. ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda del sonido que produce el alambre?

Figura 15.37 Problema 15.56.



15.57. Onda no senoidal. En la figura 15.38, se muestra la forma de una onda en una cuerda en un instante específico. La onda se propaga a la derecha, en la dirección $+x$. *a*) Determine la dirección de la *velocidad* transversal de cada uno de los seis puntos numerados en la cuerda. Si la velocidad es cero, indíquelo. Explique su razonamiento. *b*) Determine la dirección de la *aceleración* transversal de cada uno de los seis puntos numerados en la cuerda. Explique su razonamiento. *c*) ¿Cómo cambiarían sus respuestas si la onda se propagara hacia la izquierda, en la dirección $-x$?

Figura 15.38 Problema 15.57.



15.58. Se produce una sucesión continua de pulsos ondulatorios senoidales en un extremo de una cuerda muy larga, y los pulsos viajan a lo largo de la cuerda. La onda tiene una frecuencia de 40.0 Hz, amplitud de 5.00 mm y longitud de onda de 0.600 m. *a*) ¿Cuánto tarda la onda en recorrer una distancia de 8.00 m a lo largo de la cuerda? *b*) ¿Cuánto tarda un punto de la cuerda en recorrer una distancia de 8.00 m, una vez que el tren de ondas ha llegado al punto y lo ha puesto en movimiento? *c*) En los incisos *a*) y *b*), ¿cómo cambia el tiempo si se duplica la amplitud?

15.59. Ondas bidimensionales. Una cuerda está estirada en el eje x. Se le desplaza en las direcciones y y z, de modo que el desplazamiento transversal de la cuerda está dado por

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad z(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

a) Dibuje una gráfica de z contra y para una partícula de la cuerda que está en $x = 0$. La gráfica mostrará la trayectoria de la partícula vista por un observador que está en el eje $+x$ y mira hacia $x = 0$. Indique la posición de la partícula en $t = 0$, $t = \pi/2\omega$, $t = \pi/\omega$ y $t = 3\pi/2\omega$. *b*) Obtenga el vector de velocidad de una partícula que está en una posición *arbitraria* x en la cuerda. Demuestre que ese vector representa la velocidad tangencial de una partícula que se mueve en un círculo de radio A con velocidad angular ω, y demuestre que la rapidez de la partícula es constante (es decir, la partícula está en movimiento circular uniforme). (Véase el problema 3.75.) *c*) Obtenga el vector de aceleración de la partícula del inciso *b*). Demuestre que la aceleración siempre está dirigida hacia el centro del círculo y que su magnitud es $a = \omega^2 A$. Explique estos resultados en términos de un movimiento circular uniforme. Suponga ahora que el desplazamiento de la cuerda está dado por

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \qquad z(x,t) = -A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$

Describa en qué diferiría el movimiento de una partícula en x del movimiento descrito en el inciso *a*).

15.60. Un alambre de cobre vertical, de 1.20 m de largo y de calibre 18 (diámetro de 1.024 mm) tiene atada en uno de sus extremos una esfera de 100.0 N. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda del tercer armónico para este alambre? *b*) Ahora una esfera de 500.0 N *sustituye* la esfera original. ¿Cuál es el cambio en la longitud de onda del tercer armónico provocado por la sustitución de la esfera ligera por la más pesada? (*Sugerencia:* véase la tabla 11.1 sobre el módulo de Young.)

15.61. Ondas de forma arbitraria. *a*) Explique por qué *cualquier* onda descrita por una función de la forma $y(x,t) = f(x - vt)$ se mueve en la dirección $+x$ con rapidez v. *b*) Demuestre que $y(x,t) = f(x - vt)$ satisface la ecuación de onda, sea cual fuere la forma funcional de f. Para hacerlo, escriba $y(x,t) = f(u)$, donde $u = x - vt$. Luego, para derivar parcialmente $y(x, t)$, use la regla de la cadena:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df(u)}{du}(-v)$$
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du}$$

c) Una pulsación de onda está descrita por $y(x,t) = De^{-(Bx-Ct)^2}$, donde B, C y D son constantes positivas. Calcule la rapidez de esta onda.

15.62. La ecuación (15.7) para una onda senoidal puede hacerse más general incluyendo un ángulo de fase ϕ, donde $0 \le \phi \le 2\pi$ (en radianes), de modo que la función de onda $y(x, t)$ se convierte en

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi)$$

a) Dibuje la onda en función de x en $t = 0$ para $\phi = 0$, $\phi = \pi/4$, $\phi = \pi/2$, $\phi = 3\pi/4$ y $\phi = 3\pi/2$. *b*) Calcule la velocidad transversal $v_y = \partial y/\partial t$. *c*) En $t = 0$, una partícula de la cuerda que está en $x = 0$ tiene un desplazamiento de $y = A/\sqrt{2}$. ¿Basta esta información para determinar el valor de ϕ? Si además sabemos que una partícula en $x = 0$ se mueve hacia $y = 0$ en $t = 0$, ¿qué valor tiene 0? *d*) Explique en una forma general qué debe saber acerca del comportamiento de la onda en un instante dado, para determinar el valor de ϕ.

15.63. *a*) Demuestre que la ecuación (15.25) también puede escribirse como $P_{\text{med}} = \frac{1}{2}Fk\omega A^2$, donde k es el número de la onda. *b*) Si la tensión F en la cuerda se cuadruplica mientras la amplitud A se mantiene constante, ¿cómo deberán cambiar k y ω para mantener constante la potencia media? [*Sugerencia:* recuerde la ecuación (15.6).]

15.64. Energía en un pulso triangular. Un pulso ondulatorio triangular en una cuerda tensada viaja en la dirección $+x$ con rapidez v. La tensión en la cuerda es F y la densidad lineal de masa de la cuerda es μ. En $t = 0$, la forma del pulso está dada por

$$y(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -L \\ h(L+x)/L & \text{para } -L < x < 0 \\ h(L-x)/L & \text{para } 0 < x < L \\ 0 & \text{para } x > L \end{cases}$$

a) Dibuje la pulsación en $t = 0$. *b*) Determine la función de onda $y(x, t)$ en todos los instantes t. *c*) Calcule la potencia instantánea de la onda. Demuestre que la potencia es cero excepto cuando $-L < (x - vt) < L$ y que es constante en este intervalo. Determine el valor de esta potencia constante.

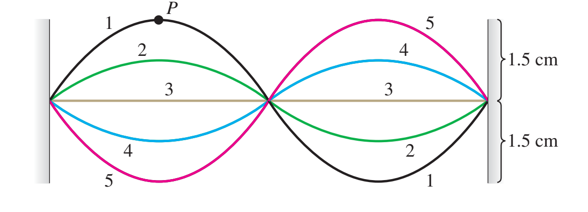
15.65. Una onda senoidal transversal viaja por una cuerda de longitud 8.00 m y masa 6.00 g. Su rapidez es de 30.0 m/s y su longitud de onda es de 0.200 m. *a*) ¿Qué amplitud debe tener la onda para que su potencia media sea de 50.0 W? *b*) En esta misma cuerda, si la amplitud y la longitud de onda son las del inciso *a*), ¿qué potencia media tendrá la onda si la tensión se aumenta de modo que la rapidez de la onda sea el doble?

15.66. Potencia instantánea en una onda. *a*) Dibuje una gráfica de $y(x, t)$ dada por la ecuación (15.7) como función de x para un instante dado t (digamos, $t = 0$). En los mismos ejes, grafique la potencia instantánea $P(x, t)$ dada por la ecuación (15.23). *b*) Explique la relación entre la pendiente de la curva de $y(x, t)$ contra x y el valor de $P(x, t)$. En particular, explique qué está sucediendo en los puntos donde $P = 0$, donde no hay transferencia instantánea de energía. *c*) La cantidad $P(x, t)$ siempre tiene el mismo signo. ¿Qué implica esto acerca de la dirección del flujo de energía? *d*) Considere una onda que avanza en la dirección $-x$, para la cual $y(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$. Calcule $P(x, t)$ para esta onda, y grafique $y(x, t)$ y $P(x, t)$ en función de x para un instante dado t (digamos, $t = 0$). ¿Qué diferencias surgen al invertir la dirección de la onda?

15.67. Un alambre metálico, con densidad ρ y módulo de Young Y, se estira entre soportes rígidos. A una temperatura T, la rapidez de una onda transversal es v_1. Si se aumenta la temperatura a $T + \Delta T$, la rapidez disminuye a $v_2 < v_1$. Determine el coeficiente de expansión lineal del alambre.

15.68. Una cuerda de 50.0 cm de longitud vibra sometida a una tensión de 1.00 N. La figura 15.39 muestra cinco imágenes estroboscópicas sucesivas de la cuerda. La lámpara produce 5000 destellos por minuto y las observaciones revelan que el desplazamiento máximo se dio en los destellos 1 y 5, sin otros máximos intermedios. *a*) Calcule la longitud de onda, el periodo y la frecuencia de las ondas que viajan por esta cuerda. *b*) ¿En qué modo normal (armónico) está vibra la cuerda? *c*) Calcule la rapidez de las ondas viajeras en la cuerda. *d*) ¿Con qué rapidez se está moviendo el punto P cuando la cuerda está en i) la posición 1 y ii) la posición 3? *e*) Calcule la masa de la cuerda (sección 15.3).

Figura 15.39 Problema 15.68.



15.69. Nodos de tendedero. El primo Morton está jugando otra vez con la cuerda del ejemplo 15.2 (sección 15.3). Un extremo está sujeto a un poste vertical. Morton sostiene con la mano el otro extremo y produce ondas relativamente lentas, de 0.720 m/s, en la cuerda. Él encuentra varias frecuencias con las que puede oscilar el extremo de la cuerda, de modo que una pinza ligera que está a 45.0 cm del poste no se mueva. Determine esas frecuencias.

15.70. Una cuerda de guitarra vibra en su modo fundamental, con nodos en sus extremos. La longitud del segmento de cuerda que vibra libremente es de 0.386 m. La aceleración transversal máxima de un punto en el punto medio del segmento es de 8.40×10^3 m/s^2, y la velocidad transversal máxima es de 3.80 m/s. *a*) Calcule la amplitud de esta onda estacionaria. *b*) ¿Qué rapidez tienen las ondas viajeras transversales en esta cuerda?

15.71. Como se muestra en el ejercicio 15.35, una onda estacionaria dada por la ecuación (15.28) satisface la ecuación de onda [ecuación (15.12)]. *a*) Demuestre que una onda estacionaria dada por la ecuación (15.28) también satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t)$$

Interprete esta ecuación en términos de lo que sabe acerca del movimiento armónico simple. *b*) ¿Una onda viajera dada por $y(x, t) = A\cos(kx - \omega t)$ también satisface la ecuación del inciso *a*)? Interprete este resultado.

15.72. *a*) Las ondas roja y azul de la figura 15.20 se combinan de modo que el desplazamiento de la cuerda en O siempre es cero. Con la finalidad de demostrarlo matemáticamente para una onda de forma arbitraria, considere una onda que se mueve a la derecha por la cuerda de la figura 15.20 (azul) y que, en el instante T, está dada por $y_1(x, T) = f(x)$, donde f es una función de x. (La forma de $f(x)$ determina la forma de la onda.) Si el punto O corresponde a $x = 0$, explique por qué, en el tiempo T, la onda que se mueve a la izquierda en la figura 15.20 (roja) está dada por la función $y_2(x, T) = -f(-x)$. *b*) Demuestre que la función de onda total $y(x, T) = y_1(x, T) + y_2(x, T)$ es cero en O, sin importar qué forma tenga $f(x)$. *c*) Las ondas roja y azul de la figura 15.21 se combinan de modo que la pendiente de la cuerda en O siempre sea cero. Para mostrar esto matemáticamente con una onda de forma arbitraria, supongamos otra vez que la onda que se mueve hacia la derecha en la figura 15.21 (azul) está dada por $y_1(x, T) = f(x)$ en el instante T. Explique por qué la onda que se mueve a la izquierda (roja) en ese mismo instante T está dada por la función $y_2(x, T) = f(-x)$. *d*) Demuestre que la función de onda total $y(x, T) = y_1(x, T) + y_2(x, T)$ tiene pendiente cero en O, sin importar qué forma tenga $f(x)$, en tanto $f(x)$ tenga una primera derivada finita.

15.73. Una cuerda que está en el eje $+x$ tiene un extremo libre en $x = 0$. *a*) Siguiendo pasos similares a los usados para deducir la ecuación (15.28), demuestre que una onda viajera incidente de la forma $y_1(x, t) = A\cos(kx + \omega t)$ da lugar a una onda estacionaria $y(x, t) = 2A\cos\omega t\cos kx$. *b*) Demuestre que la onda estacionaria tiene un antinodo en su extremo libre ($x = 0$). *c*) Calcule el desplazamiento, la rapidez y la aceleración máximos del extremo libre de la cuerda.

15.74. Una cuerda con ambos extremos fijos está vibrando en su tercer armónico. Las ondas tienen una rapidez de 192 m/s y una frecuencia de 240 Hz. La amplitud de la onda estacionaria en un antinodo es de 0.400 cm. *a*) Calcule la amplitud del movimiento de puntos de la cuerda a una distancia de i) 40.0 cm; ii) 20.0 cm; y iii) 10.0 cm del extremo izquierdo de la cuerda. *b*) En cada uno de los puntos del inciso *a*), ¿cuánto tiempo tarda la cuerda en ir de su desplazamiento más grande hacia arriba, hasta su desplazamiento más grande hacia abajo? *c*) Calcule la velocidad y la aceleración transversales máximas de la cuerda en cada uno de los puntos del inciso *a*).

15.75. Un alambre de acero, uniforme y cilíndrico, de 55.0 cm de largo y 1.14 mm de diámetro, está fijo por ambos extremos. ¿A qué tensión debe ajustarse de manera que, cuando vibre en su primer sobretono, produzca la nota re sostenido cuya frecuencia es de 311 Hz? Suponga que el alambre se estira una cantidad insignificante. (*Sugerencia:* véase la tabla 14.1.)

15.76. Resistencia al esfuerzo. Un hilo o una cuerda se rompen si se somete a un esfuerzo de tensión excesivo [ecuación (11.8)]. Las cuerdas más gruesas pueden resistir una mayor tensión sin romperse porque, cuanto mayor sea el grosor, mayor será el área transversal y menor será el esfuerzo. Un tipo de acero tiene densidad de 7800 kg/m^3 y se rompe si el esfuerzo de tensión excede 7.0×10^8 N/m^2. Se quiere

hacer una cuerda para guitarra con 4.0 g de este tipo de acero. En uso, la cuerda deberá resistir una tensión de 900 N sin romperse. *a*) Determine la longitud máxima y el radio mínimo que puede tener la cuerda. *b*) Calcule la frecuencia fundamental más alta posible de ondas estacionarias en esta cuerda, si puede vibrar en toda su longitud.

15.77. Ondas estacionarias combinadas. Una cuerda de guitarra de longitud L se puntea, de modo que la onda total producida es la suma de la fundamental y el segundo armónico. Es decir, la onda estacionaria está dada por:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

donde

$$y_1(x,t) = C\,\mathrm{sen}\,\omega_1 t\,\mathrm{sen}\,k_1 x$$
$$y_2(x,t) = C\,\mathrm{sen}\,\omega_2 t\,\mathrm{sen}\,k_2 x$$

siendo $\omega_1 = vk_1$ y $\omega_2 = vk_2$. *a*) ¿En qué valores de x están los nodos de y_1? *b*) ¿Y los de y_2? *c*) Grafique la onda total en $t = 0$, $t = \frac{1}{8}f_1$, $t = \frac{1}{4}f_1$, $t = \frac{3}{8}f_1$ y $t = \frac{1}{2}f_1$. *d*) ¿La suma de las dos ondas estacionarias y_1 y y_2 produce una onda estacionaria? Explique.

15.78. Una pesada escultura de aluminio sólido se cuelga de un alambre de acero. La frecuencia fundamental para ondas estacionarias transversales en el alambre es de 250 Hz. Luego, la escultura (no el alambre) se sumerge totalmente en agua. *a*) Calcule la nueva frecuencia fundamental. *b*) ¿Por qué es una buena aproximación tratar el alambre como si estuviera fijo en ambos extremos?

15.79. Afinación de un violonchelo. Una violonchelista afina la cuerda C de su instrumento a una frecuencia fundamental de 65.4 Hz. La porción vibrante de la cuerda tiene una longitud de 0.600 m y una masa de 14.4 g. *a*) ¿Con qué tensión debe estirarse? *b*) ¿Qué porcentaje se debe aumentar la tensión para elevar la frecuencia de 65.4 Hz a 73.4 Hz, correspondiente a un aumento de tono de C a D?

Problemas de desafío

15.80. Ondas longitudinales en un resorte. Suele usarse un resorte largo blando (como Slinky™) para demostrar las ondas longitudinales. *a*) Demuestre que si un resorte que obedece la ley de Hooke tiene masa m, longitud L y constante de fuerza k', la rapidez de ondas longitudinales en él es $v = L\sqrt{k'/m}$. *b*) Evalúe v para un resorte con $m = 0.250$ kg, $L = 2.00$ m y $k' = 1.50$ N/m.

15.81. *a*) Demuestre que, para una onda en una cuerda, la energía cinética *por unidad de longitud de la cuerda* es

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2}\mu v_y^2(x,t) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2$$

donde μ es la masa por unidad de longitud. *b*) Calcule $u_k(x, t)$ para una onda senoidal dada por la ecuación (15.7). *c*) También hay energía potencial elástica en la cuerda asociada al trabajo requerido para deformar y estirar la cuerda. Considere un segmento corto de la cuerda en la posición x cuya longitud no estirada es Δx, como en la figura 15.13. Si despreciamos la (pequeña) curvatura del segmento, su pendiente es $\partial y(x,t)/\partial x$. Suponga que el desplazamiento de la cuerda con respecto al equilibrio es pequeño, así que $\partial y/\partial x$ tiene magnitud mucho menor que 1. Demuestre que la longitud estirada del segmento es aproximadamente

$$\Delta x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]$$

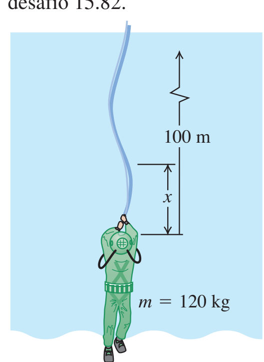
(*Sugerencia:* use la relación $\sqrt{1+u} \approx 1 + \frac{1}{2}u$, válida para $|u| \ll 1$.) *d*) La energía potencial almacenada en el segmento es igual al trabajo efectuado por la tensión de la cuerda F (que actúa a lo largo de la cuerda) para estirar el segmento de su longitud no estirada Δx a la longitud calculada en el inciso *c*). Calcule este trabajo, y demuestre que la energía potencial *por unidad de longitud de la cuerda* es

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2$$

e) Calcule $u_p(x, t)$ para una onda senoidal dada por la ecuación (15.7). *f*) Demuestre que $u_k(x, t) = u_p(x, t)$ para toda x y t. *g*) Grafique $y(x,t)$, $u_k(x,t)$ y $u_p(x,t)$ en función de x para $t = 0$; use los mismos ejes para las tres curvas. Explique por qué u_k y u_p son máximos donde y es cero, y viceversa. *h*) Demuestre que la potencia instantánea en la onda, dada por la ecuación (15.22), es igual a la energía total por unidad de longitud multiplicada por la rapidez de onda v. Explique por qué este resultado es lógico.

15.82. Un buzo está suspendido bajo la superficie de Loch Ness por un cable de 100 m conectado a una lancha en la superficie (figura 15.40). El buzo y su traje tienen una masa total de 120 kg y un volumen de 0.0800 m³. El cable tiene un diámetro de 2.00 cm y una densidad lineal de masa $\mu = 1.10$ kg/m. El buzo cree ver algo que se mueve en las profundidades y tira del extremo del cable horizontalmente para enviar ondas transversales por el cable, como señal para sus compañeros en la lancha. *a*) Calcule la tensión en el cable en el punto donde está conectado al buzo. No olvide incluir la fuerza de flotabilidad que el agua (densidad de 1000 kg/m³) ejerce sobre él. *b*) Calcule la tensión en el cable a una distancia x arriba del buzo, incluyendo en el cálculo la fuerza de flotabilidad sobre el cable. *c*) La rapidez de las ondas transversales en el cable está dada por $v = \sqrt{F/\mu}$ (ecuación 15.13). Por lo tanto, la rapidez varía a lo largo del cable, ya que la tensión no es constante. (Esta expresión no considera la fuerza de amortiguación que el agua ejerce sobre el cable en movimiento.) Integre para obtener el tiempo requerido para que la primera señal llegue a la superficie.

Figura 15.40 Problema de desafío 15.82.



15.83. Una cuerda uniforme con longitud L y masa m se sujeta por un extremo y se gira en un círculo horizontal con velocidad angular ω. Desprecie el efecto de la gravedad sobre la cuerda. Calcule el tiempo que una onda transversal tarda en viajar de un extremo de la cuerda al otro.

15.84. Potencia instantánea en una onda estacionaria. Por la ecuación (15.21), la rapidez instantánea con que una onda transmite energía por una cuerda (potencia instantánea) es

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

donde F es la tensión. *a*) Evalúe $P(x, t)$ para una onda estacionaria de la forma dada por la ecuación (15.28). *b*) Demuestre que, para todos los valores de x la potencia *media* P_{med} transportada por la onda estacionaria es cero. [La ecuación (15.25) no es aplicable en este caso. ¿Sabe por qué?] *c*) Para una onda estacionaria dada por la ecuación (15.28), dibuje una gráfica que muestre $P(x, t)$ y el desplazamiento $y(x, t)$ en función de x para $t = 0$, $t = \pi/4\omega$, $t = \pi/2\omega$ y $t = 3\pi/4\omega$. [Una $P(x, t)$ positiva implica que la energía fluye en la dirección $+x$; un valor negativo de $P(x, t)$ implica que la energía fluye en la dirección $-x$.] *d*) La energía *cinética* por unidad de longitud de la cuerda es

máxima donde la cuerda tiene la rapidez transversal más alta, y la energía *potencial* por unidad de longitud de la cuerda es máxima donde la cuerda tiene la pendiente más empinada (porque ahí es donde la cuerda está más estirada). (Véase el problema de desafío 15.81.) Usando estas ideas, analice el flujo de energía a lo largo de la cuerda.

15.85. Desafinación. La cuerda B de una guitarra está hecha de acero (densidad 7800 kg/m^3) y tiene 63.5 cm de longitud y 0.406 mm de diámetro. La frecuencia fundamental es $f = 247.0$ Hz. *a*) Calcule la tensión en la cuerda. *b*) Si la tensión F se modifica en una cantidad pequeña ΔF, la frecuencia f cambia una cantidad pequeña Δf. Demuestre que

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{2}\frac{\Delta f}{f}$$

c) La cuerda se afina como en el inciso *a*) cuando su temperatura es de 18.5 °C. Si la guitarra se pulsa vigorosamente, la temperatura en la cuerda subiría, con lo que cambiaría su frecuencia de vibración. Calcule Δf si la temperatura de la cuerda sube a 29.5 °C. La cuerda de acero tiene un módulo de Young de 2.00×10^{11} Pa y un coeficiente de expansión lineal de 1.20×10^{-5} $(C°)^{-1}$. Suponga que la temperatura del cuerpo de la guitarra se mantiene constante. ¿La frecuencia de vibración aumentará o disminuirá?

SONIDO Y EL OÍDO

16



? A la mayoría de la gente le agrada escuchar música, pero a pocas les gusta escuchar ruido. ¿Cuál es la diferencia física entre el sonido musical y el ruido?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir una onda sonora en términos de los desplazamientos de partícula o de las fluctuaciones de presión.
- Cómo calcular la rapidez de las ondas sonoras en diferentes materiales.
- Cómo obtener la intensidad de una onda sonora.
- Qué determina la frecuencia específica del sonido producido por un órgano o una flauta.
- Cómo ocurre la resonancia en los instrumentos musicales.
- Qué sucede cuando se traslapan las ondas sonoras de diferentes fuentes.
- Cómo describir lo que ocurre cuando se combinan dos ondas sonoras de frecuencias ligeramente diferentes.
- Por qué el tono de una sirena cambia conforme se va alejando.

De todas las ondas mecánicas que se dan en la naturaleza, las más importantes en nuestra vida diaria son las ondas longitudinales en un medio, usualmente aire, llamadas *ondas sonoras*. La razón es que el oído humano es muy sensible y puede detectar ondas sonoras incluso de muy baja intensidad. Además de su uso en la comunicación verbal, nuestros oídos nos permiten captar una multitud de indicios acerca de nuestro entorno, desde el grato sonido de la preparación de alimentos, hasta el sonido de advertencia de un vehículo que se acerca. La capacidad para escuchar a un depredador nocturno fue fundamental para la supervivencia de nuestros antepasados, así que no es exagerado decir que los seres humanos debemos la existencia a nuestro sentido del oído altamente evolucionado.

Hasta ahora, hemos descrito las ondas mecánicas primordialmente en términos de desplazamiento; no obstante, por lo general resulta más adecuado describir las ondas sonoras en términos de fluctuaciones de *presión*, sobre todo porque el oído es sensible principalmente a cambios de presión. Examinaremos las relaciones entre desplazamiento, fluctuación de presión e intensidad, así como los vínculos entre estas cantidades y la percepción humana del sonido.

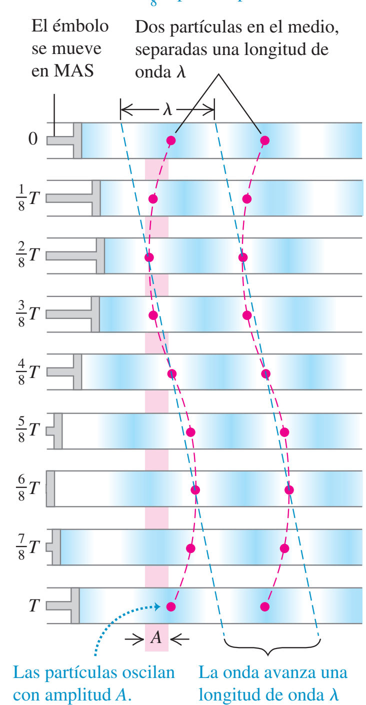
Cuando una fuente de sonido o un receptor se mueven en el aire, el receptor podría oír una frecuencia distinta de la emitida por la fuente. Éste es el efecto Doppler, que tiene importantes aplicaciones en medicina y la tecnología.

16.1 Ondas sonoras

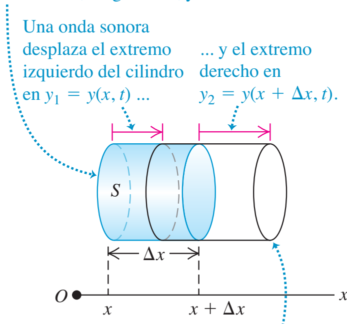
La definición más general del **sonido** es una onda longitudinal en un medio. Lo que más nos interesa en este capítulo son las ondas sonoras en aire; aunque el sonido puede viajar por cualquier gas, líquido o sólido. Quizá el lector conozca bastante la propagación del sonido a través de un sólido, si los altavoces (las bocinas) del aparato de sonido del vecino están junto a una pared de su casa.

Las ondas sonoras más sencillas son las senoidales, las cuales tienen la frecuencia, la amplitud y la longitud de onda completamente especificadas. El oído humano es sensible a las ondas en el intervalo de frecuencias de 20 a 20,000 Hz, llamada **gama**

16.1 Onda senoidal longitudinal que viaja hacia la derecha en un fluido. (Compare con la figura 15.7.)



16.2 Al propagarse una onda sonora a lo largo del eje x, los extremos izquierdo y derecho sufren desplazamientos distintos y_1 y y_2, respectivamente.



audible, pero también usamos el término *sonido* para ondas similares con frecuencias mayores (**ultrasónicas**) y menores (**infrasónicas**).

Las ondas sonoras suelen dispersarse en todas direcciones a partir de la fuente sonido, con una amplitud que depende de la dirección y la distancia a la fuente. Volveremos a este punto en la siguiente sección. Por ahora, nos concentraremos en el caso idealizado de una onda sonora que se propaga sólo en la dirección $+x$. Como vimos en la sección 15.3, dicha onda se describe con una función de onda $y(x, t)$, que da el desplazamiento instantáneo y de una partícula en el medio, en la posición x y en el instante t. Si la onda es senoidal, podemos expresarla usando la ecuación (15.7):

$$y(x, t) = A\cos(kx - \omega t) \quad \text{(onda sonora que se propaga en la dirección } +x) \tag{16.1}$$

Recuerde que, en una onda longitudinal, los desplazamientos son *paralelos* a la dirección en que viaja, así que las distancias x y y se miden paralelas entre sí, no perpendicularmente como en las ondas transversales. La amplitud A es el máximo desplazamiento de una partícula del medio con respecto a su posición de equilibrio (figura 16.1). Por lo tanto, A también se conoce como **amplitud de desplazamiento**.

Ondas sonoras como fluctuaciones de presión

Las ondas sonoras también pueden describirse en términos de variaciones de *presión* en diversos puntos. En una onda sonora senoidal en aire, la presión fluctúa por arriba y por debajo de la presión atmosférica (p_a) en forma senoidal con la misma frecuencia que los movimientos de las partículas de aire. El oído humano funciona detectando tales variaciones de presión. Una onda sonora que entra en el canal auditivo ejerce una presión fluctuante sobre un lado del tímpano; el aire del otro lado, comunicado con el exterior por la trompa de Eustaquio, está a presión atmosférica. La diferencia de presión entre ambos lados del tímpano lo pone en movimiento. Los micrófonos y dispositivos similares por lo regular también detectan diferencias de presión, no desplazamientos, así que resulta muy útil establecer una relación entre estas dos descripciones.

Sea $p(x, t)$ la fluctuación de presión instantánea en una onda sonora en cualquier punto x en el instante t. Es decir, $p(x, t)$ es la cantidad en que la presión *difiere* de la presión atmosférica normal p_a. Pensemos en $p(x, t)$ como la *presión manométrica* definida en la sección 14.2: puede ser positiva o negativa. La presión *absoluta* en un punto es entonces $p_a + p(x, t)$.

Para ver el vínculo entre la fluctuación de presión $p(x, t)$ y el desplazamiento $y(x, t)$ en una onda sonora que se propaga en la dirección $+x$, considere un cilindro imaginario de un material (gas, líquido, sólido) con área transversal S y su eje a lo largo de la dirección de propagación (figura 16.2). Si no está presente una onda sonora, el cilindro tiene longitud Δx y volumen $V = S\Delta x$, volumen sombreado en la figura 16.2. Si una onda está presente, al tiempo t el extremo del cilindro que estaba en x tiene un desplazamiento dado por $y_1 = y(x, t)$, y el extremo que estaba en $x + \Delta x$ se desplaza $y_2 = y(x + \Delta x, t)$; esto se indica con líneas rojas. Si $y_2 > y_1$ como en la figura 16.2, el volumen del cilindro aumentó, originando una disminución de la presión. Si $y_2 < y_1$, el volumen disminuyó, y la presión aumentó. Si $y_2 = y_1$, el cilindro simplemente se desplazó a la izquierda o a la derecha; no hay cambio de volumen ni fluctuación de presión. La fluctuación de presión depende de la *diferencia* entre el desplazamiento de puntos vecinos del medio.

Cuantitativamente, el cambio de volumen ΔV del cilindro es

$$\Delta V = S(y_2 - y_1) = S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]$$

En el límite en que $\Delta x \to 0$, el cambio fraccionario de volumen dV/V (cambio de volumen dividido entre volumen original) es

$$\frac{dV}{V} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{S[y(x + \Delta x, t) - y(x, t)]}{S\Delta x} = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \tag{16.2}$$

Este cambio se relaciona con la fluctuación de presión mediante el módulo de volumen B que, por definición [ecuación (11.13)], es $B = -p(x, t)/(dV/V)$ (véase la sección 11.4). Despejando $p(x, t)$:

$$p(x, t) = -B\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \qquad (16.3)$$

El signo negativo se debe a que, cuando $\partial y(x, t)/\partial x$ es positivo, el desplazamiento es mayor en $x + \Delta x$ que en x, lo cual implica un aumento de volumen y una *disminución* de la presión.

Al evaluar $\partial y(x, t)/\partial x$ para la onda senoidal de la ecuación (16.1), vemos que

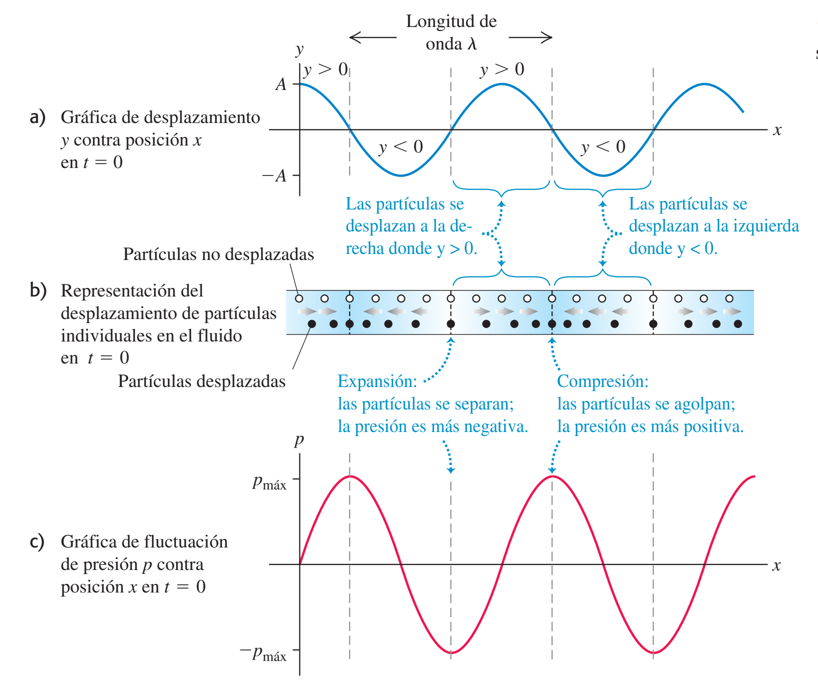
$$p(x, t) = BkA\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \qquad (16.4)$$

La figura 16.3 muestra $y(x, t)$ y $p(x, t)$ para una onda senoidal en $t = 0$. También muestra cómo partículas individuales de la onda se desplazan en ese instante. Si bien $y(x, t)$ y $p(x, t)$ describen la misma onda, estas funciones están desfasadas un cuarto de ciclo; en un instante dado, el desplazamiento es máximo donde la fluctuación de presión es cero, y viceversa. En particular, observe que las compresiones (puntos de máxima presión y densidad) y las expansiones o rarefacciones (puntos de mínima presión y densidad) son puntos de *cero* desplazamiento.

CUIDADO **Gráficas de una onda sonora** Tenga presente que las gráficas de la figura 16.3 muestran la onda en *un* solo instante. Dado que la onda se está propagando en la dirección $+x$, al paso del tiempo los patrones de onda de las funciones $y(x, t)$ y $p(x, t)$ se desplazan a la derecha con la rapidez de onda $\omega = v/k$. Por lo tanto, las posiciones de las compresiones y expansiones también se desplazan a la derecha con la misma rapidez. Las partículas, en cambio, simplemente oscilan en movimiento armónico simple, como se indica en la figura 16.1.

La ecuación (16.4) muestra que la cantidad BkA representa la máxima fluctuación de presión, que llamamos **amplitud de presión** y denotamos con $p_{máx}$:

$$p_{máx} = BkA \qquad \text{(onda sonora senoidal)} \qquad (16.5)$$



16.3 Tres formas de describir una onda sonora.

La amplitud de presión es directamente proporcional a la de desplazamiento A, como esperaríamos, y también depende de la longitud de onda. Las ondas con longitud de onda λ más corta (número de onda $k = 2\pi/\lambda$ más grande) tienen mayores variaciones de presión, para una amplitud dada porque los máximos y mínimos están más cerca unos de otros. Un medio con un módulo de volumen B grande requiere una amplitud de presión relativamente grande, para una amplitud de desplazamiento dada porque un B grande implica un medio menos compresible, es decir, que requiere un mayor cambio de presión para un cambio de volumen dado.

Ejemplo 16.1 Amplitud de una onda sonora en aire

En una onda sonora senoidal de moderada intensidad, las variaciones máximas de presión son del orden de 3.0×10^{-2} Pa por arriba y por debajo de la presión atmosférica p_a (nominalmente 1.013×10^5 Pa al nivel del mar). Calcule el desplazamiento máximo correspondiente, si la frecuencia es de 1000 Hz. En aire a presión atmosférica y densidad normales, la rapidez del sonido es de 344 m/s y el módulo de volumen es de 1.42×10^5 Pa.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la relación entre dos formas distintas de describir una onda sonora: en términos del desplazamiento y en términos de la presión. La incógnita es la amplitud del desplazamiento A.

PLANTEAR: Nos dan la amplitud de presión $p_{máx}$, la rapidez de la onda v, la frecuencia f y el módulo de volumen B. La incógnita es el desplazamiento A, que está relacionado con $p_{máx}$ mediante la ecuación (16.5). También usaremos la relación $\omega = vk$ [ecuación (15.6)] para determinar el número de onda k a partir de v y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$.

EJECUTAR: Por la ecuación (16.5), el desplazamiento máximo es $A = p_{máx}/Bk$. Por la ecuación (15.6), el número de onda es

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{(2\pi \text{ rad})(1000 \text{ Hz})}{344 \text{ m/s}} = 18.3 \text{ rad/m}$$

Entonces,

$$A = \frac{p_{máx}}{Bk} = \frac{3.0 \times 10^{-2} \text{ Pa}}{(1.42 \times 10^5 \text{ Pa})(18.3 \text{ rad/m})} = 1.2 \times 10^{-8} \text{ m}$$

EVALUAR: La amplitud de este desplazamiento es del orden de $\frac{1}{100}$ del tamaño de una célula humana. Recuerde que el oído detecta fluctuaciones de presión; la detección de estos minúsculos desplazamientos es indirecta.

Ejemplo 16.2 Amplitud de una onda sonora en el oído interno

Cuando una onda sonora entra en el oído, pone a oscilar el tímpano que, a la vez, hace oscilar los tres *huesecillos* del oído medio (figura 16.4). Esta oscilación se transmite finalmente al oído interno, que está lleno de fluido. El movimiento del fluido perturba a las células pilosas que transmiten impulsos nerviosos al cerebro, para informarle que está presente un sonido. La parte móvil del tímpano tiene un área de unos 43 mm^2, y el estribo (el huesecillo más pequeño) en su contacto con el oído interno, de unos 3.2 mm^2. Para el sonido del ejemplo anterior, determine *a*) la amplitud de presión y *b*) la amplitud de desplazamiento de la onda en el fluido del oído interno. La rapidez del sonido en este fluido es del orden de 1500 m/s.

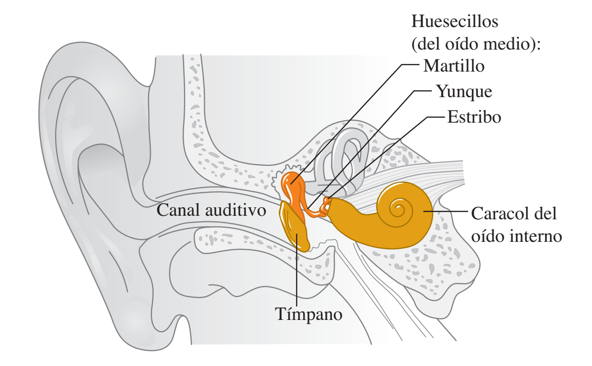
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aunque la onda sonora ahora viaja por un líquido (principalmente agua) y no por un gas, son válidos los mismos principios y relaciones entre las propiedades de la onda.

PLANTEAR: Podemos despreciar la masa de los huesecillos (unos 58 mg $= 5.8 \times 10^{-5}$ kg), así que la fuerza ejercida por ellos sobre el fluido del oído interno es la misma que la ejercida sobre el tímpano y los huesecillos por la onda sonora en aire. (Usamos esta misma idea en los capítulos 4 y 5, cuando dijimos que la tensión es la misma en los dos extremos de una cuerda sin masa.) Así, la amplitud de presión $p_{máx}$ es mayor en el oído interno que en el aire exterior, porque se ejerce la misma fuerza sobre un área menor (el área del estribo en vez del área del tímpano).

Teniendo la amplitud de presión en el oído interno, obtendremos la amplitud empleando la ecuación (16.5). Los valores de B y k son diferentes que en aire. Para determinar k, tomamos nota de que la onda en el oído interno tiene la misma frecuencia angular ω que en

16.4 Anatomía del oído humano. El oído medio tiene el tamaño de una canica pequeña; los huesecillos (martillo, yunque y estribo) son los huesos más pequeños del cuerpo humano.



el aire porque éste, el tímpano, los huesecillos y el fluido oscilan juntos. No obstante, como la rapidez de la onda v es mayor en el oído interno que en el aire (1500 m/s contra 344 m/s), el número de onda $k = \omega/v$ es menor.

EJECUTAR: *a*) Utilizando el área del tímpano y la amplitud de presión obtenida en el ejemplo 16.1, vemos que la fuerza máxima ejercida por la onda sonora en aire sobre el tímpano es $F_{\text{máx}} = p_{\text{máx(aire)}} S_{\text{tímpano}}$. Por lo tanto, la amplitud de presión en el fluido del oído interno es

$$p_{\text{máx (oído interno)}} = \frac{F_{\text{máx}}}{S_{\text{estribo}}} = \frac{p_{\text{máx (aire)}} S_{\text{tímpano}}}{S_{\text{estribo}}}$$

$$= \frac{(3.0 \times 10^{-2}\ \text{Pa})(43\ \text{mm}^2)}{3.2\ \text{mm}^2} = 0.40\ \text{Pa}$$

b) Para calcular el desplazamiento máximo, usamos otra vez la relación $A = p_{\text{máx}}/Bk$ como hicimos en el ejemplo 16.1. El fluido del oído interno es principalmente agua, que tiene un módulo de volumen mucho mayor que el aire porque es mucho más difícil de comprimir. Por la tabla 11.2, la compresibilidad del agua (desafortunadamente también llamada k) es de $45.8 \times 10^{-11}\ \text{Pa}^{-1}$, así que $B_{\text{fluido}} = 1/(45.8 \times 10^{-11}\ \text{Pa}^{-1}) = 2.18 \times 10^{9}\ \text{Pa}$.

Determinamos el valor del número de onda k utilizando el valor de ω del ejemplo 16.1 y $v = 1500$ m/s para el fluido del oído interno. Entonces,

$$k_{\text{oído interno}} = \frac{\omega}{v_{\text{oído interno}}} = \frac{(2\pi\ \text{rad})(1000\ \text{Hz})}{1500\ \text{m/s}} = 4.2\ \text{rad/m}$$

Juntando todo, el desplazamiento máximo del fluido en el oído interno es

$$A_{\text{oído interno}} = \frac{p_{\text{máx (oído interno)}}}{B_{\text{fluido}} k_{\text{oído interno}}} = \frac{0.40\ \text{Pa}}{(2.18 \times 10^{9}\ \text{Pa})(4.2\ \text{rad/m})}$$

$$= 4.4 \times 10^{-11}\ \text{m}$$

EVALUAR: El resultado del inciso *a*) demuestra que el efecto de los huesecillos es aumentar la amplitud de presión en el oído interno por un factor de $(43\ \text{mm}^2)/(3.2\ \text{mm}^2) = 13$. Este factor de amplificación contribuye a la gran sensibilidad del oído humano.

La amplitud de desplazamiento en el oído interno es aún menor que en el aire; sin embargo, lo que realmente importa ahí es la amplitud de *presión*, ya que las variaciones de presión en el fluido son lo que mueve las células pilosas.

Percepción de ondas sonoras

Las características físicas de una onda sonora tienen una relación directa con la percepción de ese sonido por un receptor. A una frecuencia dada, cuanto mayor sea la amplitud de presión de una onda sonora senoidal, mayor será la intensidad del sonido al cual se le suele llamar, así que mayor será el **volumen** percibido. La relación entre amplitud de presión y volumen no es sencilla, y varía de una persona a otra. Un factor importante es que el oído no es igualmente sensible a todas las frecuencias de la gama audible. Un sonido de cierta frecuencia puede parecer más fuerte que otro con igual amplitud de presión pero distinta frecuencia. A 1000 Hz, la amplitud de presión mínima perceptible con oído normal es de aproximadamente 3×10^{-5} Pa; para producir el mismo volumen a 200 Hz o 15,000 Hz, se requiere cerca de 3×10^{-4} Pa. El volumen percibido también depende de la salud del oído. Es natural que con la edad se pierda la sensibilidad a altas frecuencias, y esto puede agravarse por niveles de sonido excesivos. Algunos estudios han demostrado que varios músicos de rock jóvenes han sufrido daños auditivos permanentes y tienen un oído típico de personas de 65 años de edad. Los audífonos en estéreo portátiles empleados con un alto volumen representan una amenaza similar para el oído. ¡Tenga cuidado!

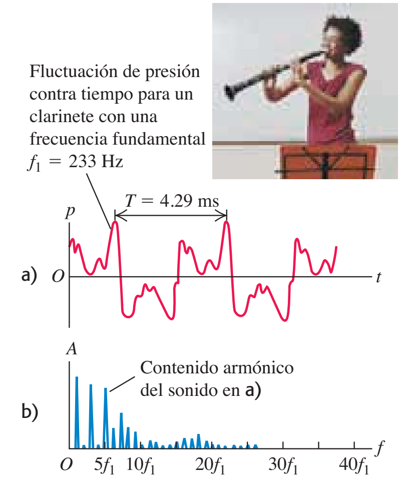
La frecuencia de una onda sonora es el factor primordial que determina el **tono** de un sonido, la cualidad que nos permite clasificarlo como “agudo” o “grave”. Cuanta más alta sea la frecuencia de un sonido (dentro de la gama audible), más agudo será el tono percibido. La amplitud de presión también ayuda a determinar el tono. Cuando un receptor compara dos ondas sonoras senoidales con la misma frecuencia pero diferente amplitud de presión, aquella con mayor amplitud suele percibirse como más fuerte pero también un poco más grave.

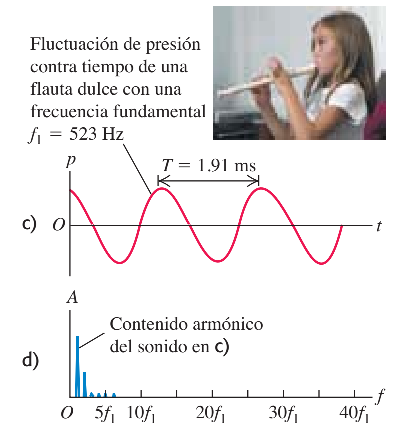
Los sonidos musicales tienen funciones de onda más complicadas que una simple función seno. En la figura 16.5a se muestra la fluctuación de presión en la onda sonora producida por un clarinete. El patrón es tan complejo porque la columna de aire de un instrumento de aliento como el clarinete vibra con la frecuencia fundamental y muchos armónicos al mismo tiempo. (En la sección 15.8, describimos este mismo comportamiento para una cuerda punteada, frotada o golpeada. Examinaremos la física de los instrumentos de viento en la sección 16.5.) La onda sonora producida en el aire circundante tiene la misma cantidad de cada armónico, es decir, un *contenido armónico* similar. La figura 16.5b muestra el contenido armónico del sonido de un clarinete. El proceso matemático de traducir una gráfica de presión-tiempo como la figura 16.5a en una gráfica de contenido armónico como la figura 16.5b se denomina *análisis de Fourier*.



10.10 Ondas complejas: análisis de Fourier

16.5 Diferentes representaciones del sonido de a) y b) un clarinete y c) y d) una flauta dulce o de pico. (Gráficas adaptadas de R.E. Berg y D.G. Stork, *The Physics of Sound*, Prentice-Hall, 1982.)





Dos tonos producidos por diferentes instrumentos podrían tener la misma frecuencia fundamental (y por lo tanto el mismo tono), pero sonar distinto por la presencia de diferentes cantidades de los diversos armónicos. La diferencia se llama *color de tono*, *calidad* o **timbre**, y a menudo se describe con términos subjetivos como delgado, dorado, redondo, suave y débil. Un tono rico en armónicos, como el del clarinete (figuras 16.5a y b), suele sonar "delgado"; mientras que uno que contiene principalmente una fundamental, como el tono de una flauta dulce o de pico (figuras 16.5c y d) es más suave y "aflautado". El mismo principio puede aplicarse a la voz humana, que es otro ejemplo de instrumento de viento; las vocales "a" y "e" suenan diferentes por diferencias en su contenido armónico.

Otro factor que determina la calidad de un tono es el comportamiento al principio (*ataque*) y al final (*decaimiento*) del tono. Un tono de piano comienza con un golpe y se desvanece gradualmente. Un tono de clavicordio, además de tener diferente contenido armónico, comienza más rápidamente con un chasquido, y los armónicos más altos comienzan antes que los más bajos. Al soltarse la tecla, el sonido se desvanece con mucha mayor rapidez que en un piano. Se presentan efectos similares en otros instrumentos musicales. En los instrumentos de viento y cuerda, el ejecutante tiene un control considerable sobre el ataque y el decaimiento del tono, y estas características ayudan a definir las cualidades únicas de cada instrumento.

A diferencia de los tonos creados por instrumentos musicales o las vocales del habla humana, el **ruido** es una combinación de *todas* las frecuencias, no sólo las que son múltiplos enteros de una fundamental. (Un caso extremo es el "ruido blanco", que contiene cantidades iguales de todas las frecuencias de la gama audible.) Como ejemplos están el sonido del viento y el siseo que hacemos al pronunciar la consonante "s". ?

Evalúe su comprensión de la sección 16.1 Se produce una onda sonora senoidal en aire con un generador de señales electrónicas. Luego, se aumenta la frecuencia de la onda de 100 Hz a 400 Hz manteniendo constante la amplitud de presión. ¿Qué efecto tiene esto sobre la amplitud de desplazamiento de la onda sonora? i) se vuelve cuatro veces mayor; ii) se vuelve dos veces mayor, iii) permanece sin cambio; iv) se reduce a la mitad; v) se reduce a la cuarta parte. MP

16.2 Rapidez de las ondas sonoras

En la sección 15.4, vimos que la rapidez v de una onda transversal en una cuerda depende de la tensión F en la cuerda y la densidad lineal de masa μ: $v = \sqrt{F/\mu}$. ¿Existe una expresión correspondiente para la rapidez de las ondas sonoras en un gas o un líquido? ¿De qué propiedades del medio depende la rapidez?

Podemos hacer una conjetura acertada recordando algo que dijimos en la sección 15.4: para las ondas mecánicas en general, la expresión de la rapidez de la onda tiene la forma

$$v = \sqrt{\frac{\text{Fuerza de restitución que vuelve el sistema al equilibrio}}{\text{Inercia que se opone al retorno al equilibrio}}}$$

Una onda sonora en un volumen de fluido causa compresiones y expansiones del fluido, de modo que el término de fuerza de restitución de la expresión anterior debe tener que ver con lo fácil o difícil que es comprimir el fluido. Esto es precisamente lo que nos dice el módulo de volumen B del medio. Según la segunda ley de Newton, la inercia está relacionada con la masa. Lo "masivo" de un fluido se describe con su densidad ρ, que es masa por unidad de volumen. (La cantidad correspondiente para una cuerda es la masa por unidad de longitud, μ.) Por lo tanto, cabe esperar que la rapidez de las ondas sonoras tenga la forma $v = \sqrt{B/\rho}$.

Para verificar nuestra conjetura, deduciremos la rapidez de las ondas sonoras en un fluido en un tubo. Este tema es importante, ya que todos los instrumentos musicales de viento son básicamente tubos, en los que una onda longitudinal (sonido) se propaga en

un fluido (aire) (figura 16.6). Nuestra voz funciona con el mismo principio: ondas sonoras se propagan en el conducto vocal, que es básicamente un tubo lleno de aire conectado a los pulmones en un extremo (la laringe) y al aire exterior en el otro (la boca). Los pasos de nuestra deducción son paralelos a los que usamos en la sección 15.4 para obtener la rapidez de ondas transversales, así que sería útil repasar esa sección.



16.6 Cuando se toca un instrumento de viento como este corno francés, las ondas sonoras se propagan por el aire dentro de los tubos del instrumento. Las propiedades del sonido que sale del pabellón dependen de la rapidez de tales ondas.

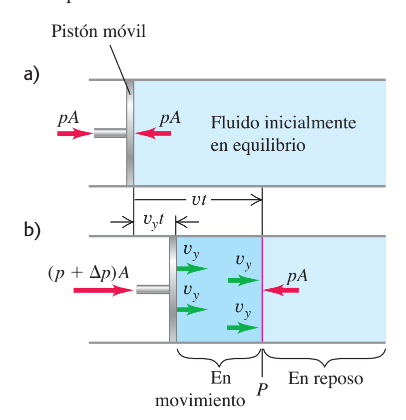
Rapidez del sonido en un fluido

La figura 16.7 muestra un fluido (líquido o gas) con densidad ρ en un tubo con área transversal A. En el estado de equilibrio, el fluido está sometido a una presión uniforme p. En la figura 16.7a el fluido está en reposo. Tomamos el eje x a lo largo del tubo. Ésta es también la dirección en que hacemos que se propague una onda longitudinal, así que el desplazamiento y también se mide a lo largo del tubo, igual que en la sección 16.1 (véase la figura 16.2).

En el instante $t = 0$, el pistón del extremo izquierdo comienza a moverse hacia la derecha con rapidez constante v_y. Esto inicia un movimiento ondulatorio que viaja a la derecha a lo largo del tubo, donde secciones sucesivas de fluido comienzan a moverse y a comprimirse en instantes sucesivamente posteriores.

La figura 16.7b muestra el fluido en el instante t. Todas las porciones del fluido a la izquierda de P se mueven a la derecha con rapidez v_y, y todas las porciones a la derecha de P están aún en reposo. La frontera entre las porciones en movimiento y estacionaria viaja a la derecha con una rapidez igual a la rapidez de propagación o rapidez de onda v. En el tiempo t, el pistón se mueve una distancia $v_y t$ y la frontera avanza una distancia vt. Al igual que con las perturbaciones transversales en una cuerda, podemos calcular la rapidez de propagación a partir del teorema del impulso y el momento lineal.

16.7 Propagación de una onda sonora en un fluido confinado en un tubo. a) Fluido en equilibrio. b) Un tiempo t después de que el pistón comienza a moverse a la derecha con rapidez v_y, el fluido entre el pistón y el punto P está en movimiento. La rapidez de las ondas sonoras es v.



La cantidad de fluido puesta en movimiento en el tiempo t es la cantidad que originalmente ocupaba una sección del cilindro con longitud vt, área transversal A y volumen vtA. La masa de este fluido es ρvtA, y su momento lineal longitudinal (a lo largo del tubo) es

$$\text{Momento lineal longitudinal} = (\rho vtA)v_y$$

Ahora calculamos el aumento de presión, Δp, en el fluido en movimiento. El volumen original de este fluido, Avt, disminuyó en una cantidad $Av_y t$. Por la definición del módulo de volumen B, ecuación (11.13) de la sección 11.5,

$$B = \frac{-\text{Cambio de presión}}{\text{Cambio fraccionario de volumen}} = \frac{-\Delta p}{-Av_y t/Avt}$$

$$\Delta p = B\frac{v_y}{v}$$

La presión en el fluido en movimiento es $p + \Delta p$, y la fuerza ejercida sobre él por el pistón es $(p + \Delta p)A$. La fuerza neta sobre el fluido en movimiento (véase la figura 16.7b) es ΔpA, y el impulso longitudinal es

$$\text{Impulso longitudinal} = \Delta pAt = B\frac{v_y}{v}At$$

Dado que el fluido estaba en reposo en $t = 0$, el cambio de momento lineal hasta el instante t es igual al mometo lineal en t. Aplicando el teorema de impulso y el momento lineal (sección 8.1), vemos que

$$B\frac{v_y}{v}At = \rho vtAv_y \tag{16.6}$$

Si despejamos v, obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad \text{(rapidez de una onda longitudinal en un fluido)} \tag{16.7}$$

lo que concuerda con nuestra conjetura. Así, la rapidez de propagación de un pulso longitudinal en un fluido únicamente depende del módulo de volumen B y de la densidad ρ del medio.

Aunque dedujimos la ecuación (16.7) para ondas en un tubo, también es válida para ondas longitudinales en un gran volumen de fluido. Así, la rapidez de las ondas sonoras que viajan en aire o agua se obtiene con esta ecuación.

Rapidez del sonido en un sólido

Si una onda longitudinal se propaga en una varilla o barra *sólida*, la situación es un tanto diferente. La varilla se expande un poco a los lados cuando se comprime longitudinalmente; en tanto que un fluido en un tubo con sección transversal constante no puede hacerlo. Usando el mismo razonamiento que nos llevó a la ecuación (16.7), podemos demostrar que la rapidez de un pulso longitudinal en la varilla está dada por

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \text{(rapidez de una onda longitudinal en una varilla sólida)} \qquad (16.8)$$

donde Y es el módulo de Young, definido en la sección 11.4.

CUIDADO **Varillas sólidas contra material sólido en volumen** La ecuación (16.8) es válida sólo para una varilla o barra, cuyos lados pueden arquearse y encogerse libremente un poco al viajar la onda; no es válida para ondas longitudinales en un gran *volumen* de sólido, ya que aquí el movimiento lateral de cualquier elemento es impedido por el material circundante. La rapidez de las ondas longitudinales en un material sólido en volumen depende de la densidad, el módulo de volumen y el módulo de *corte*. Una explicación cabal rebasa el alcance de este libro.

Al igual que en la deducción para una onda transversal en una cuerda, las ecuaciones (16.7) y (16.8) son válidas para ondas senoidales y cualquier onda periódica, no sólo para el caso especial que vimos aquí.

La tabla 16.1 presenta la rapidez del sonido en varios medios materiales. Las ondas sonoras viajan más lentamente en plomo que en aluminio o acero, ya que el plomo tiene módulos de volumen y de corte menores, y mayor densidad.

Tabla 16.1 Rapidez del sonido en varios medios materiales

Material	Rapidez del sonido (m/s)
Gases	
Aire (20 °C)	344
Helio (20 °C)	999
Hidrógeno (20 °C)	1330
Líquidos	
Helio líquido (4 K)	211
Mercurio (20 °C)	1451
Agua (0 °C)	1402
Agua (20 °C)	1482
Agua (100 °C)	1543
Sólidos	
Aluminio	6420
Plomo	1960
Acero	5941

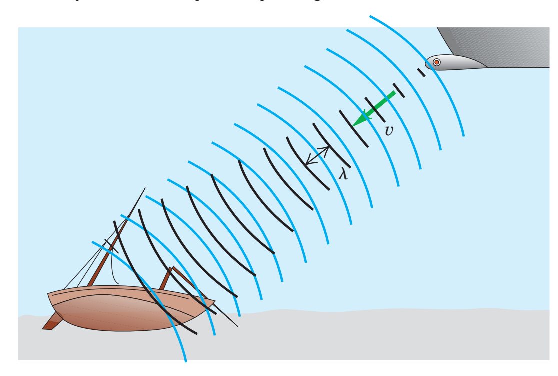
Ejemplo 16.3 Longitud de onda del sonar

Un barco usa un sistema de sonar para detectar objetos submarinos (figura 16.8). El sistema emite ondas sonoras submarinas y mide el tiempo que tarda la onda reflejada (eco) en volver al detector. Determine la rapidez del sonido en el agua con la ecuación (16.7) y calcule la longitud de onda de una onda de 262 Hz.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestras incógnitas son la rapidez y la longitud de onda de una onda sonora en un fluido.

16.8 Un sistema de sonar usa ondas sonoras submarinas para detectar y encontrar objetos bajo el agua.



PLANTEAR: Para usar la ecuación (16.7), obtendremos el módulo de volumen del agua a partir de la compresibilidad (tabla 11.2) y la densidad ($\rho = 1.00 \times 10^3$ kg/m^3). Dadas la rapidez y la frecuencia $f = 262$ Hz, calculamos la longitud de onda a partir de la relación $v = f\lambda$.

EJECUTAR: Por la tabla 11.2, la compresibilidad del agua (el recíproco del módulo de volumen) es $k = 45.8 \times 10^{-11}$ Pa^{-1}, así que $B = (1/45.8) \times 10^{11}$ Pa. Obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1/45.8) \times 10^{11}\ \text{Pa}}{1.00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3}}$$
$$= 1480\ \text{m/s}$$

La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1480\ \text{m/s}}{262\ \text{s}^{-1}} = 5.65\ \text{m}$$

EVALUAR: El valor calculado de v concuerda con el valor experimental de la tabla 16.1. Aunque el agua es mucho más densa que el aire (ρ es mayor), también es mucho más incompresible (B es mayor); la rapidez $v = \sqrt{B/\rho}$ resulta ser más de cuatro veces la rapidez del sonido en aire a temperaturas ordinarias.

En el ejemplo 15.1 (sección 15.2) calculamos que una onda con esta frecuencia en aire tiene longitud de onda de 1.31 m. La rapidez del sonido en agua es mayor que en el aire, así que la longitud de onda $\lambda = v/f$ también debe ser mayor; nuestro cálculo coincide.

Los delfines emiten ondas sonoras de alta frecuencia (del orden de 100,000 Hz) y usan los ecos para guiarse y cazar. La longitud de onda correspondiente en agua es de 1.48 cm. Con este sistema de "sonar" de alta frecuencia, pueden detectar objetos del tamaño de la longitud de onda (pero no mucho menores). La *visualización ultrasónica* es una técnica médica que usa el mismo principio físico: ondas sonoras de muy alta frecuencia y longitud de onda muy corta, llamadas *ultrasonido*, barren el cuerpo humano, y se usan los "ecos" de los órganos internos para crear una imagen. Con ultrasonido de frecuencia $= 5\text{ MHz} = 5 \times 10^6$ Hz, la longitud de onda en agua (principal constituyente del cuerpo) es de 0.3 mm, así que pueden distinguirse rasgos de este tamaño en la imagen. El ultrasonido se usa para estudiar la operación de las válvulas cardiacas y detectar tumores, así como en exámenes prenatales (figura 16.9); es más sensible que los rayos x para distinguir los diversos tipos de tejidos y no tiene el peligro de radiación de esos rayos.

Ejemplo 16.4 Rapidez de una onda longitudinal

Calcule la rapidez de ondas longitudinales en una varilla de plomo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las ondas de este tipo se producen sujetando la varilla con una abrazadera y golpeando la cara de un extremo con un martillo. La amplitud de las ondas resultantes es tan pequeña, que es prácticamente invisible a simple vista. Sin embargo, la pregunta se refiere a la *rapidez* de las ondas, que no depende de la amplitud. No podemos usar simplemente el valor para el plomo de la tabla 16.1, pues ese valor se refiere a la rapidez del sonido en un *gran volumen* de material, no en una varilla.

PLANTEAR: Ésta es la situación en la que se aplica la ecuación (16.8). Obtenemos los valores del módulo de Young Y y la densidad ρ de las tablas 11.1 y 14.1, respectivamente.

EJECUTAR: Conocemos que $Y = 1.6 \times 10^{10}$ Pa y $\rho = 11.3 \times 10^3$ kg/m^3 (es decir, 11.3 veces la densidad del agua), y

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{1.6 \times 10^{10}\text{ Pa}}{11.3 \times 10^3\text{ kg/m}^3}} = 1.2 \times 10^3\text{ m/s}$$

EVALUAR: Esto es más del triple de la rapidez del sonido en aire, pero menor que la rapidez del sonido en un *gran volumen* de plomo (véase la tabla 16.1); ello se debe a que, en el caso del plomo, el módulo de volumen es mayor que el módulo de Young.

Rapidez del sonido en gases

Casi todas las ondas sonoras que escuchamos se propagan en el aire. Si queremos usar la ecuación (16.7) para obtener la rapidez de ondas sonoras en el aire, debemos tener presente que el módulo de volumen de un gas depende de la presión del gas: cuanto mayor sea la presión que se aplica a un gas para comprimirlo, mayor resistencia opondrá el gas a una compresión ulterior, y mayor será su módulo de volumen. (Por ello, no se dan valores específicos del módulo de volumen para gases en la tabla 11.1.) La expresión para el módulo de volumen de un gas que se usaría en la ecuación (16.7) es

$$B = \gamma p_0 \tag{16.9}$$

donde p_0 es la presión de equilibrio del gas. La cantidad γ (la letra griega gamma) se denomina *la razón de capacidades caloríficas*. Es un número adimensional que caracteriza las propiedades térmicas del gas. (Aprenderemos más acerca de esta cantidad en el capítulo 19.) Por ejemplo, la razón de capacidades caloríficas del aire es $\gamma = 1.40$. A la presión atmosférica normal $p_0 = 1.01 \times 10^5$ Pa, $B = (1.40)(1.013 \times 10^5\text{ Pa}) = 1.42 \times 10^5$ Pa. Este valor es minúsculo en comparación con el módulo de volumen de un sólido representativo (véase la tabla 11.1), que es del orden de 10^{10} o 10^{11} Pa. Esto es lógico: simplemente nos indica que el aire es mucho más fácil de comprimir que el acero.

La densidad ρ de un gas también depende de la presión que, a la vez, depende de la temperatura. Resulta que el cociente B/ρ para un tipo dado de gas ideal *no* depende de la presión, sólo de la temperatura. Por la ecuación (16.7), esto implica que la rapidez del sonido en un gas es fundamentalmente función de la temperatura T:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad \text{(rapidez del sonido en un gas ideal)} \tag{16.10}$$

16.9 Esta imagen tridimensional de un feto en la matriz se obtuvo mediante una sucesión de exploraciones con ultrasonido. Cada exploración revela una "rebanada" bidimensional del feto; después, se combinaron digitalmente muchas de esas rebanadas para producir esta extraordinaria imagen.



ActivPhysics ONLINE
10.3 Rapidez del sonido en un gas

Esta expresión incorpora varias cantidades que el lector posiblemente reconoce de su estudio de los gases ideales en química y que estudiaremos en los capítulos 17, 18 y 19. La temperatura T es la temperatura *absoluta* en kelvin (K), igual a la temperatura Celsius más 273.15; por lo tanto, 20.00 °C corresponde a $T = 293.15$ K. La cantidad M es la *masa molar*, o masa por mol de la sustancia de que se compone el gas. La *constante de los gases* R tiene el mismo valor para todos los gases. El valor numérico aceptado actualmente de R es

$$R = 8.314472(15)\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

aunque en cálculos prácticos usaremos 8.314 J/mol · K.

Para un gas dado, γ, R y M son constantes, y la rapidez de la onda es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. En el capítulo 18 veremos que la ecuación (16.10) es casi idéntica a la expresión para la rapidez media de las moléculas en un gas ideal. Esto demuestra que la rapidez del sonido y las rapideces moleculares están íntimamente relacionadas; explorar los pormenores de esa relación rebasa el alcance de este libro.

Ejemplo 16.5 Rapidez del sonido en aire

Calcule la rapidez de las ondas sonoras en aire a temperatura ambiente ($T = 20$ °C) y determine el rango de longitudes de onda en el aire a la que es sensible el oído humano (que puede escuchar frecuencias entre 20 y 20,000 Hz). La masa molar media del aire (cuyos componentes principales son nitrógeno y oxígeno) es de 28.8×10^{-3} kg/mol y la razón de capacidades caloríficas es $\gamma = 1.40$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre las propiedades de un gas y la rapidez del sonido en ese gas.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (16.10) para obtener la rapidez del sonido, y la relación $v = f\lambda$ para determinar la longitud de onda que corresponde a cada frecuencia.

EJECUTAR: A $T = 20$ °C = 293 K vemos que

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1.40)(8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(293\ \text{K})}{28.8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}} = 344\ \text{m/s}$$

Si usamos este valor de v y la expresión $\lambda = v/f$, vemos que, a 20 °C, una nota de 20 Hz corresponde a una longitud de onda de 17 m, y una nota de 20,000 Hz corresponde a una longitud de onda de 1.7 cm.

EVALUAR: El valor de v que calculamos coincide con la rapidez medida del sonido a esta temperatura, con un error de menos del 0.3%.

Resulta interesante que los murciélagos pueden escuchar frecuencias mucho mayores. Al igual que los delfines, los murciélagos usan sonido de alta frecuencia para guiarse. Una frecuencia típica es de 100 kHz; la longitud de onda correspondiente en aire a 20 °C es de aproximadamente 3.4 mm. Resulta que las ondas sonoras con tales longitudes de onda cortas son reflejadas más fácilmente por objetos pequeños que las de longitudes de onda largas. Esto es importante para ciertas especies de murciélagos que se guían con el sonido reflejado de los pequeños insectos voladores que comen.

En este análisis, hemos hecho caso omiso de la naturaleza *molecular* de los gases y los hemos tratado como un medio continuo. En realidad, los gases se componen de moléculas en movimiento aleatorio, separadas por distancias grandes en comparación con su diámetro. Las vibraciones que constituyen una onda en un gas se superponen al movimiento térmico aleatorio. A la presión atmosférica, una molécula recorre una distancia media del orden de 10^{-7} m entre choques; mientras que la amplitud de desplazamiento de un sonido tenue podría ser de sólo 10^{-9} m. Podríamos comparar un gas por el que pasa una onda sonora con un enjambre de abejas; el enjambre en conjunto oscila levemente, en tanto que insectos individuales se mueven dentro del enjambre, aparentemente al azar.

Evalúe su comprensión de la sección 16.2 El mercurio es 13.6 veces más denso que el agua. De acuerdo con la tabla 16.1, ¿a 20 °C, cuál de estos líquidos tiene el mayor módulo de volumen? i) el mercurio; ii) el agua; iii) ambos tienen el mismo; iv) no se dispone de suficiente información para decidir.



16.3 Intensidad del sonido

Las ondas sonoras viajeras, al igual que todas las ondas viajeras, transfieren energía de una región del espacio a otra. En la sección 15.5 vimos que una forma útil de describir la energía transportada por un sonido es con la *intensidad de la onda I*, que es igual a la rapidez media con que la onda transporta energía, por unidad de área, a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación. En particular, expresaremos la intensidad de una onda sonora en términos de la amplitud de desplazamiento A o la amplitud de presión $p_{máx}$.

Intensidad y amplitud de desplazamiento

Por sencillez, consideremos una onda sonora que se propaga en la dirección $+x$, con la finalidad de poder usar las expresiones que dedujimos en la sección 16.1 para el desplazamiento $y(x, t)$ y la fluctuación de la presión $p(x, t)$, ecuaciones (16.1) y (16.4), respectivamente. En la sección 6.4 vimos que la potencia es el producto de la fuerza por la velocidad [véase la ecuación (6.18)]. Por lo tanto, la potencia por unidad de área en esta onda sonora es igual al producto de $p(x, t)$ (fuerza por unidad de área) por la velocidad de la *partícula*, $v_y(x, t)$. Esta última es la velocidad en el tiempo t de la porción del medio que está en la coordenada x. Utilizando las ecuaciones (16.1) y (16.4), tenemos

$$\begin{aligned} v_y(x, t) &= \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \\ p(x, t)v_y(x, t) &= [BkA \operatorname{sen}(kx - \omega t)][\omega A \operatorname{sen}(kx - \omega t)] \\ &= B\omega k A^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

CUIDADO **Velocidad de onda contra velocidad de partículas** Recuerde que la velocidad de la onda en su totalidad *no* es igual a la velocidad de las partículas. Mientras que la onda se sigue moviendo en la dirección de propagación, las partículas individuales del medio simplemente oscilan hacia adelante y hacia atrás, como se muestra en la figura (16.1). Además, la rapidez máxima de una partícula del medio puede ser muy diferente de la rapidez de la onda.

La intensidad es, por definición, el valor promedio de $p(x, t)v_y(x, t)$. Para cualquier valor de x, el valor medio de la función $\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$ durante un periodo $T = 2\pi/\omega$ es $\frac{1}{2}$, así que

$$I = \frac{1}{2} B\omega k A^2 \tag{16.11}$$

Utilizando las relaciones $\omega = vk$ y $v^2 = B/\rho$, transformamos la ecuación (16.11) a la forma

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\,\omega^2 A^2 \quad \text{(intensidad de una onda sonora senoidal)} \tag{16.12}$$

Esta ecuación muestra por qué en un sistema estereofónico, un altavoz de baja frecuencia (*woofer*) debe vibrar con mucha mayor amplitud que un altavoz de alta frecuencia (*tweeter*) para producir la misma intensidad de sonido.

Intensidad y amplitud de presión

Suele ser más útil expresar I en términos de la amplitud de presión $p_{máx}$. Usando la ecuación (16.5) y la relación $\omega = vk$, vemos que

$$I = \frac{\omega p_{máx}{}^2}{2Bk} = \frac{v p_{máx}{}^2}{2B} \tag{16.13}$$

Utilizando la relación de rapidez de onda $v^2 = B/\rho$, también podemos escribir la ecuación (16.13) de formas alternativas:

$$I = \frac{p_{máx}{}^2}{2\rho v} = \frac{p_{máx}{}^2}{2\sqrt{\rho B}} \quad \text{(intensidad de una onda sonora senoidal)} \tag{16.14}$$

16.10 Al firmar una oquedad con las manos cerca del rostro, como en la imagen, las ondas sonoras que salen de la boca se dirigen de manera que no se propaguen lateralmente. Por ende, la intensidad disminuye con la distancia más lentamente de lo que predice la ley del inverso del cuadrado y el sonido se puede escuchar a mayores distancias.



Invitamos al lector a verificar estas expresiones (véase el ejercicio 16.16). Al comparar las ecuaciones (16.12) y (16.14), vemos que ondas sonoras senoidales con la misma intensidad pero diferente frecuencia tienen diferente amplitud de desplazamiento A pero la *misma* amplitud de presión $p_{máx}$. Ésta es otra razón por la que suele ser más útil describir una onda sonora en términos de fluctuaciones de presión en vez del desplazamiento.

La potencia media *total* transportada a través de una superficie por una onda sonora es igual al producto de la intensidad en la superficie por el área, si la intensidad sobre la superficie es uniforme. La potencia sonora total media emitida por una persona hablando con voz normal es del orden de 10^{-5} W; en tanto que un grito fuerte corresponde a aproximadamente 3×10^{-2} W. Si todos los residentes de Nueva York hablaran al mismo tiempo, la potencia sonora total sería de unos 100 W, equivalentes al consumo de potencia eléctrica de una bombilla mediana. Por otro lado, la potencia requerida para llenar un auditorio grande o un estadio con sonido fuerte es considerable (véase el ejemplo 16.8).

Si la fuente de sonido emite ondas en todas direcciones igualmente, la intensidad disminuye al aumentar la distancia r de la fuente, según la ley del inverso del cuadrado: la intensidad es proporcional a $1/r^2$. Ya vimos esta ley y sus consecuencias en la sección 15.5. Cuando el sonido viaja predominantemente en una dirección, no se aplica la ley del inverso del cuadrado y la intensidad disminuye con la distancia más lentamente que $1/r^2$ (figura 16.10).

La relación del inverso del cuadrado no es válida en interiores porque la energía sonora también puede llegar a un receptor reflejada de las paredes y el techo. Efectivamente, una parte de la labor del arquitecto al diseñar un auditorio es adaptar las reflexiones de modo que la intensidad sea lo más constante posible en todo el auditorio.

Estrategia para resolver problemas 16.1 Intensidad del sonido



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Las relaciones entre intensidad y amplitud de una onda sonora son relativamente sencillas. No obstante, muchas otras cantidades intervienen en esas relaciones, por lo que es muy importante decidir cuál es la incógnita.

PLANTEAR *el problema siguiendo estos pasos:*
1. Divida las diversas cantidades físicas en categorías. La amplitud se describe con A o $p_{máx}$, y la frecuencia f puede determinarse a partir de ω, k o λ. Estas cantidades se relacionan mediante la rapidez de la onda v, que a la vez depende de las propiedades del medio: B y ρ en el caso de un líquido; γ, T y M en el caso de un gas.
2. Identifique qué cantidades se dan y cuáles son las incógnitas, y busque relaciones que lo lleven a donde desea ir.

EJECUTAR *la solución como sigue:* Use las ecuaciones que seleccionó para despejar las incógnitas. Asegúrese de que todas las cantidades estén expresadas en las unidades correctas. En particular, si se usa la temperatura para calcular la rapidez del sonido en un gas, verifique que esté expresada en kelvins (temperatura Celsius más 273.15).

EVALUAR *la respuesta:* Hay varias relaciones entre las cantidades que describen una onda. Pruebe otra para comprobar sus resultados.

Ejemplo 16.6 Intensidad de una onda sonora en aire

Calcule la intensidad de la onda sonora del ejemplo 16.1, con $p_{máx} = 3.0 \times 10^{-2}$ Pa, suponiendo que la temperatura es 20 °C, de modo que la densidad del aire es $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$ y la rapidez del sonido es $v = 344$ m/s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es la intensidad I de la onda sonora. Nos dan la amplitud de presión, $p_{máx}$, la densidad ρ y la rapidez de onda v.

PLANTEAR: Podemos calcular I con $p_{máx}$, ρ y v con la ecuación (16.14).

EJECUTAR: Por la ecuación (16.14),

$$I = \frac{p_{máx}{}^2}{2\rho v} = \frac{(3.0 \times 10^{-2}\text{ Pa})^2}{2(1.20\text{ kg/m}^3)(344\text{ m/s})}$$
$$= 1.1 \times 10^{-6}\text{ J/(s}\cdot\text{m}^2) = 1.1 \times 10^{-6}\text{ W/m}^2$$

EVALUAR: Ésta parece una intensidad muy baja, pero en realidad está dentro del intervalo de intensidades de sonido que percibimos a diario. Una onda sonora muy fuerte en el umbral del dolor tiene una amplitud de presión de cerca de 30 Pa y una intensidad de aproximadamente 1 W/m^2. La amplitud de presión de la onda sonora más tenue que puede escucharse es del orden de 3×10^{-5} Pa, y la intensidad correspondiente es de cerca de 10^{-12} W/m^2. (Pruebe estos valores de $p_{máx}$ en la ecuación (16.14) para verificar que las intensidades correspondientes sean las que mencionamos.)

Ejemplo 16.7 Misma intensidad, diferentes frecuencias

Una onda sonora de 20 Hz tiene la misma intensidad que la de 1000 Hz de los ejemplos 16.1 y 16.6. ¿Qué amplitud de desplazamiento y qué amplitud de presión tiene la onda sonora de 20 Hz?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos dan la intensidad y la frecuencia de la onda sonora. Nuestras incógnitas son la amplitud de desplazamiento A y la amplitud de presión $p_{máx}$.

PLANTEAR: Dada la intensidad, podemos usar la ecuación (16.12) para determinar la amplitud de desplazamiento A. Observe que no nos dan el valor de B. Sin embargo, ρ y B dependen únicamente de las propiedades del medio, no de la amplitud ni la frecuencia, así que sus valores se cancelarán si igualamos las intensidades a 20 Hz y a 1000 Hz. También podemos usar la ecuación (16.14) para obtener la amplitud de presión a 20 Hz.

EJECUTAR: Una inspección de la ecuación (16.12) revela que, si una onda en un medio dado (mismos ρ y B) tiene la misma intensidad I a dos frecuencias distintas, el producto ωA debe tener el mismo valor con ambas frecuencias. Por el ejemplo 16.1, $A = 1.2 \times 10^{-8}$ m a 1000 Hz, así que

$$(20 \text{ Hz})A_{20} = (1000 \text{ Hz})(1.2 \times 10^{-8} \text{ m})$$
$$A_{20} = 6.0 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.60 \ \mu\text{m}$$

¿Entiende por qué no tuvimos que convertir las frecuencias en frecuencias angulares?

Puesto que la intensidad es la misma para ambas frecuencias, la ecuación (16.14) indica que la amplitud de *presión* $p_{máx}$ también debe ser la misma. Por lo tanto, $p_{máx} = 3.0 \times 10^{-2}$ Pa para $f = 20$ Hz.

EVALUAR: Nuestro resultado refuerza la idea de que la amplitud de presión ofrece una descripción más conveniente de una onda sonora que la amplitud de desplazamiento. Observe también que, si usamos la ecuación (16.5) y $k = \omega/v$, obtenemos $p_{máx} = BkA = (B/v)\omega A$; el módulo de volumen B y la rapidez de la onda v sólo dependen del medio, y concluimos otra vez que el producto ωA debe tener el mismo valor para ambas frecuencias.

Ejemplo 16.8 "¡Que suene!"

Para un concierto al aire libre, queremos que la intensidad del sonido a 20 m de los altavoces sea de 1 W/m^2. Suponiendo que las ondas sonoras tienen la misma intensidad en todas direcciones, ¿qué salida de potencia acústica debe tener el grupo de altavoces?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Aquí se usa la definición de intensidad como potencia por unidad de área. La potencia total es la incógnita, y el área en cuestión es un hemisferio centrado en el grupo de altavoces.

PLANTEAR: Suponemos que los altavoces están cerca del suelo y que la potencia acústica se dispersa uniformemente en un hemisferio de 20 m de radio (esto es, suponemos que no se dirige potencia acústica hacia el suelo). El área superficial de este hemisferio es $\left(\frac{1}{2}\right)(4\pi)(20 \text{ m})^2$, o aproximadamente 2500 m^2. La potencia acústica requerida es el producto de esta área y la intensidad.

EJECUTAR: La potencia del grupo de altavoces es

$$(1 \text{ W/m}^2)(2500 \text{ m}^2) = 2500 \text{ W} = 2.5 \text{ kW}$$

EVALUAR: La entrada de potencia eléctrica a los altavoces tendría que ser mucho mayor, porque su eficiencia no es muy alta (de menos de 10% para los altavoces ordinarios, y de hasta el 25% para los de tipo de bocina).

La escala de decibeles

Dado que el oído es sensible a una amplia gama de intensidades, suele usarse una escala de intensidad *logarítmica*. El **nivel de intensidad de sonido** β de una onda sonora está definido por la ecuación

$$\beta = (10 \text{ dB}) \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{(definición de nivel de intensidad de sonido)} \qquad (16.15)$$

En esta ecuación, I_0 es una intensidad de referencia que se toma como 10^{-12} W/m^2, aproximadamente el umbral de la audición humana a 1000 Hz. Recuerde que "log" significa logaritmo base 10. Los niveles de intensidad de sonido se expresan en **decibeles**, cuya abreviatura es dB. Un decibel es $\frac{1}{10}$ de un *bel*, unidad llamada así en honor de Alexander Graham Bell (el inventor del teléfono). El bel es demasiado grande para casi todos los fines, así que el decibel es la unidad usual de nivel de intensidad de sonido.

Si la intensidad de una onda sonora es igual a I_0 o a 10^{-12} W/m^2, su nivel de intensidad de sonido es de 0 dB. Una intensidad de 1 W/m^2 corresponde a 120 dB. La tabla 16.2 da los niveles de intensidad de sonido en decibeles de varios sonidos comunes. Podemos usar la ecuación (16.15) para verificar el valor del nivel de intensidad de sonido β dado para cada intensidad de la tabla.

Tabla 16.2 Niveles de intensidad de sonido de diversas fuentes (valores representativos)

Fuente o descripción del sonido	Nivel de intensidad del sonido, β (dB)	Intensidad, I (W/m^2)
Avión militar a reacción a 30 m	140	10^2
Umbral del dolor	120	1
Remachador	95	3.2×10^{-3}
Tren elevado	90	10^{-3}
Tráfico urbano intenso	70	10^{-5}
Conversación ordinaria	65	3.2×10^{-6}
Automóvil silencioso	50	10^{-7}
Radio con volumen bajo en el hogar	40	10^{-8}
Murmullo normal	20	10^{-10}
Susurro de hojas	10	10^{-11}
Umbral del oído a 1000 Hz	0	10^{-12}

Dado que el oído no es igualmente sensible a todas las frecuencias de la gama audible, algunos medidores de nivel de sonido ponderan de manera desigual las diversas frecuencias. Un esquema de ese tipo da pie a la llamada escala dBA, la cual otorga menos importancia a las frecuencias bajas y muy altas, donde el oído es menos sensible.

Ejemplo 16.9 Sordera temporal

Una exposición de 10 min a un sonido de 120 dB suele desplazar el umbral del oído a 1000 Hz, de 0 dB a 28 dB, durante un tiempo. Diez años de exposición al sonido de 92 dB causan un desplazamiento *permanente* a 28 dB. ¿Qué intensidades corresponden a 28 y 92 dB?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos dan dos diferentes niveles de intensidades de sonido en dB, y queremos calcular las intensidades correspondientes en W/m^2.

PLANTEAR: Despejaremos la intensidad I de la ecuación (16.15) para cada valor del nivel de intensidad de sonido β.

EJECUTAR: Reacomodamos la ecuación (16.15), dividiendo ambos miembros entre 10 dB y usando la relación $10^{\log x} = x$:

$$I = I_0 10^{\beta/(10\text{ dB})}$$

Cuando $\beta = 28$ dB,

$$\begin{aligned} I &= (10^{-12}\text{ W/m}^2)10^{(28\text{ dB}/10\text{ dB})} \\ &= (10^{-12}\text{ W/m}^2)10^{2.8} = 6.3 \times 10^{-10}\text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

De forma similar, para $\beta = 92$ dB,

$$I = (10^{-12}\text{ W/m}^2)10^{(92\text{ dB}/10\text{ dB})} = 1.6 \times 10^{-3}\text{ W/m}^2$$

EVALUAR: Si sus respuestas son demasiado grandes por un factor de 10, tal vez haya introducido 10×10^{12} en su calculadora en vez de 1×10^{-12}. ¡Tenga cuidado!

Ejemplo 16.10 Un pájaro canta en una pradera

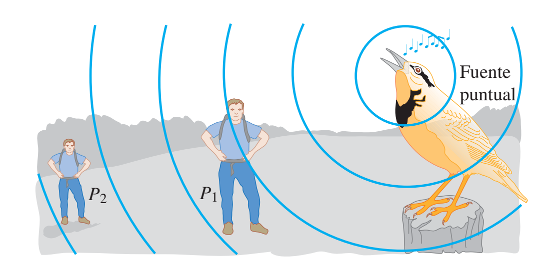
Considere un modelo idealizado en el que un pájaro (considerado como fuente puntual) emite una potencia sonora constante, cuya intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al ave. ¿Cuántos decibeles bajará el nivel de intensidad del sonido si nos alejamos al doble de la distancia del ave?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Dado que la escala de decibeles es logarítmica, la *diferencia* entre dos niveles de intensidad de sonido (la incógnita) corresponde a *la razón* de las intensidades correspondientes. La razón de las intensidades se toma de la ley del inverso del cuadrado.

PLANTEAR: Rotularemos los dos puntos 1 y 2 (figura 16.11) y usaremos dos veces (una en cada punto) la ecuación (16.15), que es la definición de nivel de intensidad de sonido. Usaremos la ecuación (15.26), que plantea la ley del inverso del cuadrado, para relacionar las intensidades en los dos puntos.

16.11 Si duplicamos nuestra distancia a una fuente puntual de sonido, ¿en cuánto disminuye el nivel de intensidad de sonido?



EJECUTAR: La diferencia en el nivel de intensidad del sonido, $\beta_2 - \beta_1$, está dada por

$$\begin{aligned}\beta_2 - \beta_1 &= (10\text{ dB})\left(\log\frac{I_2}{I_0} - \log\frac{I_1}{I_0}\right)\\ &= (10\text{ dB})[(\log I_2 - \log I_0) - (\log I_1 - \log I_0)]\\ &= (10\text{ dB})\log\frac{I_2}{I_1}\end{aligned}$$

Ahora usamos el recíproco de la ecuación (15.26); $I_2/I_1 = r_1^2/r_2^2$, y

$$\begin{aligned}\beta_2 - \beta_1 &= (10\text{ dB})\log\frac{r_1^2}{r_2^2} = (10\text{ dB})\log\frac{r_1^2}{(2r_1)^2}\\ &= (10\text{ dB})\log\frac{1}{4} = -6.0\text{ dB}\end{aligned}$$

Una reducción de intensidad en un factor de 4 corresponde a una disminución de 6 dB en el nivel de intensidad de sonido.

EVALUAR: Nuestro resultado es negativo, lo cual nos indica (correctamente) que el nivel de intensidad de sonido es menor en el punto 2 que en el punto 1. La diferencia de 6 dB no depende del valor del nivel de intensidad del sonido en el punto 1. Si el punto 1 está relativamente cerca del ave, de modo que $\beta_1 = 56$ dB, entonces, en un punto 2 al doble de la distancia, $\beta_2 = 50$ dB; si el punto 1 está más distante del ave, de modo que $\beta_1 = 28$ dB, entonces, en un punto 2 al doble de la distancia, $\beta_2 = 22$ dB.

Resulta interesante que el *volumen* percibido de un sonido no es directamente proporcional a su intensidad. Por ejemplo, la mayoría de las personas interpreta un aumento de 8 a 10 dB en el nivel de intensidad del sonido (que corresponde a un aumento de la intensidad por un factor de 6 a 10), como un aumento del volumen al doble.

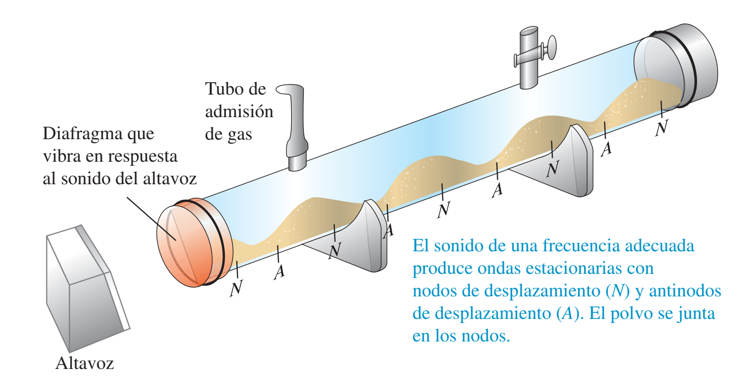
Evalúe su comprensión de la sección 16.3 Se duplica la intensidad de una onda sonora en aire, sin alterar su frecuencia. (Tampoco cambian la presión, densidad y temperatura del aire.) ¿Qué efecto tiene esto sobre la amplitud de desplazamiento, la amplitud de presión, el módulo de volumen, la rapidez del sonido y el nivel de intensidad del sonido?

16.4 Ondas sonoras estacionarias y modos normales

Cuando ondas longitudinales (de sonido) se propagan en un fluido dentro de un tubo con longitud finita, se reflejan en los extremos igual que las ondas transversales en una cuerda. La superposición de las ondas que viajan en direcciones opuestas forma también una onda estacionaria. Al igual que las ondas estacionarias transversales en una cuerda (sección 15.7), las ondas sonoras estacionarias (modos normales) en un tubo pueden servir para crear ondas de sonido en el aire circundante. Éste es el principio de operación de la voz humana y de muchos instrumentos musicales, incluidos los de viento de madera y de metal, y los órganos.

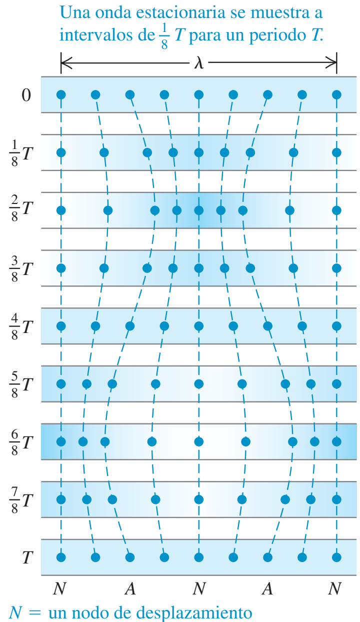
Las ondas transversales en una cuerda, incluidas las estacionarias, suelen describirse sólo en términos del desplazamiento de la cuerda. En cambio, ya vimos que las ondas sonoras en un fluido pueden describirse en términos del desplazamiento del fluido, o bien, en términos de variaciones en la presión del fluido. Para evitar confusiones, usaremos los términos **nodo de desplazamiento** y **antinodo de desplazamiento**, para referirnos a puntos donde las partículas del fluido tienen cero desplazamiento y máximo desplazamiento, respectivamente.

Podemos demostrar las ondas sonoras estacionarias en una columna de gas con un aparato llamado tubo de Kundt (figura 16.12). Un tubo horizontal de vidrio de



16.12 Demostración de ondas sonoras estacionarias con un tubo de Kundt. El sombreado azul representa la densidad del gas en un instante en que la presión del gas en los nodos de desplazamiento es máxima o mínima.

16.13 En una onda sonora estacionaria, un nodo de desplazamiento N es un antinodo de presión (un punto en el que la fluctuación de la presión es máxima) y un antinodo de desplazamiento A es un nodo de presión (un punto donde la presión no fluctúa).



aproximadamente 1 m de longitud se cierra por un extremo, y en el otro se instala un diafragma flexible que puede transmitir vibraciones. Un altavoz cercano se conecta a un oscilador y amplificador de audio, y produce ondas sonoras que obligan al diafragma a vibrar senoidalmente con una frecuencia que podemos variar. Las ondas sonoras dentro del tubo se reflejan en el extremo cerrado. Esparcimos uniformemente un poco de polvo fino en el interior del tubo. Al variar la frecuencia del sonido, pasamos por frecuencias en las que la amplitud de las ondas estacionarias es lo bastante grande como para que el polvo sea acarreado a lo largo del tubo en los puntos donde se mueve el gas. Por lo tanto, el polvo se acumula en los nodos de desplazamiento (donde el gas no se mueve). Los nodos adyacentes están separados una distancia igual a $\lambda/2$, la cual podemos medir. Teniendo la longitud de onda, podemos usar este experimento para determinar la rapidez de las ondas: leemos la frecuencia f del oscilador y así podemos calcular la rapidez v de las ondas usando la relación $v = \lambda f$.

La figura 16.13 muestra los movimientos de nueve partículas diferentes dentro de un tubo lleno de gas, donde hay una onda estacionaria. Una partícula en un nodo de desplazamiento (N) no se mueve; mientras que una partícula en un antitodo de desplazamiento (A) oscila con amplitud máxima. Observe que las partículas en lados opuestos del nodo vibran en fase opuesta. Cuando estas partículas se acercan entre sí, el gas entre ellas se comprime y la presión aumenta; cuando se alejan, hay una expansión y la presión baja. Así, en un *nodo* de desplazamiento el gas sufre compresión y expansión máximas, y las variaciones de presión y densidad arriba y abajo de la media tienen su valor máximo. En contraste, las partículas en lados opuestos de un *antinodo* de desplazamiento vibran *en fase*; la distancia entre ellas es casi constante, y la presión y la densidad *no* varían en el antinodo.

Usamos el término **nodo de presión** para describir un punto de una onda sonora estacionaria en el que la presión y la densidad no varían, y el término **antinodo de presión**, para describir un punto donde las variaciones de presión y densidad son máximas. Con estos términos, podemos resumir nuestras observaciones acerca de las ondas sonoras estacionarias como sigue:

Un nodo de presión siempre es un antinodo de desplazamiento, y un antinodo de presión siempre es un nodo de desplazamiento.

La figura 16.12 muestra la onda sonora estacionaria en el instante en que las variaciones de presión son máximas; el sombreado azul indica que la densidad y presión del gas tienen sus máximos y mínimos en los nodos de desplazamiento (rotulados con N).

Cuando hay reflexión en un extremo *cerrado* de un tubo (con una barrera o tapón rígido), el desplazamiento de las partículas en ese extremo siempre debe ser cero, como en el extremo fijo de una cuerda. Así, el extremo cerrado del tubo es un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión; las partículas no se mueven, pero las variaciones de presión son máximas. Un extremo *abierto* de un tubo es un nodo de presión porque está abierto a la atmósfera, donde la presión es constante. Por ello, tal extremo siempre es un *antinodo* de desplazamiento, análogo al extremo libre de una cuerda; las partículas oscilan con amplitud máxima, pero la presión no varía. (Estrictamente hablando, el nodo de presión se da un poco más allá del extremo abierto de un tubo pero, si el diámetro del tubo es pequeño en comparación con la longitud de onda, como en casi todos los instrumentos musicales, podemos despreciar este efecto.) Así, las ondas longitudinales en una columna de fluido se reflejan en los extremos cerrados y abiertos de un tubo, igual que las ondas transversales en una cuerda se reflejan en los extremos fijo y libre, respectivamente.

Ejemplo 16.11 El sonido del silencio

Un altavoz direccional dirige una onda sonora de longitud de onda λ a una pared (figura 16.14). ¿A qué distancias de la pared podríamos pararnos y no escuchar nada?

SOLUCIÓN

El oído detecta variaciones de presión en el aire; aumentos o reducciones en la presión externa del oído hacen que el tímpano se mueva ligeramente de un lado a otro y genere una señal eléctrica que se envía al cerebro. (Si alguna vez ha tenido problemas para aliviar la presión en los oídos en un paseo a las montañas o en un viaje en avión, ya sabe lo sensibles que son a los cambios de presión.) Por lo tanto, no escucharemos ningún sonido si los oídos están en un nodo de presión, que es un antinodo de desplazamiento. La pared es un nodo de desplazamiento; la distancia de un nodo a un antinodo adyacente es $\lambda/4$, y entre un antinodo y el siguiente, $\lambda/2$ (figura 16.14). Por consiguiente, las distancias d de la pared en las que no se escuchará sonido son

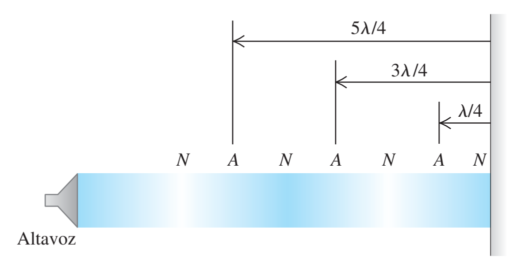
$$d = \lambda/4$$
(primer antinodo de desplazamiento y nodo de presión)

$$d = \lambda/4 + \lambda/2 = 3\lambda/4$$
(segundo antinodo de desplazamiento y nodo de presión)

$$d = 3\lambda/4 + \lambda/2 = 5\lambda/4$$
(tercer antinodo de desplazamiento y nodo de presión)

Y así sucesivamente. Si el altavoz no es altamente direccional, este efecto será casi imperceptible a causa de las múltiples reflexiones de las ondas sonoras con el piso, el techo y otros puntos de las paredes.

16.14 Cuando una onda sonora se dirige hacia la pared, interfiere con la onda reflejada para crear una onda estacionaria. Las N y A son nodos y antinodos de *desplazamiento*.



Tubos de órganos e instrumentos de viento

La aplicación más importante de las ondas sonoras estacionarias es la producción de tonos musicales con instrumentos de viento. Los tubos de órgano son uno de los ejemplos más sencillos (figura 16.15). Un fuelle alimenta aire a una presión manométrica del orden de 10^3 Pa (10^2 atm) en el extremo inferior del tubo (figura 16.16). Una corriente de aire sale por la abertura angosta en el borde de la superficie horizontal y se dirige hacia el borde superior de la abertura, llamada *boca* del tubo. La columna de aire en el tubo comienza a vibrar, y hay una serie de modos normales posibles, igual que en una cuerda estirada. La boca siempre actúa como extremo abierto, así que es un nodo de presión y un antinodo de desplazamiento. El otro extremo del tubo (arriba en la figura 16.16) puede estar abierto o cerrado.

16.15 Tubos de órgano de distinto tamaño producen tonos de distinta frecuencia.



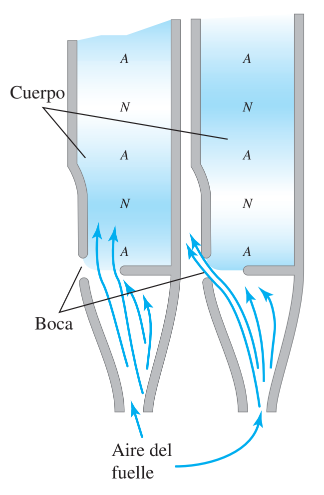
En la figura 16.17, ambos extremos del tubo están abiertos, así que son nodos de presión y antinodos de desplazamiento. Un tubo de órgano abierto en ambos extremos se llama *tubo abierto*. La frecuencia fundamental f_1 corresponde a un patrón de onda estacionaria con un antinodo de desplazamiento en cada extremo y un nodo de desplazamiento en medio (figura 16.17a). La distancia entre antinodos adyacentes siempre es media longitud de onda que, en este caso, es igual a la longitud L del tubo: $\lambda/2 = L$. La frecuencia correspondiente, obtenida de la relación $f = v/\lambda$, es

$$f_1 = \frac{v}{2L} \quad \text{(tubo abierto)} \tag{16.16}$$

Las figuras 16.17b y 16.17c muestran el segundo y tercer armónicos (primer y segundo sobretonos); sus patrones de vibración tienen dos y tres nodos de desplazamiento, respectivamente. Para éstos, media longitud de onda es igual a $L/2$ y $L/3$, respectivamente, y las frecuencias son dos y tres veces la fundamental, respectivamente. Es decir, $f_2 = 2f_1$ y $f_3 = 3f_1$. Para *todo* modo normal de un tubo abierto, la longitud L debe ser un número entero de medias longitudes de onda, y las longitudes de onda posibles λ_n están dadas por

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad \text{o bien,} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(tubo abierto)} \tag{16.17}$$

16.16 Cortes transversales de un tubo de órgano en dos instantes separados medio periodo. Los N y A son nodos y antinodos de *desplazamiento*; como indica el sombreado azul, éstos son puntos de variación máxima de presión y cero variación de presión, respectivamente.



Las frecuencias correspondientes f_n están dadas por $f_n = v/\lambda_n$, así que todas las frecuencias de modo normal para un tubo abierto por ambos extremos están dadas por

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(tubo abierto)} \qquad (16.18)$$

El valor $n = 1$ corresponde a la frecuencia fundamental, $n = 2$ al segundo armónico (o primer sobretono), etcétera. O bien, podemos decir

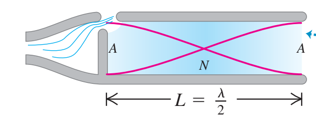
$$f_n = nf_1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{(tubo abierto)} \qquad (16.19)$$

con f_1 dada por la ecuación (16.16).

La figura 16.18 muestra un tubo abierto en el extremo izquierdo, pero cerrado en el derecho; se llama *tubo cerrado*. El extremo izquierdo (abierto) es un antinodo de

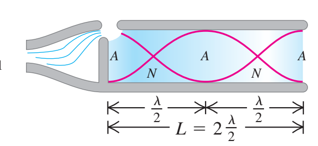
16.17 Corte transversal de un tubo abierto en el que se muestran los primeros tres modos normales. El sombreado indica las variaciones de presión. Las curvas rojas indican el desplazamiento a lo largo del eje del tubo en dos instantes separados por medio periodo. Los N y A son los nodos y antinodos de *desplazamiento*; intercámbielos para ver los nodos y antinodos *de presión*.

a)
Fundamental: $f_1 = \dfrac{v}{2L}$

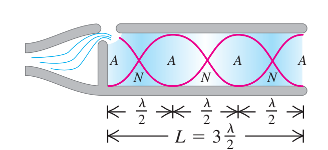


El extremo abierto del tubo es siempre un antinodo de desplazamiento.

b)
Segundo armónico: $f_2 = 2\dfrac{v}{2L} = 2f_1$

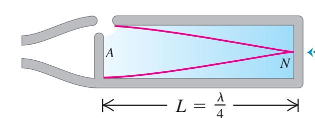


c)
Tercer armónico: $f_3 = 3\dfrac{v}{2L} = 3f_1$



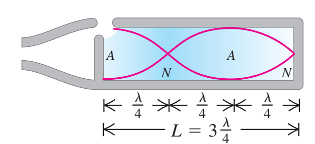
16.18 Corte transversal de un tubo cerrado que muestra los primeros tres modos normales, así como los nodos y antinodos de *desplazamiento*. Sólo son posibles armónicos impares.

a)
Fundamental: $f_1 = \dfrac{v}{4L}$

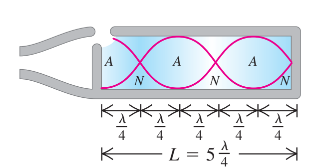


El extremo cerrado del tubo es siempre un nodo de desplazamiento.

b)
Tercer armónico: $f_3 = 3\dfrac{v}{4L} = 3f_1$



c)
Quinto armónico: $f_5 = 5\dfrac{v}{4L} = 5f_1$



desplazamiento (nodo de presión), pero el derecho (cerrado) es un nodo de desplazamiento (antinodo de presión). La distancia entre un nodo y el antinodo adyacente siempre es $\frac{1}{4}$ de longitud de onda. La figura 16.18a muestra el modo de más baja frecuencia; la longitud del tubo es un cuarto de longitud de onda ($L = \lambda_1/4$). La frecuencia fundamental es $f_1 = v/\lambda_1$, o bien,

$$f_1 = \frac{v}{4L} \qquad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.20}$$

Ésta es la mitad de la frecuencia fundamental de un tubo *abierto* de la misma longitud. En el lenguaje musical, el *tono* de un tubo cerrado es una octava más bajo (un factor de 2 en la frecuencia), que el de un tubo abierto con la misma longitud. La figura 16.18b muestra el siguiente modo, para el cual la longitud del tubo es *tres cuartas partes* de una longitud de onda, correspondiente a una frecuencia de $3f_1$. Para la figura 16.18c, $L = 5\lambda/4$ y la frecuencia es $5f_1$. Las posibles longitudes de onda están dadas por

$$L = n\frac{\lambda_n}{4} \quad \text{o} \quad \lambda_n = \frac{4L}{n} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \quad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.21}$$

Las frecuencias de modo normal están dadas por $f_n = v/\lambda_n$, es decir,

$$f_n = \frac{nv}{4L} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.22}$$

o bien,

$$f_n = nf_1 \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots) \qquad \text{(tubo cerrado)} \tag{16.23}$$

donde f_1 está dada por la ecuación (16.20). Vemos que faltan el segundo, cuarto y todos los demás armónicos *pares*. En un tubo cerrado por un extremo, la frecuencia fundamental es $f_1 = v/4L$, y sólo son posibles los armónicos impares de la serie $(3f_1, 5f_1, \ldots)$.

Una última posibilidad es un tubo cerrado por *ambos* extremos, con nodos de desplazamiento y antinodos de presión en esos extremos. Esto no sería muy útil como instrumento musical porque las vibraciones no podrían salir del tubo.

Ejemplo 16.12 Una historia de dos tubos

En un día en que la rapidez del sonido es de 345 m/s, la frecuencia fundamental de un tubo de órgano cerrado es 220 Hz. *a*) ¿Qué longitud tiene el tubo? *b*) El segundo *sobretono* de este tubo tiene la misma longitud de onda que el tercer *armónico* de un tubo abierto. ¿Qué longitud tiene el tubo abierto?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza la relación entre la longitud y las frecuencias de modo normal de un tubo abierto (figura 16.17) y un tubo cerrado (figura 16.18).

PLANTEAR: Puesto que se trata de un tubo cerrado (abierto en un extremo y cerrado en el otro), las frecuencias de modo normal están dadas por la ecuación (16.22). Usaremos esa ecuación para determinar la longitud L a partir de la frecuencia en el inciso *a*). En el inciso *b*), deberemos efectuar una comparación con un tubo abierto, cuyas frecuencias están dadas por la ecuación (16.18).

EJECUTAR: *a*) Para un tubo cerrado, $f_1 = v/4L$, así que la longitud del tubo cerrado es

$$L_{\text{cerrado}} = \frac{v}{4f_1} = \frac{345 \text{ m/s}}{4(220 \text{ s}^{-1})} = 0.392 \text{ m}$$

b) La frecuencia del primer sobretono de un tubo cerrado es $f_3 = 3f_1$, y la del segundo, $f_5 = 5f_1$:

$$f_5 = 5f_1 = 5(220 \text{ Hz}) = 1100 \text{ Hz}$$

Si las longitudes de onda son iguales, las frecuencias son iguales y la frecuencia del tercer armónico del tubo abierto también es 1100 Hz. El tercer armónico de un tubo abierto está en $3f_1 = 3(v/2L)$. Si esto es igual a 1100 Hz, entonces,

$$1100 \text{ Hz} = 3\left(\frac{345 \text{ m/s}}{2L_{\text{abierto}}}\right) \quad \text{y} \quad L_{\text{abierto}} = 0.470 \text{ m}$$

EVALUAR: El tubo cerrado tiene una longitud de 0.392 m y una frecuencia fundamental de 220 Hz; el abierto es más largo, de 0.470 m, pero tiene una frecuencia fundamental más alta de (1100 Hz)/3 = 367 Hz. Si esto parece una contradicción, compare otra vez las figuras 16.17a y 16.18a.

En un tubo de órgano en uso real, siempre están presentes simultáneamente varios modos; el movimiento del aire es una superposición de estos modos. Esta situación es similar a una cuerda golpeada o punteada, como en la figura 15.28. Al igual que en una cuerda vibrante, una onda estacionaria compleja en el tubo produce una onda sonora viajera en el aire circundante con un contenido armónico similar al de la onda estacionaria. Un tubo muy angosto produce una onda sonora rica en armónicos superiores, que oímos como un tono delgado "tipo cuerda"; un tubo más grueso produce principalmente el modo fundamental, que suena más suave, "más como flauta". El contenido armónico también depende de la forma de la boca del tubo.

Hemos hablado de tubos de órgano, pero este análisis también es válido para otros instrumentos de viento. La flauta y la flauta dulce son directamente análogas. La diferencia más importante es que esos instrumentos tienen agujeros a lo largo del tubo. Al taparse y destaparse esos agujeros con los dedos, se modifica la longitud efectiva L de la columna de aire y por ello el tono. Un tubo de órgano, en cambio, sólo puede tocar una nota. Las flautas se comportan como tubos *abiertos*; mientras que el clarinete actúa como tubo *cerrado* (cerrado en el extremo de la lengüeta, abierto en el pabellón).

Las ecuaciones (16.18) y 16.22) indican que las frecuencias de cualquier instrumento de viento son proporcionales a la rapidez del sonido v en la columna de aire dentro del instrumento. Como indica la ecuación (16.10), v depende de la temperatura; aumenta cuando se incrementa la temperatura. Por lo tanto, el tono de los instrumentos de viento aumenta con la temperatura. Un órgano que tiene algunos tubos a una temperatura y otros a una temperatura distinta sonará desafinado.

Evalúe su comprensión de la sección 16.4 Si se conecta una manguera a un extremo de un tubo metálico y se introduce por ella aire comprimido, el tubo producirá un tono musical. Si en el tubo se inyecta helio comprimido a las mismas presión y temperatura, ¿el tubo producirá i) el mismo tono, ii) un tono más alto, o iii) un tono más bajo?

16.5 Resonancia

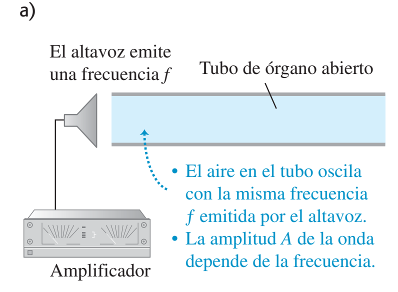
Muchos sistemas mecánicos tienen modos normales de oscilación. Como vimos, tales sistemas incluyen columnas de aire (como en un tubo de órgano) y cuerdas estiradas (como en una guitarra; véase la sección 15.8). En cada modo, todas las partículas del sistema oscilan en movimiento armónico simple con la misma frecuencia que la del modo. Las columnas de aire y cuerdas estiradas tienen una serie infinita de modos normales; pero el concepto básico está íntimamente relacionado con el oscilador armónico simple, descrito en el capítulo 13, que sólo tiene un modo normal (es decir, sólo una frecuencia con la que oscila cuando se le perturba).

Suponga que aplicamos una fuerza que varía periódicamente a un sistema que puede oscilar. Así que se fuerza a éste a oscilar con una frecuencia igual a la frecuencia de la fuerza aplicada (llamada *frecuencia impulsora*). Este movimiento se denomina *oscilación forzada*. Ya hablamos de oscilaciones forzadas del oscilador armónico en la sección 13.8, y sugerimos repasar esa explicación. En particular, describimos el fenómeno de **resonancia** mecánica. Un ejemplo sencillo de resonancia es empujar al primo Morton en un columpio. El columpio es un péndulo; sólo tiene un modo normal, con una frecuencia determinada por su longitud. Si empujamos el columpio periódicamente con esta frecuencia, podemos acrecentar la amplitud del movimiento; pero si empujamos con una frecuencia muy distinta, el columpio casi no se moverá.

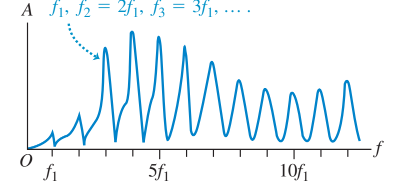
También hay resonancia cuando una fuerza que varía periódicamente se aplica a un sistema con muchos modos normales. Se muestra un ejemplo en la figura 16.19a. Un tubo de órgano abierto se coloca junto a un altavoz alimentado por un amplificador que emite ondas sonoras senoidales puras con frecuencia f, la cual puede variarse ajustando el amplificador. El aire del tubo es forzado a vibrar con la misma frecuencia f que la *fuerza impulsora* provista por el altavoz. En general, la amplitud de este

16.19 a) Se obliga al aire dentro de un tubo abierto a resonar a la misma frecuencia que las ondas sonoras senoidales provenientes del altavoz. b) La curva de resonancia del tubo abierto representa la amplitud de la onda sonora estacionaria en el tubo en función de la frecuencia impulsora.

a)



b) Curva de resonancia: gráfica de amplitud A contra frecuencia impulsora. Los picos ocurren en las frecuencias de modo normal del tubo: f_1, $f_2 = 2f_1$, $f_3 = 3f_1$, ...



movimiento es relativamente pequeña y el movimiento del aire dentro del tubo no será ninguno de los patrones de modo normal de la figura 16.17; no obstante, si la frecuencia f de la fuerza es cercana a la frecuencia de uno de los modos normales, el aire en el tubo se moverá según el patrón de modo normal para esa frecuencia, y la amplitud puede aumentar mucho. La figura 16.19b muestra la amplitud de oscilación del aire en el tubo en función de la frecuencia impulsora f. La forma de esta gráfica se denomina **curva de resonancia** del tubo; tiene picos donde f es igual a las frecuencias de los modos normales del tubo. La forma detallada de la curva de resonancia depende de la geometría del tubo.

Si la frecuencia de la fuerza es exactamente *igual* a una frecuencia de modo normal, el sistema está en resonancia, y la amplitud de la oscilación forzada es máxima. Si no hubiera fricción ni otro mecanismo de disipación de la energía, una fuerza impulsora a una frecuencia de modo normal continuaría agregando energía al sistema, y la amplitud aumentaría indefinidamente. En tal caso idealizado, los picos de la curva de resonancia de la figura 16.19b serían infinitamente altos. En un sistema real, sin embargo, siempre hay disipación de energía, o amortiguación, como vimos en la sección 13.8; la amplitud de oscilación en resonancia puede ser grande, pero no infinita.

El "sonido del océano" que escuchamos cuando pegamos el oído a un caracol grande se debe a la resonancia. El ruido del aire exterior que roza el caracol es una mezcla de ondas sonoras de casi todas las frecuencias audibles, que obliga al aire dentro del caracol a oscilar. El caracol se comporta como un tubo de órgano, con una serie de frecuencias de modos normales; el aire interior oscila con más fuerza a esas frecuencias, produciendo el sonido característico del caracol. Para escuchar un fenómeno similar, destape una botella llena de su bebida preferida y sople al ras de la abertura. El ruido lo produce su aliento, y el "tubo de órgano" es la columna de aire dentro de la botella arriba de la superficie del líquido. Si toma un trago y repite el experimento, oirá un tono más bajo porque el "tubo" es más largo y las frecuencias de modos normales son más bajas.

También hay resonancia cuando se hace oscilar una cuerda estirada (sección 15.8). Suponga que un extremo de una cuerda estirada se mantiene fijo, mientras al otro se imparte un movimiento senoidal transversal de amplitud pequeña, creando así ondas estacionarias. Si la frecuencia del mecanismo impulsor *no* es igual a una de las frecuencias de modo normal de la cuerda, la amplitud en los antinodos es pequeña; pero si la frecuencia es igual a cualquiera de las frecuencias de modo normal, la cuerda estará en resonancia y la amplitud en los antinodos será mucho mayor que en el extremo impulsado. Este último no es precisamente un nodo, aunque está mucho más cerca de un nodo que de un antinodo cuando la cuerda está en resonancia. Las fotografías de la figura 15.23 se obtuvieron así, con el extremo izquierdo de la cuerda fijo y el derecho oscilando verticalmente con pequeña amplitud; se obtuvieron ondas estacionarias de amplitud grande cuando la frecuencia de oscilación del extremo derecho fue igual a la frecuencia fundamental o a uno de los primeros tres sobretonos.

Es fácil demostrar la resonancia con un piano. Pise el pedal del amortiguador (el derecho) para que los amortiguadores se levanten y las cuerdas puedan vibrar libremente, luego cante un tono constante hacia el piano. Cuando deje de cantar, parecerá que el piano sigue cantando la misma nota. Las ondas sonoras de su voz excitan vibraciones en las cuerdas, cuyas frecuencias naturales son cercanas a las que estaban presentes (fundamental y armónicas) en la nota que usted cantó.

Un ejemplo más espectacular es cuando una cantante rompe una copa de cristal con su voz amplificada. Una copa de buena calidad tiene frecuencias de modo normal que podemos escuchar dándole un golpecito. Si la cantante emite una nota fuerte con una frecuencia exactamente igual a una de estas frecuencias de modo normal, se pueden crear oscilaciones de gran amplitud que llegan a romper el cristal (figura 16.20).

La resonancia es un concepto muy importante, no sólo en los sistemas mecánicos sino en todas las áreas de la física. En el capítulo 31 veremos ejemplos de resonancia en circuitos eléctricos.

16.20 La frecuencia del sonido de esta trompeta coincide exactamente con una de las frecuencias de modo normal de la copa. Las vibraciones resonantes de la copa tienen una amplitud tan grande que el cristal se hace añicos.



Ejemplo 16.13 Dueto órgano-guitarra

Un tubo de órgano cerrado se hace sonar cerca de una guitarra, haciendo que una de las cuerdas vibre con amplitud grande. Variamos la tensión de la cuerda hasta encontrar la amplitud máxima. La longitud de la cuerda es el 80% de la del tubo. Si tanto el tubo como la cuerda vibran en su frecuencia fundamental, calcule el cociente entre la rapidez de la onda en la cuerda y la del sonido en el aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La gran respuesta de la cuerda es un ejemplo de resonancia; se da porque el tubo y la cuerda tienen la misma frecuencia fundamental.

PLANTEAR: Si usamos los subíndices a y s para indicar el aire dentro del tubo y la cuerda, respectivamente, la condición de resonancia es $f_{1a} = f_{1s}$. La ecuación (16.20) da la frecuencia fundamental de un tubo cerrado; en tanto que la frecuencia fundamental de una cuerda de guitarra sujeta por ambos extremos está dada por la ecuación (15.32). En estas expresiones interviene la rapidez de la onda en el aire (v_a) y en la cuerda (v_s), así como las longitudes del tubo y de la cuerda; nos dicen que $L_s = 0.80L_a$, y la incógnita es la razón v_s/v_a.

EJECUTAR: Por las ecuaciones (16.20) y (15.32), $f_{1a} = v_a/4L_a$ y $f_{1s} = v_s/2L_s$. Igualando estas dos expresiones,

$$\frac{v_a}{4L_a} = \frac{v_s}{2L_s}$$

Sustituyendo $L_s = 0.80\ L_a$ y reacomodando,

$$\frac{v_s}{v_a} = 0.40$$

EVALUAR: Por ejemplo, si la rapidez del sonido en aire es de 345 m/s, la rapidez de la onda en la cuerda es (0.40) (345 m/s) = 138 m/s. Cabe señalar que, si bien las ondas estacionarias en el tubo y en la cuerda tienen la misma frecuencia, tienen diferente *longitud de onda* $\lambda = v/f$ porque los dos medios tienen diferente rapidez de ondas v. ¿Cuál onda estacionaria tiene mayor longitud de onda?

Evalúe su comprensión de la sección 16.5 Un tubo de órgano cerrado de longitud L tiene una frecuencia fundamental de 220 Hz. ¿En cuál de los siguientes tubos de órgano habrá una resonancia, si un diapasón con frecuencia de 660 Hz se hace sonar cerca del tubo? (Hay más de una respuesta correcta.) i) un tubo de órgano cerrado de longitud L; ii) un tubo de órgano cerrado de longitud $2L$; iii) un tubo de órgano abierto de longitud L; iv) un tubo de órgano abierto de longitud $2L$.



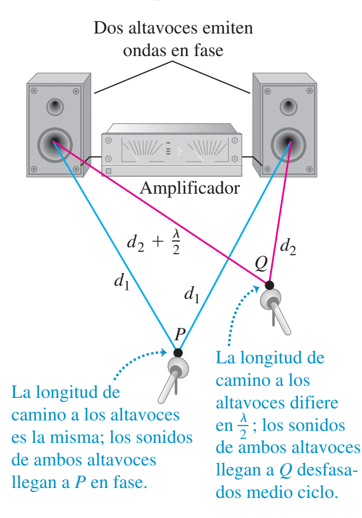
16.6 Interferencia de ondas

Los fenómenos ondulatorios que se presentan cuando dos o más ondas se traslapan en la misma región del espacio se agrupan bajo el concepto de *interferencia*. Como hemos visto, las ondas estacionarias son un ejemplo sencillo del efecto de interferencia: dos ondas que viajan en direcciones opuestas en un medio se combinan para producir un patrón de onda estacionaria con nodos y antinodos que no se mueven.

La figura 16.21 muestra un ejemplo de otro tipo de interferencia, que implica ondas que se propagan en el espacio. Dos altavoces, alimentados en fase por el mismo amplificador, emiten ondas sonoras senoidales idénticas con la misma frecuencia constante. Colocamos un micrófono en el punto P, equidistante de los altavoces. Las crestas de onda emitidas por los dos altavoces al mismo tiempo viajan distancias iguales y llegan a P al mismo tiempo; por lo tanto, las ondas llegan en fase, y hay interferencia constructiva. La amplitud total de la onda en P es el doble de la amplitud de cada onda individual, y podemos medir esta amplitud combinada con el micrófono.

Pasemos ahora el micrófono al punto Q, donde las distancias de los altavoces al micrófono difieren en media longitud de onda. Las dos ondas llegan *desfasadas* medio ciclo; una cresta positiva de un altavoz llega al mismo tiempo que una cresta negativa del otro. Hay interferencia destructiva, y la amplitud medida por el micrófono es mucho *menor* que cuando sólo está presente un altavoz. Si las amplitudes de los dos altavoces son iguales, las dos ondas se cancelan por completo en el punto Q, y la amplitud total ahí es cero.

16.21 Dos altavoces alimentados por el mismo amplificador. Hay interferencia constructiva en el punto P, e interferencia destructiva en el punto Q.



CUIDADO **Interferencia y ondas viajeras** Aunque esta situación se parece un poco a las ondas estacionarias en un tubo, la onda total de la figura 16.21 es una onda *viajera*, no estacionaria. Para entender por qué, recuerde que en una onda estacionaria no hay flujo neto de

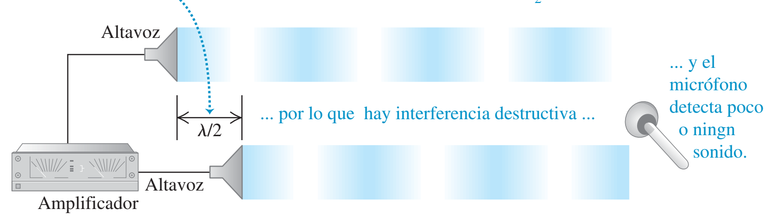
energía en ninguna dirección. En cambio, en la figura 16.21 hay un flujo global de energía de los altavoces al aire circundante; esto es característico de las ondas viajeras. La interferencia entre las ondas de los dos altavoces simplemente hace que el flujo de energía se *canalice* en ciertas direcciones (por ejemplo, hacia P), alejándolo de otras direcciones (por ejemplo, de Q). Podemos ver otra diferencia entre la figura 16.21 y una onda estacionaria si consideramos un punto, como Q, donde se presenta interferencia destructiva. Tal punto es *tanto* un nodo de desplazamiento *como* un nodo de presión, ya que no hay onda en este punto. Compare esto con una onda estacionaria, en la que un nodo de presión es un antinodo de desplazamiento, y viceversa.

Hay interferencia constructiva siempre que las distancias recorridas por las dos ondas difieren en un número entero de longitudes de onda, 0, λ, 2λ, 3λ, . . . ; en todos estos casos, las ondas llegan al micrófono en fase (figura 16.22a). Si las distancias de los dos altavoces al micrófono difieren en cualquier número semientero de longitudes de onda, $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, . . . , las ondas llegan al micrófono desfasadas y habrá interferencia destructiva (figura 16.22b). En este caso, poca o ninguna energía sonora fluye hacia el micrófono directamente enfrente de los altavoces. En vez de ello, la energía se dirige hacia los lados, donde hay interferencia constructiva.

a) Las longitudes de camino de los altavoces al micrófono difieren en λ ...



b) Las longitudes de camino de los altavoces al micrófono difiere en $\frac{\lambda}{2}$ ...



16.22 Dos altavoces, alimentados por el mismo amplificador, que emiten ondas en fase. Sólo se muestran las ondas dirigidas hacia el micrófono, y se han separado por claridad. *a*) Hay interferencia constructiva cuando la diferencia de camino es 0, λ, 2λ, 3λ, . . . *b*) Hay interferencia destructiva cuando la diferencia de camino es $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, ...

Ejemplo 16.14 Interferencia de altavoces

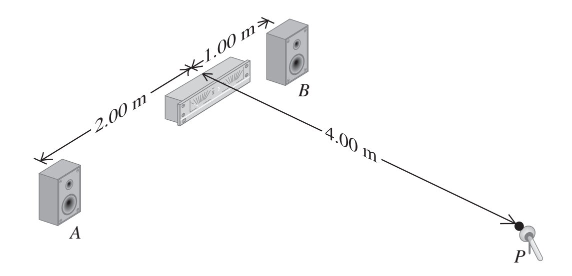
Dos altavoces pequeños, A y B (figura 16.23), son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas senoidales puras en fase. Si la rapidez del sonido es de 350 m/s, *a*) ¿para qué frecuencias se presenta interferencia constructiva en el punto P? b) ¿E interferencia destructiva?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La naturaleza de la interferencia en P depende de la diferencia en las longitudes de camino de los puntos A y B a P, y la relación entre esa diferencia y la longitud de onda.

PLANTEAR: Calculamos las distancias de A a P y de B a P con el teorema de Pitágoras. Hay interferencia constructiva cuando la diferencia

16.23 ¿Qué tipo de interferencia ocurre en P?



continúa

entre esas distancias es un número entero de longitudes de onda; hay interferencia destructiva cuando esa diferencia es un número semientero de longitudes de onda. Para obtener las frecuencias correspondientes, usamos la relación $v = f\lambda$.

EJECUTAR: La distancia del altavoz A a P es $[(2.00 \text{ m})^2 + (4.00 \text{ m})^2]^{1/2} = 4.47$ m; la distancia de B a P es $[(1.00 \text{ m})^2 + (4.00 \text{ m})^2]^{1/2} = 4.12$ m. La diferencia entre los caminos es $d = 4.47 \text{ m} - 4.12 \text{ m} = 0.35$ m.

a) Hay interferencia constructiva cuando la diferencia de trayecto d es $d = 0, \lambda, 2\lambda, \ldots$ es decir, $d = 0, v/f, 2v/f, \ldots = nv/f$. Por lo tanto, las posibles frecuencias son

$$f_n = \frac{nv}{d} = n\frac{350 \text{ m/s}}{0.35 \text{ m}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$= 1000 \text{ Hz}, 2000 \text{ Hz}, 3000 \text{ Hz}, \ldots$$

b) Hay interferencia destructiva cuando la diferencia de camino es $d = \lambda/2, 3\lambda/2, 5\lambda/2, \ldots$ es decir, $d = v/2f, 3v/2f, 5v/2f, \ldots$ Las posibles frecuencias son

$$f_n = \frac{nv}{2d} = n\frac{350 \text{ m/s}}{2(0.35 \text{ m})} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$= 500 \text{ Hz}, 1500 \text{ Hz}, 2500 \text{ Hz}, \ldots$$

EVALUAR: Conforme aumentemos la frecuencia, el sonido en P alternará entre amplitudes grandes y pequeñas; los máximos y mínimos estarán en las frecuencias que calculamos. Suele ser difícil notar este efecto en un recinto ordinario a causa de las múltiples reflexiones de paredes, piso y techo. El mejor lugar para hacer este experimento es en exteriores o en una cámara anecoica, cuyas paredes absorben casi todo el sonido y así eliminan las reflexiones.

Experimentos muy parecidos al del ejemplo 16.14, pero usando luz, han proporcionado tanto pruebas convincentes de la naturaleza ondulatoria de la luz, como una forma de medir sus longitudes de onda. Veremos estos experimentos con detalle en el capítulo 35.

Se usan efectos de interferencia para controlar el ruido de fuentes de sonido intenso como las plantas de electricidad de turbinas de gas o las celdas de prueba de motores a reacción. La idea es usar fuentes de sonido adicionales que, en algunas regiones del espacio, interfieren destructivamente con el sonido indeseable y lo cancelan. Micrófonos en el área controlada alimentan señales de vuelta a las fuentes de sonido, que se ajustan continuamente para una cancelación óptima del ruido en el área controlada.

Evalúe su comprensión de la sección 16.6 Suponga el altavoz A en la figura 16.23 emite una onda sonora senoidal con frecuencia de 500 Hz, y el altavoz B emite una onda sonora senoidal con frecuencia de 1000 Hz. ¿Qué clase de interferencia habrá entre estas dos ondas? i) interferencia constructiva en varios puntos, incluyendo el punto P, y destructiva en varios otros puntos; ii) interferencia destructiva en varios puntos, incluyendo el punto P, y constructiva en otros varios puntos; iii) ni i) ni ii).

16.7 Pulsos

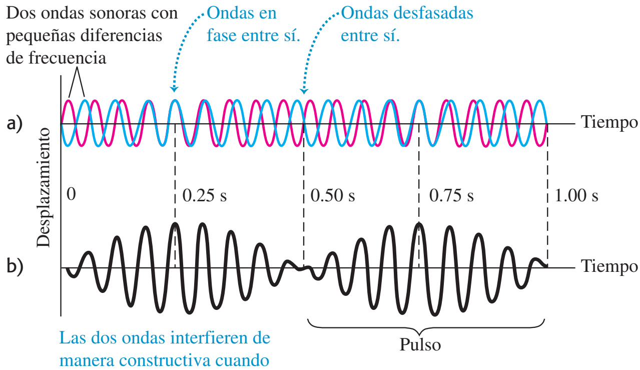


10.7 Pulsos y frecuencia del pulso

En la sección 16.6 hablamos de efectos de *interferencia* que se presentan cuando dos ondas distintas con la misma frecuencia se traslapan en la misma región del espacio. Veamos ahora lo que sucede cuando tenemos dos ondas de la misma amplitud, pero frecuencias ligeramente distintas. Esto ocurre, por ejemplo, cuando dos diapasones con frecuencias un poco diferentes se suenan juntos, o cuando dos tubos de órgano que supuestamente deben tener la misma frecuencia están un poco "desafinados".

Considere un punto en el espacio donde las dos ondas se traslapan. En la figura 16.24a, se grafican los desplazamientos de las ondas individuales en este punto en función del tiempo. La longitud total del eje del tiempo representa un segundo, y las frecuencias son 16 Hz (azul) y 18 Hz (rojo). Aplicando el principio de superposición, sumamos los dos desplazamientos en cada instante para obtener el desplazamiento total en ese instante. El resultado es la curva de la figura 16.24b. En ciertos momentos, las ondas están en fase; sus máximos coinciden y sus amplitudes se suman. Sin embargo, debido a la pequeña diferencia entre sus frecuencias, las dos ondas no pueden estar en fase todo el tiempo. Efectivamente, en ciertos instantes (como $t = 0.50$ s en la figura 16.24), las dos ondas están completamente *desfasadas*. Las ondas se cancelan y la amplitud total es cero.

La onda resultante en la figura 16.24b semeja una onda senoidal con amplitud variable que va de un máximo a cero y repite. En este ejemplo, la amplitud pasa por dos



16.24 Los pulsos son fluctuaciones de la amplitud producidas por dos ondas sonoras con pequeñas diferencias de frecuencia (16 Hz y 18 Hz, en este ejemplo). *a*) Ondas individuales. *b*) Onda resultante formada por superposición de las dos ondas. La frecuencia del pulso 18 Hz − 16 Hz = 2 Hz.

máximos y dos mínimos en 1 s, así que la frecuencia de esta variación de amplitud es de 2 Hz. La variación de amplitud causa variaciones de volumen llamados **pulsos**, y la frecuencia con que varía el volumen es la **frecuencia del pulso**. En este ejemplo, la frecuencia del pulso es la *diferencia* de las dos frecuencias. Si la frecuencia del pulso es de unos cuantos hertz, la oímos como una ondulación o un pulso del tono.

Podemos demostrar que la frecuencia del pulso *siempre* es la diferencia de las dos frecuencias f_a y f_b. Suponga que f_a es mayor que f_b; los periodos correspondientes son T_a y T_b, con $T_a < T_b$. Si las dos ondas inician desfasadas en $t = 0$, volverán a estar en fase cuando la primera onda haya pasado por exactamente un ciclo más que la segunda. Esto sucederá en $t = T_{\text{pulso}}$, el *periodo* del pulso. Sea n el número de ciclos de la primera onda en un tiempo T_{pulso}; el número de ciclos de la segunda onda en el mismo tiempo es $(n - 1)$, y tenemos las relaciones

$$T_{\text{pulso}} = nT_a \qquad \text{y} \qquad T_{\text{pulso}} = (n - 1)T_b$$

Eliminando n entre estas dos ecuaciones:

$$T_{\text{pulso}} = \frac{T_a T_b}{T_b - T_a}$$

El recíproco del periodo de pulso es la *frecuencia* del pulso, $f_{\text{pulso}} = 1/T_{\text{pulso}}$; así que

$$f_{\text{pulso}} = \frac{T_b - T_a}{T_a T_b} = \frac{1}{T_a} - \frac{1}{T_b}$$

y por último

$$f_{\text{pulso}} = f_a - f_b \qquad \text{(frecuencia del pulso)} \qquad (16.24)$$

Como dijimos, la frecuencia del pulso es la diferencia de las dos frecuencias. Al usar la ecuación (16.24), recuerde que f_a es la frecuencia más alta.

Otra forma de deducir la ecuación (16.24) es escribir funciones que describan las curvas de la figura 16.24a y luego sumarlas. Suponga que, en cierta posición, las dos ondas están dadas por $y_a(t) = A\,\text{sen}\,2\pi f_a t$ y $y_b(t) = -A\,\text{sen}\,2\pi f_b t$. Usamos la identidad trigonométrica

$$\text{sen}\,a - \text{sen}\,b = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(a - b)\cos\frac{1}{2}(a + b)$$

Ahora podemos expresar la onda total $y(t) = y_a(t) + y_b(t)$ como

$$y_a(t) + y_b(t) = \left[2A\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(2\pi)(f_a - f_b)t\right]\cos\frac{1}{2}(2\pi)(f_a + f_b)t$$

El factor amplitud (en corchetes) varía lentamente con la frecuencia $\frac{1}{2}(f_a - f_b)$. El factor coseno varía con la frecuencia *media* $\frac{1}{2}(f_a - f_b)$. El *cuadrado* del factor amplitud, que es proporcional a la intensidad que el oído percibe, pasa por dos máximos y dos mínimos por ciclo. Así, la frecuencia del pulso f_{pulso} que se escucha es dos veces la cantidad $\frac{1}{2}(f_a - f_b)$, es decir, $f_a - f_b$, en concordancia con la ecuación (16.24).

Se pueden escuchar pulsaciones entre dos tonos hasta una frecuencia del pulso de 6 o 7 Hz. Dos cuerdas de piano o dos tubos de órgano que difieren en su frecuencia en 2 o 3 Hz suenan temblorosos y "desafinados", aunque algunos registros de órgano contienen dos juegos de tubos deliberadamente afinados a frecuencias del pulso de 1 o 2 Hz, para dar un suave efecto ondulante. Tratar de detectar pulsos es una técnica importante al afinar todos los instrumentos musicales.

Con diferencias de frecuencia mayores que 6 o 7 Hz, ya no oímos pulsos individuales, y la sensación se funde en una de *consonancia* o *disonancia*, según la relación de frecuencia de los dos tonos. En algunos casos, el oído percibe un tono llamado *tono de diferencia*, igual a la frecuencia del pulso de los dos tonos. Por ejemplo, si escuchamos un silbato que produce sonidos a 1800 Hz y 1900 Hz, oiremos no sólo estos tonos, sino también un tono mucho más grave que 100 Hz.

Los motores de avión con varias hélices deben sincronizarse de modo que los sonidos de hélice no causen pulsos molestos, que se escuchan como fuertes sonidos pulsantes (figura 16.25). En algunos aviones, esto se hace por medios electrónicos; en otros, el piloto lo hace por oído, como si afinara un piano.

16.25 Si las dos hélices de este avión no se sincronizan con precisión, los pilotos, pasajeros y escuchas en tierra oirán pulsos.



Evalúe su comprensión de la sección 16.7 Un diapasón vibra a 440 Hz, mientras que otro lo hace a una frecuencia desconocida. Cuando ambos diapasones se hacen sonar de modo simultáneo, se escucha un tono que sube y baja en intensidad tres veces cada segundo. ¿Cuál es la frecuencia del segundo diapasón? i) 434 Hz; ii) 437 Hz; iii) 443 Hz; iv) 446 Hz; v) ya sea 434 Hz o 446 Hz; vi) ya sea 437 Hz o 443 Hz.

16.8 El efecto Doppler

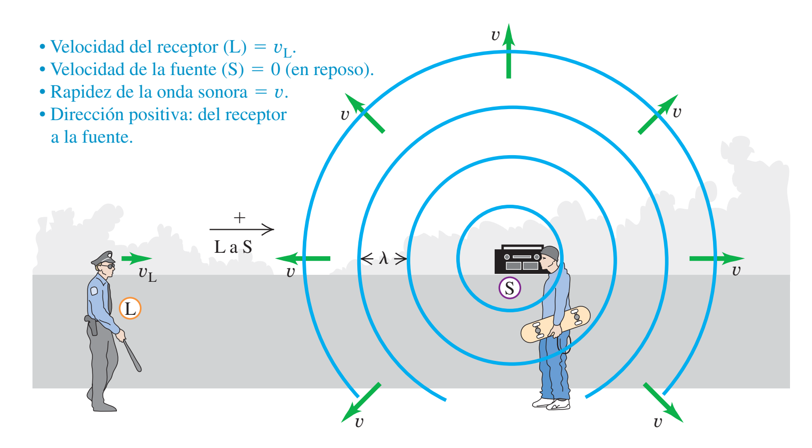
ActivPhysics ONLINE
10.8 Efecto Doppler: introducción conceptual
10.9 Efecto Doppler: problemas

Quizás usted habrá notado que, cuando un coche se acerca tocando el claxon, el tono parece bajar al pasar el coche. Este fenómeno, descrito por primera vez por el científico austriaco del siglo XIX Christian Doppler, se llama **efecto Doppler**. Cuando una fuente de sonido y un receptor están en movimiento relativo, la frecuencia del sonido oído por el receptor no es el mismo que la frecuencia fuente. Se presenta un efecto similar con las ondas de luz y radio; volveremos a esto más adelante en esta sección.

Con la finalidad de analizar el efecto Doppler para el sonido, deduciremos una relación entre el cambio de frecuencia, y las velocidades de la fuente y el receptor relativas al medio (usualmente aire) por el que se propagan las ondas sonoras. Por sencillez, sólo consideraremos el caso especial en que las velocidades de la fuente y el receptor están a lo largo de la línea que los une. Sean v_S y v_L las componentes de velocidad en esta línea de la fuente (*source*) y el receptor (*listener*), respectivamente, relativas al medio. Elegimos como dirección positiva la que va del receptor L a la fuente S. La rapidez del sonido relativa al medio v siempre se considera positiva.

Receptor en movimiento

Imaginemos primero un receptor L que se mueve con velocidad v_L hacia una fuente estacionaria S (figura 16.26). La fuente emite una onda sonora con frecuencia f_S y longitud de onda $\lambda = v/f_S$. La figura muestra varias crestas de onda, separadas por distancias iguales λ. Las crestas que se acercan al receptor en movimiento tie-



16.26 Un receptor que se mueve hacia una fuente estacionaria oye una frecuencia más alta que la frecuencia fuente, porque la rapidez de la onda relativa al receptor es mayor que la rapidez de la onda relativa al medio v.

nen una rapidez de propagación *relativa al receptor* de $(v + v_L)$, así que la frecuencia f_L con que llegan a la posición del receptor (esto es, la frecuencia que el receptor oye) es

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda} = \frac{v + v_L}{v/f_S} \tag{16.25}$$

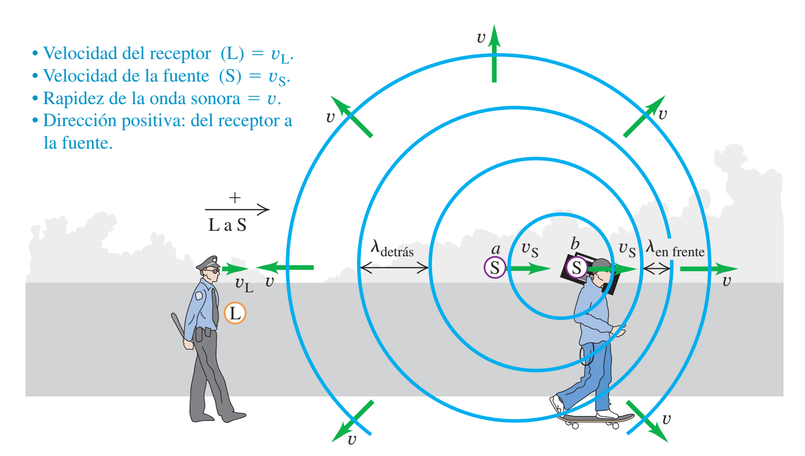
o bien,

$$f_L = \left(\frac{v + v_L}{v}\right) f_S = \left(1 + \frac{v_L}{v}\right) f_S \quad \text{(receptor móvil, fuente estacionaria)} \tag{16.26}$$

Así, un receptor que se mueve hacia una fuente ($v_L > 0$), como en la figura 16.26, oye una frecuencia más alta (tono más agudo) que un receptor estacionario. Un receptor que se aleja de la fuente ($v_L < 0$) oye una frecuencia más baja (tono más grave).

Fuente en movimiento y receptor en movimiento

Suponga ahora que la fuente también se mueve, con velocidad v_S (figura 16.27). La rapidez de la onda relativa al medio (aire) sigue siendo v; está determinada por las propiedades del medio y no cambia por el movimiento de la fuente. Sin embargo, la longitud de onda ya no es igual a v/f_S; veamos por qué. El tiempo que tarda en emitirse un ciclo de la onda es el periodo $T = 1/f_S$. Durante este tiempo, la onda viaja una distancia $vT = v/f_S$ y la fuente se mueve una distancia $v_S T = v_S/f_S$. La longitud de onda es la distancia entre crestas sucesivas, y depende del desplazamiento *relativo* de la fuente y la onda. Como muestra la figura 16.27, éste es diferente adelante y atrás



16.27 Las crestas de ondas emitidas por una fuente móvil se juntan al frente de la fuente (a la derecha en este caso) y se separan detrás (a la izquierda aquí).

de la fuente. En la región a la derecha de la fuente en la figura 16.27 (es decir, adelante de la fuente), la longitud de onda es

$$\lambda_{\text{al frente}} = \frac{v}{f_S} - \frac{v_S}{f_S} = \frac{v - v_S}{f_S} \quad \text{(longitud de onda adelante de una fuente móvil)} \tag{16.27}$$

En la región a la izquierda de la fuente (es decir, atrás de ella), es

$$\lambda_{\text{detrás}} = \frac{v + v_S}{f_S} \quad \text{(longitud de onda atrás de una fuente móvil)} \tag{16.28}$$

Las ondas adelante y atrás de la fuente se comprimen y estiran, respectivamente, por el movimiento de la fuente.

Para obtener la frecuencia que oye el receptor detrás de la fuente, sustituimos la ecuación (16.28) en la primera forma de la ecuación (16.25):

$$f_L = \frac{v + v_L}{\lambda_{\text{detrás}}} = \frac{v + v_L}{(v + v_S)/f_S}$$

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \quad \text{(efecto Doppler, fuente móvil y receptor móvil)} \tag{16.29}$$

Esto expresa la frecuencia f_L oída por el receptor en términos de la frecuencia f_S de la fuente.

Aunque lo dedujimos para la situación específica de la figura 16.27, la ecuación (16.29) incluye *todas* las posibilidades de movimiento de la fuente y el receptor (relativas al medio) a lo largo de la línea que los une. Si el receptor está en reposo en el medio, $v_L = 0$. Cuando la fuente y el receptor están en reposo o tienen la misma velocidad relativa al medio, entonces $v_L = v_S$ y $f_L = f_S$. Siempre que la dirección de la velocidad de la fuente o del receptor sea opuesta a la dirección del receptor a la fuente (que definimos como positiva), la velocidad correspondiente que debemos usar en la ecuación (16.29) es negativa.

Como ejemplo, la frecuencia oída por un receptor en reposo ($v_L = 0$) es $f_L = [v/(v + v_S)]f_S$. Si la fuente se mueve hacia el receptor (en la dirección negativa), entonces $v_S < 0$, $f_L > f_S$, y el receptor escucha una frecuencia mayor que la emitida por la fuente. En cambio, si la fuente se mueve alejándose del receptor (en la dirección positiva), entonces $v_S > 0$, $f_L < f_S$, y el receptor oye una frecuencia menor. Esto explica el cambio de tono que se escucha cuando la sirena de una ambulancia pasa cerca de usted (figura 16.28).

16.28 El efecto Doppler explica por qué la sirena de un carro de bomberos o de una ambulancia tiene un tono alto ($f_L > f_S$) cuando se acerca ($v_S < 0$) y un tono bajo ($f_L < f_S$) cuando se aleja ($v_S > 0$).



Estrategia para resolver problemas 16.2 Efecto Doppler



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* El efecto Doppler se presenta siempre que una fuente de ondas, el detector de las ondas (receptor) o ambos están en movimiento.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Establezca un sistema de coordenadas. Defina la dirección positiva como la que va del receptor a la fuente, y asegúrese de conocer los signos de todas las velocidades pertinentes. Una velocidad en la dirección del receptor a la fuente es positiva; una en la dirección opuesta es negativa. Todas las velocidades deben medirse relativas al aire en el que viaja el sonido.
2. Use una notación consistente para identificar las cantidades: subíndice S para la fuente (*source*), L para el receptor (*listener*).
3. Determine cuáles son las incógnitas.

EJECUTAR *la solución* de la siguiente manera:

1. Use la ecuación (16.29) para relacionar las frecuencias en la fuente y en el receptor, la rapidez del sonido y las velocidades de la fuente y el receptor. Si la fuente está en movimiento, se puede obtener la longitud de onda medida por el escucha empleando la ecuación (16.27) o la (16.28).
2. Si una onda se refleja de una superficie, sea estacionaria o móvil, el análisis puede efectuarse en dos pasos. En el primero, la superficie hace las veces de receptor; la frecuencia con que las crestas de onda llegan a la superficie es f_L. Luego, considere la superficie como nueva fuente, que emite ondas con esta misma frecuencia f_L. Por último, determine qué frecuencia oye un receptor que detecta esta nueva onda.

EVALUAR *la respuesta:* Vea si su resultado final es lógico. Si la fuente y el receptor se están acercando entre sí, $f_L > f_S$; si se están alejando, $f_L < f_S$. Si la fuente y el receptor no tienen movimiento relativo, $f_L = f_S$.

Ejemplo 16.15 Efecto Doppler I: Longitudes de onda

Una sirena policiaca emite una onda senoidal con frecuencia $f_S = 300$ Hz. La rapidez del sonido es de 340 m/s. *a*) Calcule la longitud de onda del sonido si la sirena está en reposo en el aire. *b*) Si la sirena se mueve a 30 m/s (108 km/h, o bien, 67 mi/h), calcule las longitudes de onda para las ondas adelante y atrás de la fuente.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El efecto Doppler no interviene en el inciso *a*), ya que ni la fuente ni el receptor están en movimiento. En el inciso *b*), la fuente está en movimiento, así que deberemos considerar el efecto Doppler.

PLANTEAR: La figura 16.29 muestra la situación. Usamos la relación $v = \lambda f$ para determinar la longitud de onda cuando la sirena está en reposo. Cuando está en movimiento, obtenemos la longitud de onda a cada lado de la sirena usando las ecuaciones (16.27) y (16.28).

EJECUTAR: *a*) Cuando la fuente está en reposo,

$$\lambda = \frac{v}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1.13\ \text{m}$$

16.29 Nuestro esquema de este problema.

b) La situación se muestra en la figura 16.29. Por la ecuación (16.27), delante de la sirena,

$$\lambda_{\text{al frente}} = \frac{v - v_S}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s} - 30\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1.03\ \text{m}$$

Por la ecuación (16.28), detrás de la sirena,

$$\lambda_{\text{detrás}} = \frac{v + v_S}{f_S} = \frac{340\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s}}{300\ \text{Hz}} = 1.23\ \text{m}$$

EVALUAR: La longitud de onda es menor delante de la sirena y mayor detrás de ella, como debe ser.

Ejemplo 16.16 Efecto Doppler II: Frecuencias

Si un receptor L está en reposo y la sirena del ejemplo 16.15 se aleja de L a 30 m/s, ¿qué frecuencia oye el receptor?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es la frecuencia f_L que escucha el receptor, quien está detrás de la fuente móvil.

PLANTEAR: La figura 16.30 muestra la situación. Conocemos $f_S = 300$ Hz por el ejemplo 16.15, y tenemos $v_L = 0$ y $v_S = 30$ m/s. (La velocidad de la fuente v_S es positiva porque la sirena se mueve en la dirección que va del receptor a la fuente.)

16.30 Nuestro esquema de este problema.

EJECUTAR: Por la ecuación (16.29),

$$f_L = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s}} (300\ \text{Hz}) = 276\ \text{Hz}$$

EVALUAR: La fuente y el receptor se están separando, así que la frecuencia f_L oída por el receptor es menor que la frecuencia f_S emitida por la fuente.

Veamos otro enfoque que nos puede servir para comprobar nuestro resultado. Por el ejemplo 16.15, la longitud de onda detrás de la fuente (que es donde está parado el receptor de la figura 16.30) es 1.23 m, así que

$$f_L = \frac{v}{\lambda} = \frac{340\ \text{m/s}}{1.23\ \text{m}} = 276\ \text{Hz}$$

Aunque la fuente se está moviendo, no cambia la rapidez de la onda v relativa al receptor estacionario.

Ejemplo 16.17 Efecto Doppler III: Un receptor móvil

Si la sirena está en reposo y el receptor se mueve alejándose de la sirena a 30 m/s, ¿qué frecuencia oye?

SOLUCIÓN

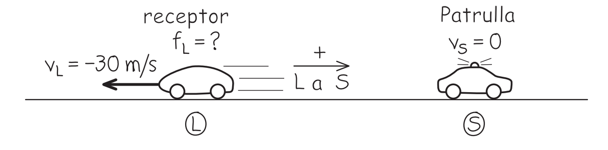
IDENTIFICAR: De nuevo nuestra variable es la frecuencia f_L escuchada por el receptor, pero ahora el receptor está en movimiento y la fuente está en reposo.

PLANTEAR: La figura 16.31 muestra la situación. La dirección positiva (del receptor a la fuente) sigue siendo de izquierda a derecha, así que $v_L = -30$ m/s.

EJECUTAR: Por la ecuación (16.29),

$$f_L = \frac{v + v_L}{v} f_S = \frac{340\ \text{m/s} + (-30\ \text{m/s})}{340\ \text{m/s}} (300\ \text{Hz}) = 274\ \text{Hz}$$

16.31 Nuestro esquema de este problema.



EVALUAR: Otra vez, la frecuencia que el receptor oye es menor que la de la fuente. La *velocidad relativa* de la fuente y el receptor es la misma que en el ejemplo anterior, pero el desplazamiento Doppler es distinto porque las velocidades relativas al *aire* son distintas.

Ejemplo 16.18 Efecto Doppler IV: Fuente en movimiento, receptor en movimiento

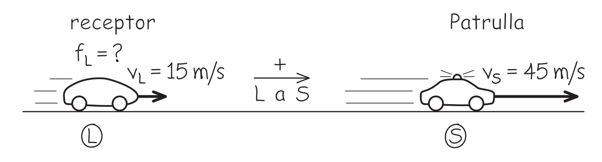
Si la sirena se está alejando del receptor con una rapidez de 45 m/s relativa al aire, y el receptor se mueve hacia la sirena con una rapidez de 15 m/s relativa al aire (figura 16.33), ¿qué frecuencia oye el escucha?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Ahora *tanto* el receptor *como* la fuente están en movimiento. Una vez más, la incógnita es la frecuencia f_L escuchada por el receptor.

PLANTEAR: La figura 16.32 muestra la situación. Tanto la velocidad de la fuente $v_S = 45$ m/s y la velocidad del receptor $v_L = 15$ m/s son positivas porque los vectores apuntan en la dirección del receptor a la fuente).

16.32 Nuestro esquema para este problema.



EJECUTAR: Usamos otra vez la ecuación (16.29) para obtener

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S = \frac{340\ \text{m/s} + 15\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} + 45\ \text{m/s}}(300\ \text{Hz})$$
$$= 277\ \text{Hz}$$

EVALUAR: La frecuencia que el receptor oye es otra vez menor que la de la fuente, pero el valor es distinto del de los dos ejemplos anteriores, aunque la fuente y el receptor se están alejando mutuamente a 30 m/s en los tres casos. El *signo* del cambio de frecuencia Doppler (es decir, si f_L es menor o mayor que f_S) depende del movimiento relativo entre la fuente y el receptor; para determinar el *valor* del cambio de frecuencia Doppler, hay que conocer las velocidades de la fuente y el receptor relativas al aire.

Ejemplo 16.19 Efecto Doppler V: Un cambio Doppler doble

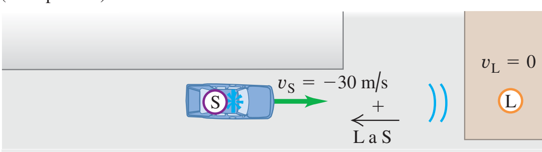
La patrulla con su sirena de 300 Hz se mueve hacia una bodega a 30 m/s, intentando atravesar su puerta. ¿Qué frecuencia escucha el conductor reflejada de la bodega?

SOLUCIÓN

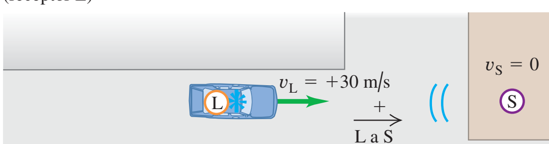
IDENTIFICAR: En esta situación, hay *dos* cambios Doppler, como se muestra en la figura 16.33. En el primero, la bodega es el "receptor" estacionario. La frecuencia del sonido que llega a la bodega (*warehouse*), que llamamos f_W, es mayor que 300 Hz porque la fuente se aproxima. En el segundo cambio, la bodega actúa como fuente de un sonido con frecuencia f_W, y el receptor es el conductor de la patrulla, quien oye una frecuencia mayor que f_W porque se está acercando a la fuente.

16.33 Dos etapas del movimiento de la onda sonora desde la patrulla hacia la bodega y de regreso a la patrulla.

a) El sonido viaja de la sirena de la patrulla (fuente S) a la bodega ("receptor" L)



b) El sonido reflejado viaja de la bodega (fuente S) a la patrulla (receptor L)



PLANTEAR: Para determinar f_W, usamos la ecuación (16.29) cambiando f_L por f_W. En esta parte del problema, $v_L = v_W = 0$ (la bodega está en reposo) y $v_S = -30$ m/s (la sirena se mueve en la dirección negativa de la fuente al receptor).

Para determinar la frecuencia que el conductor oye (la incógnita), usamos de nuevo la ecuación (16.29), pero ahora cambiando f_S por f_W. En esta segunda parte del problema, $v_S = 0$ porque la bodega estacionaria es la fuente y la velocidad del receptor (el conductor) es $v_L = +30$ m/s (positiva porque va del receptor a la fuente).

EJECUTAR: La frecuencia que llega a la bodega es

$$f_W = \frac{v}{v + v_S} f_S = \frac{340\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} + (-30\ \text{m/s})}(300\ \text{Hz}) = 329\ \text{Hz}$$

Entonces, la frecuencia que el conductor oye es

$$f_L = \frac{v + v_L}{v} f_W = \frac{340\ \text{m/s} + 30\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s}}(329\ \text{Hz}) = 358\ \text{Hz}$$

EVALUAR: Como hay dos cambios Doppler, el sonido reflejado que el conductor oye tiene una frecuencia aún más alta que el oído por un receptor estacionario en la bodega.

Efecto Doppler para ondas electromagnéticas

En el efecto Doppler para el sonido, las velocidades v_L y v_S siempre se miden relativas al *aire* o al medio que consideramos. También hay un efecto Doppler para ondas *electromagnéticas* en el espacio vacío, como las de luz o de radio. En este caso, no

hay medio que podamos usar como referencia para medir velocidades, y lo único que importa es la velocidad *relativa* entre la fuente y el receptor. (En contraste, el efecto Doppler para el sonido no depende simplemente de esta velocidad relativa, como vimos en el ejemplo 16.18.)

Para deducir la expresión del cambio de frecuencia Doppler para la luz, tenemos que usar la teoría especial de la relatividad. Explicaremos esta teoría en el capítulo 37, pero por ahora citaremos el resultado sin deducirlo. La rapidez de onda es la rapidez de la luz, denotada con c, y es la misma para la fuente y el receptor. En el marco de referencia en el que el receptor está en reposo, la fuente se aleja del receptor con velocidad v. (Si la fuente se *acerca* al receptor, v es negativa.) La frecuencia fuente es otra vez f_S. La frecuencia f_R medida por el receptor R (la frecuencia con que llegan las ondas al receptor) está dada por

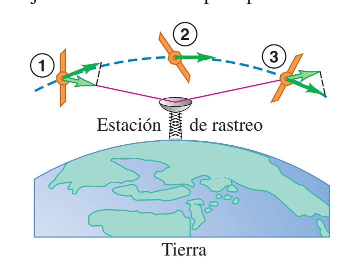
$$f_R = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}\, f_S \qquad \text{(efecto Doppler para la luz)} \tag{16.30}$$

Si v es positiva, la fuente se *aleja* directamente del receptor y f_R siempre es menor que f_S; si v es negativa, la fuente se mueve directamente *hacia* el receptor y f_R es *mayor que* f_S. El efecto cualitativo es el mismo que con el sonido, pero la relación cuantitativa es diferente.

Una aplicación conocida del efecto Doppler para ondas de radio es el radar montado en la ventana de una patrulla de policía para verificar la rapidez de otros vehículos. La onda electromagnética emitida por el dispositivo se refleja de un auto en movimiento, que actúa como fuente móvil, y la onda reflejada hacia el dispositivo sufre un cambio Doppler de frecuencia. Las señales transmitida y reflejada se combinan para producir pulsos, y la rapidez se puede calcular a partir de la frecuencia de las pulsos. Se usan técnicas similares ("radar Doppler") para medir velocidades del viento en la atmósfera.

El efecto Doppler también se usa para rastrear satélites y otros vehículos espaciales. En la figura 16.34, un satélite emite una señal de radio de frecuencia constante f_S. Al pasar el satélite en su órbita, primero se acerca y luego se aleja del receptor; la frecuencia f_R de la señal recibida en tierra cambia de un valor mayor que f_S a uno menor cuando el satélite pasa por arriba.

16.34 Cambio de la componente de velocidad a lo largo de la línea visual de un satélite que pasa por una estación de rastreo. La frecuencia recibida en la estación cambia de alta a baja cuando el satélite pasa por arriba.



El efecto Doppler para ondas electromagnéticas, incluida la luz visible, es importante en astronomía. Los astrónomos comparan las longitudes de onda de la luz de estrellas distantes con las emitidas por los mismos elementos en la Tierra. Por ejemplo, en un sistema estelar binario, con dos estrellas en órbita alrededor de su centro de masa común, la luz se desplaza a frecuencias más altas cuando una estrella se mueve hacia un observador en la Tierra y a más bajas cuando se aleja. La medición de estos cambios Doppler de frecuencia da información acerca de las órbitas y las masas de las estrellas que constituyen el sistema binario.

La luz de la mayoría de las galaxias está desplazada hacia el extremo de mayor longitud de onda (rojo) del espectro visible, efecto llamado *desplazamiento* o *corrimiento al rojo*. Esto suele describirse como un efecto Doppler debido al alejamiento de las galaxias pero; no obstante, desde el punto de vista de la teoría general de la relatividad, es algo mucho más fundamental, asociado a la expansión del espacio mismo. Las galaxias distantes tienen desplazamientos al rojo grandes, porque su luz ha estado viajando mucho tiempo y su longitud de onda ha compartido la expansión del espacio por la que se propagó. Una extrapolación de esta expansión hacia atrás 13,700 millones de años nos lleva a la imagen del "Big Bang". Desde esta perspectiva, el Big Bang no fue una explosión en el espacio, sino la rápida expansión inicial del espacio mismo.

Evalúe su comprensión de la sección 16.8 Imagine que está en un concierto al aire libre y que el viento sopla a 10 m/s de los músicos hacia usted. ¿El sonido que escucha ha sufrido un cambio Doppler? Si acaso, ¿se desplazó a frecuencias más bajas o más altas?

*16.9 Ondas de choque

El lector tal vez haya experimentado "estampidos sónicos" causados por un avión que pasa volando con una rapidez mayor que la del sonido. La figura 16.35 muestra cualitativamente por qué sucede esto. Denotemos con v_S la *rapidez* del avión relativa al aire, que siempre es positiva. El movimiento del avión en el aire produce sonido; si v_S es menor que la rapidez del sonido v, las ondas delante del avión se apretarán con una longitud de onda dada por la ecuación (16.27):

$$\lambda_{\text{en frente}} = \frac{v - v_S}{f_S}$$

Conforme la rapidez del avión v_S se acerca a la rapidez del sonido v, la longitud de onda se acerca a cero y las crestas de la onda se apilan (figura 16.35a). El avión debe ejercer una fuerza grande para comprimir el aire frente a él; por la tercera ley de Newton, el aire ejerce una fuerza igualmente grande sobre el avión; por lo tanto, hay un aumento considerable en el arrastre aerodinámico (resistencia del aire) conforme el avión se acerca a la rapidez del sonido; se trata de un fenómeno llamado "barrera del sonido".

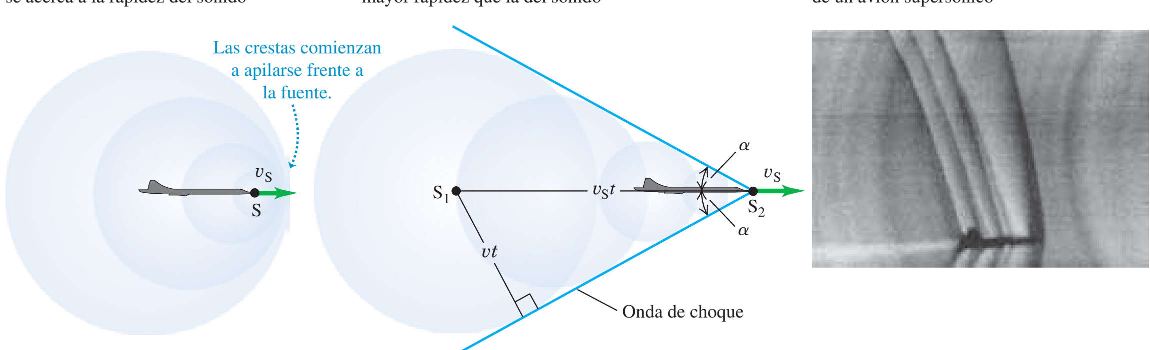
Cuando v_S es mayor en magnitud que v, la fuente del sonido es **supersónica**, y las ecuaciones (16.27) y (16.29) para el efecto Doppler ya no describen la onda sonora al frente de la fuente. La figura 16.35b muestra un corte transversal de lo que sucede. Al avanzar el avión, desplaza el aire circundante y produce sonido. La punta del avión emite una serie de crestas de onda; cada una se expande en un círculo centrado en la posición del avión cuando emitió esa cresta. Después de un tiempo t, la cresta emitida de un punto S_1 se extendió a un círculo de radio vt, y el avión se ha movido una distancia mayor v_St, a la posición S_2. Podemos ver que las crestas circulares se interfieren constructivamente en puntos a lo largo de la línea azul que forma un ángulo α con la dirección de la velocidad del avión, dando lugar a una cresta de onda de amplitud muy grande sobre la línea. Esta cresta se llama **onda de choque** (figura 16.35c).

Por el triángulo rectángulo de la figura 16.35b, vemos que el ángulo α está dado por

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{vt}{v_St} = \frac{v}{v_S} \qquad \text{(onda de choque)} \qquad (16.31)$$

En esta relación, v_S es la *rapidez* de la fuente (la magnitud de su velocidad) relativa al aire y siempre es positiva. La relación v_S/v se llama **número de Mach**; es mayor que 1 para todas las rapideces supersónicas, y $\operatorname{sen}\alpha$ en la ecuación (16.31) es su recíproco. El primer ser humano que rompió la barrera del sonido fue el capitán Chuck

16.35 Crestas de onda alrededor de una fuente de sonido S que se mueve a) ligeramente más lento que la rapidez del sonido v y b) más rápido que la rapidez del sonido v. c) La fotografía muestra un jet T-38 que se mueve a 1.1 veces la rapidez del sonido. Las ondas de choque individuales son producidas por la punta, las alas y la cola. Los ángulos de estas ondas varían porque la rapidez del aire aumenta y disminuye al moverse relativo al avión, así que la rapidez v_S del avión relativa al aire es distinta para las ondas de choque producidas en diferentes puntos del avión.





16.36 El primer avión supersónico, el Bell X-1, tenía una forma parecida a la de una bala calibre 50, la cual se sabía que podía viajar más rápidamente que el sonido.

Yeager de la fuerza aérea estadounidense, volando el Bell X-l a Mach 1.06 el 14 de octubre de 1947 (figura 16.36).

La situación real es tridimensional; la onda de choque forma un *cono* alrededor de la dirección de movimiento de la fuente. Si ésta (digamos, un avión supersónico o la bala de un rifle) se mueve con velocidad constante, el ángulo α es constante, y el cono de la onda de choque se mueve junto con la fuente. Es la llegada de esta onda de choque lo que causa el estampido sónico que oímos después de que pasó un avión supersónico. Cuanto más grande sea el avión, más fuerte será el estampido sónico; la onda de choque producida en el nivel del suelo por el vuelo del avión supersónico de pasajeros Concorde (en desuso) a 12,000 m (40,000 ft) causa un salto repentino en la presión del aire de cerca de 20 Pa. Frente al cono de la onda de choque, no hay sonido. Dentro del cono, un receptor estacionario oye el sonido con desplazamiento Doppler del avión que se aleja.

CUIDADO **Ondas de choque** Destacamos que cualquier objeto que se mueve en aire a velocidad supersónica produce una onda de choque *continuamente*, no sólo en el instante en que "rompe la barrera del sonido". Las ondas sonoras que se combinan para formar la onda de choque, como en la figura 16.35b, son creadas por el movimiento del objeto mismo, no por alguna fuente de sonido que el objeto pudiera llevar. El chasquido de una bala y de la punta de un látigo se deben a su movimiento supersónico. Un avión supersónico podría tener motores muy ruidosos, pero éstos no causan la onda de choque. De hecho, el transbordador espacial produce un estampido sónico muy fuerte al bajar a tierra; sus motores ya no tienen combustible en este punto, así que es un planeador supersónico.

Las ondas de choque tienen aplicaciones fuera de la aviación; se usan para desintegrar *cálculos* renales y biliares sin cirugía invasiva, usando una técnica con el llamativo nombre de *litotricia extracorpórea por onda de choque*. Una onda de choque producida fuera del cuerpo se enfoca con un reflector o una lente acústica, de modo que la mayor parte posible de la onda converja en el cálculo. Cuando los esfuerzos resultantes en el cálculo exceden la resistencia de éste a la tensión, el cálculo se deshace formando partículas que pueden eliminarse. Esta técnica requiere una determinación exacta de la ubicación del cálculo, lo cual puede hacerse con técnicas de visualización por ultrasonido (véase el análisis concerniente en la página 535).

Ejemplo 16.20 Estampido sónico de un avión supersónico

La onda de choque forma un cono que se extiende hacia atrás desde el avión, así que lo que el problema realmente pregunta es cuánto tiempo transcurre, entre que el avión pasa por arriba y que la onda de choque llega al observador.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La onda de choque forma un cono que se extiende hacia atrás desde el avión, así que lo que el problema realmente pregunta es cuánto tiempo transcurre, entre que el avión pasa por arriba y que la onda de choque llega al observador.

PLANTEAR: La figura 16.37 muestra la situación cuando la onda de choque llega al receptor en el punto R. Ha transcurrido un tiempo t (la incógnita) desde que el avión pasó por arriba. En ese tiempo, el avión que vuela con rapidez v_S recorrió una distancia $v_S t$. Usaremos trigonometría para despejar t.

EJECUTAR: Por la ecuación (16.31), el ángulo α del cono de choque es

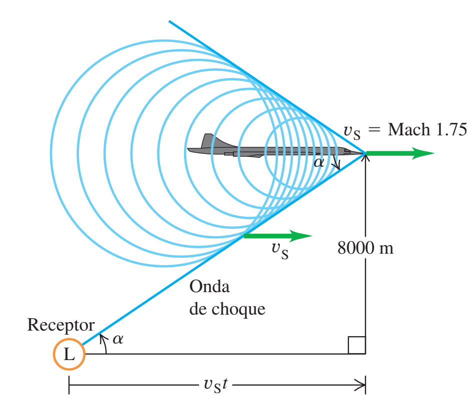
$$\alpha = \text{arcsen}\,\frac{1}{1.75} = 34.8°$$

La rapidez del avión es la rapidez del sonido multiplicada por el número de Mach:

$$v_S = (1.75)(320\ \text{m/s}) = 560\ \text{m/s}$$

continúa

16.37 Oímos un estampido sónico cuando la onda de choque nos alcanza en L (*no sólo* cuando el avión rompe la barrera del sonido). Un receptor a la derecha de L todavía no oye el estampido pero pronto lo oirá; un receptor a la izquierda de L ya lo oyó.



De la figura 16.37, tenemos

$$\tan \alpha = \frac{8000 \text{ m}}{v_S t}$$

$$t = \frac{8000 \text{ m}}{(560 \text{ m/s})(\tan 34.8°)} = 20.5 \text{ s}$$

EVALUAR: Oímos el estampido 20.5 s después de que pasa el avión; en ese tiempo, el avión recorrió (560 m/s)(20.5 s) = 11.5 km más allá del punto directamente arriba de nosotros.

En este cálculo, supusimos que la rapidez del sonido es la misma a todas las alturas, de modo que $\alpha = \text{arcsen } v/v_S$ es constante y la onda de choque forma un cono perfecto. De hecho, la rapidez del sonido disminuye al aumentar la altura. ¿Cómo afectaría esto el resultado?

Evalúe su comprensión de la sección 16.9 ¿Qué escucharía usted si estuviera directamente detrás (a la izquierda) del avión supersónico de la figura 16.37? i) un estampido sónico; ii) el sonido de un avión, el desplazamiento Doppler a frecuencias mayores; iii) el sonido del avión, el desplazamiento Doppler a menores frecuencias; iv) ninguno de los anteriores.

CAPÍTULO 16 RESUMEN

Ondas sonoras: El sonido consiste en ondas longitudinales en un medio. Una onda sonora senoidal se caracteriza tanto por su frecuencia f y longitud de onda λ (o frecuencia angular ω y número de onda k), como por su amplitud de desplazamiento A. La amplitud de presión $p_{máx}$ es directamente proporcional a la amplitud de desplazamiento, el número de onda y el módulo de volumen B del medio de la onda. (Véanse los ejemplos 16.1 y 16.2.)

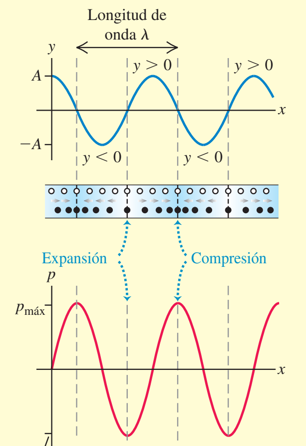
La rapidez de una onda sonora en un fluido depende del módulo volumétrico B y densidad ρ. Si el fluido es un gas ideal, la rapidez puede expresarse en términos de la temperatura T, la masa molar M y la razón de las capacidades caloríficas γ del gas. La rapidez de las ondas longitudinales en una varilla sólida depende de la densidad y del módulo de Young Y. (Véanse los ejemplos 16.3 a 16.5.)

$$p_{máx} = BkA \quad (16.5)$$
(onda sonora senoidal)

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (16.7)$$
(onda longitudinal en un fluido)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (16.10)$$
(onda sonora en un gas ideal)

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (16.8)$$
(onda longitudinal en una varilla sólida)

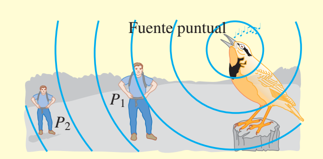


Intensidad y nivel de intensidad de un sonido: La intensidad I de una onda sonora es la rapidez media con que transporta energía por unidad de área. Para una onda senoidal, la intensidad puede expresarse en términos de la amplitud de desplazamiento A o la amplitud de presión $p_{máx}$. (Véanse los ejemplos 16.6 a 16.8.)

El nivel de intensidad de sonido β de una onda sonora es una medida logarítmica de su intensidad. Se mide relativa a I_0, una intensidad arbitraria que por definición es 10^{-12} W/m^2. Los niveles de intensidad de sonido se expresan en decibeles (dB). (Véanse los ejemplos 16.9 y 16.10.)

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\rho B}\,\omega^2 A^2 = \frac{p_{máx}^{\,2}}{2\rho v} = \frac{p_{máx}^{\,2}}{2\sqrt{\rho B}} \quad (16.12), (16.14)$$
(intensidad de una onda sonora senoidal)

$$\beta = (10\text{ dB})\log\frac{I}{I_0} \quad (16.15)$$
(definición de nivel de intensidad de sonido)

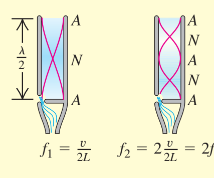


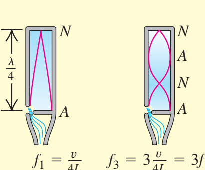
Ondas sonoras estacionarias: Se pueden establecer ondas sonoras estacionarias en un tubo. Un extremo cerrado es un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión; un extremo abierto es un antinodo de desplazamiento y un nodo de presión. En el caso de un tubo de longitud L abierto por ambos extremos, las frecuencias de modo normal son múltiplos enteros de la rapidez del sonido dividida entre $2L$. En el caso de un tubo cerrado (abierto sólo en un extremo), las frecuencias de modo normal son los múltiplos impares de la rapidez del sonido dividida entre $4L$. (Véanse los ejemplos 16.11 y 16.12.)

Se puede forzar al aire en un tubo, o a cualquier sistema de modos normales, a oscilar con cualquier frecuencia. Se presenta una respuesta máxima, o resonancia, si la frecuencia impulsora es cercana a una de las frecuencias de modo normal del sistema. (Véase el ejemplo 16.13.)

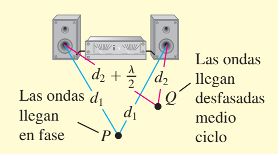
$$f_n = \frac{nv}{2L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad (16.18)$$
(tubo abierto)

$$f_n = \frac{nv}{4L} \quad (n = 1, 3, 5, \ldots) \quad (16.22)$$
(tubo cerrado)



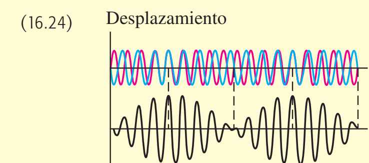


Interferencia: Si dos o más ondas se traslapan en la misma región del espacio, los efectos resultantes se llaman interferencia. La amplitud resultante puede ser mayor o menor que la de cada onda individual, dependiendo de si las ondas están en fase (interferencia constructiva) o desfasadas (interferencia destructiva). (Véase el ejemplo 16.14.)



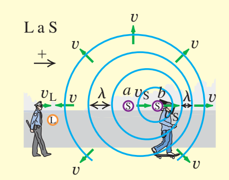
Pulsos: Se escuchan pulsos cuando dos tonos con frecuencias ligeramente distintas f_a y f_b suenan juntos. La frecuencia del pulso f_{pulso} es la diferencia entre f_a y f_b.

$$f_{pulso} = f_a - f_b \quad (16.24)$$
(frecuencia del pulso)



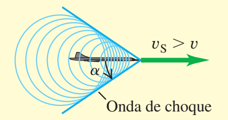
Efecto Doppler: El efecto Doppler para el sonido es el cambio de frecuencia que se da cuando hay movimiento de la fuente de sonido, de un receptor o de ambos, relativo al medio. Las frecuencias en la fuente y el receptor f_S y f_L tienen una relación con las velocidades de la fuente y el receptor v_S y v_L relativas al medio, y con la rapidez del sonido v respecto del medio. (Véanse los ejemplos 16.15 a 16.19.)

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \quad (16.29)$$
(efecto Doppler, fuente en movimiento y receptor en movimiento)



***Ondas de choque:** Una fuente de sonido que se mueve con rapidez v_S mayor que la del sonido v crea una onda de choque. El frente de onda es un cono con ángulo α. (Véase el ejemplo 16.20.)

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{v}{v_S} \quad (16.31)$$



Términos clave

sonido, *527*
gama audible, *527*
ultrasónico, *528*
infrasónico, *528*
amplitud de desplazamiento, *528*
amplitud de presión, *529*
volumen, *531*
tono, *531*
timbre, *532*
ruido, *532*
nivel de intensidad de sonido, *539*
decibel, *539*
nodo de desplazamiento, *541*
antinodo de desplazamiento, *541*
nodo de presión, *542*
antinodo de presión, *542*
resonancia, *546*
curva de resonancia, *547*
pulsos, *551*
frecuencia del pulso, *551*
efecto Doppler, *552*
*supersónico, *558*
*onda de choque, *558*
*número de Mach, *558*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Tanto los sonidos musicales como el ruido consisten en una combinación de ondas sonoras senoidales. La diferencia es que todas las frecuencias de las ondas senoidales de un sonido musical son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental; en tanto que en el ruido están presentes *todas* las frecuencias.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

16.1 Respuesta: v) Por la ecuación (16.5), la amplitud de desplazamiento es $A = p_{máx}/Bk$. La amplitud de presión $p_{máx}$ y el módulo de volumen B no cambian; pero la frecuencia f aumenta en un factor de 4. Por lo tanto, el número de onda $k = \omega/v = 2\pi f/v$ también aumenta en un factor de 4. Puesto que A es inversamente proporcional a k, la amplitud de desplazamiento disminuye a $\frac{1}{4}$. Dicho de otro modo, a una frecuencia más alta se requiere un menor desplazamiento máximo, para producir la misma fluctuación de la presión máxima.

16.2 Respuesta: i) Por la ecuación (16.7), la rapidez de las ondas longitudinales (sonido) en un fluido es $v = \sqrt{B/\rho}$. Podemos reescribir esto para obtener una expresión del módulo de volumen B en términos de la densidad de fluido ρ y la rapidez del sonido v: $B = \rho v^2$. A 20 °C la rapidez del sonido en el mercurio es ligeramente menor que en el agua (1451 m/s contra 1482 m/s); sin embargo, la densidad del mercurio es mayor que la del agua por un factor grande (13.6). De esta manera, el módulo de volumen del mercurio es mayor que el del agua en un factor de $(13.6)(1451/1482)^2 = 13.0$.

16.3 Respuestas: A y $p_{máx}$ aumentan en un factor de $\sqrt{2}$, B y v permanecen sin cambio, β aumenta en 3.0 dB Las ecuaciones (16.9) y (16.10) muestran que el módulo de volumen B y la rapidez del sonido v no cambian porque tampoco cambian las propiedades físicas del aire. Por las ecuaciones (16.12) y (16.14), la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento o al cuadrado de la amplitud de presión. Por lo tanto, un aumento al doble de la intensidad implica un aumento tanto de A como de $p_{máx}$ en un factor de $\sqrt{2}$. El ejemplo 16.10 muestra que una *multiplicación* de la intensidad por un factor de 2 ($I_2/I_1 = 2$) corresponde a *sumar* (10 dB) log (I_2/I_1 = (10 dB) log 2 = 3.0 dB al nivel de intensidad de sonido.

16.4 Respuesta: ii) El helio es menos denso que el aire y su masa molar es menor, así que el sonido viaja con mayor rapidez en helio que en aire. Las frecuencias de modo normal de un tubo son proporcionales a la rapidez del sonido v, así que la frecuencia y por ende el tono aumentan cuando el tubo se llena con helio en vez de aire.

16.5 Respuesta: i) y iv) Habrá resonancia si 660 Hz es una de las frecuencias de modo normal del tubo. Un tubo de órgano cerrado tiene frecuencias de modo normal que son múltiplos impares de su frecuencia fundamental [véase la ecuación (16.22) y la figura 16.18]. Por lo tanto, el tubo i), que tiene frecuencia fundamental de 220 Hz, también tiene frecuencia de modo normal de 3(220 Hz) = 660 Hz. El tubo

ii) tiene el doble de la longitud del tubo i); por la ecuación (16.20), la frecuencia fundamental de un tubo cerrado es inversamente proporcional a la longitud, así que el tubo ii) tiene una frecuencia fundamental de $\left(\frac{1}{2}\right)(220\text{ Hz}) = 110$ Hz. Sus otras frecuencias de modo normal son 330 Hz, 550 Hz, 770 Hz, . . . , por lo que un diapasón de 660 Hz no causará resonancia. El tubo ii) es un tubo abierto de la misma longitud que el tubo i); por ello, su frecuencia fundamental es dos veces mayor que la del tubo i) [compare las ecuaciones 16.16 y 16.20], o bien, $2(220\text{ Hz}) = 440$ Hz. Sus otras frecuencias de modo normal son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental [véase la ecuación (16.19)], o bien, 880 Hz, 1320 Hz, . . . , ninguno de los cuales coincide con la frecuencia de 660 Hz del diapasón. El tubo iv) es también un tubo abierto pero con el doble de longitud que el tubo iii) [véase la ecuación (16.18)], por ello, sus frecuencias de modo normal son de $\frac{1}{2}$ de las del tubo iii): 220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, . . . , de manera que el tercer armónico resonará con el diapasón.

16.6 Respuesta: iii) Las interferencias constructiva y destructiva entre las dos ondas puede ocurrir sólo si las dos ondas tienen la misma frecuencia. En este caso las frecuencias son diferentes, por lo que no hay puntos donde las dos ondas siempre se refuercen mutuamente (interferencia constructiva) o siempre se cancelen (interferencia destructiva).

16.7 Respuesta: vi) La frecuencia del pulso es de 3 Hz, así que la diferencia entre las frecuencias de los dos diapasones también es de 3 Hz. Por lo tanto, el segundo diapasón vibra a una frecuencia de 443 Hz, o bien, de 437 Hz. Podemos distinguir entre las dos posibilidades comparando los tonos de los dos diapasones cuando suenan individualmente: la frecuencia será de 437 Hz si el segundo diapasón tiene tono más grave, y de 433 Hz si tiene un tono más agudo.

16.8 Respuesta: no El aire (el medio de las ondas sonoras) se está moviendo desde la fuente hacia el receptor. Por lo tanto, relativos al aire, tanto la fuente como el receptor se están moviendo en la dirección del receptor a la fuente. Entonces, ambas velocidades son positivas y $v_S = v_L = +10$ m/s. La igualdad de estas dos velocidades implica que el numerador y el denominador en la ecuación (16.29) son iguales, así que $f_L = f_S$ y *no* hay desplazamiento Doppler.

16.9 Respuesta: iii) La figura 16.37 muestra que hay ondas sonoras dentro del cono de la onda de choque. Detrás del avión las crestas de las ondas se dispersan, justo cuando están detrás de la fuente en movimiento de la figura 16.27. Por lo tanto, la ondas que llegarían a usted tienen una longitud de onda ampliada y una menor frecuencia.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P16.1. Cuando el sonido viaja del aire al agua, ¿cambia la frecuencia de la onda? ¿La rapidez? ¿Y la longitud de onda? Explique su razonamiento.

P16.2. El héroe de una película del oeste trata de detectar la aproximación de un tren pegando su oreja a la vía. ¿Por qué obtiene así una advertencia temprana de la llegada del tren?

P16.3. ¿El tono (o frecuencia) de un tubo de órgano aumenta o disminuye al aumentar la temperatura? Explique su respuesta.

P16.4. En casi todos los instrumentos de viento modernos, el tono se modifica usando llaves o válvulas para alterar la longitud de la columna de aire en vibración. La corneta, en cambio, no tiene válvulas ni llaves; pero puede tocar muchas notas. ¿Cómo es posible esto? ¿Hay restricciones en cuanto a las notas que puede tocar?

P16.5. Los músicos sinfónicos siempre "calientan" sus instrumentos de viento soplándolos antes de un concierto. ¿Por qué?

P16.6. En una conocida y divertida demostración científica, cuando una persona inhala helio, su voz se torna aguda. ¿Por qué sucede esto? (*Advertencia:* inhalar demasiado helio puede provocar un estado de inconsciencia o incluso la muerte.)

P16.7. En ciertas autopistas los divisores de carriles a veces tienen cordoncillos o rizos equiespaciados. Cuando los neumáticos de un automóvil ruedan sobre ellos, se produce una nota musical. ¿Por qué? Explique cómo podría usarse este fenómeno para medir la rapidez del vehículo.

P16.8. La calidad del tono de una guitarra acústica es diferente cuando las cuerdas se puntean cerca del puente (el extremo inferior de las cuerdas), que cuando se puntean cerca del agujero (cerca del centro de las cuerdas). ¿Por qué?

P16.9. ¿Qué influye de manera más directa sobre el volumen de una onda sonora: la amplitud de *desplazamiento* o la amplitud de *presión*? Explique su razonamiento.

P16.10. Si se reduce a la mitad la amplitud de presión de una onda sonora, ¿en qué factor disminuirá su intensidad? ¿En qué factor debe aumentarse la amplitud de presión de una onda sonora para aumentar la intensidad en un factor de 16? Explique su respuesta.

P16.11. ¿El nivel de intensidad del sonido β obedece la ley del inverso del cuadrado? ¿Por qué?

P16.12. Una pequeña fracción de la energía de una onda sonora es absorbida por el aire por el que pasa el sonido. ¿Cómo modifica esto la relación del inverso cuadrado entre intensidad y distancia de la fuente? Explique su razonamiento.

P16.13. Un alambre bajo tensión y que vibra en su primer sobretono produce un sonido con longitud de onda λ. ¿Cuál será la nueva longitud de onda del sonido (en términos de λ) si se duplica la tensión?

P16.14. Una pequeña banda metálica se desliza por una de las puntas de un diapasón. Como esta banda se mueve cada vez más cerca del extremo de la punta, ¿qué efecto tiene sobre la longitud de onda y la frecuencia del sonido que produce la punta? ¿Por qué?

P16.15. Un organista de una catedral toca un acorde fuerte y luego suelta las teclas. El sonido persiste unos segundos y luego se desvanece. ¿Por qué persiste? ¿Qué pasa con la energía del sonido cuando éste se desvanece?

P16.16. Dos diapasones tienen frecuencias idénticas, pero uno está estacionario y el otro está montado en el borde de una plataforma giratoria. ¿Qué oye un escucha? Explique su respuesta.

P16.17. Una iglesia grande tiene parte del órgano al frente y parte al fondo. Un feligrés que camina rápidamente por el pasillo, mientras ambos segmentos están tocando, dice que los dos segmentos suenan desafinados. ¿Por qué?

P16.18. Una fuente de sonido y un receptor están en reposo en tierra, pero un viento fuerte sopla de la fuente al receptor. ¿Hay un efecto Doppler? ¿Por qué?

P16.19. ¿Puede imaginar circunstancias en las que se observaría un efecto Doppler en ondas superficiales en agua? ¿Y en ondas elásticas que se propagan en un cuerpo de agua a gran profundidad? Si acaso, describa las circunstancias y explique su razonamiento. Si no, explique por qué no.

P16.20. Las estrellas diferentes de nuestro Sol aparecen sin rasgos sobresalientes cuando se observan a través de telescopios. Sin embargo, los astrónomos puede utilizar fácilmente la luz proveniente de esas estrellas para determinar que están girando e incluso para medir la rapidez de su superficie. ¿Cómo cree que pueden hacer esto?

P16.21. Si usted se detiene frente a una vía férrea cuando un tren se aproxima, y éste pasa frente a usted, escuchará el desplazamiento Doppler en el sonido. Pero si escucha más de cerca, se dará cuenta de que el cambio en la frecuencia es continuo; no va súbitamente de una frecuencia alta a una frecuencia baja. En vez de ello, la frecuencia cambia *suavemente* (pero rápido) de alta a baja conforme el tren pasa. ¿Por qué ocurre este cambio de manera suave?

P16.22. En el caso 1, una fuente de sonido se aproxima a un observador estacionario con rapidez v. En el caso 2, el observador se mueve hacia una fuente estacionaria con la misma rapidez v. Si la fuente siempre produce un sonido con la misma frecuencia, ¿el observador escuchará la misma frecuencia en ambos casos, puesto que la rapidez relativa es la misma en ambas situaciones? ¿Por qué?

***P16.23.** ¿Un avión sólo produce un estampido sónico en el instante en que su rapidez excede de Mach 1? Explique su razonamiento.

***P16.24.** Si va en un avión supersónico, ¿qué oye? Explique su razonamiento. En particular, ¿escucha un estampido sónico continuo? ¿Por qué?

***P16.25.** Un jet vuela a una altitud constante con rapidez constante v_S mayor que la rapidez del sonido. Describa qué oyen los receptores en los puntos A, B y C en el instante que se indica en la figura 16.38, cuando la onda de choque recién llegó al punto B. Explique su razonamiento.

Figura 16.38 Pregunta P16.25.

Ejercicios

A menos que se indique algo diferente, suponga que la rapidez del sonido en el aire es $v = 344$ m/s.

Sección 16.1 Ondas sonoras

16.1. El ejemplo 16.1 (sección 16.1) mostró que, para ondas sonoras en aire con frecuencia de 1000 Hz, una amplitud de desplazamiento de 1.2×10^{-8} m produce una amplitud de presión de 3.0×10^{-2} Pa. *a*) ¿Qué longitud de onda tienen esas ondas? *b*) Para ondas de 1000 Hz en aire, ¿qué amplitud de desplazamiento se requeriría para que la amplitud de presión esté en el umbral del dolor (30 Pa)? *c*) ¿Qué longitud de onda y frecuencia deben tener ondas con amplitud de desplazamiento de 1.2×10^{-8} m para producir una amplitud de presión de 1.5×10^{-3} Pa?

16.2. El ejemplo 16.1 (sección 16.1) mostró que, para ondas sonoras en aire con frecuencia de 1000 Hz, una amplitud de desplazamiento de 1.2×10^{-8} m produce una amplitud de presión de 3.0×10^{-2} Pa. A 20 °C el agua tiene un módulo de volumen de 2.2×10^{9} Pa, y la rapidez del sonido en ella es de 1480 m/s. Para ondas sonoras de 1000 Hz en agua a 20 °C, ¿qué amplitud de desplazamiento se produce si la amplitud de presión es de 3.0×10^{-2} Pa? Explique por qué su respuesta es mucho menor que 1.2×10^{-8} m.

16.3. Considere una onda sonora en aire con amplitud de desplazamiento de 0.0200 mm. Calcule la amplitud de presión para frecuencias de *a*) 150 Hz; *b*) 1500 Hz; *c*) 15,000 Hz. En cada caso, compare el resultado con el umbral del dolor, que es de 30 Pa.

16.4. Una ruidosa máquina de una fábrica produce un sonido que tiene una amplitud de desplazamiento de 1.00 μm, pero la frecuencia de este sonido puede ajustarse. Para evitar el daño auditivo en los trabajadores, se limita la amplitud de presión máxima de las ondas sonoras a 10.0 Pa. En las condiciones de esta fábrica, el módulo de volumen del aire es 1.42×10^{5} Pa. ¿Cuál es el sonido de frecuencia más alta al que esta máquina puede ajustarse sin exceder el límite prescrito? ¿Dicha frecuencia es audible para los trabajadores?

Sección 16.2 Rapidez de las ondas sonoras

16.5. *a*) En un líquido con densidad de 1300 kg/m^3, se determina que ondas longitudinales con frecuencia de 400 Hz tienen una longitud de onda de 8.00 m. Calcule el módulo de volumen del líquido, *b*) Una barra metálica de 1.50 m de longitud tiene una densidad de 6400 kg/m^3. Las ondas sonoras longitudinales tardan 3.90×10^{-4} s en llegar de un extremo de la barra al otro. Calcule el módulo de Young del metal.

16.6. Un fuerte terremoto cuyo epicentro está en Loma Prieta, California, cerca de San Francisco, se produjo el 17 de octubre de 1989 a las 5:04 P.M. hora local (en UTC, tiempo universal coordinado, 0h 4m 15s el 18 de octubre de 1989). Sus ondas sísmicas primarias (ondas P) son ondas longitudinales que viajan por la corteza terrestre. Estas ondas se detectaron en Caracas, Venezuela, a las 0h 13m 54s UTC; en Kevo, Finlandia, a las 0h 15m 35s UTC; y en Viena, Austria, a las 0h 17m 02s UTC. Las distancias que las ondas P viajaron desde Loma Prieta fueron de 6280 km a Caracas, 8690 km a Kevo y 9650 km a Viena. *a*) Use los tiempos de llegada para calcular la rapidez media de las ondas P que viajaron a estas tres ciudades. ¿Cómo explica las diferencias entre estos valores? *b*) La densidad media de la corteza terrestre es de aproximadamente 3.3 g/cm^3. Use este valor para calcular el módulo de volumen de la corteza a lo largo del camino seguido por las ondas P a cada una de las tres ciudades. Compare sus respuestas con los módulos de volumen de la tabla 11.1.

16.7. Un buzo bajo la superficie de un lago escucha el sonido de la sirena de un bote en la superficie directamente arriba de él; al mismo tiempo, un amigo parado en tierra firme a 22.0 m del bote también lo escucha (figura 16.39). La sirena está 1.20 m sobre la superficie del agua. ¿A qué distancia (la marcada con "?" en la figura 16.39) de la sirena está el buzo? Tanto el aire como el agua están a 20 °C.

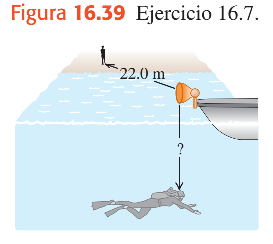


Figura 16.39 Ejercicio 16.7.

16.8. A 27.0 °C, ¿qué rapidez tienen las ondas longitudinales en *a*) hidrógeno (masa molar 2.02 g/mol)? *b*) ¿Helio (masa molar 4.00 g/mol)? *c*) ¿Argón (masa molar 39.9 g/mol)? Tome los valores de γ de la tabla 19.1. *d*) Compare sus respuestas para los incisos *a*), *b*) y *c*) con la rapidez en aire a la misma temperatura.

16.9. Un oscilador vibra a 1250 Hz y produce una onda sonora que viaja a través de un gas ideal a 325 m/s, cuando la temperatura del gas es de 22.0 °C. Para cierto experimento, usted necesita que el oscilador produzca un sonido con longitud de onda de 28.5 cm en ese gas. ¿Cuál debería ser la temperatura del gas para permitir que se alcance esa longitud de onda?

16.10. *a*) Demuestre que el cambio fraccional en la rapidez del sonido (dv/v) debido a un cambio muy pequeño en la temperatura dT está dado por $dv/v = \frac{1}{2}\,dT/T$. (*Sugerencia:* comience con la ecuación 16.10.) *b*) La rapidez del sonido en el aire a 20 °C es de 344 m/s. Utilice el resultado en el inciso *a*) para determinar el cambio en la rapidez del sonido que corresponde a un cambio de 1.0 °C en la temperatura del aire.

16.11. Se golpea un extremo de una varilla de latón de 80.0 m. Una persona en el otro extremo escucha dos sonidos causados por dos ondas longitudinales, una que viaja por la varilla y otra que viaja por el aire. Calcule el intervalo de tiempo entre los sonidos. La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s; la información pertinente para el latón se halla en la tabla 11.1 y en la tabla 14.1.

16.12. ¿Qué diferencia hay entre la rapidez de ondas longitudinales en aire a 27.0 °C y a −13.0 °C?

16.13. ¿Qué esfuerzo (F/A) debe haber en un alambre estirado de un material cuyo módulo de Young es Y, para que la rapidez de ondas longitudinales sea igual a 30 veces la rapidez de ondas transversales?

Sección 16.3 Intensidad de sonido

16.14. Con base en la información de la tabla 16.2, responda las siguientes preguntas acerca del sonido en el aire. A 20 °C el módulo de volumen para el aire es 1.42×10^5 Pa y su densidad es de 1.20 kg/m^3. A esta temperatura, ¿cuál es la amplitud de presión (en Pa y atm) y la amplitud de desplazamiento (en m y nm) *a*) para el sonido más suave que puede escuchar normalmente una persona a 1000 Hz y *b*) para el sonido de una remachadora a la misma frecuencia? *c*) ¿Cuánta energía por segundo entrega cada onda a un cuadrado que mide 5.00 mm por lado?

16.15. Ondas longitudinales en diferentes fluidos. *a*) Una onda longitudinal que se propaga en un tubo lleno de agua tiene una intensidad de 3.00×10^{-6} W/m^2 y su frecuencia es de 3400 Hz. Calcule la amplitud A y la longitud de onda λ para esa onda. La densidad del agua es de 1000 kg/m^3 y su módulo de volumen es de 2.18×10^9 Pa. *b*) Si el tubo está lleno con aire a una presión de 1.00×10^5 Pa y la densidad es de 1.20 kg/m^3, ¿qué amplitud A y longitud de onda λ tendrá una onda longitudinal con la misma intensidad y frecuencia que en el inciso *a*)? *c*) En qué fluido es mayor la amplitud, ¿en agua o en aire? Calcule la razón entre ambas amplitudes. ¿Por qué no es 1.00 dicha razón?

16.16. Deduzca la ecuación (16.14) de las ecuaciones que la preceden.

16.17. Una onda sonora en aire a 20 °C tiene frecuencia de 150 Hz y amplitud de desplazamiento de 5.00×10^{-3} mm. Para esta onda, calcule *a*) la amplitud de presión (en Pa); *b*) la intensidad (en W/m^2); *c*) el nivel de intensidad del sonido (en dB).

16.18. *a*) Determine el nivel de intensidad de sonido en un automóvil cuando la intensidad del sonido es de 0.500 μW/m^2. *b*) Calcule el nivel de intensidad de sonido en el aire cerca de un martillo neumático cuando la amplitud de presión del sonido es de 0.150 Pa y la temperatura es de 20.0 °C.

16.19. El sonido más tenue que un ser humano con oído normal puede detectar a una frecuencia de 400 Hz tiene una amplitud de presión aproximada de 6.0×10^{-5} Pa. Calcule *a*) la intensidad correspondiente; *b*) el nivel de intensidad; *c*) la amplitud de desplazamiento de esta onda sonora a 20 °C.

16.20. La intensidad debida a varias fuentes de sonido independientes es la suma de las intensidades individuales. *a*) Cuando cuatro cuatrillizos lloran simultáneamente, ¿cuántos decibeles es mayor el nivel de intensidad de sonido que cuando llora uno solo? *b*) Para aumentar el nivel de intensidad de sonido, otra vez en el mismo número de decibeles que en *a*), ¿cuántos bebés llorones más se necesitan?

16.21. La boca de un bebé está a 30 cm de la oreja del padre y a 1.50 m de la de la madre. ¿Qué diferencia hay entre los niveles de intensidad de sonido que escuchan ambos?

16.22. El ayuntamiento de Sacramento adoptó hace poco una ley que reduce el nivel permitido de intensidad sonora de los odiados recogedores de hojas, de 95 dB a 70 dB. Con la nueva ley, ¿qué relación hay entre la nueva intensidad permitida y la intensidad que se permitía antes?

16.23. *a*) ¿En qué factor debe aumentarse la intensidad del sonido para aumentar 13.0 dB el nivel de intensidad del sonido? *b*) Explique por qué no necesita conocer la intensidad original del sonido.

Sección 16.4 Ondas sonoras estacionarias y modos normales

16.24. La frecuencia fundamental de un tubo abierto es de 594 Hz. *a*) ¿Qué longitud tiene este tubo? Si se tapa uno de los extremos del tubo, calcule *b*) la longitud de onda y *c*) la frecuencia de la nueva fundamental.

16.25. Se producen ondas sonoras estacionarias en un tubo de 1.20 m de longitud. Para la fundamental y los dos primeros sobretonos, ¿en qué puntos del tubo (midiendo desde el extremo izquierdo) están los nodos de desplazamiento y los nodos de presión, si *a*) el tubo está abierto por ambos extremos, y *b*) el tubo está cerrado en el extremo izquierdo y abierto en el derecho?

16.26. Encuentre la frecuencia fundamental y la frecuencia de los tres primeros sobretonos de un tubo de 45.0 cm de longitud *a*) si está abierto en ambos extremos, y *b*) si está cerrado en un extremo. Use $v = 344$ m/s. *c*) Determine el número del armónico más alto que podrá oír una persona que puede oír frecuencias de 20 a 20,000 Hz, para cada uno de los casos anteriores.

16.27. La voz humana. El tracto vocal humano es un tubo que se extiende unos 17 cm de los labios a los pliegues vocales (también llamados "cuerdas vocales") cerca de la mitad de la garganta. Los pliegues se comportan como la lengüeta de un clarinete; y el tracto vocal, como tubo cerrado. Estime las primeras tres frecuencias de onda estacionaria del tracto vocal. Use $v = 344$ m/s. (Las respuestas sólo son un estimado, ya que las posiciones de los labios y la lengua afectan el movimiento del aire dentro del tracto.)

16.28. Oído humano. El canal auditivo (véase la figura 16.4) está lleno de aire. Un extremo está abierto y el otro está cerrado por el tímpano. El canal auditivo de cierta persona mide 2.40 cm de largo y puede modelarse como un tubo. *a*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental y la longitud de onda del canal auditivo de esta persona? ¿Es audible este sonido? *b*) Determine la frecuencia del armónico más alto *audible* del canal de esta persona. ¿Qué armónico es éste?

16.29. Cierto tubo produce una frecuencia fundamental de 262 Hz en aire. *a*) Si el tubo se llena con helio a la misma temperatura, ¿qué frecuencia fundamental producirá? (La masa molar del aire es de 28.8 g/mol, y la del helio, de 4.00 g/mol.) *b*) ¿Su respuesta al inciso *a*) depende de si el tubo está abierto o cerrado? ¿Por qué?

16.30. Cantando bajo la ducha. Un tubo cerrado por ambos extremos puede tener ondas estacionarias en su interior, pero normalmente no las escuchamos porque sólo una pequeña parte del sonido puede salir. Sin embargo, usted *puede* oírlas si se encuentra *dentro* del tubo, como cuando alguien canta bajo la ducha. *a*) Demuestre que las longitudes de onda de las ondas estacionarias en un tubo de longitud L, cerrado por ambos extremos, son $\lambda_n = 2L/n$ y que las frecuencias están dadas por $f_n = nv/2L = nf_1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ *b*) Considerando un modelo de tubo, determine la frecuencia de la fundamental y de los primeros dos sobretonos para una ducha de 2.50 m de alto. ¿Son audibles esas frecuencias?

Sección 16.5 Resonancia

16.31. Usted sopla al ras de la boca de un tubo de ensayo vacío y produce la onda estacionaria fundamental de la columna de aire de su interior. La rapidez del sonido en aire es de 344 m/s y el tubo actúa como tubo cerrado. *a*) Si la longitud de la columna de aire es de 14.0 cm, ¿qué frecuencia tiene esta onda estacionaria? *b*) Determine la frecuencia de la onda estacionaria fundamental en la columna de aire, si el tubo de ensayo se llena hasta la mitad con agua.

16.32. Un tubo cerrado por un extremo de longitud ajustable se encuentra cerca de un alambre de 85.0 cm y 7.25 g, que está sometido a una tensión de 4110 N. Usted desea ajustar la longitud del tubo de manera que, cuando produzca sonido a su frecuencia fundamental, este sonido haga que el alambre vibre en su segundo *sobretono* con una amplitud muy grande. ¿De qué longitud debe ser el tubo?

Sección 16.6 Interferencia de ondas

16.33. Dos altavoces, A y B (figura 16.40), son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas senoidales en fase. B está 2.00 m a la derecha de A. Considere el punto Q a lo largo de la extensión de la línea que une los altavoces, 1.00 m a la derecha de B. Ambos altavoces emiten ondas sonoras que viajan directamente del altavoz a Q. *a*) Determine la frecuencia más baja con la que habrá interferencia *constructiva* en el punto Q. *b*) Determine la frecuencia más baja con la que habrá interferencia *destructiva* en el punto Q.

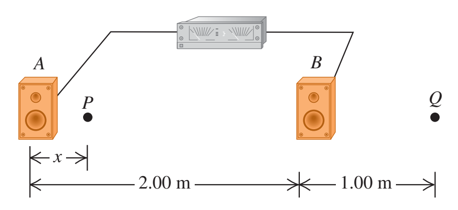


Figura **16.40** Ejercicios 16.33 y 16.34.

16.34. Dos altavoces, A y B (figura 16.40), son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas senoidales en fase. B está 2.00 m a la derecha de A. La frecuencia de las ondas sonoras producidas por los altavoces es de 206 Hz. Considere el punto P entre los altavoces a lo largo de la línea que los une, a una distancia x a la derecha de A. Ambos altavoces emiten ondas sonoras que viajan directamente del altavoz a P. *a*) ¿Con qué valores de x habrá interferencia *destructiva* en P? *b*) ¿Y *constructiva*? *c*) Los efectos de interferencia como los de los incisos *a*) y *b*) casi nunca son un factor al escuchar los equipos estéreo caseros. ¿Por qué no?

16.35. Dos altavoces, A y B, son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas senoidales en fase. B está 12.0 m a la derecha de A. La frecuencia de las ondas emitidas por los altavoces es de 688 Hz. Imagine que está parado entre los altavoces, sobre la línea que los une, y está en un punto de interferencia constructiva. ¿Qué distancia deberá moverse hacia el altavoz B, para estar en un punto de interferencia destructiva?

16.36. Dos altavoces, A y B, son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas senoidales en fase. La frecuencia de las ondas emitidas por los altavoces es de 172 Hz. Imagine que está a 8.00 m de A. ¿Cuánto es lo más cerca que puede estar de B y estar en un punto de interferencia destructiva?

16.37. Dos altavoces, A y B, son alimentados por el mismo amplificador y emiten ondas senoidales en fase. La frecuencia de las ondas emitidas por los altavoces es de 860 Hz. El punto P está a 12.0 m de A y a 13.4 m de B. ¿La interferencia en P es constructiva o destructiva? Justifique su respuesta.

Sección 16.7 Pulsos

16.38. Dos guitarristas intentan tocar la misma nota con longitud de onda de 6.50 cm al mismo tiempo, pero uno de los instrumentos está ligeramente desafinado y, en vez de ello, toca una nota cuya longitud de onda es de 6.52 cm. ¿Cuál es la frecuencia del pulso que estos músicos escuchan cuando tocan juntos?

16.39. Dos tubos de órgano, abiertos por un lado pero cerrados por el otro, miden, cada uno 1.14 m de largo. Uno se alargó por 2.00 cm. Determine la frecuencia del pulso que producen cuando tocan juntos en su frecuencia fundamental.

16.40. Dos cuerdas tensas e idénticas, sometidas a la misma tensión F, producen una nota de la misma frecuencia fundamental f_0. La tensión en una de ellas se incrementa ahora en una cantidad muy pequeña ΔF. *a*) Si se tocan juntas en su fundamental, demuestre que la frecuencia del pulso producida es $f_{pulso} = f_0\,(\Delta F/2F)$. *b*) Dos cuerdas de violín idénticas, cuando están afinadas y estiradas con el mismo grado de tensión, tienen una frecuencia fundamental de 440.0 Hz. Una de las cuerdas se vuelve a afinar aumentando la tensión. Cuando se hace esto, se escuchan 1.5 pulsos por segundo cuando se pulsan ambas cuerdas simultáneamente a la altura de sus centros. ¿En qué porcentaje se modificó la tensión de la cuerda?

Sección 16.8 El efecto Doppler

16.41. En el planeta Arrakis, un ornitoide macho vuela hacia su compañera a 25.0 m/s mientras canta a una frecuencia de 1200 Hz. La hembra estacionaria oye un tono de 1240 Hz. Calcule la rapidez del sonido en la atmósfera de Arrakis.

16.42. En el ejemplo 16.19 (sección 16.8), suponga que la patrulla se aleja de la bodega a 20 m/s. ¿Qué frecuencia escucha el conductor reflejada de la bodega?

16.43. Dos silbatos de tren, A y B, tienen una frecuencia de 392 Hz. A está estacionario y B se mueve a la derecha (alejándose de A) a 35.0 m/s. Un receptor está entre los dos trenes y se mueve a la derecha a 15.0 m/s (figura 16.41). No sopla el viento. Según el receptor, *a*) ¿qué frecuencia tiene A? *b*) ¿Y B? *c*) ¿Qué frecuencia del pulso detecta el receptor?

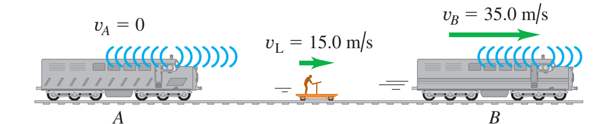


Figura **16.41** Ejercicio 16.43.

16.44. Un tren viaja a 25.0 m/s en aire tranquilo. La frecuencia de la nota emitida por el silbato de la locomotora es de 400 Hz. Calcule la longitud de las ondas sonoras *a*) frente a la locomotora; *b*) detrás de la locomotora. Calcule la frecuencia del sonido que oye un receptor estacionario *c*) frente a la locomotora, y *d*) detrás de la locomotora.

16.45. Al nadar, un pato patalea una vez cada 1.6 s, produciendo ondas superficiales con ese periodo. El pato avanza con rapidez constante en un estanque donde la rapidez de las ondas superficiales es de 0.32 m/s, y las crestas de las olas adelante del pato están espaciadas 0.12 m. *a*) Calcule la rapidez del pato. *b*) ¿Qué tan separadas están las crestas detrás del pato?

16.46. Fuente móvil y receptor móvil. *a*) Una fuente sonora que produce ondas de 1.00 kHz se mueve hacia un receptor estacionario a la mitad de la rapidez del sonido. ¿Qué frecuencia oirá el receptor? *b*) Suponga ahora que la fuente está estacionaria y el receptor se mueve hacia ella a la mitad de la rapidez del sonido. ¿Qué frecuencia oye el receptor? Compare su respuesta con la del inciso *a*) y explique la diferencia con base en principios de la física.

16.47. Una alarma de automóvil emite ondas sonoras con frecuencia de 520 Hz. Usted está en una motocicleta, alejándose del auto. ¿Con qué rapidez se está moviendo si detecta una frecuencia de 490 Hz?

16.48. Un tren viaja a 30.0 m/s en aire tranquilo. La frecuencia de la nota emitida por su silbato es de 262 Hz. ¿Qué frecuencia oye un pasajero de un tren que se mueve en dirección opuesta a 18.0 m/s y *a*) se acerca al primer tren? y *b*) se aleja de él?

16.49. Radar Doppler. Una gran tormenta eléctrica se aproxima hacia una estación meteorológica a 45.0 mi/h (20.1 m/s). Si la estación envía un haz de radar con frecuencia de 200.0 MHz hacia la tormenta, ¿cuál será la diferencia de frecuencia, entre el haz emitido y el haz reflejado en la tormenta que regresa a la estación? ¡Tenga cuidado de utilizar suficientes cifras significativas! (*Sugerencia:* considere que la tormenta refleja la misma frecuencia que la que recibe.)

16.50. Planetas extrasolares (exoplanetas). En un futuro no muy distante, sería posible detectar la presencia de planetas que giran alrededor de otras estrellas, midiendo el efecto Doppler en la luz infrarroja que emiten. Si un planeta gira alrededor de su estrella a 50.00 km/s, mientras emite luz infrarroja cuya frecuencia es de 3.330×10^{14} Hz, ¿qué frecuencia de luz recibiremos de este planeta, cuando se está alejando directamente de nosotros? (*Nota:* la luz infrarroja es luz con longitudes de onda mayores que las de la luz visible.)

16.51. ¿Qué tan rápido (como un porcentaje de la rapidez de la luz) tendría que desplazarse una estrella para que la frecuencia de la luz que recibimos de ella sea un 10.0% mayor, que la frecuencia de la luz que emite? ¿Se estaría alejando de nosotros o se estaría acercando? (Suponga que se está alejando directamente de nosotros, o bien, que se está acercando directamente hacia nosotros.)

*Sección 16.9 Ondas de choque

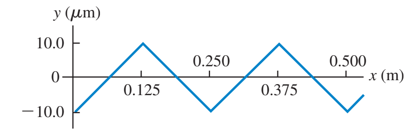
***16.52.** El cono de ondas de choque que genera el transbordador espacial, en un instante durante su reingreso a la atmósfera, forma un ángulo de 58.0° con la dirección de su movimiento. La rapidez del sonido a esa altitud es de 331 m/s. *a*) ¿Cuál es el número Mach del transbordador en ese instante, y *b*) ¿cuál es su rapidez relativa (en m/s y mi/h) a la atmósfera? *c*) ¿Cuál sería su número Mach y el ángulo del cono de las ondas de choque, si volara con la misma rapidez pero a menor altitud, donde la rapidez del sonido es de 344 m/s?

***16.53.** Un jet pasa volando a Mach 1.70 y altitud constante de 950 m. *a*) ¿Qué ángulo α tiene el cono de la onda de choque? *b*) ¿Cuánto tiempo después de pasar el avión directamente arriba oímos el estampido sónico? Desprecie la variación de la rapidez del sonido con la altitud.

Problemas

16.54. *a*) Defienda esta afirmación: "En una onda sonora senoidal, la variación de presión dada por la ecuación (16.4) es máxima donde el desplazamiento dado por la ecuación (16.1) es cero". *b*) Para una onda sonora senoidal dada por la ecuación (16.1) con amplitud $A = 10.0\ \mu$m y longitud de onda $\lambda = 0.250$ m, grafique el desplazamiento y y la fluctuación de presión p en función de x en $t = 0$. Muestre al menos dos longitudes de onda en sus gráficas. *c*) El desplazamiento y en una onda sonora *no* senoidal se muestra en la figura 16.42 como función de x en $t = 0$. Dibuje una gráfica que muestre la fluctuación de presión p en esta onda en función de x en $t = 0$. Esta onda sonora tiene la misma amplitud de 10.0 μm que la onda del inciso *b*). ¿Tiene la misma amplitud de presión? ¿Por qué? *d*) ¿Se cumple necesariamente la afirmación del inciso *a*), si la onda *no* es senoidal? Explique su razonamiento.

Figura 16.42 Problema 16.54.



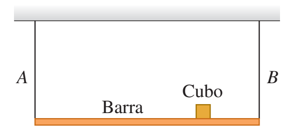
16.55. Una soprano y un bajo están cantando a dueto. Mientras la soprano canta un *la* sostenido a 932 Hz, el bajo canta un *la* sostenido, pero tres octavas más abajo. En esta sala de conciertos, la densidad del aire es de 1.20 kg/m^3 y su módulo de volumen es de 1.42×10^5 Pa. Para que sus notas tengan el mismo nivel de intensidad de sonido, ¿cuál debe ser *a*) la razón entre las amplitudes de presión del bajo y de la soprano, y *b*) la razón entre las amplitudes de desplazamiento del bajo y de la soprano? *c*) ¿Qué amplitud de desplazamiento (en m y nm) produce la soprano para cantar su *la* sostenido a 72.0 dB?

16.56. El sonido de una trompeta radia uniformemente en todas direcciones en aire a 20 °C. A una distancia de 5.00 m de la trompeta, el nivel de intensidad de sonido es de 52.0 dB. La frecuencia es de 587 Hz. *a*) Determine la amplitud de presión a esta distancia. *b*) Calcule la amplitud de desplazamiento. *c*) ¿A qué distancia el nivel de intensidad del sonido es de 30.0 dB?

16.57. Un termómetro. Suponga que un tubo con longitud L contiene un gas y que usted desea tomar la temperatura de ese gas, pero sin introducirse en el tubo. Un extremo está cerrado y el otro está abierto, y un pequeño altavoz que produce sonido de frecuencia variable se encuentra en el extremo abierto. Usted aumenta gradualmente la frecuencia del altavoz hasta que el sonido del tubo se vuelve muy intenso. Con un aumento posterior de la frecuencia, la intensidad disminuye, pero el sonido vuelve a ser muy intenso otra vez a frecuencias todavía más altas. Sea f_0 la frecuencia más baja a la que el sonido es muy intenso. *a*) Demuestre que la temperatura absoluta de este gas está dada por $T = 16ML^2f_0^2/\gamma R$, donde M es la masa molar del gas, γ es la razón de sus capacidades caloríficas, y R es la constante de gas ideal. *b*) ¿A qué frecuencia por arriba de f_0 el sonido del tubo alcanzará su volumen máximo? *c*) ¿Cómo podría determinarse la rapidez del sonido en este tubo a temperatura T?

16.58. Una barra uniforme de 165 N está sostenida horizontalmente por dos alambres idénticos A y B (figura 16.43). Un pequeño cubo de plomo de 185 N está colocado a $\frac{3}{4}$ del camino de A a B. Cada uno de los alambres mide 75.0 cm de largo y tiene una masa de 5.50 g. Si ambos son pulsados simultáneamente en el centro, ¿cuál es la frecuencia de los pulsos que se producirán cuando cada uno de lo alambres vibre en su frecuencia fundamental?

Figura 16.43 Problema 16.58.



16.59. Una persona toca una flauta pequeña de 10.75 cm de longitud, abierta en un extremo y cerrada en el otro, cerca de una cuerda tensa que tiene una frecuencia fundamental de 600.0 Hz. Tomando como rapidez del sonido 344.0 m/s, ¿con cuáles armónicos de la flauta resonará la cuerda? En cada caso, ¿cuál armónico de la cuerda está en resonancia?

16.60. Un nuevo instrumento musical. Imagine que diseñó un nuevo instrumento musical de construcción muy sencilla. Su diseño consiste en un tubo metálico de longitud L y diámetro $L/10$. Ha estirado una cuerda con masa por unidad de longitud μ a lo ancho del extremo abierto del tubo. El otro extremo está cerrado. Para producir el efecto musical que le interesa, quiere que la frecuencia de la onda estacionaria de tercer armónico en la cuerda sea igual a la frecuencia fundamental para las ondas sonoras en la columna de aire dentro del tubo. La rapidez de las ondas sonoras en esa columna es v_S. *a*) ¿Qué tensión debe haber en la cuerda para producir el efecto deseado? *b*) ¿Qué sucede con el sonido producido por el instrumento, si la tensión se aumenta al doble del valor calculado en el inciso *a*)? *c*) Para la tensión calculada en el inciso *a*), ¿qué otros armónicos de la cuerda, si acaso, están en resonancia con ondas estacionarias en la columna de aire?

16.61. Un tubo de órgano tiene dos armónicos sucesivos con frecuencias de 1372 y 1764 Hz. *a*) ¿El tubo está abierto o cerrado? Explique su respuesta. *b*) ¿De qué armónicos se trata? *c*) ¿Qué longitud tiene el tubo?

16.62. Ondas longitudinales estacionarias en un sólido. Es posible producir ondas longitudinales estacionarias en una varilla sólida sosteniéndola en algún punto entre los dedos de una mano y acariciándola con la otra mano. La varilla oscilará con antinodos en ambos extremos. *a*) ¿Por qué los extremos son antinodos en vez de nodos? *b*) Se puede obtener la frecuencia fundamental acariciando la varilla mientras se

sostiene por el centro. Explique por qué éste es el *único* lugar donde puede sostenerse la varilla para obtener la fundamental. *c*) Calcule la frecuencia fundamental de una varilla de acero con 1.50 m de longitud (véase la tabla 16.1). *d*) ¿Cuál es la siguiente frecuencia de onda estacionaria que puede tener esta varilla? ¿Dónde deberá sostenerse la varilla para excitar una onda estacionaria de esta frecuencia?

16.63. *a*) Determine las primeras tres frecuencias de modo normal para un tubo de longitud L cerrado en *ambos* extremos. Explique su razonamiento. *b*) Use los resultados del inciso *a*) para estimar las frecuencias de modo normal de una ducha. Explique la relación entre estas frecuencias y la observación de que al cantar en la ducha sonamos mejor, sobre todo si cantamos con ciertas frecuencias.

16.64. Un tipo de acero tiene densidad de 7.8×10^3 kg/m^3 y resistencia a la rotura de 7.0×10^8 N/m^2. Se fabricará una cuerda cilíndrica para guitarra con 4.00 g de este acero. *a*) Calcule la longitud y el radio de la cuerda más larga y delgada que pueda someterse a una tensión de 900 N sin romperse. *b*) ¿Qué frecuencia fundamental máxima podría tener esta cuerda?

16.65. Un tubo largo contiene aire a una presión de 1.00 atm y temperatura de 77.0 °C. El tubo está abierto en un extremo y cerrado en el otro por un pistón móvil. Un diapasón cerca del extremo abierto está vibrando con una frecuencia de 500 Hz. Se produce resonancia cuando el pistón está a distancias de 18.0, 55.5 y 93.0 cm del extremo abierto. *a*) Con estos datos, determine la rapidez del sonido en aire a 77.0 ºC. *b*) Con el resultado del inciso *a*), calcule el valor de γ. *c*) Estos datos muestran que hay un antinodo de desplazamiento un poco afuera del extremo abierto del tubo. ¿Qué tan afuera está?

16.66. Oído humano. El canal auditivo del oído humano (figura 16.4) se extiende unos 2.5 cm del oído exterior al tímpano. *a*) Explique por qué el oído humano es especialmente sensible a sonidos con frecuencias cercanas a 3500 Hz. Use $v = 344$m/s. *b*) ¿Esperaría que el oído fuera especialmente sensible a frecuencias cercanas a 7000 Hz? ¿A 10,500 Hz? ¿Por qué?

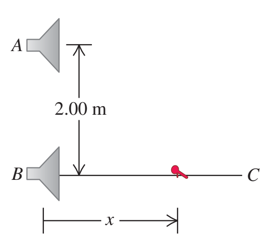
16.67. Un alambre de platino (densidad de 21.4 g/cm^3) tiene 225 μm de diámetro y 0.450 m de longitud. Un extremo está sujeto al techo y el otro está atado a una masa de 420 g, de modo que el alambre cuelga verticalmente en tensión. Si un diapasón que vibra con cierta frecuencia exacta se acerca al alambre, éste también comienza a vibrar. *a*) ¿Qué frecuencias del diapasón harán que esto suceda? Puede suponerse que el extremo inferior del alambre (atado a la masa) está prácticamente estacionario y que la tensión en el alambre es constante en toda su longitud. *b*) Justifique los supuestos hechos en el inciso *a*).

16.68. La frecuencia de la nota fa es de 349 Hz. *a*) Si un tubo de órgano está abierto en un extremo y cerrado en el otro, ¿qué longitud deberá tener para que su modo fundamental produzca esta nota a 20.0 °C? *b*) ¿Con qué temperatura del aire será la frecuencia de 370 Hz, correspondiente a un aumento de tono de fa a fa sostenido? (Desprecie el cambio de longitud del tubo debido al cambio de temperatura.)

16.69. Una onda estacionaria con frecuencia de 1100 Hz en una columna de metano (CH_4) a 20.0 °C produce nodos separados por 0.200 m. ¿Qué valor tiene γ para el metano? (La masa molar del metano es de 16.0 g/mol.)

16.70. Dos altavoces idénticos están situados en los puntos A y B, separados 2.00 m. Los altavoces son alimentados por el mismo amplificador y producen ondas sonoras con una frecuencia de 784 Hz. La rapidez del sonido en aire es de 344 m/s. Un micrófono pequeño se aleja del punto B sobre una línea perpendicular a la línea que une a A y B (línea BC en la figura 16.44). *a*) ¿A qué distancias de B habrá interferencia *destructiva*? *b*) ¿Y *constructiva*? *c*) Si la frecuencia es lo bastante baja, no habrá posiciones sobre la línea BC en las que haya interferencia destructiva. ¿Qué tan baja deberá ser la frecuencia para que esto suceda?

Figura 16.44 Problema 16.70.



16.71. Ópera wagneriana. Un hombre se casa con una gran soprano wagneriana; no obstante, para su desgracia después descubre que no tolera la ópera wagneriana. El desdichado marido decide que, para salvar sus tímpanos, deberá hacer que su cantarina esposa calle para siempre. Su plan consiste en atarla al frente de su automóvil y lanzarlo a gran velocidad contra un muro de ladrillo. Sin embargo, la soprano no es tonta, y además estudió física cuando estudiaba en el conservatorio. Ella se da cuenta de que el muro tiene una frecuencia resonante de 600 Hz, lo que implica que, si una onda sonora continua de esa frecuencia incide en el muro, éste se derrumbará, y ella podrá seguir dedicándose al canto. El auto se dirige hacia el muro con rapidez de 30 m/s. *a*) ¿A qué frecuencia deberá cantar la soprano para que la pared se derrumbe? *b*) ¿Qué frecuencia oirá la soprano reflejada de la pared justo antes de que se desmorone?

16.72. Un murciélago vuela hacia una pared, emitiendo un sonido constante cuya frecuencia es de 2.00 kHz. El murciélago escucha su propio sonido más el sonido reflejado por la pared. ¿Con qué rapidez deberá volar para escuchar una frecuencia del pulso de 10.0 Hz?

16.73. Una esfera pequeña de radio R se pone a pulsar de modo que su radio varía en movimiento armónico simple entre un mínimo de $R - \Delta R$ y un máximo de $R + \Delta R$ con una frecuencia f. Esto produce ondas sonoras en el aire circundante, cuya densidad es ρ y cuyo módulo de volumen es B. *a*) Calcule la intensidad de las ondas sonoras en la superficie de la esfera. (La amplitud de oscilación de la esfera es la misma que tiene el aire en su superficie.) *b*) Calcule la potencia acústica total radiada por la esfera. *c*) A una distancia $d \gg R$ del centro de la esfera, calcule la amplitud, la amplitud de presión y la intensidad de la onda sonora.

16.74. Ultrasonido en medicina. Una onda sonora de 2.00 MHz viaja por el abdomen de una mujer embarazada y es reflejada por la pared cardiaca del feto, que se mueve hacia el receptor de sonido al latir el corazón. El sonido reflejado se mezcla con el transmitido, detectándose 85 pulsos por segundo. La rapidez del sonido en el tejido corporal es de 1500 m/s. Calcule la rapidez de la pared cardiaca fetal, en el instante en que se hace la medición.

16.75. La fuente de sonido del sistema de sonar de un barco opera a una frecuencia de 22.0 kHz. La rapidez del sonido en agua (que suponemos está a una temperatura uniforme de 20 °C) es de 1482 m/s. *a*) Calcule la longitud de las ondas emitidas por la fuente. *b*) Calcule la diferencia en frecuencia entre las ondas radiadas directamente y las reflejadas de una ballena que viaja directamente hacia el barco a 4.95 m/s. El barco está en reposo en el agua.

16.76. Una sirena policiaca con frecuencia f_{sirena} está sujeta a una plataforma vibrante. La plataforma y la sirena oscilan verticalmente en movimiento armónico simple, con amplitud A_p y frecuencia f_p. *a*) Calcule las frecuencias máximas y mínimas del sonido que usted escucharía en una posición directamente arriba de la sirena. *b*) ¿En qué punto del movimiento de la plataforma se escucha la máxima frecuencia? ¿Y la mínima? Explique su respuesta.

16.77. Los murciélagos de herradura (género *Rhinolophus*) emiten sonidos por las fosas nasales y luego escuchan la frecuencia del soni-

do reflejado de su presa para determinar la rapidez de ésta. (La "herradura" que da al animal su nombre es una depresión alrededor de las fosas nasales que actúa como espejo enfocador y permite al animal emitir sonido en un haz angosto, como una linterna.) Un *Rhinolophus* que vuela con una rapidez $v_{\text{murciélago}}$ emite sonidos de frecuencia $f_{\text{murciélago}}$; la frecuencia que oye reflejada de un insecto que vuela hacia él tiene un valor más alto f_{refl}. *a*) Demuestre que la rapidez del insecto es

$$v_{\text{insecto}} = v\left[\frac{f_{\text{refl}}(v - v_{\text{bat}}) - f_{\text{bat}}(v + v_{\text{bat}})}{f_{\text{refl}}(v - v_{\text{bat}}) + f_{\text{bat}}(v + v_{\text{bat}})}\right]$$

donde v es la rapidez del sonido. *b*) Si $f_{\text{murciélago}} = 80.7$ kHz, $f_{\text{refl}} = 83.5$ kHz y $v_{\text{murciélago}} = 3.9$ m/s, calcule la rapidez del insecto.

16.78. *a*) Demuestre que la ecuación (16.30) puede escribirse así:

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{v}{c}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1/2}$$

b) Use el teorema binomial para demostrar que, si $v \ll c$, esto es aproximadamente igual a

$$f_R = f_S\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

c) Un avión de reconocimiento sin piloto emite una señal de radio cuya frecuencia es de 243 MHz. Está volando directamente hacia un ingeniero de pruebas que está en tierra. El ingeniero detecta pulsos entre la señal recibida y una señal local que también tiene una frecuencia de 243 MHz. La frecuencia del pulso es de 46.0 Hz. Calcule la rapidez del avión. (Las ondas de radio viajan a la velocidad de la luz, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s.)

16.79. ¡Supernova! La nube de gas llamada Nebulosa del Cangrejo puede verse incluso con un telescopio pequeño; es lo que queda de una *supernova*, es decir, una explosión cataclísmica de una estrella. La explosión se vio en la Tierra el 4 de julio de 1054 D.C. Las serpentinas brillan con el color rojo característico de hidrógeno gaseoso caliente. En un laboratorio en la Tierra, el hidrógeno calentado produce luz roja con frecuencia de 4.568×10^{14} Hz; la luz roja recibida de las extensiones de la nebulosa del Cangrejo que apuntan hacia la Tierra tienen una frecuencia de 4.586×10^{14} Hz. *a*) Estime la rapidez con que estos bordes exteriores de la Nebulosa se están expandiendo. Suponga que la rapidez del centro de la nebulosa relativa a la Tierra es despreciable. (Puede usar las fórmulas deducidas en el problema 16.78. La rapidez de la luz es de 3.00×10^8 m/s.) *b*) Suponiendo que la rapidez de expansión ha sido constante desde la explosión de la supernova, estime el diámetro de la Nebulosa en metros y en años luz. *c*) El diámetro angular de la Nebulosa del Cangrejo vista desde la Tierra es de unos 5 minutos de arco (1 minuto de arco = $\frac{1}{60}$ de grado). Estime la distancia en años luz a la Nebulosa, y estime el año en que tuvo lugar la explosión.

16.80. Pronóstico del clima. Una instalación de radar empleada para vigilar tormentas emite ondas de radio a 2800 MHz. Una línea de tormentas se acerca a la instalación a 42.0 km/h. *a*) En el marco de referencia de las tormentas, ¿la frecuencia de las ondas de radio es mayor o menor que 2800 MHz? ¿Por qué? ¿Qué tanto difiere la frecuencia de 2800 MHz? (Puede usar las fórmulas deducidas en el problema 16.78. Las ondas de radio viajan con la rapidez de la luz, $c = 3 \times 10^8$ m/s.) *b*) Las gotas de agua de la tormenta reflejan las ondas de radio, y las ondas reflejadas son detectadas por la instalación. La frecuencia de estas ondas reflejadas, medida por el receptor en la instalación, ¿es mayor o menor que 2800 Hz? ¿Por qué? ¿Qué tanto difiere la frecuencia reflejada de 2800 MHz?

16.81. Una mujer está parada frente a una pared grande y lisa y sostiene un diapasón vibrante con frecuencia f_0 entre ella y la pared. *a*) Ahora ella corre hacia la pared con rapidez v_W y detecta pulsos debidos a la interferencia entre las ondas sonoras que le llegan directamente del diapasón y las que le llegan después de reflejarse en la pared. ¿Cuántos pulsos por segundo detecta ella? (*Nota:* si la frecuencia del pulsón es demasiado grande, la mujer quizá tendrá que usar otra instrumentación distinta de sus oídos, para detectar y contar los pulsos.) *b*) Si ahora la mujer corre alejándose de la pared sosteniendo el diapasón a su espalda, de modo que esté entre ella y la pared, ¿cuántos pulsos por segundo detectará?

***16.82.** Imagine que, un día despejado, ve pasar un jet. Con base en el tamaño aparente del avión, usted determina que está volando a una altitud constante h. Escucha el estampido sónico un tiempo T después de que el avión pasó directamente arriba. Demuestre que, si la rapidez del sonido v es la misma a cualquier altitud, la rapidez del avión es

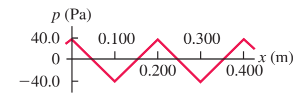
$$v_S = \frac{hv}{\sqrt{h^2 - v^2T^2}}$$

(*Sugerencia:* le serán útiles las identidades trigonométricas.)

Problemas de desafío

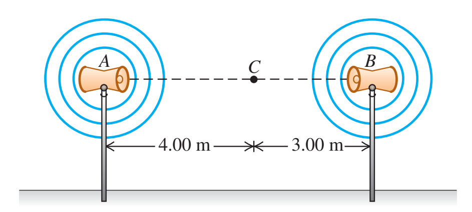
16.83. La figura 16.45 muestra la fluctuación de presión p de una onda sonora no senoidal en función de x para $t = 0$. La onda viaja en la dirección $+x$. *a*) Dibuje una gráfica que muestre la fluctuación de presión p como función de t para $x = 0$. Muestre al menos dos ciclos de oscilación. *b*) Dibuje una gráfica que muestre el desplazamiento y en esta onda en función de x en $t = 0$. En $x = 0$, el desplazamiento en $t = 0$ es cero. Muestre al menos dos longitudes de onda. *c*) Dibuje una gráfica que muestre el desplazamiento y en función de t para $x = 0$. Muestre al menos dos ciclos de oscilación. *d*) Calcule la velocidad y aceleración máximas de un elemento del aire por el que viaja esta onda sonora. *e*) Describa cómo debe moverse el cono de un altavoz en función de t para producir la onda sonora de este problema.

Figura 16.45 Problema de desafío 16.83.



16.84. Dos altavoces, A y B, radian sonido uniformemente en todas direcciones en aire a 20 °C. La salida de potencia acústica de A es de 8.00×10^{-4} W, y la de B, 6.00×10^{-5} W. Ambos altavoces vibran en fase a una frecuencia de 172 Hz. *a*) Determine la diferencia de fase de las dos señales en un punto C sobre la línea que une A a B, a 3.00 m de B y 4.00 m de A (figura 16.46). *b*) Determine la intensidad y el nivel de intensidad de sonido en C debidos al altavoz .A si B se apaga, y haga lo mismo para el altavoz B si A se apaga. *c*) Con ambos altavoces encendidos, determine la intensidad y el nivel de intensidad de sonido en C.

Figura 16.46 Problema de desafío 16.84.



17 TEMPERATURA Y CALOR

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- El significado de equilibrio térmico y lo que realmente miden los termómetros.
- Cómo funcionan los diferentes tipos de termómetro.
- La física que hay detrás de la escala de temperatura absoluta, o Kelvin.
- Cómo cambian las dimensiones de un objeto, como resultado del cambio de temperatura.
- El significado de calor, y cómo difiere del de la temperatura.
- Cómo efectuar cálculos que incluyan flujo de calor, cambios de temperatura y cambios de fase.
- Cómo se transfiere calor mediante conducción, convección y radiación.



? En una fábrica de acero, el hierro fundido se calienta a 1500° Celsius para eliminar impurezas. ¿Es correcto decir que el hierro fundido contiene calor?

Tanto en un sofocante día de verano como en una helada noche invernal, nuestro organismo necesita mantenerse a una temperatura casi constante. El organismo cuenta con mecanismos eficaces para controlar la temperatura, aunque a veces necesita ayuda. En un día caluroso, usamos menos ropa para mejorar la transferencia de calor del cuerpo al aire y el enfriamiento por evaporación del sudor. Tal vez tomemos bebidas frías, o con hielo, y nos sentemos cerca de un ventilador o en una habitación con aire acondicionado. En un día frío, usamos ropa más gruesa o nos quedamos en interiores donde hay más calor. Si salimos de casa, nos mantenemos activos y bebemos líquidos calientes. Los conceptos de este capítulo nos ayudarán a entender la física básica del calentamiento y el enfriamiento.

Es común usar indistintamente los términos *temperatura* y *calor* en el habla cotidiana. En física, no obstante, los dos términos tienen significado muy distinto. En este capítulo, definiremos la temperatura en términos de su medición y veremos cómo los cambios de temperatura afectan las dimensiones de los objetos. Estudiaremos cómo el calor se refiere a la transferencia de energía causada por las diferencias de temperatura, y aprenderemos a calcular y controlar tales transferencias de energía.

En este capítulo, nos ocuparemos de los conceptos de temperatura y calor, en relación con los objetos *macroscópicos* como cilindros de gas, cubitos de hielo y el cuerpo humano. En el capítulo 18 veremos estos mismos conceptos desde una perspectiva *microscópica*, en términos del comportamiento de los átomos y las moléculas individuales. Estos dos capítulos establecen las bases para el tema de la **termodinámica**, que es el estudio de las transformaciones de energía donde intervienen calor, trabajo mecánico y otros aspectos de la energía, así como la relación entre estas transformaciones y las propiedades de la materia. La termodinámica es una parte fundamental e indispensable de la física, la química y las ciencias biológicas, sus aplicaciones aparecen en objetos como motores de combustión, refrigeradores, procesos bioquímicos y la estructura de las estrellas. Exploraremos las ideas clave de la termodinámica en los capítulos 19 y 20.

17.1 Temperatura y equilibrio térmico

El concepto de **temperatura** se origina en las ideas cualitativas de “caliente” y “frío” basadas en nuestro sentido del tacto. Un cuerpo que se siente caliente suele tener una temperatura más alta, que un cuerpo similar que se siente frío. Esto es un tanto vago y los sentidos pueden engañarse. Sin embargo, muchas propiedades de la materia que podemos *medir* dependen de la temperatura. La longitud de una barra de metal, la presión de vapor en una caldera, la capacidad de un alambre para conducir corriente eléctrica y el color de un objeto brillante muy caliente: todo esto depende de la temperatura.

La temperatura también se relaciona con la energía cinética de las moléculas de un material. En general, esta relación es muy compleja, por lo que no es un buen punto de partida para *definir* la temperatura. En el capítulo 18 examinaremos la relación entre la temperatura y la energía del movimiento molecular para un gas ideal. No obstante, es importante entender que la temperatura y el calor pueden definirse independientemente de cualquier imagen molecular detallada. En esta sección, desarrollaremos una definición *macroscópica* de la temperatura.

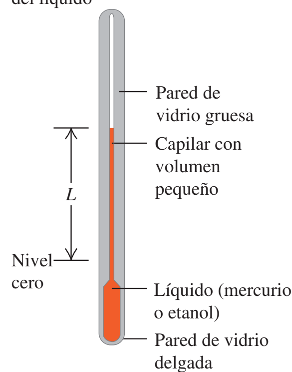
Para usar la temperatura como medida de calidez o de frialdad, necesitamos construir una escala de temperatura. Para ello, podemos usar cualquier propiedad medible de un sistema que varíe con su “calidez” o “frialdad”. La figura 17.1a muestra un sistema común para medir la temperatura. Cuando el sistema se calienta, el líquido colorido (usualmente mercurio o etanol) se expande y sube por el tubo, y el valor de L aumenta. Otro sistema sencillo es una cantidad de gas en un recipiente de volumen constante (figura 17.1b). La presión p medida por el manómetro aumenta o disminuye, al calentarse o enfriarse el gas. Un tercer ejemplo es la resistencia eléctrica R de un alambre conductor, que también varía al calentarse o enfriarse el alambre. Todas estas propiedades nos dan un número (L, p, R) que varía con la calidez y la frialdad, así que pueden usarse para hacer un **termómetro**.

Para medir la temperatura de un cuerpo, colocamos el termómetro en contacto con él. Si queremos conocer la temperatura de una taza con café, introducimos el termómetro en él; al interactuar los dos, el termómetro se calienta y el café se enfría un poco. Una vez que el termómetro se estabiliza, leemos la temperatura. El sistema está en una condición de *equilibrio*, en la cual la interacción entre el termómetro y el café ya no causa un cambio en el sistema. Llamamos **equilibrio térmico** a dicho estado.

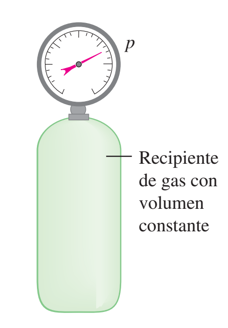
Si dos sistemas están separados por un material **aislante**, como madera, espuma de plástico o fibra de vidrio, se afectan mutuamente con más lentitud. Las hieleras portátiles se fabrican con materiales aislantes para retardar el calentamiento del hielo y de la comida fría en su interior, que tratan de llegar al equilibrio térmico con el aire veraniego. Un *aislante ideal* es un material que no permite la interacción entre los dos sistemas; evita que alcancen el equilibrio térmico si no estaban en él inicialmente. Los aislantes ideales son sólo eso: una idealización; los aislantes reales, como los de las hieleras, no son ideales, así que finalmente su contenido se calentará.

17.1 Dos dispositivos para medir la temperatura.

a) Los cambios de temperatura hacen que cambie el volumen del líquido



b) Los cambios de temperatura hacen que cambie la presión del gas



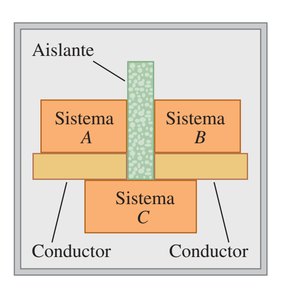
Ley cero de la termodinámica

Podemos descubrir una propiedad importante del equilibrio térmico considerando tres sistemas, A, B y C, que inicialmente no están en equilibrio térmico (figura 17.2). Rodeamos los sistemas con una caja aislante ideal para que sólo puedan interactuar entre sí. Separamos A y B con una pared aislante ideal (la barra verde en la figura 17.2a); pero dejamos que C interactúe tanto con A como con B. Esta interacción se indica en la figura con una barra amarilla que representa un **conductor** térmico, es decir, un material que *permite* la interacción térmica. Esperamos hasta que se establece el equilibrio térmico; entonces, A y B están en equilibrio térmico con C pero, ¿están en equilibrio térmico *entre sí*?

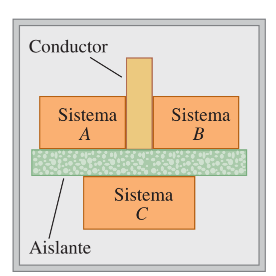
Para averiguarlo, separamos el sistema C de los sistemas A y B con una pared aislante ideal (figura 17.2b) y sustituimos la pared aislante entre A y B por una *conductora*

17.2 Ley cero de la termodinámica.

a) Si los sistemas A y B están cada uno en equilibrio térmico con el sistema C …



b) … los sistemas A y B están en equilibrio térmico entre sí.



que permite que A y B interactúen. ¿Qué sucede? Los experimentos indican que *nada* sucede; no hay cambios adicionales en A ni en B. Concluimos que

Si inicialmente C está en equilibrio térmico con A y con B, entonces A y B también están en equilibrio térmico entre sí. Este resultado se llama ley cero de la termodinámica.

(La importancia de esta ley se reconoció sólo después de nombrarse la primera, segunda y tercera leyes de la termodinámica. Dado que es fundamental para todas ellas, el nombre "cero" pareció adecuado.)

Suponga ahora que el sistema C es un termómetro, como el sistema de tubo y líquido de la figura 17.1a. En la figura 17.2a, el termómetro C está en contacto con A y con B. Cuando se encuentran en equilibrio térmico, la lectura del termómetro se estabiliza, el termómetro mide la temperatura tanto de A como de B; por lo tanto, ambos tienen la *misma* temperatura. Los experimentos indican que el equilibrio térmico no se afecta si se agregan o quitan aislantes, así que la lectura de C no cambiaría si sólo estuviera en contacto con A o sólo con B. Concluimos que

Dos sistemas están en equilibrio térmico si y sólo si tienen la misma temperatura.

En esto radica la utilidad de los termómetros; un termómetro realmente mide *su propia* temperatura, pero cuando está en equilibrio térmico con otro cuerpo, las temperaturas deben ser iguales. Si difieren las temperaturas de dos sistemas, *no pueden* estar en equilibrio térmico.

Evalúe su comprensión de la sección 17.1 Si se introduce un termómetro en una olla de agua caliente y se registra la lectura de aquél, ¿qué temperatura se registrará? i) la temperatura del agua; ii) la temperatura del termómetro; iii) un promedio igual de las temperaturas del agua y el termómetro; iv) un promedio ponderado de las temperaturas del agua y del termómetro, con mayor énfasis en la temperatura del agua; v) un promedio ponderado del agua y del termómetro, con mayor énfasis en la temperatura del termómetro.

17.2 Termómetros y escalas de temperatura

Para que el dispositivo de líquido en un tubo de la figura 17.1a sea un termómetro útil, necesitamos marcar una escala numerada en la pared del tubo. Esos números son arbitrarios, e históricamente se han usado muchos esquemas diferentes. Suponga que marcamos con "0" el nivel del líquido del termómetro a la temperatura de congelación del agua pura, y con "100" el nivel a la temperatura de ebullición, y luego dividimos la distancia entre ambos puntos en cien intervalos iguales llamados *grados*. El resultado es la **escala de temperatura Celsius** (antes llamada *centígrada*). La tempe-

ratura en la escala Celsius para un estado más frío que el agua al momento de congelarse es un número negativo. La escala Celsius se usa, tanto en la vida cotidiana como en la ciencia y la industria, en casi todo el mundo.

Otro tipo de termómetro común usa *una tira bimetálica*, que se fabrica pegando tiras de dos metales distintos (figura 17.3a). Al aumentar la temperatura de la tira compuesta, un metal se expande más que el otro y la tira se dobla. La tira usualmente se moldea en espiral, con el extremo exterior anclado a la caja y el interior unido a un puntero (figura 17.3c). El puntero gira en respuesta a cambios de temperatura.

En un *termómetro de resistencia*, se mide el cambio en la resistencia eléctrica de una bobina de alambre fino, un cilindro de carbono o un cristal de germanio. Puesto que la resistencia puede medirse con gran precisión, los termómetros de resistencia suelen ser más precisos que los de otro tipo.

Algunos termómetros detectan la cantidad de radiación infrarroja emitida por un objeto. (En la sección 17.7 veremos que *todos* los objetos emiten radiación electromagnética, incluyendo la infrarroja, lo cual es consecuencia de su temperatura. Un ejemplo moderno es un *termómetro para la arteria temporal* (figura 17.4). Una enfermera lo coloca sobre la frente de un paciente cerca de la arteria temporal, y un sensor infrarrojo en el termómetro mide la radiación desde la piel. Las pruebas demuestran que este dispositivo brinda valores más precisos de la temperatura corporal que los termómetros orales o de oído.

En la **escala de temperatura Fahrenheit**, aún usada en la vida cotidiana en Estados Unidos, la temperatura de congelación del agua es de 32 °F (32 grados Fahrenheit) y la de ebullición es de 212 °F, ambas a presión atmosférica estándar. Hay 180 grados entre la congelación y la ebullición, en vez de 100 como en la escala Celsius, así que 1 °F representa un cambio de temperatura sólo $\frac{100}{180}$, o $\frac{5}{9}$ de 1 °C.

Para convertir temperaturas de Celsius a Fahrenheit, observamos que una temperatura Celsius T_C es el número de grados Celsius arriba de la temperatura de congelación del agua; el número de grados Fahrenheit arriba de dicha temperatura es $\frac{9}{5}$ de esa cantidad, pero la temperatura de congelación del agua en la escala Fahrenheit ocurre a 32 °F, así que, para obtener la temperatura Fahrenheit T_F, multiplicamos el valor Celsius por $\frac{9}{5}$ y le sumamos 32°. Con símbolos,

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32° \qquad (17.1)$$

Para convertir de Fahrenheit a Celsius, despejamos T_C de esta ecuación:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) \qquad (17.2)$$

Es decir, restamos 32° para obtener el número de grados Fahrenheit arriba de la temperatura de congelación y luego multiplicamos por $\frac{5}{9}$ para obtener el número de grados Celsius, esto es, la temperatura Celsius.

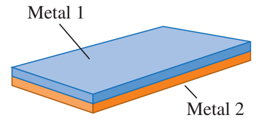
No recomendamos memorizar las ecuaciones (17.1) y (17.2). En vez de ello, trate de entender el razonamiento que condujo a ellas para deducirlas cuando las necesite, verificando su razonamiento con la relación 100 °C = 212 °F.

Conviene distinguir entre una temperatura real y un *intervalo* de temperatura (una diferencia o cambio de temperatura). Una temperatura real de 20° se escribe 20 °C (veinte grados Celsius), y un *intervalo* de temperatura de 10° se escribe 10 C° (diez grados Celsius). Un vaso de agua que se calienta de 20 °C a 30 °C tiene un cambio de temperatura de 10 C°.

Evalúe su comprensión de la figura 17.2 ¿Cuáles de los siguientes tipos de termómetro tienen que estar en equilibrio térmico con el objeto que se mide, con la finalidad de dar lecturas exactas? i) una tira bimetálica; ii) un termómetro de resistencia; iii) un termómetro para la arteria temporal; iv) tanto i) como ii); todos: i), ii) y iii).

17.3 Uso de una tira bimetálica como termómetro.

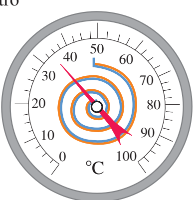
a) Una tira bimetálica



b) La tira se dobla al aumentar su temperatura



c) Una tira bimetálica usada en un termómetro



17.4 El termómetro para arteria temporal mide la radiación infrarroja de la piel que cubre una de las arterias más importantes de la cabeza. Aunque la tapa del termómetro toca la piel, el detector infrarrojo dentro de ésta no lo hace.



17.3 Termómetros de gas y la escala Kelvin

Cuando calibramos dos termómetros, como un sistema de líquido en tubo o un termómetro de resistencia, de modo que coincidan en 0 °C y 100 °C, podrían no coincidir exactamente a temperaturas intermedias. Cualquier escala de temperatura definida de este modo siempre depende un tanto de las propiedades específicas del material empleado. Idealmente, nos gustaría definir una escala de temperatura que *no* dependa de las propiedades de un material específico. Para establecer una escala en verdad independiente del material, necesitamos desarrollar algunos principios de termodinámica. Volveremos a este problema fundamental en el capítulo 20. Aquí veremos un termómetro que se acerca al ideal, el *termómetro de gas*.

El principio de un termómetro de gas muestra que la presión de un gas a volumen constante aumenta con la temperatura. Una cantidad de gas se coloca en un recipiente de volumen constante (figura 17.5a) y se mide su presión con uno de los dispositivos descritos en la sección 14.2. Para calibrar dicho termómetro, medimos la presión a dos temperaturas, digamos 0 °C y 100 °C, graficamos esos puntos y trazamos una recta entre ellos. Así, podemos leer de la gráfica la temperatura correspondiente a cualquier otra presión. La figura 17.5b muestra los resultados de tres experimentos de este tipo, utilizando en cada caso distintas clase y cantidad de gas.

Si extrapolamos la línea, veremos que hay una temperatura hipotética, −273.15 °C, en la que la presión absoluta del gas sería cero. Podríamos esperar que tal temperatura fuera diferente para diferentes gases, pero resulta ser la *misma* para muchos gases distintos (al menos cuando el límite de densidad del gas es muy bajo). Actualmente no podemos observar esta condición de ausencia de presión; los gases se licuan y solidifican a temperaturas muy bajas, y la presión deja de ser proporcional a la temperatura.

Usamos esta temperatura extrapolada a presión cero como base para una escala de temperatura, con su cero en esta temperatura: la **escala de temperatura Kelvin**, así llamada por el físico inglés Lord Kelvin (1824-1907). Las unidades tienen el mismo tamaño que las de la escala Celsius, pero el cero se desplaza de modo que 0 K = −273.15 °C y 273.15 K = 0 °C; es decir,

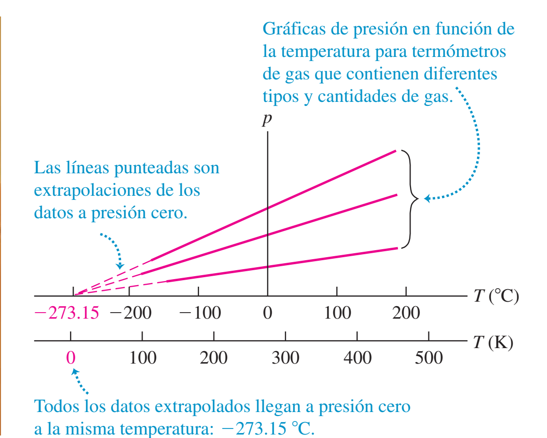
$$T_K = T_C + 273.15 \tag{17.3}$$

Esta escala se muestra en la figura 17.5b. Una temperatura ambiente común, 20 °C (= 68 °F), es 20 + 273.15 o aproximadamente 293 K.

17.5 a) Uso del termómetro de gas con volumen constante para medir temperatura. b) Cuanto mayor sea la cantidad de gas en el termómetro, más alta será la gráfica de presión p contra temperatura T.

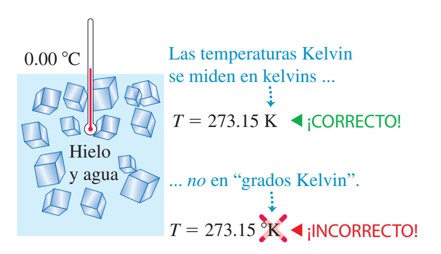
a) Termómetro de gas con volumen constante

b) Gráfica de presión contra temperatura a volumen constante para tres distintos tipos y cantidades de gas



CUIDADO **Nunca diga "grados kelvin"** En la nomenclatura del SI, no se usa "grado" con la escala Kelvin; la temperatura anterior se lee "293 kelvin", no "grados Kelvin" (figura 17.6). Kelvin con mayúscula se refiere a la escala de temperatura; pero la *unidad* de temperatura es el *kelvin,* con minúscula (aunque se abrevia K).

17.6 Usos correcto e incorrecto de la escala Kelvin.



Ejemplo 17.1 Temperatura corporal

Imagine que coloca un trozo de hielo en la boca. En algún momento, toda el agua pasa de hielo a $T_1 = 32.00$ °F a la temperatura corporal $T_2 = 98.60$ °F. Exprese estas temperaturas como °C y K, y calcule $\Delta T = T_2 - T_1$ en ambos casos.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestras incógnitas son las temperaturas T_1 y T_2 expresadas en grados Celsius y en kelvins, así como la diferencia entre estas dos temperaturas.

PLANTEAR: Convertiremos las temperaturas Fahrenheit a Celsius con la ecuación (17.2), y las Celsius a Kelvin con la ecuación (17.3).

EJECUTAR: Primero calculamos las temperaturas Celsius. Sabemos que $T_1 = 32.00$ °F $= 0.00$ °C, y 98.60 °F es $98.60 - 32.00 = 66.60$ °F por arriba de la temperatura de congelación; multiplicamos esto por (5 °C/9 °F) para obtener 37.00 °C por arriba de la temperatura de congelación, es decir, $T_2 = 37.00$ °C.

Para obtener las temperaturas Kelvin, sumamos 273.15 a cada una de las temperaturas Celsius: $T_1 = 273.15$ K y $T_2 = 310.15$ K. La temperatura "normal" del cuerpo es 37.0 °C, pero si su doctor le dice que su temperatura es 310 K, no se asuste.

La *diferencia* de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ es 37.00 °C = 37.00 K.

EVALUAR: Las escalas Celsius y Kelvin tienen diferentes ceros pero grados del mismo tamaño. Por lo tanto, cualquier diferencia de temperatura es la *misma* en las escalas Celsius y Kelvin, pero no en la escala Fahrenheit.

La escala Kelvin y temperatura absoluta

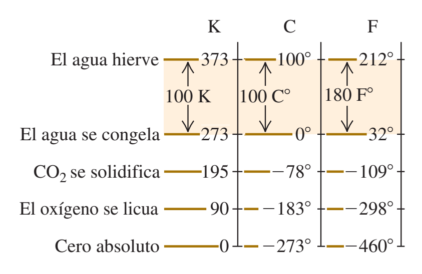
La escala Celsius tiene dos puntos fijos, los puntos de congelación y ebullición normales del agua. No obstante, podemos definir la escala Kelvin usando un termómetro de gas con sólo una temperatura de referencia. Definimos el cociente de cualesquiera dos temperaturas T_1 y T_2 en la escala Kelvin, como el cociente de las presiones correspondientes de termómetro de gas p_1 y p_2:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{(termómetro de gas de volumen constante, } T \text{ en kelvins)} \tag{17.4}$$

La presión p es directamente proporcional a la escala de temperatura Kelvin, como se muestra en la figura 17.5b. Para completar la definición de T, sólo necesitamos especificar la temperatura Kelvin de un solo estado específico. Por razones de precisión y de capacidad de reproducción, el estado elegido es el *punto triple* del agua. Ésta es una combinación única de temperatura y presión en la que pueden coexistir agua sólida (hielo), agua líquida y vapor de agua. Esto ocurre a una temperatura de 0.01 °C con una presión de vapor de agua de 610 Pa (cerca de 0.006 atm). (Ésta es la presión del *agua*; nada tiene que ver directamente con la presión del gas del *termómetro*.) La temperatura del punto triple del agua es, *por definición*, $T_{triple} = 273.16$ K, que corresponden a 0.01 °C. Por la ecuación (17.4), si p_{triple} es la presión en un termómetro de gas a la temperatura T_{triple} y p es la presión a otra temperatura T, entonces T está dada en la escala Kelvin por

$$T = T_{triple}\frac{p}{p_{triple}} = (273.16\ \text{K})\frac{p}{p_{triple}} \tag{17.5}$$

17.7 Relaciones entre las escalas de temperatura Kelvin (K), Celsius (C) y Fahrenheit (F). Las temperaturas se redondearon al grado más cercano.



Se ha comprobado que termómetros de diversos gases a baja presión coinciden con gran precisión, pero son grandes y voluminosos, y tardan mucho en llegar al equilibrio térmico; se usan básicamente para establecer estándares de alta precisión y calibrar otros termómetros.

Las relaciones entre las tres escalas de temperatura que hemos visto se muestran gráficamente en la figura 17.7. La escala Kelvin se denomina **escala de temperatura absoluta** y su cero [$T = 0$ K $= -273.15$ °C, la temperatura en que $p = 0$ en la ecuación (17.5)] se llama **cero absoluto**. En el cero absoluto, un sistema de moléculas (como una cantidad de gas, líquido o sólido) tiene su energía total (cinética + potencial) mínima posible; sin embargo, por efectos cuánticos, *no* es correcto decir que en cero absoluto todos los movimientos moleculares cesan. Para definir de forma más completa el cero absoluto, necesitaremos los principios termodinámicos que veremos en los siguientes capítulos. Volveremos a este concepto en el capítulo 20.

Evalúe su comprensión de la sección 17.3 Ordene de mayor a menor las siguientes temperaturas: i) 0.00 °C; ii) 0.00 °F; iii) 260.00 K; iv) 77.00 K; v) −180.00 °C.

17.4 Expansión térmica

Casi todos los materiales se expanden al aumentar su temperatura. El aumento en la temperatura hace que el líquido se expanda en los termómetros de líquido en un tubo (figura 17.1a) y que las tiras bimetálicas se doblen (figura 17.3b). Las cubiertas de puentes necesitan articulaciones y soportes especiales que den margen a la expansión. Una botella totalmente llena de agua y tapada se revienta al calentarse; pero podemos aflojar la tapa metálica de un frasco vertiendo agua caliente sobre ella. Éstos son ejemplos de *expansión térmica.*

Expansión lineal

Suponga que una varilla de material tiene longitud L_0 a una temperatura inicial T_0. Si la temperatura cambia en ΔT, la longitud cambia en ΔL. Se observa experimentalmente que si ΔT no es muy grande (digamos, menos de 100 C°), ΔL es *directamente proporcional* a ΔT. Si dos varillas del mismo material tienen el mismo cambio de temperatura, pero una es dos veces más larga que la otra, su *cambio* de longitud también será del doble. Por lo tanto, ΔL también debe ser proporcional a L_0 (figura 17.8b). Si introducimos una constante de proporcionalidad α (diferente para cada material), expresaremos estas relaciones en una ecuación:

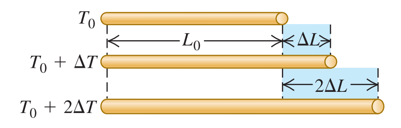
$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T \qquad \text{(expansión térmica lineal)} \tag{17.6}$$

Si un cuerpo tiene longitud L_0 a la temperatura T_0, su longitud L a la temperatura $T = T_0 + \Delta T$ es

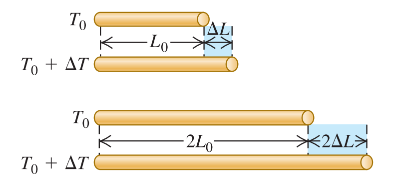
$$L = L_0 + \Delta L = L_0 + \alpha L_0 \Delta T = L_0(1 + \alpha \Delta T) \tag{17.7}$$

17.8 Cómo cambia la longitud de una varilla con un cambio en su temperatura. (Por claridad, se exageraron los cambios de longitud.)

a) Para cambios de temperatura moderados, ΔL es directamente proporcional a ΔT.

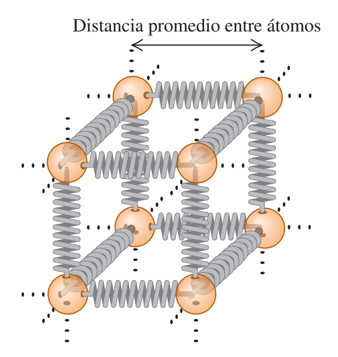


b) ΔL también es directamente proporcional a L_0.

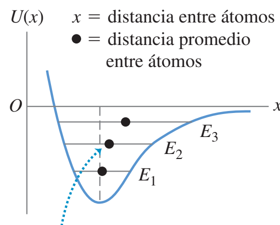


La constante α, que describe las propiedades de expansión térmica de un material dado, se denomina **coeficiente de expansión lineal**. Las unidades de α son K^{-1}, o bien, $(C°)^{-1}$. (Recuerde que un *intervalo* de temperatura es igual en las escalas Kelvin y Celsius.) En muchos materiales, todas las dimensiones lineales cambian según la ecuación (17.6) o la (17.7). Así, L podría ser el espesor de una varilla, la longitud del lado de una lámina cuadrada o el diámetro de un agujero. Algunos materiales, como la madera o los monocristales, se expanden de diferente forma en diferentes direcciones. No consideraremos esta complicación.

a) Modelo de las fuerzas entre átomos vecinos de un sólido



b) Gráfica de la energía potencial del "resorte" $U(x)$



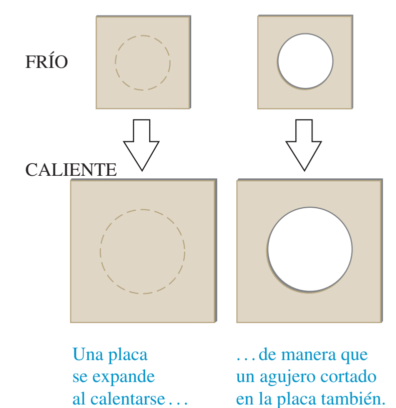
Al aumentar la energía de E_1 a E_2 a E_3, se incrementa la distancia media entre los átomos.

17.9 a) Podemos modelar los átomos en un sólido como si estuvieran unidos por "resortes", que son más fáciles de estirar que de comprimir. b) La curva de la energía potencial de "resorte" $U(x)$ contra distancia x entre átomos vecinos *no* es simétrica (compare con la figura 13.20b). Al aumentar la energía, los átomos oscilan con mayor amplitud y se incrementa la distancia promedio.

Podemos entender la expansión térmica cualitativamente desde una perspectiva molecular. Imaginemos las fuerzas interatómicas en un sólido como resortes (figura 17.9). (Ya exploramos la analogía entre las fuerzas de resortes e interatómicas en la sección 13.4.) Cada átomo vibra alrededor de su posición de equilibrio. Al aumentar la temperatura, también se incrementan la energía y la amplitud de la vibración. Las fuerzas de resorte interatómicas no son simétricas alrededor de la posición de equilibrio; suelen comportarse como un resorte que es más fácil de estirar que de comprimir. En consecuencia, al aumentar la amplitud de las vibraciones, también se incrementa la distancia *media* entre las moléculas. Al separarse los átomos, todas las dimensiones aumentan.

CUIDADO **Calentamiento de un objeto que tiene un agujero** Si un objeto sólido tiene un agujero, ¿qué sucede con el tamaño del agujero al aumentar la temperatura del objeto? Un error común consiste en suponer que si el objeto se expande, el agujero se encoge porque el material se expande hacia el agujero; no obstante, la verdad es que el agujero también se expande (figura 17.10); como dijimos antes, *todas* las dimensiones lineales de un objeto cambian del mismo modo al cambiar la temperatura. Si no está convencido, imagine que los átomos de la figura 17.9a delimitan un agujero cúbico. Al expandirse el objeto, los átomos se separan y el tamaño del agujero aumenta. La única situación en que un "agujero" se llena debido a la expansión térmica es cuando dos secciones de un objeto separadas se expanden y reducen dicha separación (figura 17.11).

17.10 Cuando un objeto sufre una expansión térmica, todos los agujeros que contiene también se expanden. (Se exageró la expansión.)



La proporcionalidad directa expresada por la ecuación (17.6) no es exacta; sólo es *aproximadamente* correcta para cambios de temperatura pequeños. Para un material dado, α varía un poco con la temperatura inicial T_0 y el tamaño del intervalo de temperatura. Aquí ignoraremos tal complicación. En la tabla 17.1 de la página 578, se dan valores promedio de α para varios materiales. Dentro de la precisión de estos valores, no necesitamos preocuparnos si T_0 es 0 °C o bien 20 °C o alguna otra temperatura. Observe que los valores típicos de α son muy pequeños; aun para un cambio de temperatura de 100 C°, el cambio de longitud fraccionario $\Delta L/L_0$ es del orden de 1/1000 para los metales de la tabla.

17.11 Cuando este avión SR-71 está en tierra, los paneles de sus alas embonan de forma tan holgada que hay fugas de combustible de las alas al suelo. Sin embargo, una vez que el avión está en vuelo a más del triple de la rapidez del sonido, la fricción del aire calienta tanto los paneles que se expanden y embonan perfectamente. (El abastecimiento de combustible durante el vuelo compensa la pérdida de combustible en tierra.)



Expansión de volumen

Un aumento de temperatura suele aumentar el *volumen* de materiales tanto líquidos como sólidos. Al igual que en la expansión lineal, se ha visto experimentalmente que, si el cambio de temperatura ΔT no es muy grande (menos de 100 C°), el aumento de volumen ΔV es aproximadamente proporcional al cambio de temperatura ΔT y al volumen inicial V_0:

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \qquad \text{(expansión térmica de volumen)} \qquad (17.8)$$

Tabla 17.1 Coeficientes de expansión lineal

Material	$\alpha\,[K^{-1}$ o $(C°)^{-1}]$
Aluminio	2.4×10^{-5}
Latón	2.0×10^{-5}
Cobre	1.7×10^{-5}
Vidrio	$0.4–0.9 \times 10^{-5}$
Invar (aleación níquel-hierro)	0.09×10^{-5}
Cuarzo (fundido)	0.04×10^{-5}
Acero	1.2×10^{-5}

La constante β caracteriza las propiedades de expansión de volumen de un material dado; se llama **coeficiente de expansión de volumen**. Las unidades de β son K^{-1}, o bien, $(C°)^{-1}$. Al igual que en la expansión lineal, β varía un poco con la temperatura, y la ecuación (17.8) es una relación aproximada válida sólo para cambios de temperatura pequeños. En muchas sustancias, β disminuye a bajas temperaturas. En la tabla 17.2 se dan algunos valores de β a temperatura ambiente. Observe que, en general, los valores para los líquidos son mucho mayores que para los sólidos.

Para materiales sólidos, hay una relación sencilla entre el coeficiente de expansión de volumen β y el coeficiente de expansión lineal α. Para deducir esta relación, consideramos un cubo de material con longitud de lado L y volumen $V = L^3$. En la temperatura inicial, los valores son L_0 y V_0. Al aumentar la temperatura en dT, la longitud del lado aumenta en dL y el volumen aumenta en una cantidad dV dada por

$$dV = \frac{dV}{dL}\,dL = 3L^2\,dL$$

Ahora sustituimos L y V por los valores iniciales L_0 y V_0. Por la ecuación (17.6), dL es

$$dL = \alpha L_0\,dT$$

Puesto que $V_0 = L_0^{\,3}$, esto implica que dV también puede expresarse como

$$dV = 3L_0^2\alpha L_0\,dT = 3\alpha V_0\,dT$$

Lo cual es congruente con la forma infinitesimal de la ecuación (17.8), $dV = \beta V_0\,dT$, sólo si

$$\beta = 3\alpha \qquad (17.9)$$

Verifique esta relación para algunos de los materiales de las tablas 17.1 y 17.2.

Tabla 17.2 Coeficientes de expansión de volumen

Sólidos	$\beta\,[K^{-1}$ o $(C°)^{-1}]$	Líquido	$\beta\,[K^{-1}$ o $(C°)^{-1}]$
Aluminio	7.2×10^{-5}	Etanol	75×10^{-5}
Latón	6.0×10^{-5}	Disulfuro de carbono	115×10^{-5}
Cobre	5.1×10^{-5}	Glicerina	49×10^{-5}
Vidrio	$1.2–2.7 \times 10^{-5}$	Mercurio	18×10^{-5}
Invar	0.27×10^{-5}		
Cuarzo (fundido)	0.12×10^{-5}		
Acero	3.6×10^{-5}		

Estrategia para resolver problemas 17.1 Expansión térmica



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Decida si el problema implica cambios de longitud (expansión térmica lineal) o de volumen (expansión térmica de volumen).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:
1. Elija la ecuación (17.6) para la expansión lineal y la ecuación (17.8) para la expansión de volumen.
2. Identifique las cantidades conocidas y desconocidas en la ecuación (17.6) o (17.8).

EJECUTAR *la solución* como sigue:
1. Despeje las incógnitas. Muchas veces se dan dos temperaturas y hay que calcular ΔT; o se da una temperatura inicial T_0 y hay que determinar la temperatura final que corresponde a un cambio de volumen o longitud dado. En este caso, obtenga ΔT primero; así, la temperatura final será $T_0 + \Delta T$.
2. La consistencia de unidades es crucial, como siempre. L_0 y ΔL (o bien, V_0 y ΔV) deben tener las mismas unidades, y si usa un valor de α o de β en K^{-1} o de $(C°)^{-1}$, ΔT debe estar en kelvins o grados Celsius (C°). Pero se pueden usar K y C° indistintamente.

EVALUAR *la respuesta:* Compruebe que sus resultados sean lógicos. Recuerde que los tamaños de los agujeros en un material se expanden con la temperatura como cualquier otra dimensión lineal, y el volumen de una cavidad (como el volumen de un recipiente) se expande igual que la forma sólida correspondiente.

Ejemplo 17.2 Cambio de longitud por cambio de temperatura I

Un evaluador usa una cinta métrica de acero que tiene exactamente 50.000 m de longitud a una temperatura de 20 °C. ¿Qué longitud tiene en un día caluroso de verano en el que la temperatura es de 35 °C?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de expansión lineal. Se nos dan la longitud y la temperatura iniciales de la cinta, y nuestra incógnita es la longitud de la cinta a la temperatura final.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (17.6) para calcular el cambio ΔL en la longitud de la cinta. Tenemos $L = 50.000$ m, $T_0 = 20$ °C y $T = 35$ °C, y obtenemos el valor de α de la tabla 17.1. La incógnita es la nueva longitud $L = L_0 + \Delta L$.

EJECUTAR: El cambio de temperatura es $\Delta T = T - T_0 = 15$ C°, así que, por la ecuación (17.6), el cambio de longitud ΔL y la longitud final $L = L_0 + \Delta L$ son

$$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T = (1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1})(50\ \mathrm{m})(15\ \mathrm{K})$$
$$= 9.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} = 9.0\ \mathrm{mm}$$
$$L = L_0 + \Delta L = 50.000\ \mathrm{m} + 0.009\ \mathrm{m} = 50.009\ \mathrm{m}$$

Así, la longitud a 35 °C es de 50.009 m.

EVALUAR: Observe que L_0 se da con 5 cifras significativas, pero sólo necesitamos dos de ellas para calcular ΔL. Observe también que ΔL es proporcional a la longitud inicial L_0: una cinta de 50 m se expandiría 9 mm; y una de 0.50 m (50 cm) tan sólo se expandiría 0.090 mm.

Este ejemplo muestra que los metales se expanden muy poco cuando el cambio de temperatura es moderado. Aún una bandeja metálica para hornear en un horno a 200 °C (392 °F) no es mucho mayor que a temperatura ambiente.

Ejemplo 17.3 Cambio de longitud por cambio de temperatura II

En el ejemplo 17.2, el evaluador usa la cinta para medir una distancia cuando la temperatura es de 35 °C; el valor que lee es 35.794 m. Determine la distancia real. Suponga que la cinta está calibrada para usarse a 20 °C.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como vimos en el ejemplo 17.2, a 35 °C la cinta se expandió un poco. La distancia entre dos marcas sucesivas de metro es un poco más de un metro, así que la escala subestima la distancia real.

PLANTEAR: Por lo tanto, la distancia verdadera (nuestra incógnita) es *mayor* que la leída, por un factor igual al cociente entre la longitud L de la cinta a 35 °C y su longitud L_0 a 20 °C.

EJECUTAR: La tasa L/L_0 es (50.009 m)/(50.000 m), así que la distancia verdadera es

$$\frac{50.009\ \mathrm{m}}{50.000\ \mathrm{m}}(35.794\ \mathrm{m}) = 35.800\ \mathrm{m}$$

EVALUAR: Aunque la diferencia de 0.008 m = 8 mm entre la lectura de la escala y la distancia real parece pequeña, puede ser importante en trabajos de precisión.

Ejemplo 17.4 Cambio de volumen por cambio de temperatura

Un frasco de vidrio con volumen de 200 cm^3 se llena hasta el borde con mercurio a 20 °C. ¿Cuánto mercurio se desbordará si la temperatura del sistema se eleva a 100 °C? El coeficiente de expansión lineal del vidrio es de $0.40 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la expansión de volumen del vidrio y del mercurio. La cantidad derramada depende de la *diferencia* entre los cambios de volumen de estos dos materiales.

PLANTEAR: La cantidad que se desborda es igual a la diferencia entre los valores de ΔV para el mercurio y el vidrio, ambos dados por la ecuación (17.8). Para que el mercurio se derrame, su coeficiente de expansión de volumen β debe ser mayor que el del vidrio. El valor para el mercurio $\beta_{\mathrm{mercurio}}$ $18 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, tomado de la tabla 17.2; el valor de β para este tipo de vidrio lo obtenemos con la ecuación (17.9), $\beta = 3\alpha$.

EJECUTAR: El coeficiente de expansión de volumen para el vidrio es

$$\beta_{\mathrm{vidrio}} = 3\alpha_{\mathrm{vidrio}} = 3(0.40 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}) = 1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$$

continúa

El aumento de volumen del frasco de vidrio es

$$\begin{aligned}\Delta V_{vidrio} &= \beta_{vidrio} V_0 \Delta T \\ &= (1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1})(200\ \mathrm{cm}^3)(100\ °\mathrm{C} - 20\ °\mathrm{C}) \\ &= 0.19\ \mathrm{cm}^3\end{aligned}$$

El aumento de volumen del mercurio es

$$\begin{aligned}\Delta V_{mercurio} &= \beta_{mercurio} V_0 \Delta T \\ &= (18 \times 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1})(200\ \mathrm{cm}^3)(100\ °\mathrm{C} - 20\ °\mathrm{C}) \\ &= 2.9\ \mathrm{cm}^3\end{aligned}$$

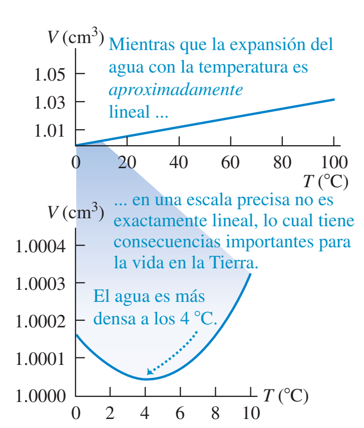
El volumen de mercurio que se desborda es

$$\Delta V_{mercurio} - \Delta V_{vidrio} = 2.9\ \mathrm{cm}^3 - 0.19\ \mathrm{cm}^3 = 2.7\ \mathrm{cm}^3$$

EVALUAR: Básicamente, así es como funciona un termómetro de mercurio en vidrio, excepto que, en vez de dejar que el mercurio se derrame, se deja que suba dentro de un tubo sellado al aumentar T.

Como muestran las tablas 17.1 y 17.2, el vidrio tiene coeficientes de expansión α y β menores que la mayoría de los metales. Por ello, podemos usar agua caliente para aflojar la tapa metálica de un frasco de vidrio: el metal se expande más que el vidrio.

17.12 Volumen de un gramo de agua en el intervalo de temperaturas de 0 °C a 10 °C. A los 100 °C, el volumen ha aumentado a 1.034 cm³. Si el coeficiente de expansión de volumen fuera constante, la curva sería una línea recta.



Expansión térmica del agua

El agua, en el intervalo de temperaturas de 0 °C a 4 °C, se *contrae* al aumentar la temperatura. En este intervalo, su coeficiente de expansión es *negativo*. Por arriba de 4 °C, el agua se expande al calentarse (figura 17.12). Por lo tanto, el agua tiene su mayor densidad a 4 °C. El agua también se expande al congelarse, lo cual explica por qué se forman jorobas en el centro de los compartimentos de una charola para cubitos de hielo. En cambio, la mayoría de los materiales se contraen al congelarse.

Este comportamiento anómalo del agua tiene un efecto importante sobre la vida vegetal y animal en los lagos. Un lago se enfría de la superficie hacia abajo; por arriba de los 4 °C, el agua enfriada en la superficie se hunde por su mayor densidad; sin embargo, cuando la temperatura superficial baja de 4 °C, el agua cerca de la superficie es menos densa que la de abajo, que es más caliente. Por lo tanto, el flujo hacia abajo cesa y el agua cerca de la superficie sigue siendo más fría que en el fondo. Al congelarse la superficie, el hielo flota porque es menos denso que el agua. El agua en el fondo sigue a 4 °C hasta que casi todo el lago se congela. Si el agua se comportara como la mayoría de las sustancias, contrayéndose continuamente al enfriarse y congelarse, los lagos se helarían de abajo hacia arriba. La circulación por diferencias de densidad haría subir continuamente el agua más caliente para un enfriamiento más eficiente, y los lagos se congelarían por completo con mucha mayor facilidad. Esto destruiría todas las plantas y animales que no resisten el congelamiento. Si el agua no tuviera esta propiedad especial, la evolución de la vida habría seguido un curso muy diferente.

17.13 Los dientes de una articulación de expansión de un puente. Se requieren estas articulaciones para dar cabida a los cambios de longitud resultado de la expansión térmica.



Esfuerzo térmico

Si sujetamos rígidamente los extremos de una varilla para evitar su expansión o contracción y luego variamos la temperatura, aparecerán esfuerzos de tensión o compresión llamados **esfuerzos térmicos**. La varilla quiere expandirse o contraerse, pero las abrazaderas no la dejan. Los esfuerzos pueden ser tan grandes que deformen irreversiblemente la varilla o incluso la rompan. (Quizá sea conveniente repasar la explicación de esfuerzo y deformación en la sección 11.4.)

Los ingenieros deben tomar en cuenta el esfuerzo térmico al diseñar estructuras. Las autopistas de hormigón y las cubiertas de puentes suelen tener espacios entre secciones, llenos con material flexible o salvados por dientes que embonan (figura 17.13), con la finalidad de permitir la expansión y contracción del hormigón. Las tuberías de vapor largas tienen juntas de expansión o secciones con forma de U para evitar que se pandeen o estiren al cambiar la temperatura. Si un extremo de un puente de acero está fijo rígidamente a su estribo, el otro por lo regular descansa en rodillos.

Para calcular los esfuerzos térmicos en una varilla sujeta, calculamos qué tanto se *expandiría* (o contraería) si no estuviera sujeta, y luego calculamos el esfuerzo nece-

sario para comprimirla (o estirarla) a su longitud original. Suponga que una varilla de longitud L_0 y área transversal A se mantiene con longitud constante, mientras se reduce la temperatura (ΔT negativo), causando un esfuerzo de tensión. El cambio fraccionario de longitud si la varilla estuviera libre sería

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmico}} = \alpha \Delta T \qquad (17.10)$$

Tanto ΔL como ΔT son negativos. La tensión debe aumentar en una cantidad F apenas suficiente para producir un cambio fraccionario de longitud igual y opuesto $(\Delta L/L_0)_{\text{tensión}}$. Por la definición del módulo de Young, ecuación (11.10),

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \qquad \text{así que} \qquad \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensión}} = \frac{F}{AY} \qquad (17.11)$$

Si la longitud tiene que ser constante, el cambio fraccionario *total* de longitud debe ser cero. Por las ecuaciones (17.10) y (17.11), esto implica que

$$\left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{térmico}} + \left(\frac{\Delta L}{L_0}\right)_{\text{tensión}} = \alpha \Delta T + \frac{F}{AY} = 0$$

Despejando el esfuerzo de tensión F/A necesario para mantener constante la longitud de la varilla:

$$\frac{F}{A} = -Y\alpha\,\Delta T \qquad \text{(esfuerzo térmico)} \qquad (17.12)$$

Si la temperatura disminuye, ΔT es negativo, así que F y F/A son positivos; esto implica que se requieren una fuerza y un esfuerzo *de tensión* para mantener la longitud. Si ΔT es positivo, F y F/A son negativos, y la fuerza y el esfuerzo requeridos son *de compresión*.

Si hay diferencias de temperatura dentro de un cuerpo, habrá expansión o contracción no uniformes, y pueden inducirse esfuerzos térmicos. Es factible romper un tazón de vidrio vertiendo en él agua muy caliente; el esfuerzo térmico entre las partes caliente y fría excede el esfuerzo de rotura del vidrio, agrietándolo. El mismo fenómeno hace que se rompa un cubo de hielo si se deja caer en agua tibia. Los vidrios resistentes al calor, como Pyrex[MR], tienen coeficientes de expansión excepcionalmente bajos y una resistencia elevada.

Ejemplo 17.5 Esfuerzo térmico

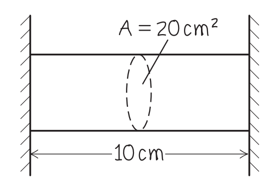
Un cilindro de aluminio de 10 cm de longitud, con área transversal de 20 cm^2, se usará como espaciador entre dos paredes de acero. A 17.2 °C, el cilindro apenas se desliza entre las paredes. Si se calienta a 22.3 °C, ¿qué esfuerzo habrá en el cilindro y qué fuerza total ejercerá éste sobre cada pared, suponiendo que las paredes son perfectamente rígidas y están separadas por una distancia constante?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Las incógnitas son el esfuerzo térmico del cilindro y la fuerza asociada que éste ejerce sobre cada una de las paredes que lo sostienen.

PLANTEAR: La figura 17.14 muestra un diagrama de la situación. Usaremos la ecuación (17.12) para relacionar el esfuerzo con el cambio de temperatura. Los valores necesarios para el módulo de Young Y y el coeficiente de expansión lineal α son los del aluminio, el material de que está hecho el cilindro. Obtendremos esos valores de las tablas 11.1 y 17.1, respectivamente.

17.14 Nuestro diagrama de este problema.



continúa

EJECUTAR: Para el aluminio, $Y = 7.0 \times 10^{10}$ Pa y $\alpha = 2.4 \times 10^{-5}$ K^{-1}. El cambio de temperatura es $\Delta T = 22.3\ °C - 17.2\ °C = 5.1\ C°$ $= 5.1$ K. El esfuerzo es F/A; por la ecuación (17.12),

$$\frac{F}{A} = -Y\alpha\Delta T = -(0.70 \times 10^{11}\ \text{Pa})(2.4 \times 10^{-5}\ \text{K}^{-1})(5.1\ \text{K})$$
$$= -8.6 \times 10^{6}\ \text{Pa}\ (\text{o}\ -1200\ \text{lb/in}^2)$$

El signo negativo indica que se requiere un esfuerzo de compresión, no de tensión, para mantener constante la longitud del cilindro. Este esfuerzo es independiente de la longitud y del área de sección transversal del cilindro. La fuerza total F es el área transversal multiplicada por el esfuerzo:

$$F = A\left(\frac{F}{A}\right) = (20 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(-8.6 \times 10^{6}\ \text{Pa})$$
$$= -1.7 \times 10^{4}\ \text{N}$$

es decir, casi 2 toneladas. El signo negativo indica compresión.

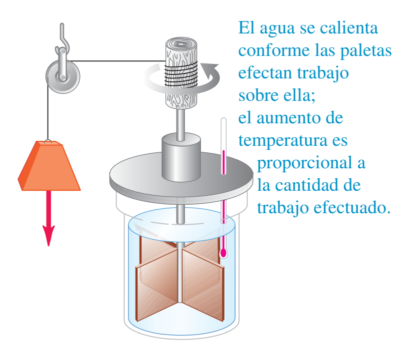
EVALUAR: El esfuerzo en el cilindro y la fuerza que ejerce sobre cada pared son inmensos. Esto destaca la importancia de contemplar tales esfuerzos térmicos en ingeniería.

Evalúe su comprensión de la sección 17.4 En la tira bimetálica de la figura 17.3a, el metal 1 es cobre. ¿Cuál de los siguientes materiales podría usarse como metal 2. (Quizás haya más de una respuesta correcta.) i) acero; ii) latón; iii) aluminio.

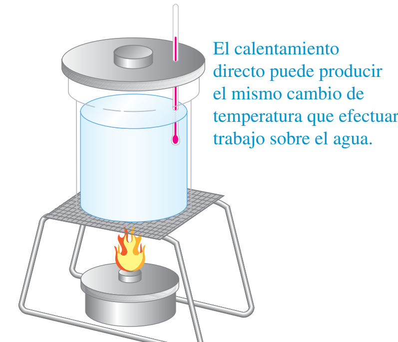
17.5 Cantidad de calor

17.15 El mismo cambio de temperatura del mismo sistema puede lograrse a) realizando trabajo sobre él o b) agregándole calor.

a) Aumento de la temperatura del agua al efectuar trabajo sobre ella



b) Incremento de la temperatura del agua transfiriéndole directamente calor



Si metemos una cuchara fría en una taza con café caliente, la cuchara se calienta y el café se enfría para establecer el equilibrio térmico. La interacción que causa estos cambios de temperatura es básicamente una transferencia de *energía* de una sustancia a otra. La transferencia de energía que se da exclusivamente por una diferencia de temperatura se denomina *flujo de calor* o *transferencia de calor*, en tanto que la energía así transferida se llama **calor**.

Durante los siglos XVIII y XIX, se fue entendiendo poco a poco la relación entre el calor y las otras formas de energía. Sir James Joule (1818-1889) estudió cómo puede calentarse el agua por agitamiento vigoroso con una rueda de paletas (figura 17.15a), la cual agrega energía al agua realizando un *trabajo* sobre ella, Joule observó que *el aumento de temperatura es directamente proporcional a la cantidad de trabajo realizado*. Es posible lograr el mismo cambio de temperatura poniendo el agua en contacto con un cuerpo más caliente (figura 17.15b); por lo tanto, esta interacción también debe implicar un intercambio de energía. Exploraremos la relación entre calor y energía mecánica con mayor detalle en los capítulos 19 y 20.

CUIDADO **Temperatura contra calor** Es absolutamente indispensable tener bien clara la distinción entre *temperatura* y *calor*. La temperatura depende del estado físico de un material y es una descripción cuantitativa de su calidez o frialdad. En física, el término "calor" siempre se refiere a transferencia de energía de un cuerpo o sistema a otro, a causa de una diferencia de temperatura, nunca a la cantidad de energía contenida en un sistema dado. Podemos modificar la temperatura de un cuerpo agregándole o quitándole calor, o agregándole o quitándole energía de otras formas, como trabajo mecánico (figura 17.15a). Si cortamos un cuerpo a la mitad, cada mitad tiene la misma temperatura que el todo; no obstante, para elevar la temperatura de una mitad un intervalo dado, le agregamos la *mitad* del calor que agregaríamos al todo.

Podemos definir una *unidad* de cantidad de calor con base en el cambio de temperatura de un material específico. La **caloría** (abreviada cal) se define como *la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5 °C a 15.5 °C*. También se usa la kilocaloría (kcal), igual a 1000 cal; las calorías de valor alimentario son en realidad kilocalorías (figura 17.16). Una unidad correspondiente de calor que usa grados Fahrenheit y unidades inglesas es la **unidad térmica británica**

o Btu. Una Btu es la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de una libra (peso) de agua 1 F°, de 63 °F a 64 °F.

Puesto que el calor es una transferencia de energía, debe haber una relación definida entre estas unidades y las de energía mecánica que conocemos, como el joule. Experimentos similares en concepto al de Joule han demostrado que

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$$
$$1 \text{ kcal} = 1000 \text{ cal} = 4186 \text{ J}$$
$$1 \text{ Btu} = 778 \text{ ft} \cdot \text{lb} = 252 \text{ cal} = 1055 \text{ J}$$

La caloría no es una unidad fundamental del SI. El Comité Internacional de Pesos y Medidas recomienda usar el joule como unidad básica de energía en todas sus formas, incluido el calor. Seguiremos esa recomendación en este libro.

17.16 El lema "Komm in Schwung mit Zucker" de este paquete de azúcar alemán puede traducirse como "El azúcar le da a usted momento lineal". De hecho, el azúcar le da a usted *energía*: de acuerdo con la etiqueta, cada paquete tiene un contenido energético de 22 kilocalorías (22 calorías de los alimentos) o 92 kilojoules. (Analizamos la diferencia entre energía y momento lineal en la sección 8.1.)



Calor específico

Usamos el símbolo Q para cantidad de calor. Cuando el calor está asociado a un cambio de temperatura infinitesimal dT, lo llamamos dQ. Se observa que la cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de una masa m de cierto material de T_1 a T_2 es aproximadamente proporcional al cambio de temperatura $\Delta T = T_2 - T_1$ y a la masa m del material. Si calentamos agua para hacer té, necesitamos el doble de calor para dos tazas que para una, si el intervalo de temperatura es el mismo. La cantidad de calor requerida también depende de la naturaleza del material; se requieren 4190 J de calor para elevar la temperatura de 1 kilogramo de agua 1 C°, pero sólo 910 J para elevar en 1 C° la temperatura de 1 kilogramo de aluminio.

Juntando todas estas relaciones, tenemos

$$Q = mc\,\Delta T \quad \text{(calor requerido para cambiar la temperatura de la masa } m\text{)} \tag{17.13}$$

donde c es una cantidad, diferente para cada material, llamada **calor específico** del material. Para un cambio infinitesimal de temperatura dT y la cantidad de calor correspondiente dQ,

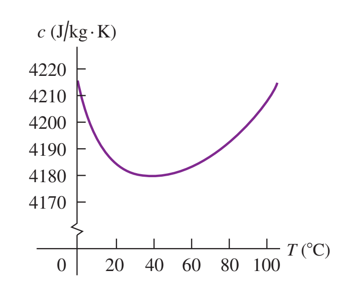
$$dQ = mc\,dT \tag{17.14}$$

$$c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT} \quad \text{(calor específico)} \tag{17.15}$$

En las ecuaciones (17.13), (17.14) y (17.15), Q (o dQ) y ΔT (o dT) pueden ser positivos o negativos. Si son positivos, entra calor en el cuerpo y aumenta su temperatura; si son negativos, sale calor del cuerpo y disminuye su temperatura.

CUIDADO **La definición de calor** Recuerde que dQ no representa un cambio en la cantidad de calor *contenida* en un cuerpo; tal concepto carece de sentido. El calor siempre es *transferencia* de energía a causa de una diferencia de temperatura. No existe "la cantidad de calor de un cuerpo".

17.17 Capacidad calorífica del agua en función de la temperatura. El valor de c varía menos del 1% entre 0 °C y 100 °C.



El calor específico del agua es aproximadamente

$$4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K} \qquad 1 \text{ cal/g} \cdot \text{C°} \qquad \text{o bien,} \qquad 1 \text{ Btu/lb} \cdot \text{F°}$$

El calor específico de un material siempre depende un poco de la temperatura inicial y del intervalo de temperatura. La figura 17.17 muestra esta variación para el agua. En los problemas y ejemplos de este capítulo normalmente haremos caso omiso de esta pequeña variación.

Ejemplo 17.6 Comer con resfriado, ayunar con fiebre

Padeciendo un cuadro de gripe, un hombre de 80 kg tuvo una fiebre de 39.0 °C (102.2 °F), en vez de la temperatura normal de 37.0 °C (98.6 °F). Suponiendo que el cuerpo humano es agua en su mayoría, ¿cuánto calor se requirió para elevar su temperatura esa cantidad?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema usa la relación entre calor (la incógnita), masa, calor específico y cambio de temperatura.

PLANTEAR: Nos dan los valores de $m = 80$ kg, $c = 4190$ J/kg · K y $\Delta T = 39.0$ °C $- 37.0$ °C $= 2.0$ C° $= 2.0$ K. Usaremos la ecuación (17.13) para determinar el calor requerido.

EJECUTAR: Por la ecuación (17.13),

$$Q = mc\,\Delta T = (80\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})(2.0\text{ K}) = 6.7 \times 10^5\text{ J}$$

EVALUAR: Esto corresponde a 160 kcal, o 160 calorías de los alimentos. (De hecho, el calor específico del cuerpo humano es de cerca de 3480 J/kg · K, alrededor de 83% del agua. La diferencia se debe a la presencia de proteínas, grasa y minerales, que tienen menor calor específico. Con este valor de c, el calor requerido es 5.6×10^5 J $= 133$ kcal. Cualquiera de los resultados demuestra que, si no fuera por los sistemas reguladores de la temperatura del cuerpo, ingerir energía en forma de alimentos produciría cambios medibles en la temperatura del cuerpo. (En el caso de una persona con gripe, el aumento en la temperatura es resultado de la actividad extra del cuerpo al combatir la infección.)

Ejemplo 17.7 Circuitos sobrecalentados

Se está diseñando un elemento de circuito electrónico hecho con 23 mg de silicio. La corriente que pasa por él agrega energía a razón de 7.4 mW $= 7.4 \times 10^{-3}$ J/s. Si el diseño no contempla la eliminación de calor del elemento, ¿con qué rapidez aumentará su temperatura? El calor específico del silicio es de 705 J/kg · K.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La energía agregada al elemento del circuito hace que se incremente la temperatura, al igual que si el calor fluyera en el elemento a una tasa de 7.4×10^{-3} J/s. La incógnita es la *tasa* de cambio de la temperatura.

PLANTEAR: Por la ecuación (17.13), el cambio de temperatura ΔT en kelvins es proporcional al calor transferido en joules, así que la tasa de cambio de la temperatura en K/s es proporcional a la tasa de transferencia de calor en J/s.

EJECUTAR: En un segundo, $Q = (7.4 \times 10^{-3}\text{ J/s})(1\text{ s}) = 7.4 \times 10^{-3}$ J. Por la ecuación (17.13), $Q = mc\,\Delta T$, el cambio de temperatura en 1 segundo es

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{7.4 \times 10^{-3}\text{ J}}{(23 \times 10^{-6}\text{ kg})(705\text{ J/kg}\cdot\text{K})} = 0.46\text{ K}$$

O bien, podríamos derivar ambos miembros de la ecuación (17.14) con respecto a dt y reacomodar:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dQ/dt}{mc} = \frac{7.4 \times 10^{-3}\text{ J/s}}{(23 \times 10^{-6}\text{ kg})(705\text{ J/kg}\cdot\text{K})} = 0.46\text{ K/s}$$

EVALUAR: Con esta rapidez en el aumento de la temperatura (27 K cada minuto) el elemento de circuito pronto se autodestruiría. La transferencia de calor es una consideración importante en el diseño de elementos de circuitos electrónicos.

Capacidad calorífica molar

A veces resulta más útil describir una cantidad de sustancia en términos del número de *moles n*, en vez de la *masa m* del material. Recuerde (de sus clases de química) que un mol de cualquier sustancia pura siempre contiene el mismo número de moléculas. (Veremos esto con mayor detalle en el capítulo 18.) La *masa molar* de cualquier sustancia, denotada con M, es la masa por mol. (A veces se llama a M *peso molecular*, aunque es preferible *masa molar*; la cantidad depende de la masa de una molécula, no de su peso.) Por ejemplo, la masa molar del agua es de 18.0 g/mol $= 18.0 \times 10^{-3}$ kg/mol; un mol de agua tiene una masa de 18.0 g $=$ 0.0180 kg. La masa total m de material es la masa por mol M multiplicada por el número de moles n:

$$m = nM \tag{17.16}$$

Sustituyendo la masa m de la ecuación (17.13) por el producto nM, tenemos

$$Q = nMc\,\Delta T \tag{17.17}$$

El producto Mc se denomina **capacidad calorífica molar** (o *calor específico molar*) y se denota con C. Con esta notación, reescribimos la ecuación (17.17) de la siguiente manera:

$$Q = nC\,\Delta T \quad \text{(calor requerido para cambiar la temperatura de } n \text{ moles)} \tag{17.18}$$

Comparando con la ecuación (17.15), podemos expresar la capacidad calorífica molar C (calor por mol por cambio de temperatura) en términos del calor específico c (calor por masa por cambio de temperatura) y la masa molar M (masa por mol):

$$C = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} = Mc \qquad \text{(capacidad calorífica molar)} \tag{17.19}$$

Por ejemplo, la capacidad calorífica molar del agua es

$$C = Mc = (0.0180 \text{ kg/mol})(4190 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) = 75.4 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

En la tabla 17.3 se dan valores de calor específico y capacidad calorífica molar para varias sustancias. Note el valor extraordinariamente elevado del calor específico del agua (figura 17.18).

CUIDADO **El significado de "capacidad calorífica"** Es lamentable que se haya generalizado el uso del término *capacidad calorífica* porque da la impresión errónea de que un cuerpo *contiene* cierta cantidad de calor. Recuerde que el calor es transferencia de energía desde o hacia un cuerpo, no la energía que reside en el cuerpo.

17.18 El agua tiene un calor específico mucho más alto que el vidrio y los metales que se usan para hacer utensilios de cocina. Esto explica en parte por qué se requieren varios minutos para hervir agua en una estufa, aunque el recipiente alcanza una temperatura alta con gran rapidez.



La medición precisa de calores específicos y capacidades caloríficas molares requiere gran habilidad experimental. Lo usual es aportar una cantidad medida de energía mediante un alambre calefactor enrollado en una muestra. El cambio de temperatura ΔT se mide con un termómetro de resistencia o termopar incrustado en la muestra. Parece sencillo, pero se requiere gran cuidado para evitar o compensar una transferencia de calor no deseada entre la muestra y su entorno. Las mediciones en sólidos suelen hacerse a presión atmosférica constante; los valores correspondientes se llaman *calor específico* y *capacidad calorífica molar a presión constante*, denotados con c_p y C_p respectivamente. En el caso de un gas, suele ser más fácil mantener la sustancia en un recipiente con *volumen* constante; los valores correspondientes son *calor específico* y *capacidad calorífica molar a volumen constante*, denotados con c_V y C_V, respectivamente. Para una sustancia dada, C_V y C_p son diferentes. Si el sistema puede expandirse al agregar calor, hay un intercambio adicional de energía porque el sistema efectúa *trabajo* sobre su entorno. Si el volumen es constante, el sistema no efectúa trabajo. En los gases, la diferencia entre C_p y C_V es sustancial. Estudiaremos las capacidades caloríficas de los gases a fondo en la sección 19.7.

La última columna de la tabla 17.3 muestra algo interesante. Las capacidades caloríficas molares de la mayoría de los sólidos elementales son casi iguales, alrededor de 25 J/mol · K. Esta correlación, llamada *regla de Dulong* y *Petit* (por sus descubridores), es la base de una idea muy importante. El número de átomos en un mol es el mismo para todas las sustancias elementales. Esto implica que, *por átomo*, se requiere

Tabla 17.3 Valores aproximados del calor específico y capacidad calorífica molar (a presión constante)

Sustancia	Calor específico, (J/kg · K)	Masa molar, (kg/mol)	Capacidad calorífica molar (J/mol · K)
Aluminio	910	0.0270	24.6
Berilio	1970	0.00901	17.7
Cobre	390	0.0635	24.8
Etanol	2428	0.0461	111.9
Etilenglicol	2386	0.0620	148.0
Hielo (cerca de 0 °C)	2100	0.0180	37.8
Hierro	470	0.0559	26.3
Plomo	130	0.207	26.9
Mármol ($CaCO_3$)	879	0.100	87.9
Mercurio	138	0.201	27.7
Sal (NaCl)	879	0.0585	51.4
Plata	234	0.108	25.3
Agua (líquida)	4190	0.0180	75.4

más o menos la misma cantidad de calor para elevar la temperatura de cada uno de estos elementos una cantidad dada, aunque las *masas* de los átomos sean muy diferentes. El calor requerido para un aumento de temperatura dado sólo depende de *cuántos* átomos haya en la muestra, no de la masa del átomo individual. Veremos por qué esta regla funciona tan bien cuando estudiemos las bases moleculares de la capacidad calorífica con detalle en el capítulo 18.

Evalúe su comprensión de la sección 17.5 Suponga que quiere elevar la temperatura, de 20 °C a 21 °C, en cada una de las siguientes muestras. Ordénelas de mayor a menor, según la cantidad de calor que se requiere para lograrlo. i) un kilogramo de mercurio; ii) un kilogramo de etanol; iii) un mol de mercurio; iv) un mol de etanol.



17.6 Calorimetría y cambios de fase

Calorimetría significa "medición de calor". Hemos hablado de la transferencia de energía (calor) durante los cambios de temperatura. El calor también interviene en *los cambios de fase*, como la fusión del hielo o la ebullición del agua. Una vez que entendamos estas otras relaciones de calor, podremos analizar diversos problemas de cantidad de calor.

Cambios de fase

Usamos el término **fase** para describir un estado específico de la materia, como sólido, líquido o gas. El compuesto H_2O existe en la *fase sólida* como hielo, en la *fase líquida* como agua y en la *fase gaseosa* como vapor de agua. (También llamamos a éstos **estados de la materia**: el estado sólido, el estado líquido y el estado gaseoso.) Una transición de una fase a otra es un **cambio de fase**. Para una presión dada, los cambios de fase se dan a una temperatura definida, generalmente acompañada por absorción o emisión de calor, y un cambio de volumen y densidad.

Un ejemplo conocido de cambio de fase es la fusión del hielo. Si agregamos calor al hielo a 0 °C y a presión atmosférica normal, la temperatura del hielo *no* aumenta. En vez de ello, parte de él se funde para formar agua líquida. Si agregamos calor lentamente, manteniendo el sistema muy cerca del equilibrio térmico, la temperatura seguirá en 0 °C hasta que todo el hielo se haya fundido (figura 17.19). El efecto de agregar calor a este sistema no es elevar su temperatura sino cambiar su *fase* de sólida a líquida.



17.19 El aire circundante está a temperatura ambiente, pero esta mezcla de hielo y agua se mantiene a 0 °C hasta que todo el hielo se funde y el cambio de fase es total.

Para convertir 1 kg de hielo a 0 °C en 1 kg de agua líquida a 0 °C y a presión atmosférica normal, necesitamos 3.34×10^5 J de calor. El calor requerido por unidad de masa se llama **calor de fusión** (o *calor latente de fusión*), denotado con L_f. Para el agua a presión atmosférica normal, el calor de fusión es

$$L_f = 3.34 \times 10^5 \text{ J/kg} = 79.6 \text{ cal/g} = 143 \text{ Btu/lb}$$

En términos más generales, para fundir una masa m de material con calor de fusión L_f se requiere una cantidad de calor Q dada por

$$Q = mL_f$$

Este proceso es *reversible*. Para congelar agua líquida a 0 °C tenemos que *quitar* calor; la magnitud es la misma, pero ahora Q es negativa porque se quita calor en vez de agregarse. Para cubrir ambas posibilidades e incluir otros tipos de cambios de fase, escribimos

$$Q = \pm mL \qquad \text{(transferencia de calor en un cambio de fase)} \qquad (17.20)$$

Usamos el signo más (entra calor) cuando el material se funde, y el signo menos (sale calor) cuando se congela. El calor de fusión es diferente para diferentes materiales, y también varía un poco con la presión.

Para un material dado, a una presión dada, la temperatura de congelación es la misma que la de fusión. En esta temperatura única, las fases líquida y sólida (agua líquida y hielo, por ejemplo) pueden coexistir en una condición llamada **equilibrio de fases**.

Algo similar sucede con la *ebullición* o *evaporación*, una transición de fase entre líquido y gas. El calor correspondiente (por unidad de masa) se llama **calor de vaporización** L_v. A presión atmosférica normal el calor de vaporización L_v del agua es

$$L_v = 2.256 \times 10^6 \text{ J/kg} = 539 \text{ cal/g} = 970 \text{ Btu/lb}$$

Es decir, necesitamos 2.256×10^6 J para convertir 1 kg de agua líquida a 100 °C en 1 kg de vapor de agua a 100 °C. En contraste, para elevar la temperatura de 1 kg de agua de 0 °C a 100 °C se requieren $Q = mc\,\Delta T = (1.00\text{ kg})\,(4190\text{ J/kg}\cdot\text{C°}) \times (100\text{ C°}) = 4.19 \times 10^5$ J, menos de la quinta parte del calor necesario para la vaporización a 100 °C. Esto concuerda con nuestra experiencia en la cocina: una olla de agua puede alcanzar la temperatura de ebullición en unos minutos, pero tarda mucho más en evaporarse por completo.

Al igual que la fusión, la ebullición es una transición reversible. Si quitamos calor a un gas a la temperatura de ebullición, el gas vuelve a la fase líquida (se *condensa*), cediendo a su entorno la misma cantidad de calor (calor de vaporización) que se necesitó para vaporizarlo. A una presión dada, las temperaturas de ebullición y condensación siempre son la misma; en ella, las fases líquida y gaseosa pueden coexistir en equilibrio de fases.

Tanto L_v como la temperatura de ebullición de un material dependen de la presión. El agua hierve a menor temperatura (cerca de 95 °C) en Denver que en Pittsburgh, porque Denver está a mayor altura y la presión atmosférica promedio es menor. El calor de vaporización es un poco más alto a esta presión reducida: aproximadamente 2.27×10^6 J/kg.

La tabla 17.4 presenta calores de fusión y vaporización para varios materiales y sus temperaturas de fusión y ebullición, a presión atmosférica normal. Muy pocos *elementos* tienen temperaturas de fusión cercanas a la temperatura ambiente; uno de ellos es el metal galio (figura 17.20).

17.20 El metal galio, que vemos aquí fundiéndose en la mano de una persona, es uno de los pocos elementos que se funden cerca de la temperatura ambiente. Su temperatura de fusión es de 29.8 °C y su calor de fusión es de 8.04×10^4 J/kg.

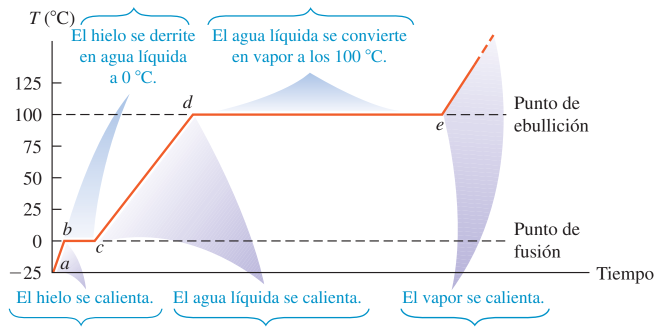


Tabla 17.4 Calores de fusión y de vaporización

	Punto de fusión normal		Calor de fusión, L_f (J/kg)	Punto de ebullición normal		Calor de vaporización, L_v (J/kg)
Sustancia	K	°C		K	°C	
Helio	*	*	*	4.216	−268.93	20.9×10^3
Hidrógeno	13.84	−259.31	58.6×10^3	20.26	−252.89	452×10^3
Nitrógeno	63.18	−209.97	25.5×10^3	77.34	−195.8	201×10^3
Oxígeno	54.36	−218.79	13.8×10^3	90.18	−183.0	213×10^3
Etanol	159	−114	104.2×10^3	351	78	854×10^3
Mercurio	234	−39	11.8×10^3	630	357	272×10^3
Agua	273.15	0.00	334×10^3	373.15	100.00	2256×10^3
Azufre	392	119	38.1×10^3	717.75	444.60	326×10^3
Plomo	600.5	327.3	24.5×10^3	2023	1750	871×10^3
Antimonio	903.65	630.50	165×10^3	1713	1440	561×10^3
Plata	1233.95	960.80	88.3×10^3	2466	2193	2336×10^3
Oro	1336.15	1063.00	64.5×10^3	2933	2660	1578×10^3
Cobre	1356	1083	134×10^3	1460	1187	5069×10^3

*Se requiere una presión mayor que 25 atmósferas para solidificar el helio. A presión de 1 atmósfera, el helio sigue siendo líquido hasta el cero absoluto.

17.21 Gráfica de temperatura contra tiempo para una muestra de agua que inicialmente está en la fase sólida (hielo). Se le agrega calor con tasa constante. La temperatura no cambia durante los cambios de fase, siempre y cuando la presión se mantenga constante.



La figura 17.21 muestra cómo varía la temperatura cuando agregamos calor continuamente a una muestra de hielo con una temperatura inicial menor que 0 °C (punto *a*). La temperatura aumenta hasta llegar al punto de fusión (punto *b*). Al agregar más calor, la temperatura se mantiene constante hasta que se derrite todo el hielo (punto *c*). Luego, la temperatura aumenta otra vez hasta llegar al punto de ebullición (punto *d*), donde se mantiene constante otra vez hasta que toda el agua ha pasado a la fase de vapor (punto *e*). Si la tasa de aporte de calor es constante, la pendiente de la línea para la fase sólida (hielo) está más inclinada que para la fase líquida (agua). ¿Sabe por qué? (Véase la tabla 17.3.)

A veces, una sustancia puede cambiar directamente de la fase sólida a la gaseosa. Este proceso se llama *sublimación* y se dice que el sólido se *sublima*. El calor correspondiente es el *calor de sublimación* L_s. El dióxido de carbono líquido no puede existir a una presión menor que 5×10^5 Pa (unas 5 atm), y el "hielo seco" (dióxido de carbono sólido) se sublima a presión atmosférica. La sublimación de agua de alimentos congelados causa las "quemaduras de congelador". El proceso inverso, un cambio de fase de gas a sólido, se presenta cuando se forma escarcha en cuerpos fríos como las espiras de enfriamiento de un refrigerador.

El agua muy pura llega a enfriarse varios grados por debajo del punto de congelación sin congelarse; el estado inestable que resulta se describe como *sobreenfriado*. Si se introduce un cristal de hielo o se agita el agua, se cristalizará en un segundo o menos. El *vapor* de agua sobreenfriado se condensa rápidamente para formar neblina, si se introduce una alteración como partículas de polvo o radiación ionizante. Se usa este principio para "bombardear" las nubes que a menudo contienen vapor sobreenfriado, y causar condensación y lluvia.

A veces es posible *sobrecalentar* un líquido por encima de su temperatura de ebullición normal. Cualquier alteración pequeña, como agitación, causa ebullición local con formación de burbujas.

Los sistemas de calefacción por vapor de agua usan un proceso de ebullición-condensación para transferir calor del horno a los radiadores. Cada kilogramo de agua convertido en vapor en la caldera absorbe más de 2×10^6 J (el calor de vaporización L_v del agua) de la caldera y lo cede al condensarse en los radiadores. También se usan procesos de ebullición-condensación en los refrigeradores, acondicionadores de aire y bombas de calor. Veremos estos sistemas en el capítulo 20.

Los mecanismos de control de temperatura de muchos animales de sangre caliente aprovechan el calor de vaporización: eliminan calor del cuerpo usándolo para evaporar agua de la lengua (jadeo), o de la piel (sudor). El enfriamiento por evaporación permite al ser humano mantener su temperatura corporal normal en climas desérticos, donde la temperatura del aire puede alcanzar los 55 °C (aprox. 130 °F). La temperatura de la piel puede ser hasta 30 °C menor que la del aire circundante. En estas condiciones, una persona llega a sudar varios litros al día, y debe reponer esta agua. Las "ratas de desierto" experimentadas (como uno de los autores) aseguran que, en el desierto, ¡una cantimplora de menos de un galón es sólo un juguete! El enfriamiento por

evaporación también explica por qué sentimos frío al salir de una alberca (figura 17.22).

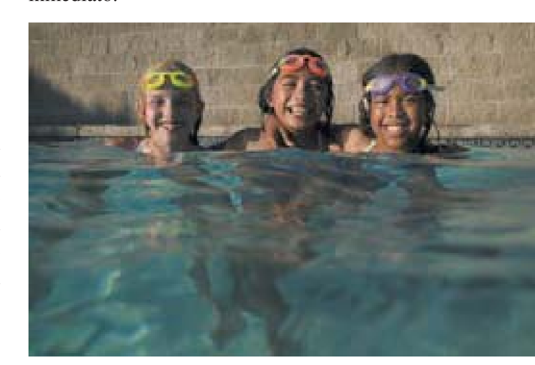
También se usa el enfriamiento por evaporación para enfriar edificios en climas calientes y secos, para condensar y recircular vapor de agua "usado" en plantas generadoras nucleares o que queman carbón. Eso es lo que sucede en las grandes torres de enfriamiento hechas de hormigón que vemos en tales plantas.

Las reacciones químicas, como la combustión, son análogas a los cambios de fase en cuanto a que implican cantidades definidas de calor. La combustión total de 1 gramo de gasolina produce unos 46,000 J (casi 11,000 cal), así que el **calor de combustión L_c** de la gasolina es

$$L_c = 46{,}000\ \mathrm{J/g} = 4.6 \times 10^7\ \mathrm{J/kg}$$

Los valores energéticos de los alimentos se definen de forma similar. Al decir que un gramo de mantequilla de maní "contiene 6 calorías", queremos decir que se liberan 6 kcal de calor (6000 cal o 25,000 J) cuando los átomos de carbono e hidrógeno de la mantequilla reaccionan con oxígeno (con la ayuda de enzimas) y se convierten por completo en CO_2 y H_2O. No toda esta energía puede convertirse directamente en trabajo mecánico. Estudiaremos la *eficiencia* de la utilización de la energía en el capítulo 20.

17.22 Aunque el agua esté tibia y el día sea caluroso, estas niñas sentirán frío cuando salgan de la alberca. Ello se debe a que, al evaporarse el agua de su piel, extrae de su cuerpo el calor de vaporización que necesita. Para mantenerse calientes, tendrán que secarse de inmediato.



Cálculos de calor

Veamos algunos ejemplos de cálculos calorimétricos (cálculos con calor). El principio básico es sencillo: si fluye calor entre dos cuerpos aislados de su entorno, el calor perdido por un cuerpo debe ser igual al ganado por el otro. El calor es transferencia de energía, así que este principio es realmente la conservación de la energía. La calorimetría, que sólo se ocupa de una cantidad conservada, es en varios sentidos ¡la más sencilla de todas las teorías físicas!

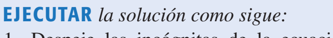
Estrategia para resolver problemas 17.2 Problemas de calorimetría

MP

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Cuando fluye calor entre dos cuerpos que están aislados de su entorno, la cantidad de calor perdido por un cuerpo debe ser igual a la ganada por el otro.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Identifique los objetos que intercambian calor. Para evitar confusión con los signos algebraicos, tome cada cantidad de calor *agregada* a un cuerpo como *positiva*, y cada cantidad que *sale* de un cuerpo, como *negativa*. Si interactúan dos o más cuerpos, la *suma algebraica* de las cantidades de calor transferidas a todos los cuerpos debe ser cero.
2. Cada objeto sufrirá un cambio de temperatura sin cambio de fase, un cambio de fase a temperatura constante, o ambas cuestiones. Use la ecuación (17.13) para describir los cambios de temperatura y la ecuación (17.20) para describir los cambios de fase.
3. Consulte en la tabla 17.3 valores de calor específico o de capacidad calorífica molar, y en la 17.4, calores de fusión o de vaporización.
4. Asegúrese de identificar las cantidades conocidas y las incógnitas.



EJECUTAR *la solución como sigue:*

1. Despeje las incógnitas de la ecuación (17.13) o de la (17.20), o de ambas. Muchas veces habrá que calcular una temperatura desconocida. Represéntela con un símbolo algebraico como T. Así, si un cuerpo tiene una temperatura inicial de 20 °C y una temperatura final T desconocida, su cambio de temperatura será $\Delta T = T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}} = T - 20\ °\mathrm{C}$ (*no* $20\ °\mathrm{C} - T$).
2. En problemas donde hay cambios de fase, como hielo que se derrite, tal vez no se sepa anticipadamente si *todo* el material cambia de fase o sólo una parte. Siempre puede suponerse una cosa o la otra y, si se obtiene un resultado absurdo (como una temperatura final más alta o más baja que *todas* las temperaturas iniciales), se sabrá que el supuesto inicial era erróneo. ¡Regrese e inténtelo otra vez!

EVALUAR *la respuesta:* Un error común es utilizar el signo algebraico equivocado para un término en Q o en ΔT. Vuelva a revisar sus cálculos y asegúrese de que los resultados finales sean físicamente lógicos.

Ejemplo 17.8 Cambio de temperatura sin cambio de fase

En el campo una geóloga bebe su café matutino de una taza de aluminio. La taza tiene una masa de 0.120 kg e inicialmente está a 20.0 °C cuando se vierte en ella 0.300 kg de café que inicialmente estaba a 70.0 °C. ¿A qué temperatura alcanzarán la taza y el café el equilibrio térmico? (Suponga que el calor específico del café es el mismo del agua y que no hay intercambio de calor con el entorno.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Los dos objetos que se deben considerar son la taza y el café, en tanto que la incógnita es su temperatura final.

PLANTEAR: No hay cambios de fase en esta situación, así que sólo necesitamos la ecuación (17.13).



continúa

EJECUTAR: Usando la tabla 17.3, el calor (negativo) ganado por el café es

$$Q_{café} = m_{café}\, c_{agua}\, \Delta T_{café} = (0.300\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})(T - 70.0\text{ °C})$$

El calor (positivo) ganado por la taza de aluminio es

$$Q_{aluminio} = m_{aluminio}\, c_{aluminio}\, \Delta T_{aluminio} = (0.120\text{ kg})(910\text{ J/kg}\cdot\text{K})(T - 20.0\text{ °C})$$

Igualamos a cero la suma de estas dos cantidades de calor, obteniendo una ecuación algebraica para T:

$$Q_{café} + Q_{aluminio} = 0 \qquad \text{o bien,}$$

$$(0.300\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})(T - 70.0\text{ °C}) + (0.120\text{ kg})(910\text{ J/kg}\cdot\text{K})(T - 20.0\text{ °C}) = 0$$

La solución de esta ecuación da $T = 66.0$ °C.

EVALUAR: La temperatura final es mucho más cercana a la temperatura inicial del café que a la de la taza; el agua tiene un calor específico mucho mayor que el aluminio, y tenemos más del doble de masa de agua. También podemos calcular las cantidades de calor sustituyendo el valor $T = 66.0$ °C en las ecuaciones originales. Vemos que $Q_{café} = -5.0 \times 10^3$ J y $Q_{aluminio} = +5.0 \times 10^3$ J; $Q_{café}$ es negativo, lo que implica que el café pierde calor.

Ejemplo 17.9 Cambios tanto de temperatura como de fase

Una estudiante de física desea enfriar 0.25 kg de Diet Omni-Cola (casi pura agua), que está a 25 °C, agregándole hielo que está a −20 °C. ¿Cuánto hielo debería ella agregar para que la temperatura final sea 0 °C con todo el hielo derretido, si puede despreciarse la capacidad calorífica del recipiente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El hielo y la Omni-Cola son los objetos que intercambian calor. La Omni-Cola sufre sólo un cambio de temperatura; en tanto que el hielo sufre tanto un cambio de temperatura como un cambio de fase, de sólido a líquido. La incógnita es la masa de hielo, m_{hielo}.

PLANTEAR: Utilizamos la ecuación (17.13) para calcular la cantidad de calor necesaria para calentar el hielo a 0 °C y enfriar la Omni-Cola a 0 °C. Además, necesitaremos la ecuación (17.20) para calcular el calor requerido para fundir el hielo a 0 °C.

EJECUTAR: La Omni-Cola pierde calor, así que el calor que se le agrega es negativo:

$$Q_{Omni} = m_{Omni} c_{agua}\, \Delta T_{Omni} = (0.25\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})(0\text{ °C} - 25\text{ °C}) = -26{,}000\text{ J}$$

De la tabla 17.3, el calor específico del hielo (distinto al del agua líquida) es 2.1×10^3 J/kg · K. Sea la masa de hielo m_{hielo}; el calor Q_1 necesario para calentarlo de −20 °C a 0 °C es

$$Q_1 = m_{hielo}\, c_{hielo}\, \Delta T_{hielo} = m_{hielo}(2.1 \times 10^3\text{ J/kg}\cdot\text{K})[0\text{ °C} - (-20\text{ °C})] = m_{hielo}(4.2 \times 10^4\text{ J/kg})$$

Por la ecuación (17.20), el calor adicional Q_2 necesario para fundir esta masa de hielo es la masa multiplicada por el calor de fusión. Usando la tabla 17.4, obtenemos

$$Q_2 = m_{hielo}\, L_f = m_{hielo}(3.34 \times 10^5\text{ J/kg})$$

La suma de estas tres cantidades debe ser cero:

$$Q_{Omni} + Q_1 + Q_2 = -26{,}000\text{ J} + m_{hielo}(42{,}000\text{ J/kg}) + m_{hielo}(334{,}000\text{ J/kg}) = 0$$

Despejando m_{hielo}, obtenemos $m_{hielo} = 0.069$ kg $= 69$ g.

EVALUAR: Esta masa de hielo corresponde a tres o cuatro cubitos de hielo de tamaño mediano, lo cual parece razonable para la cantidad de Omni-Cola del problema.

Ejemplo 17.10 ¿Qué cocina?

Una olla gruesa de cobre con masa de 2.0 kg (incluida su tapa) está a una temperatura de 150 °C. Usted vierte en ella 0.10 kg de agua a 25 °C y rápidamente tapa la olla para que no se escape el vapor. Calcule la temperatura final de la olla y de su contenido, y determine la fase (líquido o gas) del agua. Suponga que no se pierde calor al entorno.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Los dos objetos que intercambian calor son el agua y la olla. En esta situación hay tres posibles situaciones finales: 1. nada del agua hierve y la temperatura final es menor que 100 °C; 2. parte del agua hierve, y se produce una mezcla de agua y vapor a 100 °C; 3. toda el agua hierve, y se producen 0.10 kg de vapor a una temperatura de 100 °C o más.

PLANTEAR: De nuevo utilizamos la ecuación (17.13) para el calor transferido en un cambio de temperatura y la ecuación (17.20) para el calor transferido en un cambio de fase.

EJECUTAR: El caso más sencillo de calcular es el **1.**; entonces, sea la temperatura final común del agua líquida y la olla de cobre T. Puesto que suponemos que no hay cambios de fase, la suma de las cantidades de calor agregadas a los dos materiales es

$$\begin{aligned}Q_{agua} + Q_{cobre} &= m_{agua} c_{agua}(T - 25\text{ °C}) + m_{cobre} c_{cobre}(T - 150\text{ °C}) \\ &= (0.10\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})(T - 25\text{ °C}) + (2.0\text{ kg})(390\text{ J/kg}\cdot\text{K})(T - 150\text{ °C}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Despejando T obtenemos $T = 106$ °C. Sin embargo, esto rebasa el punto de ebullición del agua, ¡lo que contradice nuestro supuesto de que nada de agua hierve! Por lo tanto, el supuesto no puede ser correcto; al menos un poco de agua cambia de fase.

Si intentamos la segunda posibilidad, de que la temperatura final sea 100 °C, tendremos que calcular la fracción de agua que se evapora. Sea x dicha fracción. La cantidad de calor (positiva) necesaria para vaporizar esta agua es $(xm_{agua})L_v$. Si hacemos a la temperatura final $T = 100$ °C, tenemos

$$\begin{aligned} Q_{agua} &= m_{agua}c_{agua}(100\ °C - 25\ °C) + xm_{agua}L_v \\ &= (0.10\ kg)(4190\ J/kg \cdot K)(75\ K) \\ &\quad + x(0.10\ kg)(2.256 \times 10^6\ J/kg) \\ &= 3.14 \times 10^4\ J + x(2.256 \times 10^5\ J) \\ Q_{cobre} &= m_{cobre}c_{cobre}(100\ °C - 150\ °C) \\ &= (2.0\ kg)(390\ J/kg \cdot K)(-50\ K) = -3.90 \times 10^4\ J \end{aligned}$$

El requisito de que la suma de todas las cantidades de calor sea cero da, entonces,

$$\begin{aligned} Q_{agua} + Q_{cobre} &= 3.14 \times 10^4\ J + x(2.256 \times 10^5\ J) \\ &\quad -3.90 \times 10^4\ J = 0 \\ x &= \frac{3.90 \times 10^4\ J - 3.14 \times 10^4\ J}{2.256 \times 10^5\ J} = 0.034 \end{aligned}$$

Esto es razonable, y concluimos que la temperatura final del agua y el cobre es 100 °C. De los 0.10 kg de agua original, 0.034(0.10 kg) = 0.0034 kg = 3.4 g se convirtió en vapor a 100 °C.

EVALUAR: Si x hubiera resultado mayor que 1, habríamos tenido otra contradicción (la fracción de agua que se evaporó no puede ser mayor que 1). En este caso, la descripción correcta habría sido la tercera posibilidad: toda el agua se habría evaporado y la temperatura final sería mayor que 100 °C. ¿Puede demostrar que esto es lo que habría sucedido si originalmente hubiéramos vertido menos de 15 g de agua a 25 °C en la olla?

Ejemplo 17.11 Combustión, cambio de temperatura y cambio de fase

En cierta estufa de gasolina portátil, 30% de la energía liberada al quemar el combustible calienta el agua de la olla en la estufa. Si calentamos 1.00 L (1.00 kg) de agua, de 20 °C a 100 °C, y evaporamos 0.25 kg de ella, ¿cuánta gasolina habremos quemado en el proceso?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema, toda el agua sufre un cambio de temperatura y una parte de ella también sufre un cambio de fase de líquido a gas. Esto requiere cierta cantidad de calor, que usaremos para determinar la cantidad de gasolina que es preciso quemar (la incógnita).

PLANTEAR: Aplicamos las ecuaciones (17.13) y (17.20), así como la idea del calor de combustión.

EJECUTAR: El calor requerido para elevar la temperatura del agua de 20 °C a 100 °C es

$$\begin{aligned} Q_1 &= mc\,\Delta T = (1.00\ kg)(4190\ J/kg \cdot K)(80\ K) \\ &= 3.35 \times 10^5\ J \end{aligned}$$

Para hervir 0.25 kg de agua a 100 °C necesitamos

$$Q_2 = mL_v = (0.25\ kg)(2.256 \times 10^6\ J/kg) = 5.64 \times 10^5\ J$$

La energía total requerida es la suma 8.99×10^5 J. Esto es sólo 0.30 del calor total de combustión, así que la energía es $(8.99 \times 10^5\ J)/0.30 = 3.00 \times 10^6$ J. Como dijimos antes, 1 gramo de gasolina libera 46,000 J, así que la masa de gasolina requerida es

$$\frac{3.00 \times 10^6\ J}{46{,}000\ J/g} = 65\ g$$

Es decir, un volumen de cerca de 0.09 L de gasolina.

EVALUAR: Este resultado da muestra de la increíble cantidad de energía que puede liberarse quemando incluso una cantidad pequeña de gasolina. Observe que la mayoría del calor suministrado se usó para evaporar 0.25 L de agua. ¿Puede demostrar que se necesitarían otros 123 g de gasolina para evaporar el resto del agua?

Evalúe su comprensión de la sección 17.6 Si tomamos un bloque de hielo a 0 °C y le añadimos calor a ritmo constante, después de un tiempo t todo el hielo se habrá convertido en vapor de agua a 100 °C. ¿Qué tendrá al tiempo $t/2$? i) sólo hielo a 0 °C; ii) una mezcla de hielo y agua a 0 °C; iii) agua a una temperatura entre 0 °C y 100 °C; iv) una mezcla de agua y vapor a 100 °C.

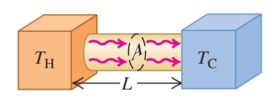
MP

17.7 Mecanismos de transferencia de calor

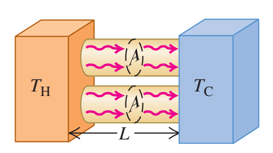
Hemos hablado de: *conductores* y *aislantes* que son, respectivamente, los materiales que permiten o impiden la transferencia de calor entre cuerpos. Veamos ahora más a fondo las *tasas* de transferencia de energía. En la cocina, usamos una olla de metal o vidrio para tener buena transferencia de calor de la estufa a lo que cocinamos, pero el refrigerador está aislado con un material que *evita* que fluya calor hacia la comida que está en el interior. ¿Cómo describimos la diferencia entre estos dos materiales?

17.23 Flujo de calor en estado estable debido a conducción en una varilla uniforme.

a) Corriente de calor H.



b) Al duplicar el área transversal del conductor, se duplica la corriente de calor (H es proporcional a A).



c) Al duplicar la longitud del conductor, se reduce a la mitad la corriente de calor (H es inversamente proporcional a L).

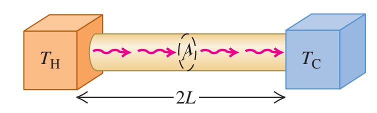


Tabla 17.5 Conductividades térmicas

Sustancia	k (W/m · K)
Metales	
Aluminio	205.0
Latón	109.0
Cobre	385.0
Plomo	34.7
Mercurio	8.3
Plata	406.0
Acero	50.2
Sólidos (valores representativos)	
Ladrillo, aislante	0.15
Tabique (ladrillo rojo)	0.6
Concreto (hormigón)	0.8
Corcho	0.04
Fieltro	0.04
Fibra de vidrio	0.04
Vidrio	0.8
Hielo	1.6
Lana mineral	0.04
Espuma de poliestireno	0.01
Madera	0.12–0.04
Gases	
Aire	0.024
Argón	0.016
Helio	0.14
Hidrógeno	0.14
Oxígeno	0.023

Los tres mecanismos de transferencia de calor son conducción, convección y radiación. Hay *conducción* dentro de un cuerpo o entre dos cuerpos que están en contacto. La *convección* depende del movimiento de una masa de una región del espacio a otra. La *radiación* es transferencia de calor por radiación electromagnética, como la luz del Sol, sin que tenga que haber materia en el espacio entre los cuerpos.

Conducción

Si sujetamos el extremo de una varilla de cobre y colocamos el otro en una flama, el extremo que sostenemos se calienta cada vez más, aunque no esté en contacto directo con la flama. El calor llega al extremo más frío por **conducción** a través del material. En el nivel atómico, los átomos de las regiones más calientes tienen más energía cinética, en promedio, que sus vecinos más fríos, así que empujan a sus vecinos, transfiriéndoles algo de su energía. Los vecinos empujan *a otros* vecinos, continuando así a través del material. Los átomos en sí no se mueven de una región del material a otra, pero su energía sí.

La mayoría de los metales usa otro mecanismo más eficaz para conducir calor. Dentro del metal, algunos electrones pueden abandonar sus átomos originales y vagar por la red cristalina. Estos electrones "libres" pueden llevar energía rápidamente de las regiones más calientes del metal a las más frías; por ello, los metales generalmente son buenos conductores del calor. Una varilla metálica a 20 °C se siente más fría que un trozo de madera a 20 °C porque el calor puede fluir más fácilmente de la mano al metal. La presencia de electrones "libres" también hace que, en general, los metales sean buenos conductores eléctricos.

Sólo hay transferencia de calor entre regiones que están a diferente temperatura, y la dirección de flujo siempre es de la temperatura más alta a la más baja. La figura 17.23a muestra una varilla de material conductor con área transversal A y longitud L. El extremo izquierdo de la varilla se mantiene a una temperatura T_H, y el derecho, a una temperatura menor T_C, así que fluye calor de izquierda a derecha. Los costados de la varilla están cubiertos con un aislante ideal, así que no hay transferencia de calor por los lados.

Si se transfiere una cantidad de calor dQ por la varilla en un tiempo dt, la tasa de flujo de calor es dQ/dt. Llamamos a ésta la **corriente de calor**, denotada por H. Es decir, $H = dQ/dt$. Se observa experimentalmente que la corriente de calor es proporcional al área transversal A de la varilla (figura 17.23b) y a la diferencia de temperatura $(T_H - T_C)$, e inversamente proporcional a la longitud de la varilla L (figura 17.23c). Introduciendo una constante de proporcionalidad k llamada **conductividad térmica** del material, tenemos

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \quad \text{(corriente de calor en conducción)} \tag{17.21}$$

La cantidad $(T_H - T_C)/L$ es la diferencia de temperatura *por unidad de longitud*, llamada **gradiente de temperatura**. El valor numérico de k depende del material de la varilla. Los materiales con k grande son buenos conductores del calor; aquellos con k pequeña son conductores o aislantes deficientes. La ecuación (17.21) también da la corriente de calor que pasa a través de una plancha, o por *cualquier* cuerpo homogéneo con área transversal A uniforme y perpendicular a la dirección de flujo; L es la longitud de la trayectoria de flujo del calor.

Las unidades de corriente de calor H son unidades de energía por tiempo, es decir, potencia; la unidad SI de corriente de calor es el watt (1 W = 1 J/s). Podemos determinar las unidades de k despejándola de la ecuación (17.21). Verifique que las unidades sean W/m · K. En la tabla 17.5 se dan algunos valores de k.

La conductividad térmica del aire "muerto" (inmóvil) es muy baja. Un suéter de lana nos mantiene calientes porque atrapa aire entre las fibras. En realidad, muchos

materiales aislantes como la espuma de poliestireno y la fibra de vidrio son en su mayoría aire muerto. La figura 17.24 muestra un material cerámico con propiedades térmicas muy poco comunes, entre ellas una conductividad muy baja.

Si la temperatura varía de manera no uniforme a lo largo de la varilla conductora, introducimos una coordenada x a lo largo y generalizamos el gradiente de temperatura como dT/dx. La generalización correspondiente de la ecuación (17.21) es

$$H = \frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx} \tag{17.22}$$

El signo negativo indica que el calor siempre fluye en la dirección de temperatura *decreciente*.

En el campo del aislamiento térmico de edificios, los ingenieros usan el concepto de **resistencia térmica**, denotada con R. La resistencia térmica R de una placa de material con área A se define de modo que la corriente de calor H que atraviesa la placa es

$$H = \frac{A(T_H - T_C)}{R} \tag{17.23}$$

donde T_H y T_C son las temperaturas a los dos lados de la placa. Comparando esto con la ecuación (17.21), vemos que R está dada por

$$R = \frac{L}{k} \tag{17.24}$$

donde L es el espesor de la placa. La unidad SI para R es $1\ \text{m}^2 \cdot \text{K/W}$. En las unidades empleadas para materiales aislantes comerciales en Estados Unidos, H se da en Btu/h, A en ft^2 y $T_H - T_C$ en F°. (1 Btu/h = 0.293 W.) Las unidades de R son entonces $\text{ft}^2 \cdot \text{F°} \cdot \text{h/Btu}$, aunque los valores de R suelen citarse sin unidades; una capa de 6 in de espesor de fibra de vidrio tiene un valor R de 19 (es decir, $R = 19\ \text{ft}^2 \cdot \text{F°} \cdot \text{h/Btu}$), una placa de 2 in de espuma de poliestireno tiene un valor de 12, y así sucesivamente. Al duplicarse el espesor, también se duplica el valor R. En climas nórdicos severos, es práctica común para construcciones nuevas especificar valores R de cerca de 30 para paredes y techos exteriores. Si el material aislante está en capas, como en una pared enyesada con aislante de fibra de vidrio y vista exterior de madera, los valores R son aditivos. ¿Sabe por qué? (Véase el problema 17.110.)

17.24 Ésta placa protectora, diseñada para usarse en el transbordador espacial, tiene propiedades térmicas extraordinarias. La conductividad térmica extremadamente baja y la capacidad calorífica tan pequeña del material permiten sostener la placa por sus bordes, aunque su temperatura sea tan alta que emite la luz que se observa en esta fotografía.



Estrategia para resolver problemas 17.3 Conducción de calor



IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* El concepto de conducción de calor entra en juego siempre que dos objetos a diferente temperatura están en contacto.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Identifique la dirección de flujo de calor en el problema (de caliente a frío). En la ecuación (17.21), L siempre se mide en esta dirección, y A siempre es un área perpendicular a ella. En muchos casos, una caja u otro recipiente con forma irregular pero espesor de paredes uniforme, puede aproximarse como una plancha plana con el mismo espesor y el área total de las paredes.
2. Identifique la incógnita.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Si fluye calor a través de un solo objeto, despeje la incógnita de la ecuación (17.21).
2. En algunos problemas, el calor fluye por dos materiales distintos en sucesión. En tal caso, la temperatura en la interfaz de los materiales es intermedia entre T_H y T_C; represéntela con un símbolo como T. Las diferencias de temperatura para los dos materiales son, entonces: $(T_H - T)$ y $(T - T_C)$. En estado estacionario el flujo de calor debe ser el mismo que pasa por ambos materiales en sucesión, así que la corriente de calor H debe ser *la misma* en ambos materiales.
3. Si hay dos trayectorias para el flujo de calor *paralelas*, y fluye calor por ambas, la H total es la suma de las cantidades H_1 y H_2 para las trayectorias individuales. Un ejemplo es el flujo de calor que sale de una casa, tanto por el cristal de una ventana como por su marco. En este caso, la diferencia de temperatura es la misma para ambas trayectorias, pero L, A y k podrían ser diferentes.
4. Como siempre, es vital usar unidades consistentes. Si k está expresado en $\text{W/m} \cdot \text{K}$, ¡no use distancias en centímetros, calor en calorías ni T en grados Fahrenheit!

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, pregúntese si los resultados son físicamente lógicos.

Ejemplo 17.12 Conducción a través de una hielera portátil

Una caja de espuma de poliestireno para mantener frías las bebidas en un día de campo (figura 17.25a) tiene un área de pared total (incluida la tapa) de 0.80 m^2 y un espesor de pared de 2.0 cm, y está llena con hielo, agua y latas de Omni-Cola a 0 °C. Calcule la tasa de flujo de calor hacia el interior de la caja, si la temperatura exterior es de 30 °C. ¿Cuánto hielo se derrite en un día?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La primera incógnita es la corriente de calor H. La segunda es la cantidad de hielo que se derrite, que depende de la corriente de calor (calor por unidad de tiempo), el tiempo transcurrido y el calor de fusión.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (17.21) para describir la corriente de calor y la ecuación (17.20), $Q = mL_f$, para determinar la masa m del hielo que se derrite debido al flujo de calor.

EJECUTAR: Suponemos que el flujo total de calor es aproximadamente el que habría a través de una plancha plana de 0.80 m^2 de área y 2.0 cm = 0.020 m de espesor (figura 17.25a). Obtenemos k de la tabla 17.5. Por la ecuación (17.21) la corriente de calor (tasa de flujo de calor) es

$$H = kA\frac{T_H - T_C}{L} = (0.010\ \text{W/m}\cdot\text{K})(0.80\ \text{m}^2)\frac{30\ °\text{C} - 0\ °\text{C}}{0.020\ \text{m}}$$
$$= 12\ \text{W} = 12\ \text{J/s}$$

El flujo total de calor Q en un día (86,400 s) es

$$Q = Ht = (12\ \text{J/s})(86{,}400\ \text{s}) = 1.04 \times 10^6\ \text{J}$$

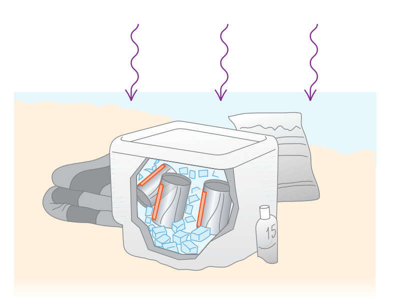
El calor de fusión del hielo es de 3.34×10^5 J/kg, así que la cantidad de hielo fundida por ese calor es

$$m = \frac{Q}{L_f} = \frac{1.04 \times 10^6\ \text{J}}{3.34 \times 10^5\ \text{J/kg}} = 3.1\ \text{kg}$$

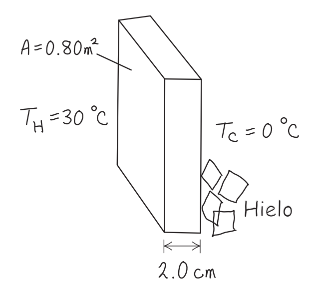
EVALUAR: La baja corriente de calor es resultado de la baja conductividad térmica de la espuma de poliestireno. En 24 horas, fluye una cantidad considerable de calor, aunque la cantidad de hielo que se derrite es relativamente pequeña, ya que el calor de fusión es elevado.

17.25 Conducción de calor por las paredes de una hielera de espuma de poliestireno.

a) Una hielera en la playa



b) Nuestro esquema para este problema



Ejemplo 17.13 Conducción a través de dos barras I

Una barra de acero de 10.0 cm de longitud se suelda extremo con extremo a una barra de cobre de 20.0 cm de longitud. Ambas están perfectamente aisladas por sus costados. Las barras tienen la misma sección transversal cuadrada de 2.00 cm por lado. El extremo libre de la barra de acero se mantiene a 100 °C poniéndolo en contacto con vapor de agua, y el de la barra de cobre se mantiene a 0 °C poniéndolo en contacto con hielo. Calcule la temperatura en la unión de las dos barras y la tasa de flujo de calor total.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema hay flujo de calor a través de dos barras de composiciones diferentes. Como señalamos en la Estrategia para resolver problemas 17.3, las corrientes de calor entre las dos barras deben ser iguales.

PLANTEAR: La figura 17.26 muestra la situación. Escribiremos la ecuación (17.21) dos veces, una para cada barra, e igualaremos las corrientes de calor H_{acero} y H_{cobre}. En ambas expresiones para la corriente de calor interviene la temperatura T en la unión, que es una de las incógnitas.

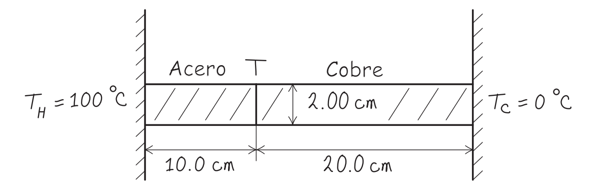
EJECUTAR: Igualando las dos corrientes de calor,

$$H_{acero} = \frac{k_{acero}A(100\ °\text{C} - T)}{L_{acero}} = H_{cobre} = \frac{k_{cobre}A(T - 0\ °\text{C})}{L_{cobre}}$$

Las áreas A son iguales y pueden eliminarse por división. Sustituyendo $L_{acero} = 0.100$ m, $L_{cobre} = 0.200$ m y los valores numéricos de k de la tabla 17.5, obtenemos

$$\frac{(50.2\ \text{W/m}\cdot\text{K})(100\ °\text{C} - T)}{0.100\ \text{m}} = \frac{(385\ \text{W/m}\cdot\text{K})(T - 0\ °\text{C})}{0.200\ \text{m}}$$

17.26 Nuestro esquema para este problema.



Reacomodando y despejando T, obtenemos

$$T = 20.7\ °\mathrm{C}$$

Podemos calcular la corriente de calor total sustituyendo este valor de T en cualquiera de las expresiones anteriores:

$$H_{\text{acero}} = \frac{(50.2\ \mathrm{W/m \cdot K})(0.0200\ \mathrm{m})^2(100\ °\mathrm{C} - 20.7\ °\mathrm{C})}{0.100\ \mathrm{m}} = 15.9\ \mathrm{W}$$

o

$$H_{\text{cobre}} = \frac{(385\ \mathrm{W/m \cdot K})(0.0200\ \mathrm{m})^2(20.7\ °\mathrm{C})}{0.200\ \mathrm{m}} = 15.9\ \mathrm{W}$$

EVALUAR: Aunque la barra de acero es más corta, su caída de temperatura es mucho mayor que en la barra de cobre (de 100 °C a 20.7 °C en el acero contra de 20.7 °C a 0 °C en el cobre). La diferencia aumenta porque el acero es mal conductor en comparación con el cobre.

Ejemplo 17.14 Conducción a través de dos barras II

En el ejemplo 17.13, suponga que las dos barras se separan. Un extremo de cada una se mantiene a 100 °C, y el otro, a 0 °C. Determine la tasa *total* de flujo de calor en las dos barras.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este caso, las barras están en paralelo, no en serie. La corriente de calor total ahora es la *suma* de las corrientes en las dos barras.

PLANTEAR: La figura 17.27 muestra la situación. Para cada barra, $T_H - T_C = 100\ °\mathrm{C} - 0\ °\mathrm{C} = 100\ \mathrm{K}$.

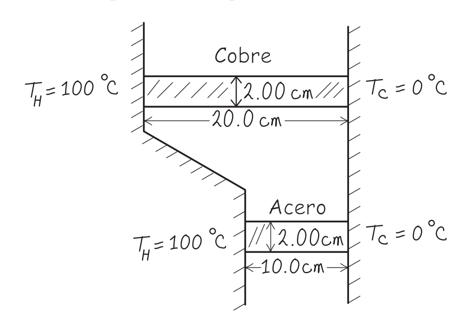
EJECUTAR: Escribimos individualmente las corrientes de calor para cada barra y después las sumamos para obtener la corriente de calor total:

$$H = H_{\text{acero}} + H_{\text{cobre}} = \frac{k_{\text{acero}}A(T_H - T_C)}{L_{\text{acero}}} + \frac{k_{\text{cobre}}A(T_H - T_C)}{L_{\text{cobre}}}$$

$$= \frac{(50.2\ \mathrm{W/m \cdot K})(0.0200\ \mathrm{m})^2(100\ \mathrm{K})}{0.100\ \mathrm{m}} + \frac{(385\ \mathrm{W/m \cdot K})(0.0200\ \mathrm{m})^2(100\ \mathrm{K})}{0.200\ \mathrm{m}}$$

$$= 20.1\ \mathrm{W} + 77.0\ \mathrm{W} = 97.1\ \mathrm{W}$$

EVALUAR: El flujo de calor en la barra de cobre es mucho mayor que en la de acero, a pesar de ser más larga, porque la conductividad térmica del cobre es mucho mayor. El flujo total de calor es mucho mayor que en el ejemplo 17.13, en parte porque la sección transversal total para el flujo es mayor y, además, porque hay un gradiente completo de 100 K en cada barra.



17.27 Nuestro esquema de este problema.

Convección

La **convección** es transferencia de calor por movimiento de una masa de fluido de una región del espacio a otra. Como ejemplos conocidos tenemos los sistemas de calefacción domésticos de aire caliente y de agua caliente, el sistema de enfriamiento de un motor de combustión y el flujo de sangre en el cuerpo. Si el fluido circula impulsado por un ventilador o bomba, el proceso se llama *convección forzada*; si el flujo se debe a diferencias de densidad causadas por expansión térmica, como el ascenso de aire caliente, el proceso se llama *convección natural* o *convección libre* (figura 17.28).

La convección libre en la atmósfera desempeña un papel dominante en la determinación del estado del tiempo, y la convección en los océanos es un mecanismo importante de transferencia global de calor. En una escala menor, los halcones que planean y los pilotos de planeadores, aprovechan las corrientes térmicas que suben del suelo caliente. El mecanismo de transferencia de calor más importante dentro del cuerpo humano (necesario para mantener una temperatura casi constante en diversos entornos) es la convección *forzada* de sangre, bombeada por el corazón.

La transferencia de calor convectiva es un proceso muy complejo, y no puede describirse con una ecuación simple. Veamos algunos hechos experimentales:

1. La corriente de calor causada por convección es directamente proporcional al área superficial. Esto explica las áreas superficiales grandes de los radiadores y las aletas de enfriamiento.
2. La viscosidad de los fluidos frena la convección natural cerca de una superficie estacionaria, formando una película superficial que, en una superficie vertical, suele tener el mismo valor aislante que tiene 1.3 cm de madera terciada (valor $R = 0.7$). La convección forzada reduce el espesor de esta película, aumentando

17.28 Un elemento de calefacción en la punta de este tubo sumergido calienta el agua circundante, produciendo un patrón complejo de convección libre.



la tasa de transferencia de calor. Esto explica el "factor de congelación": nos enfriamos más rápidamente en un viento frío que en aire tranquilo a la misma temperatura.

3. La corriente de calor causada por convección es aproximadamente proporcional a la potencia $\frac{5}{4}$ de la diferencia de temperatura entre la superficie y el cuerpo principal del fluido.

Radiación

La **radiación** es la transferencia de calor por ondas electromagnéticas como la luz visible, el infrarrojo y la radiación ultravioleta. Todos hemos sentido el calor de la radiación solar y el intenso calor de un asador de carbón, o las brasas de una chimenea. Casi todo el calor de estos cuerpos tan calientes no nos llega por conducción ni por convección en el aire intermedio, sino por *radiación*. Habría esta transferencia de calor aunque sólo hubiera vacío entre nosotros y la fuente de calor.

17.29 Esta fotografía infrarroja de colores falsos revela la radiación emitida por diversas partes del cuerpo de este hombre. La emisión más intensa (color rojo) proviene de las áreas más calientes, mientras que la bebida fría casi no produce emisión.



Todo cuerpo, aun a temperaturas ordinarias, emite energía en forma de radiación electromagnética. A temperaturas ordinarias, digamos 20 °C, casi toda la energía se transporta en ondas de infrarrojo con longitudes de onda mucho mayores que las de la luz visible (véanse las figuras 17.4 y 17.29). Al aumentar la temperatura, las longitudes de onda se desplazan hacia valores mucho menores. A 800 °C, un cuerpo emite suficiente radiación visible para convertirse en objeto luminoso "al rojo vivo", aunque aun a esta temperatura la mayoría de la energía se transporta en ondas de infrarrojo. A 3000 °C, la temperatura de un filamento de bombilla incandescente, la radiación contiene suficiente luz visible para que el cuerpo se vea "al rojo blanco".

La tasa de radiación de energía de una superficie es proporcional a su área superficial A, y aumenta rápidamente con la temperatura, según la cuarta potencia de la temperatura absoluta (Kelvin). La tasa también depende de la naturaleza de la superficie; esta dependencia se describe con una cantidad e llamada **emisividad**: un número adimensional entre 0 y 1 que representa la relación entre la tasa de radiación de una superficie dada y la de un área igual de una superficie radiante ideal a la misma temperatura. La emisividad también depende un poco de la temperatura. Así, la corriente de calor $H = dQ/dt$ debida a radiación de un área superficial A con emisividad e a la temperatura absoluta T se puede expresar como

$$H = Ae\sigma T^4 \qquad \text{(corriente de calor por radiación)} \tag{17.25}$$

donde σ es la constante física fundamental llamada **constante de Stefan-Boltzmann**. Esta relación se llama **ley de Stefan-Boltzmann** en honor de sus descubridores de finales del siglo XIX. El mejor valor numérico actual de σ es

$$\sigma = 5.670400(40) \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$$

Verifique la consistencia de unidades de la ecuación (17.25). La emisividad e suele ser mayor para superficies oscuras que claras. La emisividad de una superficie de cobre lisa es del orden de 0.3, pero e para una superficie negra opaca puede ser cercana a la unidad.

Ejemplo 17.15 Transferencia de calor por radiación

Una placa de acero delgada cuadrada, de 10 cm por lado, se calienta en una forja de herrero a una temperatura de 800 °C. Si su emisividad es de 0.60, calcule la tasa total de emisión de energía por radiación.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita es H, la tasa de emisión de energía.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (17.5) para calcular H a partir de los valores proporcionados.

EJECUTAR: El área superficial total, incluidos ambos lados, es de $2(0.10\ \text{m})^2 = 0.020\ \text{m}^2$. Debemos convertir la temperatura a la escala Kelvin; 800 °C = 1073 K. La ecuación (17.25) da, entonces,

$$\begin{aligned} H &= Ae\sigma T^4 \\ &= (0.020\ \text{m}^2)(0.60)(5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(1073\ \text{K})^4 \\ &= 900\ \text{W} \end{aligned}$$

EVALUAR: Un herrero parado cerca de la placa fácilmente sentirá el calor que ésta radia.

Radiación y absorción

Si bien un cuerpo a temperatura T está radiando, su entorno a temperatura T_s también lo hace, y el cuerpo *absorbe* parte de esta radiación. Si el cuerpo está en equilibrio térmico con su entorno, $T = T_s$ y las tasas de radiación y absorción deben ser iguales. Para ello, la tasa de absorción debe estar dada en general por $H = Ae\sigma T_s^4$. La tasa *neta* de radiación de un cuerpo a temperatura T con un entorno a temperatura T_s es entonces

$$H_{net} = Ae\sigma T^4 - Ae\sigma T_s^4 = Ae\sigma\left(T^4 - T_s^4\right) \quad (17.26)$$

En esta ecuación, un valor positivo de H implica *salida* neta de calor del cuerpo. La ecuación (17.26) indica que, para la radiación, igual que para la conducción y la convección, la corriente de calor depende de la *diferencia* de temperatura entre dos cuerpos.

Ejemplo 17.16 Radiación del cuerpo humano

Si el área superficial total del cuerpo humano es de 1.20 m^2 y la temperatura superficial es de 30 °C = 303 K, calcule la tasa total de radiación de energía del cuerpo. Si el entorno está a una temperatura de 20 °C, calcule la tasa *neta* de pérdida de calor del cuerpo por radiación. La emisividad del cuerpo es muy cercana a la unidad, sea cual fuere la pigmentación de la piel.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Debemos tomar en cuenta tanto la radiación que emite el cuerpo, como la radiación que éste absorbe de su ambiente.

PLANTEAR: La tasa de radiación de energía proveniente del cuerpo está dada por la ecuación (17.25); la tasa neta de pérdida de calor está dada por la ecuación (17.26).

EJECUTAR: Con $e = 1$ en la ecuación (17.25), tenemos que el cuerpo radia a razón de

$$\begin{aligned} H &= Ae\sigma T^4 \\ &= (1.20\ \text{m}^2)(1)(5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(303\ \text{K})^4 \\ &= 574\ \text{W} \end{aligned}$$

Esta pérdida se compensa en parte por absorción de radiación, que depende de la temperatura del entorno. La tasa *neta* de transferencia de energía por radiación está dada por la ecuación (17.26):

$$\begin{aligned} H_{net} &= Ae\sigma\left(T^4 - T_s^4\right) \\ &= (1.20\ \text{m}^2)(1)(5.67 \times 10^{-8}\ \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4) \\ &\quad \times \left[(303\ \text{K})^4 - (293\ \text{K})^4\right] = 72\ \text{W} \end{aligned}$$

EVALUAR: El valor de H_{net} es positivo ya que el cuerpo pierde calor hacia un entorno más frío.

Aplicaciones de la radiación

La transferencia de calor por radiación es importante en algunos lugares sorprendentes. Un bebé prematuro en una incubadora se puede enfriar peligrosamente por radiación, cuando las paredes de la incubadora están frías, aunque el *aire* de la incubadora esté tibio. Algunas incubadoras regulan la temperatura del aire midiendo la temperatura de la piel del bebé.

Un cuerpo que es buen absorbedor debe ser buen emisor. Un radiador ideal, con emisividad de 1, también es un absorbedor ideal, y absorbe *toda* la radiación que incide en él. Tal superficie ideal se denomina cuerpo negro ideal o simplemente **cuerpo negro**. En cambio, un *reflector* ideal, que *no* absorbe radiación, también es un radiador muy poco eficaz.

A esto se debe el recubrimiento plateado de las botellas de vacío ("termos") inventadas por Sir James Dewar (1842-1923). Dichas botellas tienen doble pared de vidrio, y se extrae el aire del espacio entre las paredes; esto elimina casi toda la transferencia de calor por conducción y convección. El plateado de las paredes refleja casi toda la radiación del contenido de vuelta al recipiente, y la pared en sí es muy mal emisor. Así, la botella puede mantener café caliente durante varias horas. El frasco Dewar, empleado para almacenar gases licuados muy fríos, se basa exactamente en el mismo principio.

Evalúe su compresión de la sección 17.7 Una habitación tiene una pared hecha de concreto, otra de cobre, y otra más de acero. Todas las paredes son del mismo tamaño y tienen la misma temperatura de 20 °C. ¿Qué pared se sentirá más fría al tocarla? i) la pared de concreto; ii) la pared de cobre; iii) la pared de acero; iv) las tres paredes se sentirán igual de frías al tocarlas.

CAPÍTULO 17 RESUMEN

Temperatura y escalas de temperatura: Un termómetro mide la temperatura. Dos cuerpos en equilibrio térmico deben tener la misma temperatura. Un material conductor entre dos cuerpos permite una interacción que conduce a equilibrio térmico; un material aislante evita o dificulta esa interacción.

Las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit se basan en las temperaturas de congelación (0 °C = 32 °F) y de ebullición (100 °C = 212 °F) del agua. Un grado Celsius es igual a $\frac{9}{5}$ grados Fahrenheit. (Véase el ejemplo 17.1.)

La escala Kelvin tiene su cero en la temperatura extrapolada de presión cero para un termómetro de gas, −273.15 °C = 0 K. En la escala de un termómetro de gas, el cociente de dos temperaturas T_1 y T_2 es igual por definición al cociente de las dos presiones correspondientes del termómetro de gas, p_1 y p_2. La temperatura de punto triple del agua (0.01 °C) se define como 273.16 K.

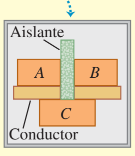
$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32° \quad (17.1)$$

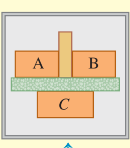
$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) \quad (17.2)$$

$$T_K = T_C + 273.15 \quad (17.3)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \quad (17.4)$$

Si los sistemas A y B están cada uno en equilibrio térmico con el sistema C …





… entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.

Expansión térmica y esfuerzo térmico: Un cambio de temperatura ΔT provoca un cambio en toda dimensión lineal L_0 de un cuerpo sólido. El cambio ΔL es aproximadamente proporcional a L_0 y ΔT. Asimismo, un cambio de temperatura ΔT causa un cambio ΔV en el volumen V_0 de cualquier material líquido o sólido, el cual es aproximadamente proporcional a V_0 y ΔT. Las cantidades α y β son los coeficientes de expansión lineal y de expansión de volumen, respectivamente. En sólidos, $\beta = 3\alpha$. (Véanse los ejemplos 17.2 a 17.4.)

Si un material se enfría o se calienta sujetándolo de modo que no pueda contraerse ni expandirse, está sometido a un esfuerzo de tensión F/A. (Véase el ejemplo 17.5.)

$$\Delta L = \alpha L_0 \, \Delta T \quad (17.6)$$

$$\Delta V = \beta V_0 \, \Delta T \quad (17.8)$$

$$\frac{F}{A} = -Y\alpha \, \Delta T \quad (17.12)$$

$L = L_0 + \Delta L$
$= L_0(1 + \alpha \, \Delta T)$

T_0 — L_0 — ΔL — $T_0 + \Delta T$

Calor, cambios de fase y calorimetría: El calor es transferencia de energía de un cuerpo a otro a causa de una diferencia de temperatura. La cantidad de calor Q necesaria para elevar la temperatura de una cantidad de material en una cantidad pequeña ΔT es proporcional a ΔT. Esta proporcionalidad se puede expresar en términos de la masa m y del calor específico c, o bien, en términos del número de moles n y la capacidad calorífica molar $C = Mc$. Aquí, M es la masa molar y $m = nM$. (Véanse los ejemplos 17.6 y 17.7.)

Para que una masa m de material cambie de fase a la misma temperatura (como de líquido a sólido o de líquido a vapor) hay que agregarle o quitarle una cantidad de calor. Esa cantidad es igual al producto de m y L, el calor de fusión, vaporización o sublimación.

Si se agrega calor a un cuerpo, el Q correspondiente es positivo; si se le quita, Q es negativo. El principio básico de la calorimetría es la conservación de la energía. En un sistema aislado, cuyas partes interactúan intercambiando calor, la suma algebraica de los Q para todas las partes del sistema debe ser cero. (Véanse los ejemplos 17.8 a 17.11.)

$$Q = mc \, \Delta T \quad (17.13)$$

$$Q = nC \, \Delta T \quad (17.18)$$

$$Q = \pm mL \quad (17.20)$$

La fase cambia, la temperatura es constante: $Q = +mL$.

T (°C)
100 — Punto de ebullición
0 — Punto de fusión
t

La temperatura aumenta, la fase no cambia: $Q = mc\Delta T$.

Conducción, convección y radiación: La conducción es transferencia de energía debido al movimiento molecular dentro de un material, sin movimiento del material. La corriente de calor H o conducción depende del área A por la que fluye el calor, la longitud L del trayecto de flujo del calor, la diferencia de temperatura ($T_H - T_C$) y la conductividad térmica k del material. (Véanse ejemplos 17.12 a 17.14.)

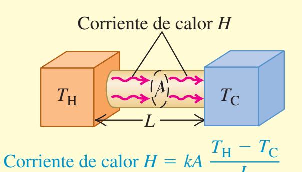
La convección es un proceso complejo de transferencia de calor, que implica movimiento de masa de una región a otra. Depende del área superficial, la orientación y la diferencia de temperatura entre un cuerpo y su entorno.

La radiación es transferencia de energía por radiación electromagnética. La corriente de calor H causada por radiación depende del área superficial A, la emisividad e de la superficie (un número puro adimensional entre 0 y 1) y la temperatura T en Kelvin. También interviene una constante fundamental σ llamada constante de Stefan-Boltzmann. Si un cuerpo a temperatura T está rodeado por material a temperatura T_S, la corriente de calor *neta* H_{net} del cuerpo a su entorno depende tanto de T como de T_S. (Véanse los ejemplos 17.15 y 17.16.)

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_H - T_C}{L} \quad (17.21)$$

$$H = Ae\sigma T^4 \quad (17.25)$$

$$H_{net} = Ae\sigma\left(T^4 - T_s^{\,4}\right) \quad (17.26)$$



Términos clave

termodinámica, *570*
temperatura, *571*
termómetro, *571*
equilibrio térmico, *571*
aislante, *571*
conductor, *571*
ley cero de la termodinámica, *572*
escala de temperatura Celsius, *572*
escala de temperatura Fahrenheit, *573*
escala de temperatura Kelvin, *574*
escala de temperatura absoluta, *576*
cero absoluto, *576*
coeficiente de expansión lineal, *576*
coeficiente de expansión de volumen, *578*
esfuerzo térmico, *580*
calor, *582*
caloría, *582*
unidad térmica británica, *583*
calor específico, *583*
capacidad calorífica molar, *584*
fase, *586*
estados de la materia, *586*
cambio de fase, *586*
calor de fusión, *586*
equilibrio de fases, *587*
calor de vaporización, *587*
calor de combustión, *589*
conducción, *592*
corriente de calor, *592*
conductividad térmica, *592*
gradiente de temperatura, *592*
resistencia térmica, *593*
convección, *595*
radiación, *596*
emisividad, *596*
constante de Stefan-Boltzmann, *596*
ley de Stefan-Boltzmann, *596*
cuerpo negro, *567*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

No. "Calor" se refiere a transferencia de energía de un cuerpo a otro, debido a una diferencia de temperatura entre los cuerpos. Los cuerpos no *contienen* calor.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

17.1 Respuesta: ii) Un termómetro de líquido en tubo en realidad mide su propia temperatura. Si el termómetro permanece en agua caliente suficiente tiempo, llegará al equilibrio térmico con el agua y su temperatura será la misma que la del agua.

17.2 Respuesta: iv) Tanto una banda bimetálica como un termómetro de resistencia miden su propia temperatura. Para que ésta sea igual a la temperatura del objeto que se está midiendo, el termómetro y el objeto deben estar en contacto y en equilibrio térmico. Un termómetro arterial temporal detecta la radiación infrarroja en la piel de una persona. Así que no hay necesidad de que el detector y la piel estén a la misma temperatura.

17.3 Respuestas: i), iii), ii), v), iv) Para comparar estas temperaturas, conviértalas todas a la escala Kelvin. Para i) la temperatura Kelvin es $T_K = T_C + 273.15 = 0.00 + 273.15 = 273.15$ K; para ii) $T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32°) = \frac{5}{9}(0.00° - 32°) = -17.78$ °C y $T_K = T_C + 273.15 = -17.78 + 273.15 = 255.37$ K; para iii) $T_K = 260.00$ K; para iv) $T_K = 77.00$; y para v) $T_K = T_C + 273.15 = -180.00 + 273.15 = 93.15$ K.

17.4 Respuestas: ii) y iii) El metal 2 debe expandirse más que el metal 1 cuando se calienta, así que debe tener un mayor coeficiente de expansión lineal α. En la tabla 17.1 vemos que dos metales con valores de α más grandes que el del cobre son el aluminio y el latón, aunque no el acero.

17.5 Respuestas: ii), i), iv), iii) En los casos i) y ii), la cantidad relevante es el calor específico c de la sustancia, que es la cantidad de calor requerido para elevar la temperatura de 1 *kilogramo* de esa sustancia en 1 K (1 C°). De acuerdo con la tabla 17.3, estos valores son i) 138 J para el mercurio y ii) 2428 J para el etanol. En los casos iii) y iv) necesitamos la capacidad calorífica molar C, que es la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de 1 *mol* de esa sustancia en 1 C°. De nuevo, a partir de la tabla 17.3, estos valores son iii) 27.7 J para el

mercurio y iv) 111.9 J para el etanol. (La tasa de capacidades caloríficas molares es diferente de la tasa de calores específicos porque un mol de mercurio y un mol de etanol tienen masas diferentes.)

17.6 Respuesta: iv) En un tiempo t, el sistema va del punto b al punto e de la figura 17.21. Según la figura, en el tiempo $t/2$ (a la mitad de la distancia sobre el eje horizontal entre b y e), el sistema está a 100 °C y todavía está en ebullición; es decir, es una mezcla de líquido y gas. Esto implica que la mayoría del calor agregado se invierte en evaporar el agua.

17.7 Respuesta: ii) Cuando usted toca una de las paredes, el calor fluye de su mano a la pared, la cual está a temperatura más baja. Cuanto más rápido fluya el calor desde su mano, más frío percibirá usted. La ecuación (17.21) indica que la tasa de flujo de calor es proporcional a la conductividad térmica k. De acuerdo con la tabla 17.5, el cobre tiene conductividad térmica mucho más alta $(385.0 \text{ W/m} \cdot \text{K})$ que el acero $(50.2 \text{ W/m} \cdot \text{K})$; por ello, la pared de cobre se siente más fría al tacto.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P17.1. Explique por qué no tendría sentido utilizar un termómetro de vidrio de tamaño normal, para medir la temperatura del agua caliente contenida en un dedal.

P17.2. Si usted calienta el aire dentro de un recipiente rígido y sellado hasta que su temperatura en la escala Kelvin se duplique, la presión del aire en el recipiente también se duplica. ¿También es cierto esto si se duplica la temperatura Celsius del aire en el recipiente? Explique su respuesta.

P17.3. Muchos motores de combustión tienen cilindros de hierro colado y pistones de aluminio. ¿Qué tipos de problemas podrían presentarse si el motor se sobrecalienta? (El coeficiente de expansión de volumen del hierro colado es similar al del acero.)

P17.4. ¿Por qué se revientan las tuberías de agua congeladas? ¿Se rompería un termómetro de mercurio a temperaturas por debajo del punto de congelación del mercurio? ¿Por qué?

P17.5. Dos cuerpos del mismo material tienen las mismas dimensiones y aspecto exteriores, pero uno está hueco y el otro no. Si se aumenta su temperatura por igual, ¿su expansión de volumen global es la misma o distinta? ¿Por qué?

P17.6. El interior de un horno está a 200 °C (392 °F). Podemos meter la mano en él sin sufrir daño, en tanto no toquemos nada. Dado que el aire dentro del horno también está a 200 °C, ¿por qué no se quema la mano?

P17.7. Un artículo periodístico acerca del clima dice que "la temperatura de un cuerpo mide cuánto calor contiene el cuerpo". ¿Esta descripción es correcta? ¿Por qué?

P17.8. ¿Debemos agregar calor a un objeto para aumentar su temperatura? Si agregamos calor a un objeto, ¿debemos elevar su temperatura? Explique su respuesta.

P17.9. Una estudiante dijo que $1 \text{ m}^2/\text{s}^2 \cdot \text{C}°$ es una unidad adecuada para capacidad calorífica específica. ¿Tiene ella razón? ¿Por qué?

P17.10. En algunos acondicionadores de aire caseros para climas secos, el aire se enfría soplándolo a través de un filtro saturado de agua, evaporando parte del agua. ¿Cómo esto enfría el aire? ¿Funcionaría este sistema en un clima muy húmedo? ¿Por qué?

P17.11. Las unidades de capacidad calorífica específica c son $\text{J/kg} \cdot \text{K}$, pero las unidades de calor de fusión L_f o de vaporización L_v son sólo J/kg. ¿Por qué las unidades de L_f y L_v no incluyen el factor $(\text{K})^{-1}$ para definir el cambio de temperatura?

P17.12. ¿Por qué un día cálido y húmedo en el trópico generalmente es más incómodo para los seres humanos, que un día cálido y seco en el desierto?

P17.13. Un trozo de papel de aluminio para envolver una papa y cocerla en un horno caliente, por lo general, puede manejarse con seguridad unos cuantos segundos después de que la papa se retiró del horno. Sin embargo, ¡no puede decirse lo mismo de la papa! Dé razones para esta diferencia.

P17.14. Los viajeros del desierto a veces guardan agua en bolsas de lona. Algo de agua se filtra por la lona y se evapora. ¿Cómo enfría esto el agua del interior?

P17.15. Recién que salimos de la regadera, sentimos frío; pero apenas nos secamos sentimos menos frío, aunque la temperatura del cuarto no cambió. ¿Por qué?

P17.16. El clima de regiones adyacentes a cuerpos grandes de agua (como las costas del Pacífico o el Atlántico) suele ser más moderado que el de regiones alejadas de cuerpos grandes de agua (como las praderas). ¿Por qué?

P17.17. ¿Por qué el agua de una bandeja de cubitos de hielo no se congela repentinamente cuando la temperatura alcanza 0 °C? De hecho, el agua se congela primero en una capa adyacente a las paredes de la bandeja. ¿Por qué?

P17.18. Antes de inyectar a un paciente, el médico limpia su brazo con alcohol isopropílico a temperatura ambiente. ¿Por qué el paciente siente frío en el brazo? (*Sugerencia:* ¡*no* es por miedo a la inyección! El punto de ebullición del alcohol isopropílico es 82.4 °C.)

P17.19. Un bloque de metal frío se siente más frío que uno de madera a la misma temperatura. ¿Por qué? Un bloque de metal *caliente* se siente más caliente, que uno de madera a la misma temperatura. ¿Por qué? ¿Hay alguna temperatura a la que ambos bloques se sientan igualmente calientes o fríos? ¿Cuál?

P17.20. Una persona vierte café en una taza, pensando en beberlo 5 min después. Si desea mantener el café lo más caliente posible, ¿deberá ponerle la crema ahora o esperar hasta justo antes de beberlo? Explique su respuesta.

P17.21. Recién que sacamos una tarta de manzana del horno, la corteza y el relleno están a la misma temperatura; pero si probamos la tarta, el relleno nos quema la lengua pero la corteza no. ¿A qué se debe la diferencia? (*Sugerencia:* el relleno está húmedo, la corteza está seca.)

P17.22. Se dice que las cosas se cocinan mejor (con más uniformidad y sin quemarse) en ollas de hierro colado gruesas. ¿Qué características deseables tienen tales ollas?

P17.23. En invierno, las tierras costeras tienen menor temperatura que el mar, pero en verano lo opuesto es válido. Explique por qué. (*Sugerencia:* la capacidad calorífica específica de la tierra es sólo de 0.2 a 0.8 veces la del agua.)

P17.24. Es bien sabido que una papa se hornea en menos tiempo si se atraviesa con un clavo grande. ¿Por qué? ¿Sería mejor usar un clavo de aluminio que uno de acero? ¿Por qué? (*Nota:* ¡no intente esto en un horno de microondas!) También se vende un aparato para acelerar el rostizado de carne, que consiste en un tubo metálico que contiene una mecha y un poco de agua; se dice que esto es mucho mejor que una varilla metálica sólida. ¿Cómo funciona?

P17.25. Los pilotos de planeadores en el Medio Oeste de Estados Unidos saben que son comunes las corrientes térmicas ascendentes cerca de campos recién arados. ¿Por qué?

P17.26. Hay quienes dicen que los cubos de hielo se congelan en menos tiempo, si las bandejas se llenan con agua caliente, porque ésta se enfría más rápidamente que la fría. ¿Qué opina usted?

P17.27. Tenemos suerte de que la Tierra no esté en equilibrio térmico con el Sol (cuya temperatura superficial es de 5800 K). Pero, ¿por qué no lo está?

P17.28. Cuando hay escasez de energía, algunas revistas recomiendan mantener las casas a temperatura constante día y noche para ahorrar combustible. El argumento es que, al apagar la calefacción de noche, las paredes, techos, etcétera, se enfrían y deberán volver a calentarse en la mañana. Así, al mantener la temperatura constante, estas partes de la casa no se enfriarán y no tendrán que volver a calentarse. ¿Tiene sentido este argumento? ¿Realmente se ahorraría energía siguiendo ese consejo?

Ejercicios

Sección 17.2 Termómetros y escalas de temperatura

17.1. Convierta las siguientes temperaturas Celsius a Fahrenheit: *a*) −62.8 °C, la temperatura más baja registrada en Norteamérica (3 de febrero de 1947, Snag, Yukón); *b*) 56.7 °C, la temperatura más alta registrada en Estados Unidos (10 de julio de 1913, Death Valley, California); *c*) 31.1 °C, la temperatura promedio anual más alta del mundo (Lugh Ferrandi, Somalia).

17.2. Calcule las temperaturas Celsius que corresponden a: *a*) una noche de invierno en Seattle (41.0 °F); *b*) un caluroso día de verano en Palm Springs (107.0 °F); *c*) un frío día de invierno en el norte de Manitoba (−18.0 °F).

17.3. Mientras está de vacaciones en Italia, usted ve en la televisión local en una mañana veraniega que la temperatura se elevará de los 18 °C actuales a 39 °C. ¿Cuál es el incremento correspondiente en la escala de temperatura Fahrenheit?

17.4. Dos vasos de agua, *A* y *B*, están inicialmente a la misma temperatura. La temperatura del agua del vaso *A* se aumenta 10 F°; y la del vaso *B*, 10 K. ¿Cuál vaso está ahora a mayor temperatura? Explique su respuesta.

17.5. Se coloca una botella de refresco en un refrigerador y se deja ahí hasta que su temperatura haya bajado 10.0 K. Calcule el cambio de temperatura en *a*) F° y *b*) C°.

17.6. *a*) El 22 de enero de 1943, la temperatura en Spearfish, Dakota del Sur, se elevó de −4.0 °F a 45.0 °F en sólo dos minutos. ¿Cuál fue el cambio de la temperatura en grados Celsius? *b*) La temperatura en Browning, Montana, fue de 44.0 °F el 23 de enero de 1916. El día siguiente la temperatura se desplomó a −56 °C. ¿Cuál fue el cambio de temperatura en grados Celsius?

17.7. *a*) Usted se siente mal y le dicen que tiene una temperatura de 40.2 °C. ¿Cuál es su temperatura en °F? ¿Debería preocuparse? *b*) El reporte meteorológico matutino en Sydney indica una temperatura actual de 12 °C. ¿Cuál es la temperatura en °F?

Sección 17.3 Termómetros de gas y la escala Kelvin

17.8. *a*) Calcule la única temperatura a la que los termómetros Fahrenheit y Celsius coinciden. *b*) Calcule la única temperatura a la que los termómetros Fahrenheit y Kelvin coinciden.

17.9. Convierta las siguientes temperaturas récord a la escala Kelvin: *a*) la temperatura más baja registrada en los 48 estados contiguos de Estados Unidos (−70.0 °F en Rogers Pass, Montana, el 20 de enero de 1954); *b*) la temperatura más alta en Australia (127.0 °F en Cloncurry, Queensland, el 16 de enero de 1889); *c*) la temperatura más baja registrada en el hemisferio norte (−90.0 °F en Verkhoyansk, Siberia, en 1892).

17.10. Convierta las siguientes temperaturas Kelvin a las escalas Celsius y Fahrenheit: *a*) la temperatura al medio día en la superficie de la Luna (400 K); *b*) la temperatura en la parte alta de las nubes de la atmósfera de Saturno (95 K); *c*) la temperatura en el centro del Sol (1.55×10^7 K).

17.11. El nitrógeno líquido es un material relativamente barato que a menudo se utiliza para realizar divertidas demostraciones de física a baja temperatura. El gas nitrógeno experimenta licuefacción a una temperatura de −346 °F. Convierta esta temperatura a: *a*) °C y *b*) K.

17.12. Un termómetro de gas registró una presión absoluta correspondiente a 325 mm de mercurio, estando en contacto con agua en el punto triple. ¿Qué presión indicará en contacto con agua en el punto de ebullición normal?

17.13. La presión de un gas al punto triple del agua es de 1.35 atm. Si este volumen permanece constante, ¿cuál será su presión a la temperatura a la que el CO_2 se solidifica?

17.14. Al igual que la escala Kelvin, la *escala Rankine* es una escala absoluta de temperatura: el cero absoluto es cero grados Rankine (0 °R). Sin embargo, las unidades de esta escala tienen el mismo tamaño que las de la escala Fahrenheit, no las de la escala Celsius. Dé el valor numérico de la temperatura del punto triple del agua en la escala Rankine.

17.15. Termómetro de gas de volumen constante. Usando un termómetro de gas, un experimentador determinó que la presión en el punto triple del agua (0.01 °C) era 4.80×10^4 Pa; y en el punto de ebullición normal del agua (100 °C), 6.50×10^4 Pa. *a*) Suponiendo que la presión varía linealmente con la temperatura, use estos datos para calcular la temperatura Celsius en la que la presión del gas sería cero (es decir, obtenga la temperatura Celsius del cero absoluto). *b*) ¿El gas de este termómetro obedece con precisión la ecuación (17.4)? Si así fuera y la presión a 100 °C fuera 6.50×10^4 Pa, ¿qué presión habría medido el experimentador a 0.01 °C? (Como veremos en la sección 18.1, la ecuación (17.4) sólo es exacta para gases a muy baja densidad.)

Sección 17.4 Expansión térmica

17.16. El edificio más alto del mundo, de acuerdo con ciertos estándares arquitectónicos, es el Taipei 101 en Taiwán, con una altura de 1671 pies. Suponga que esta altura se midió en un fresco día primaveral, cuando la temperatura era de 15.5 °C. Este edificio podría utilizarse como una especie de termómetro gigante en un día caluroso de verano, midiendo con cuidado su altura. Suponga que usted realiza esto y descubre que el Taipei 101 es 0.471 ft más alto que su altura oficial. ¿Cuál es la temperatura, suponiendo que el edificio está en equilibrio térmico con el aire y que toda su estructura está hecha de acero?

17.17. El puente Humber de Inglaterra tiene el claro individual más largo del mundo (1410 m). Calcule el cambio de longitud de la cubierta de acero del claro, si la temperatura aumenta de −5.0 °C a 18.0 °C.

17.18. Ajuste estrecho. Los remaches de aluminio para construcción de aviones se fabrican un poco más grandes que sus agujeros y se enfrían con "hielo seco" (CO_2 sólido) antes de insertarse. Si el diámetro de un agujero es de 4.500 mm, ¿qué diámetro debe tener un remache a 23.0 °C para que su diámetro sea igual al del agujero cuando se enfría a −78.0 °C, la temperatura del hielo seco? Suponga que el coeficiente de expansión es constante, con el valor dado en la tabla 17.1.

17.19. Un centavo de dólar tiene 1.9000 cm de diámetro a 20.0 °C, y está hecho de una aleación (principalmente zinc) con un coeficiente de expansión lineal de $2.6 \times 10^{-5}\ K^{-1}$. ¿Qué diámetro tendría: en un día caluroso en Death Valley (48.0 °C)? ¿Y en una noche fría en las montañas de Groenlandia (−53.0 °C)?

17.20. Un domo geodésico construido con una estructura de aluminio está muy cerca de ser un hemisferio perfecto; su diámetro mide 55.0 m en un día de invierno a una temperatura de −15 °C. ¿Cuánto más

espacio interior tiene el domo en el verano, cuando la temperatura es de 35°C?

17.21. Una varilla metálica tiene 40.125 cm de longitud a 20.0 °C, y 40.148 cm a 45.0 °C. Calcule el coeficiente medio (promedio) de expansión lineal para la varilla en este intervalo de temperatura.

17.22. Un cilindro de cobre está inicialmente a 20.0 °C. ¿A qué temperatura su volumen aumentará en un 0.150%?

17.23. La densidad del agua es de 999.73 kg/m^3 a una temperatura de 10 °C, y de 958.38 kg/m^3 a 100 °C. Calcule el coeficiente medio de expansión de volumen para el agua en ese intervalo de temperatura.

17.24. Un tanque de acero se llena totalmente con 2.80 m^3 de etanol cuando tanto el tanque como el etanol están a 32.0 °C. Una vez que el tanque y el contenido se hayan enfriado a 18.0 °C, ¿qué volumen adicional de etanol podrá meterse en el tanque?

17.25. Un frasco de vidrio con volumen de 1000.00 cm^3 a 0.0 °C se llena al tope con mercurio a esta temperatura. Si el frasco y el mercurio se calientan a 55.0 °C, se derraman 8.95 cm^3 de mercurio. Si el coeficiente de expansión de volumen del mercurio es de $18.0 \times 10^{-5}\ K^{-1}$; calcule el coeficiente de expansión de volumen del vidrio.

17.26. *a*) Si un área medida en la superficie de un cuerpo sólido es A_0 a cierta temperatura inicial y cambia en ΔA cuando la temperatura cambia en ΔT, demuestre que

$$\Delta A = (2\alpha)\, A_0 \Delta T$$

donde α es el coeficiente de expansión lineal. *b*) Una lámina circular de aluminio tiene 55.0 cm de diámetro a 15.0 °C. ¿Cuánto cambia el área de una cara de la lámina cuando la temperatura aumenta a 27.5 °C?

17.27. Un operario hace un agujero de 1.35 cm de diámetro en una placa de acero a una temperatura de 25.0 °C. ¿Qué área transversal tendrá el agujero *a*) a 25.0 °C; y *b*) si la placa se calienta a 175 °C? Suponga que el coeficiente de expansión lineal es constante dentro de este intervalo. (*Sugerencia:* véase el ejercicio 17.26.)

17.28. Imagine que acaba de comenzar a trabajar como ingeniero mecánico en Motores, S.A. y le encargaron diseñar pistones de latón que se deslizarán dentro de cilindros de acero. Los motores en los que se usarán los pistones operarán a temperaturas entre 20 °C y 150 °C. Suponga que los coeficientes de expansión son constantes dentro de ese intervalo de temperaturas. *a*) Si el pistón apenas cabe dentro del cilindro a 20 °C, ¿los motores podrán operar a temperaturas más altas? Explique su respuesta. *b*) Si los pistones cilíndricos tienen un diámetro de 25.000 cm a 20 °C, ¿qué diámetro mínimo deberán tener los cilindros a esa temperatura, para que los pistones operen a 150 °C?

17.29. El diámetro exterior de un frasco de vidrio y el diámetro interior de su tapa de hierro miden ambos 725 mm a temperatura ambiente (20.0 °C). ¿Cuál será la diferencia de diámetro entre la tapa y el frasco, si la tapa se deja brevemente bajo agua caliente hasta que su temperatura alcance los 50.0 °C, sin que la temperatura del vidrio sufra alguna alteración?

17.30. Una varilla de latón tiene 185 cm de longitud y 1.60 cm de diámetro. ¿Qué fuerza debe aplicarse a cada extremo para impedir que la varilla se contraiga al enfriarse de 120 °C a 10 °C?

17.31. *a*) Un alambre con longitud de 1.50 m a 20.0 °C se alarga 1.90 cm al calentarse a 420.0 °C. Calcule su coeficiente medio de expansión lineal para este intervalo de temperatura. *b*) El alambre se tiende sin tensión a 420.0 °C. Calcule el esfuerzo en él si se enfría a 20.0 °C sin permitir que se contraiga. El módulo de Young del alambre es de 2.0×10^{11} Pa.

17.32. Los rieles de acero para un tren se tienden en segmentos de 12.0 m de longitud, colocados extremo con extremo en un día de invierno en que la temperatura es de −2.0 °C. *a*) ¿Cuánto espacio debe dejarse entre rieles adyacentes para que apenas se toquen en verano, cuando la temperatura suba a 33.0 °C? *b*) Si los rieles se tienden en contacto, ¿a qué esfuerzo se someterán un día de verano en el que la temperatura sea 33.0 °C?

Sección 17.5 Cantidad de calor

17.33. Una tetera de aluminio de 1.50 kg que contiene 1.80 kg de agua se pone en la estufa. Si no se transfiere calor al entorno, ¿cuánto calor debe agregarse para elevar la temperatura de 20.0 °C a 85.0 °C?

17.34. Tratando de mantenerse despierto para estudiar toda la noche, un estudiante prepara una taza de café colocando una resistencia eléctrica de inmersión de 200 W en 0.320 kg de agua. *a*) ¿Cuánto calor debe agregarse al agua para elevar su temperatura de 20.0 °C a 80.0 °C? *b*) ¿Cuánto tiempo se requiere? Suponga que toda la potencia se invierte en calentar el agua.

17.35. Imagine que le dan una muestra de metal y le piden determinar su calor específico. Pesa la muestra y obtiene un valor de 28.4 N. Añade con mucho cuidado 1.25×10^4 J de energía calorífica a la muestra, y observa que su temperatura aumenta 18.0 C°. ¿Qué calor específico tiene la muestra?

17.36. Pérdida de calor al respirar. Cuando hace frío, un mecanismo importante de pérdida de calor del cuerpo humano es la energía invertida en calentar el aire que entra en los pulmones al respirar. *a*) En un frío día de invierno cuando la temperatura es de −20 °C, ¿cuánto calor se necesita para calentar a la temperatura corporal (37 °C) los 0.50 L de aire intercambiados con cada respiración? Suponga que la capacidad calorífica específica del aire es de 1200 $J/kg \cdot K$ y que 1.0 L de aire tiene una masa de 1.3×10^{-3} kg. *b*) ¿Cuánto calor se pierde por hora si se respira 20 veces por minuto?

17.37. Al correr, un estudiante de 70 kg genera energía térmica a razón de 1200 W. Para mantener una temperatura corporal constante de 37 °C, esta energía debe eliminarse por sudor u otros mecanismos. Si tales mecanismos fallaran y no pudiera salir calor del cuerpo, ¿cuánto tiempo podría correr el estudiante antes de sufrir un daño irreversible? (*Nota:* las estructuras proteínicas del cuerpo se dañan irreversiblemente a 44 °C o más. La capacidad calorífica específica del cuerpo humano es de alrededor de 3480 $J/kg \cdot K$, poco menos que la del agua; la diferencia se debe a la presencia de proteínas, grasas y minerales, cuyo calor específico es menor que el del agua.)

17.38. Al pintar la punta de una antena de 225 m de altura, un trabajador deja caer accidentalmente una botella de agua de 1.00 L de su lonchera. La botella cae sobre unos arbustos en el suelo y no se rompe. Si una cantidad de calor igual a la magnitud del cambio de energía mecánica de la botella pasa al agua, ¿cuánto aumentará su temperatura?

17.39. Una caja con fruta, con masa de 35.0 kg y calor específico de 3650 $J/kg \cdot K$ baja deslizándose por una rampa de 8.00 m de longitud, que está inclinada 36.9 °C bajo la horizontal. *a*) Si la caja estaba en reposo arriba de la rampa y tiene una rapidez de 2.50 m/s en la base, ¿cuánto trabajo efectuó la fricción sobre ella? *b*) Si una cantidad de calor igual a la magnitud de dicho trabajo pasa a la fruta y ésta alcanza una temperatura final uniforme, ¿qué magnitud tiene el cambio de temperatura?

17.40. Un tren subterráneo de 25,000 kg viaja inicialmente a 15.5 m/s y frena para detenerse en una estación; ahí permanece el tiempo suficiente para que sus frenos se enfríen. Las dimensiones de la estación son 65.0 m de largo, 20.0 m de ancho y 12.0 de alto. Suponiendo que todo el trabajo para detener el tren que realizan los frenos se transfiere como calor de manera uniforme a todo el aire en la estación, ¿en cuánto se eleva la temperatura del aire en la estación? Tome la densidad del aire como 1.20 kg/m^3 y su calor específico como 1020 $J/kg \cdot K$.

17.41. Un clavo que se clava en una tabla sufre un aumento de temperatura. Si suponemos que el 60% de la energía cinética de un martillo de 1.80 kg que se mueve a 7.80 m/s se transforma en calor, que fluye hacia el clavo y no sale de él, ¿cuánto aumentará la temperatura de un clavo de aluminio de 8.00 g golpeado 10 veces?

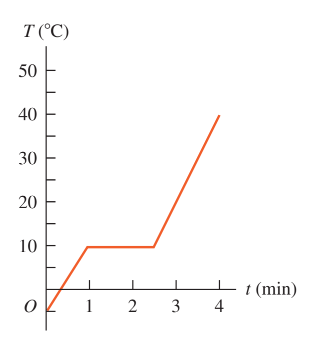
17.42. Un técnico mide el calor específico de un líquido desconocido sumergiendo en él una resistencia eléctrica. La energía eléctrica se convierte en calor transferido al líquido durante 120 s con tasa constante de 65.0 W. La masa del líquido es de 0.780 kg y su temperatura aumenta de 18.55 °C a 22.54 °C. *a*) Calcule el calor específico promedio del líquido en este intervalo de temperatura. Suponga que la cantidad de calor que se transfiere al recipiente es despreciable y que no se transfiere calor al entorno. *b*) Suponga que no es posible despreciar la transferencia de calor del líquido al recipiente o al entorno en este experimento. ¿El resultado de *a*) es *mayor* o *menor* que el calor específico promedio real del líquido? Explique su respuesta.

17.43. Se agregan 8950 J de calor a 3.00 moles de hierro. *a*) Determine el aumento de temperatura del hierro. *b*) Si se añade la misma cantidad de calor a 3.00 kg de hierro, ¿cuánto subirá su temperatura? *c*) Compare los resultados de los incisos *a*) y *b*) y explique la diferencia.

Sección 17.6 Calorimetría y cambios de fase

17.44. Imagine que trabaja como físico e introduce calor en una muestra sólida de 500 g a una tasa de 10.0 kJ/min mientras registra su temperatura en función del tiempo. La gráfica de sus datos se muestra en la figura 17.30. *a*) Calcule el calor latente de fusión del sólido. *b*) Determine los calores específicos de los estados sólido y líquido del material.

Figura **17.30** Ejercicio 17.44.



17.45. Un trozo de 500.0 g de un metal desconocido, que ha estado en agua hirviente durante varios minutos, se deja caer rápidamente en un vaso de espuma de poliestireno, que contiene 1.00 kg de agua a temperatura ambiente (20.0 °C). Después de esperar y agitar suavemente durante 5.00 minutos, se observa que la temperatura del agua ha alcanzado un valor constante de 22.0 °C. *a*) Suponiendo que el vaso absorbe una cantidad despreciable de calor y que no se pierde calor al entorno, ¿qué calor específico tiene el metal? *b*) ¿Qué es más útil para almacenar calor, este metal o un peso igual de agua? Explique su respuesta. *c*) Suponga que el calor absorbido por el vaso no es despreciable. ¿Qué tipo de error tendría el calor específico calculado en el inciso *a*) (sería demasiado grande, demasiado pequeño o correcto)? Explique su respuesta.

17.46. Antes de someterse a su examen médico anual, un hombre de 70.0 kg cuya temperatura corporal es de 37.0 °C consume una lata entera de 0.355 L de una bebida gaseosa (principalmente agua) que está a 12.0 °C. *a*) Determine su temperatura corporal una vez alcanzado el equilibrio. Desprecie cualquier calentamiento por el metabolismo del hombre. El calor específico del cuerpo del hombre es de 3480 J/kg · K. *b*) ¿El cambio en su temperatura corporal es lo bastante grande como para medirse con un termómetro médico?

17.47. En la situación descrita en el ejercicio 17.46, el metabolismo del hombre hará que, en algún momento, la temperatura de su cuerpo (y de la bebida que consumió) vuelva a 37.0 °C. Si su cuerpo desprende energía a una tasa de 7.00×10^3 kJ/día (la *tasa metabólica basal,* TMB), ¿cuánto tardará en hacerlo? Suponga que toda la energía desprendida se invierte en elevar la temperatura.

17.48. Una bandeja para hacer hielo con masa despreciable contiene 0.350 kg de agua a 18.0 °C. ¿Cuánto calor (en J, cal y Btu) debe extraerse para enfriar el agua a 0.00 °C y congelarla?

17.49. ¿Cuánto calor (en J, cal y Btu) se requiere para convertir 12.0 g de hielo a -10.0 °C en vapor a 100.0 °C?

17.50. Un recipiente abierto con masa despreciable contiene 0.550 kg de hielo a -15.0 °C. Se aporta calor al recipiente a una tasa constante de 800 J/min durante 500 min. *a*) ¿Después de cuántos minutos *comienza* a fundirse el hielo? *b*) ¿Cuántos minutos después de iniciado el calentamiento, la temperatura comienza a elevarse por encima de 0.0 °C? *c*) Dibuje una curva que indique la temperatura en función del tiempo transcurrido.

17.51. La capacidad de los acondicionadores de aire comerciales a veces se expresa en "toneladas": las toneladas de hielo (1 ton = 2000 lb) que la unidad puede generar a partir de agua a 0 °C en 24 h. Exprese la capacidad de un acondicionador de 2 ton en Btu/h y en watts.

17.52. Quemaduras de vapor contra quemaduras de agua. ¿Cuánto calor entra en su piel si recibe el calor liberado por *a*) 25.0 g de vapor de agua que inicialmente está a 100.0 °C, al enfriarse a la temperatura de la piel (34.0 °C)? *b*) 25.0 g de agua que inicialmente está a 100.0 °C al enfriarse a 34.0 °C? *c*) ¿Qué le dice esto acerca de la severidad relativa de las quemaduras con vapor y con agua caliente?

17.53. ¿Qué rapidez inicial debe tener una bala de plomo a 25 °C, para que el calor desarrollado cuando se detiene sea apenas suficiente para derretirla? Suponga que toda la energía mecánica inicial de la bala se convierte en calor y que no fluye calor de la bala a su entorno. (Un rifle ordinario tiene una rapidez de salida mayor que la rapidez del sonido en aire, que es de 347 m/s a 25.0 °C.)

17.54. La evaporación del sudor es un mecanismo importante para controlar la temperatura de algunos animales de sangre caliente. *a*) ¿Qué masa de agua debe evaporarse de la piel de un hombre de 70.0 kg para enfriar su cuerpo 1.00 C°? El calor de vaporización del agua a la temperatura corporal de 37 °C es de 2.42×10^6 J/kg · K. La capacidad calorífica específica del cuerpo humano es de 3480 J/kg · K (véase el ejercicio 17.37). *b*) ¿Qué volumen de agua debe beber el hombre para reponer la que evaporó? Compárelo con el volumen de una lata de bebida gaseosa (355 cm^3).

17.55. "El barco del desierto": Los camellos necesitan muy poca agua porque pueden tolerar cambios relativamente grandes en su temperatura corporal. Mientras que las personas mantienen su temperatura corporal constante dentro de un intervalo de 1 a 2 C°, un camello deshidratado deja que su temperatura corporal baje a 34.0 °C de noche y suba a 40.0 °C de día. Para ver lo eficaz que es este mecanismo para ahorrar agua, calcule cuántos litros de agua tendría que beber un camello de 400 kg, si tratara de mantener su temperatura corporal en 34.0 °C mediante evaporación de sudor durante el día (12 h), en vez de dejar que suba a 40.0°C. (*Nota:* la capacidad calorífica específica de un camello u otro mamífero es la de una persona

representativa, 3480 J/kg · K. El calor de vaporización del agua a 34 °C es de 2.42×10^6 J/kg.)

17.56. Un asteroide con diámetro de 10 km y una masa de 2.60×10^5 kg choca contra la Tierra a una rapidez de 32.0 km/s y cae en el Océano Pacífico. Si el 1.00% de la energía cinética del asteroide se destina a hacer que entre en ebullición el agua del océano (suponga que la temperatura inicial del agua es de 10.0 °C), ¿cuál es la masa de agua que se evaporará por completo como resultado de la colisión? (Para comparar, la masa del agua contenida en el Lago Superior es aproximadamente de 2×10^{15} kg.)

17.57. Se abre la puerta de un refrigerador, y el aire a temperatura ambiente (20.0 °C) llena el compartimiento de 1.50 m^3. Un pavo de 10.0 kg, también a temperatura ambiente, se coloca en el interior del refrigerador y se cierra la puerta. La densidad del aire es de 1.20 kg/m^3 y su calor específico es de 1020 J/kg · K. Suponga que el calor específico de un pavo, al igual que el del ser humano, es de 3480 J/kg · K. ¿Cuánto calor debe eliminar el refrigerador de su compartimiento para que el aire y el pavo alcancen el equilibrio térmico a una temperatura de 5.00 °C? Suponga que no hay intercambio de calor con el ambiente circundante.

17.58. Un técnico de laboratorio pone una muestra de 0.0850 kg de un material desconocido, que está a 100.0 °C, en un calorímetro cuyo recipiente, inicialmente a 19.0 °C, está hecho con 0.150 kg de cobre y contiene 0.200 kg de agua. La temperatura final del calorímetro es de 26.1 °C. Calcule el calor específico de la muestra.

17.59. Un vaso aislado con masa despreciable contiene 0.250 kg de agua a 75.0 °C. ¿Cuántos kilogramos de hielo a −20.0 °C deben ponerse en el agua para que la temperatura final del sistema sea 30.0 °C?

17.60. Un frasquito de vidrio (capacidad calorífica = 2800 J/kg · K) con masa de 6.0 g que contiene una muestra de 16.0 g de una enzima con capacidad calorífica de 2250 J/kg · K se enfría en un baño de hielo que contiene agua y 0.120 kg de hielo. ¿Cuánto hielo se derrite para enfriar la muestra, desde la temperatura ambiente (19.5 °C) hasta la temperatura del baño de hielo?

17.61. Un lingote de plata de 4.00 kg se saca de un horno a 750.0 °C y se coloca sobre un gran bloque de hielo a 0.0 °C. Suponiendo que todo el calor cedido por la plata se usa para fundir hielo, ¿cuánto hielo se funde?

17.62. Un calorímetro de cobre de 0.100 kg contiene 0.160 kg de agua y 0.0180 kg de hielo en equilibrio térmico a presión atmosférica. Si 0.750 kg de plomo a 255 °C se dejan caer en el calorímetro, ¿qué temperatura final se alcanza? Suponga que no se pierde calor al entorno.

17.63. Un recipiente con paredes térmicamente aisladas contiene 2.40 kg de agua y 0.450 kg de hielo, todo a 0.0 °C. El tubo de salida de una caldera en la que hierve agua a presión atmosférica se inserta en el agua del recipiente. ¿Cuántos gramos de vapor deben condensarse dentro del recipiente (que también está a presión atmosférica), para elevar la temperatura del sistema a 28.0 °C? Desprecie el calor transferido al recipiente.

Sección 17.7 Mecanismos de transferencia de calor

17.64. Use la ecuación (17.21) para demostrar que las unidades en el SI de la conductividad térmica son: W/m · K.

17.65. Suponga que la varilla de la figura 17.23a es de cobre, tiene 45.0 cm de longitud y área transversal de 1.25 cm^2. Sea $T_H = 100.0$ °C y $T_C = 0.0$ °C. *a*) Calcule el gradiente de la temperatura a lo largo de la varilla en el estado de equilibrio final. *b*) Calcule la corriente de calor en la varilla en el estado en equilibrio final. *c*) Calcule la temperatura de la varilla a 12.0 cm de su extremo izquierdo en el estado de equilibrio final.

17.66. Un extremo de una varilla metálica aislada se mantiene a 100.0 °C, y el otro se mantiene a 0.00 °C con una mezcla hielo-agua. La varilla tiene 60.0 cm de longitud y área transversal de 1.25 cm^2. El calor conducido por la varilla funde 8.50 g de hielo en 10.0 min. Calcule la conductividad térmica k del metal.

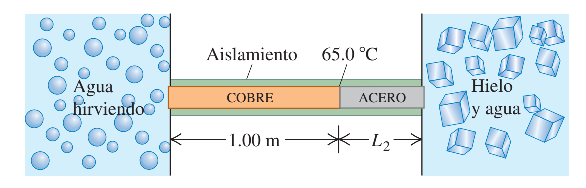
17.67. Un carpintero construye una pared exterior con una capa de madera $(k = 0.080$ W/m · K$)$ de 3.0 cm de espesor externa y una capa de espuma de poliestireno $(k = 0.010$ W/m · K$)$ de 2.2 cm de espesor interna. La temperatura de la superficie interior es de 19.0 °C, y la exterior, −10.0 °C. *a*) Calcule la temperatura en la unión entre la madera y la espuma de poliestireno. *b*) Calcule la tasa de flujo de calor por metro cuadrado a través de esta pared.

17.68. Un horno de cocina eléctrico tiene un área de pared total de 1.40 m^2 y está aislado con una capa de fibra de vidrio de 4.00 cm de espesor. La superficie interior de la fibra de vidrio está a 175 °C, y la exterior, a 35.0 °C. La fibra de vidrio tiene una conductividad térmica de 0.040 W/m · K. *a*) Calcule la corriente de calor en el aislante, tratándolo como una plancha con un área de 1.40 m^2. *b*) ¿Qué aporte de potencia eléctrica requiere el elemento calentador para mantener esta temperatura?

17.69. El plafón de una habitación tiene un área de 125 ft^2, y está aislado con un valor R de 30 (ft^2 · F° · h/Btu). La superficie que da a la habitación se mantiene a 69 °F, y la que da al desván, a 35 °F. Calcule el flujo de calor (en Btu y joules) al desván a través del plafón en 5.0 h.

17.70. Una varilla, larga y aislada está en contacto térmico perfecto para evitar pérdidas de calor por sus costados, en un extremo con agua hirviendo (a presión atmosférica) y con una mezcla agua-hielo en el otro (figura 17.31). La varilla consiste en un tramo de 1.00 m de cobre (con un extremo en contacto con vapor de agua) y el otro, unido a tope con un tramo L_2 de acero (con un extremo en contacto con la mezcla hielo-agua). Ambos tramos tienen una área transversal de 4.00 cm^2. La temperatura en la unión cobre-acero es de 65.0 °C una vez que se alcanza el estado de equilibrio. *a*) ¿Cuánto calor por segundo fluye del baño de vapor a la mezcla hielo-agua? *b*) ¿Qué longitud L_2 tiene el tramo de acero?

Figura 17.31 Ejercicio 17.70.



17.71. Una olla con base de acero de 8.50 mm de espesor y área de 0.150 m^2 descansa en una estufa caliente. El agua dentro de la olla está a 100.0 °C y se evaporan 0.390 kg cada 3.00 min. Calcule la temperatura de la superficie inferior de la olla, que está en contacto con la estufa.

17.72. Imagine que le piden diseñar una varilla cilíndrica de acero de 50.0 cm de longitud, con sección transversal circular, que conducirá 150 J/s desde un horno a 400.0 °C a un recipiente con agua hirviente que está a 1 atmósfera. ¿Qué diámetro debe tener la varilla?

17.73. Una ventana tiene dimensiones de 1.40×2.50 m y está hecha de vidrio de 5.20 mm de espesor. En un día de invierno, la temperatura exterior es de −20.0 °C, mientras que la confortable temperatura en el interior es de 19.5 °C. *a*) ¿A qué tasa se ha perdido calor a través de la ventana por conducción? *b*) ¿A qué tasa se perdería el calor a través de la ventana, si usted la cubriera con una capa de papel (conductividad térmica de 0.0500) de 0.750 mm de espesor?

17.74. Calcule la tasa de radiación de energía por unidad de área de un cuerpo negro a: *a*) 273 K y *b*) 2730 K.

17.75. Calcule la tasa neta de pérdida de calor por radiación en el ejemplo 17.16 (sección 17.7) si la temperatura del entorno es de 5.0 °C.

17.76. La emisividad del tungsteno es de 0.350. Una esfera de tungsteno con radio de 1.50 cm se suspende dentro de una cavidad grande evacuada, cuyas paredes están a 290.0 K. ¿Qué aporte de potencia se requiere para mantener la esfera a una temperatura de 3000.0 K, si se desprecia la conducción de calor por los soportes?

17.77. Tamaño de un filamento de bombilla. La temperatura de operación del filamento de tungsteno de una lámpara incandescente es de 2450 K, y su emisividad es de 0.350. Calcule el área superficial del filamento de una lámpara de 150 W, si toda la energía eléctrica consumida por la lámpara es radiada por el filamento en forma de ondas electromagnéticas. (Sólo una fracción de la radiación aparece como luz visible.)

17.78. El tamaño de las estrellas. La superficie caliente luminosa de las estrellas emite energía en forma de radiación electromagnética. Es una buena aproximación suponer $e = 1$ para estas superficies. Calcule los radios de las estrellas siguientes (supóngalas esféricas): *a*) Rigel, la estrella azul brillante de la constelación de Orión, que radia energía a una tasa de 2.7×10^{32} W y tiene una temperatura superficial de 11,000 K; *b*) Procyon B (visible sólo con un telescopio), que radia energía a una tasa de 2.1×10^{23} W y tiene temperatura superficial de 10,000 K. *c*) Compare sus respuestas con el radio de la Tierra, el del Sol y la distancia entre la Tierra y el Sol. (Rigel es un ejemplo de estrella *supergigante*; Procyon B es un ejemplo de estrella *enana blanca*.)

Problemas

17.79. Imagine que propone una nueva escala de temperatura en la que las temperaturas se dan en °M. Define 0.0 °M como el punto de fusión normal del mercurio; y 100.0 °M, como el punto de ebullición normal del mercurio. *a*) Exprese el punto de ebullición normal del agua en °M. *b*) ¿A cuántos C° correspondería un cambio de temperatura de 10.0 M°?

17.80. Suponga que pudiera construirse un aro de acero ajustado al ecuador terrestre a una temperatura de 20.0 °C. ¿Cuánto se separaría el aro del suelo, si la temperatura del aro aumentara 0.500 C°?

17.81. A una temperatura absoluta T_0, un cubo tiene lados de longitud L_0 y su densidad es ρ_0. El cubo está hecho de un material con coeficiente de expansión de volumen β. *a*) Demuestre que, si la temperatura aumenta a $T_0 + \Delta T$, la densidad del cubo es aproximadamente

$$\rho \approx \rho_0(1 - \beta\Delta T)$$

(*Sugerencia:* use la expresión $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, válida para $|x| \ll 1$.) Explique por qué este resultado aproximado sólo es válido si ΔT es mucho menor que $1/\beta$, y por qué cabe esperar que así suceda en general. *b*) Un cubo de cobre mide 1.25 cm por lado a 20.0 °C. Calcule su cambio de volumen y densidad, cuando su temperatura aumenta a 70.0 °C.

17.82. Un peso de 250 kg cuelga del techo atado con un alambre delgado de cobre. En su modo fundamental, este alambre vibra a la frecuencia del concierto (440 Hz). Después se incrementa la temperatura del alambre en 40 C°. *a*) ¿Cuánto cambiará la frecuencia fundamental? ¿Aumentará o disminuirá? *b*) Calcule el cambio porcentual de la rapidez de la onda en el alambre. *c*) Calcule el cambio porcentual de la longitud de la onda estacionaria fundamental en el alambre. ¿Aumentará o disminuirá?

17.83. Imagine que está preparando un aderezo para pasta y tiene una taza medidora cilíndrica de 10.0 cm de altura hecha de vidrio ordinario [$\beta = 2.7 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$] llena con aceite de oliva [$\beta = 6.8 \times 10^{-4}$ (C°)$^{-1}$] hasta una altura de 1.00 mm por debajo del borde de la taza. En un principio, la taza y el aceite están a temperatura ambiente (22.0 °C). El teléfono suena y usted se olvida del aceite de oliva, que por descuido dejó calentando sobre la estufa encendida. La taza y el aceite se calientan lentamente, y tienen la misma temperatura. ¿A qué temperatura comenzará a derramarse el aceite?

17.84. Use la figura 17.12 para determinar el coeficiente de expansión de volumen aproximado del agua a 2.0 °C y a 8.0 °C.

17.85. Un péndulo de Foucault consiste en una esfera de latón con un diámetro de 35.0 cm, suspendida de un cable de acero de 10.5 m de largo (ambas mediciones se hicieron a 20.0 °C). Por una negligencia en el diseño, la esfera oscilante libra el suelo por una distancia de sólo 2.00 mm, cuando la temperatura es de 20.0 °C. ¿A qué temperatura la esfera comenzará a rozar el suelo?

17.86. Usted vierte 108 cm^3 de etanol, a una temperatura de -10.0 °C, en un cilindro graduado inicialmente a 20.0 °C, llenándolo hasta el borde superior. El cilindro está hecho de vidrio con un calor específico de 840 J/kg · K y un coeficiente de expansión de volumen de 1.2×10^{-5} K^{-1}; su masa es de 0.110 kg. La masa del etanol es de 0.0873 kg. *a*) ¿Cuál será la temperatura final del etanol, una vez que se alcanza el equilibrio térmico? *b*) ¿Cuánto etanol se desbordará del cilindro antes de alcanzar el equilibrio térmico?

17.87. Una varilla metálica de 30.0 cm de longitud se expande 0.0650 cm cuando se calienta de 0.0 °C a 100.0 °C. Una varilla de otro metal con la misma longitud se expande 0.0350 cm con el mismo aumento de temperatura. Una tercera varilla, también de 30.0 cm, se compone de tramos de los metales anteriores unidos extremo con extremo y se expande 0.0580 cm entre 0.0 °C y 100.0 °C. Calcule la longitud de cada tramo de la barra compuesta.

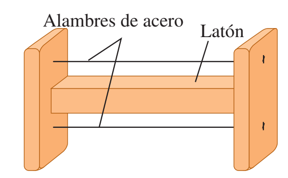
17.88. Una fresca mañana de sábado (4.0 °C), una piloto llena los tanques de su Pitts S-2C (un avión biplaza para acrobacias) hasta su capacidad máxima de 106.0 L. Antes de volar el domingo por la mañana, cuando la temperatura es otra vez de 4.0 °C, la piloto revisa el nivel de combustible y encuentra sólo 103.4 L de gasolina en los tanques. Se da cuenta de que el sábado en la tarde hizo calor, y que la expansión térmica de la gasolina hizo que el combustible faltante saliera por la ventila del tanque. *a*) ¿Qué temperatura máxima (en °C) alcanzaron el combustible y el tanque esa tarde? El coeficiente de expansión de volumen de la gasolina es de 9.5×10^{-4} K^{-1}, y el tanque es de aluminio. *b*) Si quería tener el máximo de combustible disponible para su vuelo, ¿con cuántos litros debió llenar el tanque la piloto?

17.89. *a*) La ecuación (17.12) da el esfuerzo requerido para mantener constante la longitud de una varilla cuando su temperatura cambia. Demuestre que, si se permite que la longitud cambie una cantidad ΔL cuando la temperatura cambia una cantidad ΔT, el esfuerzo será igual a

$$\frac{F}{A} = Y\left(\frac{\Delta L}{L_0} - \alpha\Delta T\right)$$

donde F es la tensión en la varilla, L_0 es su longitud original, A es el área de la sección transversal, α es su coeficiente de expansión lineal y Y es su módulo de Young. *b*) Una barra de latón gruesa tiene proyecciones en sus extremos (figura 17.32). Dos alambres finos de acero, tendidos entre las proyecciones, tienen tensión cero cuando el sistema está a 20 °C. Calcule el esfuerzo de tensión en los alambres, si el sistema se calienta a 140 °C. Haga supuestas simplificaciones si es necesario, pero especifíquelas.

Figura 17.32 Problema 17.89.



17.90. Una varilla de acero con 0.350 m de longitud y una de aluminio con 0.250 m de longitud, ambas con el mismo diámetro, se colocan extremo con extremo entre soportes rígidos sin esfuerzo inicial en ellas. Ahora se incrementa 60.0 C° su temperatura. Calcule el esfuerzo en cada varilla. (*Sugerencia:* la longitud de la varilla combinada no cambia, pero las longitudes de las varillas individuales sí. Véase el problema 17.89.)

17.91. Un anillo de acero con diámetro interior de 2.5000 in a 20.0 °C se calienta y se ensambla alrededor de un eje de latón con diámetro exterior de 2.5020 in a 20.0 °C. *a*) ¿A qué temperatura debe calentarse el anillo durante el ensamble? *b*) Si el anillo y el eje se enfrían juntos, digamos con aire líquido, ¿a qué temperatura se saldrá el anillo del eje?

17.92. Esfuerzo de volumen por un aumento de temperatura. *a*) Demuestre que, si un objeto sometido a presión se calienta sin dejar que se expanda, el aumento de presión es

$$\Delta p = B\beta\Delta T$$

donde se supone que el módulo de volumen B y el coeficiente de expansión de volumen promedio β son positivos y constantes. *b*) ¿Qué presión se necesita para evitar que un bloque de acero se expanda, si se calienta de 20.0 °C a 35.0 °C?

17.93. Un líquido se encierra en un cilindro metálico provisto de un pistón del mismo metal. Inicialmente el sistema está a una presión de 1.00 atm (1.013×10^5 Pa) y a 30.0 °C. Se empuja el pistón hacia abajo, hasta que la presión sobre el líquido se incrementa en 50.0 atm y se fija en esta posición. Calcule la nueva temperatura a la que la presión del líquido será otra vez 1.00 atm. Suponga que el cilindro tiene resistencia suficiente para que su volumen no se altere por los cambios de presión, sólo por los de temperatura. Use el resultado del problema 17.92. (*Sugerencia:* véase la sección 11.4.)

Compresibilidad del líquido: $k = 8.50 \times 10^{-10}\,\text{Pa}^{-1}$

Coeficiente de expansión de volumen del líquido: $\beta = 4.80 \times 10^{-4}\,\text{K}^{-1}$

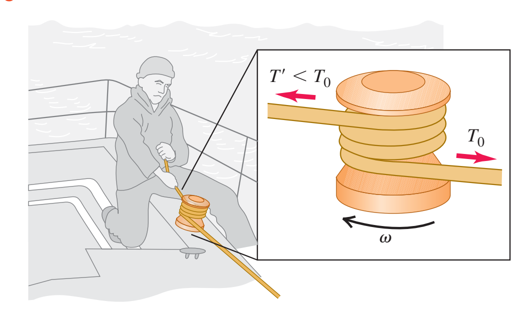
Coeficiente de expansión de volumen del metal: $\beta = 3.90 \times 10^{-5}\,\text{K}^{-1}$

17.94. Usted enfría un trozo de hierro al rojo vivo (temperatura de 745 °C) dejándolo caer en una taza aislada con masa insignificante, que contiene 75.0 g de agua a 20.0 °C. Suponiendo que no hay intercambio de calor con los alrededores, *a*) ¿cuál será la temperatura final del agua y *b*) cuál será la masa final del hierro y del agua que quede?

17.95. Reingreso de naves espaciales. Una nave espacial de aluminio tiene una rapidez orbital de 7700 m/s. *a*) Calcule la relación entre su energía cinética y la energía requerida para elevar su temperatura de 0 °C a 600 °C. (El punto de fusión del aluminio es de 660 °C. Suponga una capacidad calorífica constante de 910 J/kg · K.) *b*) Analice la importancia de su respuesta para el problema del reingreso de una nave tripulada en la atmósfera terrestre.

17.96. Un cabrestante es un tambor o cilindro giratorio sobre el que desliza una cuerda para amplificar de manera considerable su tensión, al tiempo que se mantienen libres sus extremos (figura 17.33). Puesto que la tensión adicional es causada por fricción, se genera energía térmica. *a*) Si la diferencia de tensión entre los extremos de la cuerda es de 520.0 N y el cabrestante tiene 10.0 cm de diámetro y gira una vez cada 0.900 s, calcule la tasa de generación de energía térmica. ¿Por qué no importa el número de vueltas? *b*) Si el cabrestante es de hierro y tiene una masa de 6.00 kg, ¿con qué rapidez aumenta su temperatura? Suponga que la temperatura en el cabrestante es uniforme y que toda la energía térmica generada fluye hacia él.

Figura 17.33 Problema 17.96.



17.97. Ley de Debye T^3. A temperaturas muy bajas, la capacidad calorífica molar de la sal de roca varía con la temperatura como T^3 según la ley de Debye:

$$C = k\frac{T^3}{\Theta^3}$$

donde $k = 1940$ J/mol · K y $\Theta = 281$ K. *a*) ¿Cuánto calor se requiere para elevar la temperatura de 1.50 mol de sal de roca de 10.0 K a 40.0 K? (*Sugerencia:* use la ecuación (17.18) en la forma $dQ = nC\,dT$ e integre.) *b*) Calcule la capacidad calorífica molar media en este intervalo. *c*) Calcule la capacidad calorífica molar verdadera a 40.0 K.

17.98. Una persona con masa de 70.0 kg está sentada en una tina de 190.0 cm por 80.0 cm. Antes de entrar ella, el agua tenía 10.0 cm de profundidad. El agua está a 37.0 °C. Suponga que el agua se enfriara espontáneamente para formar hielo a 0.0 °C y que toda la energía liberada se usara para lanzar al pobre bañista verticalmente hacia arriba. ¿Qué altura alcanzaría? (Como veremos en el capítulo 20, la conservación de la energía permite este suceso pero lo prohíbe la segunda ley de la termodinámica.)

17.99. Aire caliente en una clase de física. *a*) Un estudiante típico que escucha atentamente una clase de física produce 100 W de calor. ¿Cuánto calor desprende un grupo de 90 estudiantes de física, en una aula durante una clase de 50 min? *b*) Suponga que toda la energía térmica del inciso *a*) se transfiere a los 3200 m^3 de aire del aula. El aire tiene un calor específico de 1020 J/kg · K y una densidad de 1.20 kg/m^3. Si nada de calor escapa y el sistema de aire acondicionado está apagado, ¿cuánto aumentará la temperatura del aire durante tal clase? *c*) Si el grupo está en examen, la producción de calor por estudiante aumenta a 280 W. ¿Cuánto aumenta la temperatura en 50 min en este caso?

17.100. La capacidad calorífica molar de cierta sustancia varía con la temperatura, según la ecuación empírica:

$$C = 29.5\ \text{J/mol}\cdot\text{K} + (8.20 \times 10^{-3}\ \text{J/mol}\cdot\text{K}^2)\,T$$

¿Cuánto calor se necesita para calentar 3.00 mol de la sustancia de 27 °C a 227 °C? (*Sugerencia:* use la ecuación (17.18) en la forma $dQ = nC\,dT$ e integre.)

17.101. Para su cabaña campestre, usted decide construir un primitivo refrigerador de espuma de poliestireno y planea mantener fresco el interior con un bloque de hielo, cuya masa inicial es de 24.0 kg. La caja tiene dimensiones de 0.500 m × 0.800 m × 0.500 m. El agua del hielo derretido se recolecta en el fondo de la caja. Suponga que el bloque de hielo está a 0.00 °C y que la temperatura exterior es de 21.0 °C. Si la tapa de la caja vacía nunca se abre y usted desea que el interior de la caja permanezca a 5.00 °C durante una semana exacta-

mente, hasta que el hielo se derrita, ¿cuál debe ser el grosor la espuma de poliestireno?

17.102. Calefacción con agua caliente o con vapor. En un sistema casero de calefacción por agua caliente se alimenta agua a 70.0 °C (158.0 °F) a los radiadores, de donde sale a 28.0 °C. El sistema se va a reemplazar por uno de vapor de agua, en el que el vapor a presión atmosférica se condensa en los radiadores, saliendo de éstos a 35.0 °C (95.0 °F). ¿Cuántos kilogramos de vapor suministrarán la misma cantidad de calor que suministraba 1.00 kg de agua caliente en el primer sistema?

17.103. Un calorímetro de cobre con masa de 0.446 kg contiene 0.0950 kg de hielo. El sistema está inicialmente a 0.0 °C. *a*) Si a la lata se agregan 0.0350 kg de vapor de agua a 100 °C y 1.00 atm de presión, ¿qué temperatura final alcanzará la lata del calorímetro y su contenido? *b*) A la temperatura final, ¿cuántos kilogramos habrá de hielo, cuántos de agua líquida y cuántos de vapor?

17.104. Un recipiente de espuma de poliestireno de masa insignificante contiene 1.75 kg de agua y 0.450 kg de hielo. Más hielo, proveniente de un refrigerador a -15.0 °C, se agrega a la mezcla en el recipiente, y cuando se alcanza el equilibrio térmico, la masa total del hielo en el recipiente es de 0.778 kg. Suponiendo que no hay intercambio de calor con los alrededores, ¿cuál es la masa de hielo que se agregó?

17.105. En un recipiente de masa despreciable, se agregan 0.0400 kg de vapor de agua a 100 °C y presión atmosférica a 0.200 kg de agua a 50.0 °C. *a*) Si no se transfiere calor con el entorno, ¿qué temperatura final alcanzará el sistema? *b*) A la temperatura final, ¿cuántos kilogramos hay de vapor de agua y cuántos de agua líquida?

17.106. Un tubo conduce desde un calorímetro de 0.150 kg hasta un matraz donde hierve agua a presión atmosférica. El calorímetro tiene calor específico de 420 $\mathrm{J/kg \cdot K}$ que originalmente contiene 0.340 kg de agua a 15.0 °C. Se permite que se condense vapor en el calorímetro a presión atmosférica hasta que su temperatura sube a 71.0 °C, después de lo cual la masa total del calorímetro y su contenido es de 0.525 kg. Calcule el calor de vaporización del agua con estos datos.

17.107. Un trabajador vierte 1.250 kg de plomo fundido a una temperatura de 365.0 °C en 0.5000 kg de agua a una temperatura de 75.00 °C, en un recipiente aislado de masa insignificante. Suponiendo que no hay pérdida de calor hacia los alrededores, calcule la masa de plomo y del agua remanente en el recipiente cuando los materiales alcanzan el equilibrio térmico.

17.108. Un método experimental para medir la conductividad térmica de un material aislante consiste en construir una caja del material y medir el aporte de potencia a un calentador eléctrico dentro de la caja, que mantiene el interior a una temperatura medida por encima de la de la superficie exterior. Suponga que en un aparato así se requiere un aporte de potencia de 180 W para mantener la superficie interior de la caja 65.0 C° (aprox. 120 F°) por encima de la temperatura de la superficie exterior. El área total de la caja es de 2.18 $\mathrm{m^2}$, y el espesor de la pared es de 3.90 cm. Calcule la conductividad térmica del material en unidades del SI.

17.109. Efecto de una ventana en una puerta. Un carpintero construye una puerta de madera sólida de 2.00 m $\times$ 0.95 m $\times$ 5.0 cm. Su conductividad térmica es $k = 0.120\ \mathrm{W/m \cdot K}$. Las películas de aire en las superficies interior y exterior de la puerta tienen la misma resistencia térmica combinada, que un espesor adicional de 1.8 cm de madera sólida. La temperatura interior es de 20.0 °C, y la exterior, de -8.0 °C. *a*) Calcule la tasa de flujo de calor a través de la puerta. *b*) ¿En qué factor aumenta el flujo de calor, si en la puerta se coloca una ventana cuadrada de 0.500 m por lado? El vidrio tiene un espesor de 0.450 cm y una conductividad térmica de 0.80 $\mathrm{W/m \cdot K}$. Las películas de aire junto al cristal tienen una resistencia térmica total igual a la de otros 12.0 cm de vidrio.

17.110. Un plafón de madera con resistencia térmica R_1 se cubre con una capa de aislante con resistencia térmica R_2. Demuestre que la resistencia térmica efectiva de la combinación es $R = R_1 + R_2$.

17.111. Calcule la relación entre las razones de pérdida de calor a través de una ventana de un solo cristal con un área de 0.15 $\mathrm{m^2}$ y a través de una ventana de doble cristal con la misma área. Cada cristal tiene un espesor de 4.2 mm, y el espacio entre los dos cristales de la ventana doble es de 7.0 mm. El vidrio tiene una conductividad térmica de 0.80 $\mathrm{W/m \cdot K}$. Las películas de aire en las superficies interior y exterior de ambas ventanas tienen una resistencia térmica combinada de 0.15 $\mathrm{m^2 \cdot K/W}$.

17.112. Se sueldan varillas de cobre, latón y acero para formar una “Y”. El área transversal de cada varilla es 2.00 $\mathrm{cm^2}$. El extremo libre de la varilla de cobre se mantiene a 100.0 °C; y los extremos libres de las varillas de latón y acero, a 0.0 °C. Suponga que no hay pérdida de calor por los costados de las varillas, cuyas longitudes son: cobre, 13.0 cm; latón, 18.0 cm; acero, 24.0 cm. *a*) ¿Qué temperatura tiene el punto de unión? *b*) Calcule la corriente de calor en cada una de las varillas.

17.113. Tiempo que tarda un lago en cubrirse de hielo. *a*) Cuando la temperatura del aire está por debajo de 0 °C, el agua en la superficie de un lago se congela para formar una plancha de hielo. ¿Por qué no se congela todo el volumen del lago? *b*) Demuestre que el espesor del hielo formado en la superficie de un lago es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo, si el calor de fusión del agua que se congela en la cara inferior de la capa de hielo atraviesa dicha capa por conducción. *c*) Suponiendo que la superficie de arriba del hielo está a -10 °C y que la de abajo está a 0 °C, calcule el tiempo que tardará en formarse una capa de hielo de 25 cm de espesor. *d*) Si el lago del inciso *c*) tiene una profundidad uniforme de 40 m, ¿cuánto tardaría en congelarse totalmente? ¿Es probable que eso ocurra?

17.114. Una varilla tiene inicialmente una temperatura uniforme de 0 °C. Un extremo se mantiene a 0 °C y el otro se pone en contacto con un baño de vapor a 100 °C. La superficie de la varilla está aislada de modo que el calor sólo puede fluir longitudinalmente por la varilla, que tiene un área transversal de 2.50 $\mathrm{cm^2}$, longitud de 120 cm, conductividad térmica de 380 $\mathrm{W/m \cdot K}$, densidad de $1.00 \times 10^4\ \mathrm{kg/m^3}$ y calor específico de 520 $\mathrm{J/kg \cdot K}$. Considere un elemento cilíndrico corto de la varilla de 1.00 cm de longitud. *a*) Si el gradiente de temperatura en el extremo más frío de este elemento es de 140 C°/cm, ¿cuántos joules de energía térmica fluyen por este extremo cada segundo? *b*) Si la temperatura media del elemento está aumentando a una tasa de 0.250 C°/s, calcule el gradiente de temperatura en el otro extremo del elemento.

17.115. Una cabaña rústica tiene un piso cuya área es de 3.50 m $\times$ 3.00 m. Sus paredes, que miden 2.50 m de alto, están hechas de madera (conductividad térmica de 0.0600 $\mathrm{W/m \cdot K}$) de 1.80 cm de grosor y están aisladas con 1.50 cm de un material sintético. Cuando la temperatura exterior es de 2.00 °C, es necesario calentar la habitación a una tasa de 1.25 kW para mantener su temperatura a 19.0 °C. Calcule la conductividad térmica del material aislante. Desprecie la pérdida de calor a través del techo y el piso. Suponga que las superficies interna y externa de la pared tienen la misma temperatura que el aire en el interior y afuera de la cabaña.

17.116. La tasa de energía radiante que llega del Sol a la atmósfera superior de la Tierra es de cerca de 1.50 $\mathrm{kW/m^2}$. La distancia de la Tierra al Sol es de 1.50×10^{11} m, y el radio del Sol es de 6.96×10^8 m. *a*) Calcule la tasa de radiación de energía por unidad de área de la superficie solar. *b*) Si el Sol radia como cuerpo negro ideal, ¿qué temperatura superficial tiene?

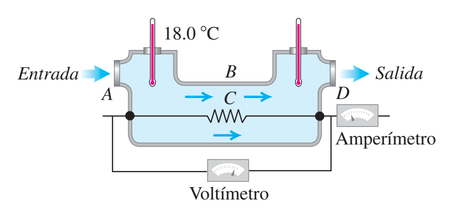
17.117. Termo para helio líquido. Un físico usa una lata cilíndrica de metal de 0.250 m de altura y 0.090 m de diámetro para guardar helio líquido a 4.22 K; a esa temperatura, el calor de vaporización del helio es de 2.09×10^4 J/kg. La lata está rodeada por completo de

paredes que se mantienen a la temperatura del nitrógeno líquido a 77.3 K, con un vacío entre la lata y dichas paredes. ¿Cuánto helio se pierde por hora? La emisividad de la lata metálica es de 0.200. La única transferencia de calor entre la lata y las paredes es por radiación.

17.118. Expansión térmica de un gas ideal. *a*) La presión p, volumen V, número de moles n y temperatura Kelvin T de un gas ideal están relacionados por la ecuación $pV = nRT$, donde R es una constante. Demuestre que el coeficiente de expansión de volumen de un gas ideal es igual al recíproco de la temperatura Kelvin, si la expansión es a presión constante. *b*) Compare los coeficientes de expansión de volumen del cobre y el aire a una temperatura de 20 °C. Suponga que el aire puede tratarse como gas ideal y que la presión se mantiene constante.

17.119. Un ingeniero está perfeccionando un calentador de agua eléctrico que suministra agua caliente continuamente. En la figura 17.34 se muestra un diseño de prueba. El agua fluye a una tasa de 0.500 kg/min, el termómetro de entrada registra 18.0 °C, el voltímetro marca 120 V y el amperímetro indica 15.0 A [lo que corresponde a un aporte de potencia de entrada de (120 V) × (15.0 A) = 1800 W]. *a*) Cuando por fin se alcanza un estado estable, ¿qué marca el termómetro de salida? *b*) ¿Por qué no necesitamos considerar la capacidad calorífica mc del aparato en sí?

Figura 17.34 Problema 17.119.



17.120. Cuando un hámster ingiere alimento. La producción de energía de un animal en actividad se denomina tasa metabólica basal (TMB) y es una medida de la conversión de energía de alimentos en otras formas de energía. Un calorímetro sencillo para medir la TMB consiste en una caja aislada provista de un termómetro para medir la temperatura del aire, el cual tiene una densidad de 1.20 kg/m^3 y una capacidad calorífica específica de 1020 J/kg · K. Un hámster de 50.0 g se coloca en un calorímetro que contiene 0.0500 m^3 de aire a temperatura ambiente. *a*) Cuando el hámster está corriendo en una rueda, la temperatura del aire del calorímetro sube 1.60 C° cada hora. ¿Cuánto calor genera el hámster al correr una hora? Suponga que todo este calor pasa al aire del calorímetro. Desprecie el calor que pasa a las paredes de la caja y al termómetro, y suponga que no se transfiere calor al entorno. *b*) Suponiendo que el hámster convierte semillas en calor con una eficiencia del 10% y que las semillas tienen un valor energético de 24 J/g, ¿cuántos gramos de semillas debe comer el hámster cada hora para obtener la energía calculada en el inciso *a*)?

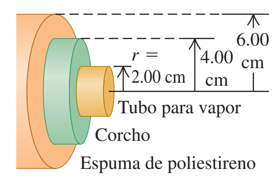
17.121. Las capas de hielo de Groenlandia y la Antártida contienen aproximadamente el 1.75% del agua total (por masa) de la superficie terrestre; los océanos contienen un 97.5%, y el otro 0.75% es agua subterránea. Suponga que las capas de hielo, actualmente se encuentran a una temperatura media aproximada de −30 °C, de algún modo resbalan hacia el océano y se derriten. ¿Cuál sería la disminución de temperatura del océano que se produciría como resultado de ello? Suponga que la temperatura media del agua del océano es actualmente de 5.00 °C.

Problemas de desafío

17.122. *a*) Un casco esférico tiene radios interior y exterior a y b, respectivamente, y las temperaturas en las superficies interior y exterior son T_2 y T_1 respectivamente. La conductividad térmica del material del casco es k. Deduzca una ecuación para la corriente total de calor a través del casco. *b*) Deduzca una ecuación para la variación de temperatura dentro del casco del inciso *a*); es decir, calcule T en función de r, la distancia al centro del casco. *c*) Un cilindro hueco tiene longitud L, radio interior a y radio exterior b, y las temperaturas en las superficies interior y exterior son T_2 y T_1, respectivamente. (El cilindro podría representar una tubería de agua caliente aislada, por ejemplo.) La conductividad térmica del material del cilindro es k. Deduzca una ecuación para la corriente total de calor a través de las paredes del cilindro. *d*) Para el cilindro del inciso *c*), deduzca una ecuación para la variación de temperatura dentro de las paredes del cilindro. *e*) Para el casco esférico del inciso *a*) y el cilindro hueco del inciso *c*), demuestre que la ecuación para la corriente total de calor en cada caso se reduce a la ecuación (17.21) para flujo de calor lineal, cuando el casco o cilindro es muy delgado.

17.123. Una tubería de vapor de agua de 2.00 cm de radio, que lleva vapor a 140 °C, está rodeada por una camisa cilíndrica con radios interior y exterior de 2.00 cm y 4.00 cm, respectivamente, hecha con un tipo de corcho cuya conductividad térmica es de 4.00×10^{-2} W/m · K. Ésta está rodeada a la vez por una camisa cilíndrica de espuma de poliestireno con conductividad térmica de 1.00×10^{-2} W/m · K y radios interior y exterior de 4.00 cm y 6.00 cm, respectivamente (figura 17.35). La superficie exterior de la espuma de poliestireno está en contacto con aire a 15 °C. Suponga que esta superficie exterior tiene una temperatura de 15 °C. *a*) Calcule la temperatura para un radio de 4.00 cm (la unión entre las dos capas aislantes). *b*) Calcule la tasa total de transferencia de calor hacia afuera de un tramo de 2.00 m de tubería. (*Sugerencia:* use la expresión encontrada en el inciso *c*) del problema de desafío 17.122.)

Figura 17.35 Problema de desafío 17.123.



17.124. Suponga que ambos extremos de la varilla de la figura 17.23 se mantienen a una temperatura de 0 °C y que la distribución de temperatura inicial a lo largo de la varilla está dada por $T = (100\ °\mathrm{C}) \operatorname{sen} \pi x/L$, donde x se mide desde el extremo izquierdo de la varilla. Sea la varilla de cobre, con longitud $L = 0.100$ m y área de sección transversal de 1.00 cm^2. *a*) Muestre la distribución inicial de temperatura en un diagrama. *b*) Determine la distribución final de temperatura después de mucho tiempo. *c*) Dibuje curvas que, en su opinión, representen la distribución de temperatura en instantes intermedios. *d*) Determine el gradiente de temperatura inicial en los extremos de la varilla. *e*) Calcule la corriente de calor inicial desde los extremos de la varilla hacia los cuerpos que están en contacto con ellos. *f*) ¿Qué corriente de calor inicial hay en el centro de la varilla? Explique. ¿Qué corriente de calor hay en este punto en un instante posterior? *g*) ¿Qué valor tiene la *difusividad térmica* $k/\rho c$ del cobre, y en qué unidad se expresa? (Aquí, k es la conductividad térmica, $\rho = 8.9 \times 10^3$ kg/m^3 es la densidad y c es el calor específico.) *h*) Determine la rapidez inicial de cambio de la temperatura en el centro de la varilla. *i*) ¿Cuánto tiempo tardaría el centro de la varilla en alcanzar su temperatura final si la temperatura sigue disminuyendo con esa rapidez? (Este tiempo se llama *tiempo de relajación* de la varilla.) *j*) Por las gráficas del inciso *c*), ¿cabría esperar que la rapidez de cambio de la temperatura en el punto medio se mantenga constante, aumente o disminuya en función del tiempo? *k*) Determine la rapidez inicial de cambio de la temperatura en un punto de la varilla situado a 2.5 cm de su extremo izquierdo.

17.125. Cambio de temperatura en un reloj. Un reloj de péndulo está diseñado para marcar un segundo en cada oscilación de lado a lado del péndulo (periodo de 2 s). *a*) ¿Se adelanta un reloj de péndulo cuando hace calor y se atrasa cuando hace frío, o al revés? Explique su razonamiento. *b*) Cierto reloj de péndulo da la hora correcta a 20.0 °C.

La varilla del péndulo es de acero, y su masa puede despreciarse en comparación con la masa de la lenteja. Calcule el cambio fraccionario de longitud de la varilla cuando se enfría a 10.0 °C. *c*) ¿Cuántos segundos por día se adelanta o se atrasa el reloj a 10.0 °C? ¿Con qué exactitud debe controlarse la temperatura para que el reloj no se atrase ni se adelante más de 1.00 s al día? ¿La respuesta depende del periodo del péndulo?

17.126. Un extremo de una varilla cilíndrica de cobre sólido de 0.200 m de longitud se mantiene a una temperatura de 20.00 K. El otro extremo se ennegrece y se expone a radiación térmica de las paredes circundantes que están a 500.0 K. Los costados de la varilla están aislados, de modo que sólo se gana o pierde energía por los extremos. Cuando se alcanza el equilibrio, ¿qué temperatura tiene el extremo ennegrecido? (*Sugerencia:* puesto que el cobre es muy buen conductor del calor a bajas temperaturas, con $k = 1670\ \mathrm{W/m \cdot K}$, la temperatura del extremo ennegrecido es apenas un poco mayor que 20.00 K.)

17.127. Un paseo en el Sol. Considere una pobre alma perdida que camina a 5 km/h en un día caluroso en el desierto, vestida sólo con un traje de baño. La temperatura de la piel de esta persona tiende a aumentar por cuatro mecanismos: i) se genera energía por reacciones metabólicas en el cuerpo a una tasa de 280 W, y casi toda esta energía se convierte en calor que fluye hacia la piel; ii) se suministra calor a la piel por convección del aire exterior con una rapidez de $k'A_{\mathrm{piel}}(T_{\mathrm{aire}} - T_{\mathrm{piel}})$, donde k' es $54\ \mathrm{J/h \cdot C° \cdot m^2}$, el área de piel expuesta A_{piel} es de 1.5 $\mathrm{m^2}$, la temperatura del aire T_{aire} es de 47 °C y la temperatura de la piel T_{piel}, es de 36 °C; iii) la piel absorbe energía radiante del Sol a una tasa de 1400 $\mathrm{W/m^2}$; iv) la piel absorbe energía radiante del entorno, que tiene una temperatura de 47 °C. *a*) Calcule la tasa neta (en watts) con que estos cuatro mecanismos calientan la piel de la persona. Suponga que la emisividad de la piel es $e = 1$ y que su temperatura inicial es de 36 °C. ¿Qué mecanismo es el más importante? *b*) ¿Con qué rapidez (en L/h) debe evaporarse sudor de la piel de esta persona para mantener una temperatura constante en la piel? (El calor de vaporización del agua a 36 °C es de 2.42×10^6 J/kg.) *c*) Suponga ahora que la persona está protegida por ropa clara $(e \approx 0)$, de modo que el área de piel expuesta es de sólo 0.45 $\mathrm{m^2}$. ¿Qué tasa de transpiración se requiere ahora? Comente la utilidad de la vestimenta tradicional que usa la gente del desierto.

18 PROPIEDADES TÉRMICAS DE LA MATERIA

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo relacionar la presión, el volumen y la temperatura de un gas.
- Cómo las interacciones entre las moléculas de una sustancia determinan las propiedades de ésta.
- Cómo la presión y la temperatura de un gas se relacionan con la energía cinética de sus moléculas.
- Cómo las capacidades caloríficas de un gas revelan si sus moléculas giran o vibran.
- Qué determina si una sustancia es un gas, un líquido o un sólido.

? Cuanto más elevada es la temperatura de un gas, mayor es la energía cinética media de sus moléculas. ¿Qué tan rápidas son las moléculas que se mueven en el aire encima de una sartén (100 °C) en comparación con las que se encuentran en el aire circundante de la cocina (25 °C)?



La cocina es un lugar excelente para estudiar la forma en que las propiedades de la materia dependen de la temperatura. Cuando hervimos agua en una tetera, el aumento de temperatura produce vapor que sale silbando a alta presión. Si olvidamos perforar una papa antes de hornearla, el vapor a alta presión que se produce en su interior puede hacer que reviente. El vapor de agua del aire puede condensarse en gotitas de líquido en las paredes de un vaso con agua helada; y si acabamos de sacar el vaso del congelador, se formará escarcha en las paredes al solidificarse el vapor.

Todos estos ejemplos muestran las interrelaciones de las propiedades a gran escala, o *macroscópicas*, de una sustancia, como presión, volumen, temperatura y masa de la sustancia. Sin embargo, también podemos describir una sustancia desde una perspectiva *microscópica*. Esto implica investigar cantidades a pequeña escala, como las masas, velocidades, energías cinéticas y cantidades de movimiento de las moléculas individuales que constituyen una sustancia.

Las descripciones macroscópica y microscópica están íntimamente relacionadas. Por ejemplo, las fuerzas de choque (microscópicas) que se presentan cuando las moléculas de aire inciden en una superficie sólida (como la piel) causan la presión atmosférica (macroscópica). La presión atmosférica estándar es de 1.01×10^5 Pa; para producir esta presión, 10^{32} moléculas golpean la piel cada día ¡con una rapidez media de más de 1700 km/h!

En este capítulo iniciaremos el estudio de las propiedades térmicas de la materia examinando algunos de sus aspectos macroscópicos. Prestaremos especial atención al *gas ideal*, una de las formas de la materia más fáciles de entender. Aprovechando lo que sabemos acerca de la cantidad de movimiento y la energía cinética, relacionaremos las propiedades macroscópicas del gas ideal con el comportamiento microscópico de sus moléculas individuales. También usaremos las ideas microscópicas para entender las capacidades caloríficas de los gases y sólidos. Por último, examinaremos las distintas *fases* de la materia —gas, líquido y sólido— y las condiciones en que se presenta cada una.

18.1 Ecuaciones de estado



8.4 Variables de estado y ley del gas ideal

Las condiciones en que existe un material dado se describen con cantidades físicas como presión, volumen, temperatura y cantidad de sustancia. Por ejemplo, un tanque de oxígeno para soldar tiene un manómetro y una etiqueta que indica su volumen. Podríamos agregar un termómetro y pesar el tanque para determinar su masa. Estas variables describen el *estado* del material y se llaman **variables de estado**.

El volumen V de una sustancia suele estar determinado por su presión p, temperatura T y cantidad de sustancia, descrita por la masa m_{total} o número de moles n. (Designamos a la masa total de una sustancia m_{total} porque más adelante en este capítulo usaremos m para referirnos a la masa de una molécula.) Normalmente, no es posible cambiar una de estas variables sin alterar otra. Si el tanque de oxígeno se calienta, la presión aumenta; si se calienta demasiado, hace explosión. Esto sucede ocasionalmente con las calderas de vapor sobrecalentadas.

En unos cuantos casos, la relación entre p, V, T y m (o n) es tan sencilla que podemos expresarla mediante una **ecuación de estado**; si es demasiado complicada, podemos usar gráficas o tablas numéricas. Aun así, la relación entre las variables sigue existiendo; la llamaremos ecuación de estado aunque no conozcamos la ecuación real.

He aquí una ecuación de estado sencilla (aunque aproximada) para un material sólido. El coeficiente térmico de expansión de volumen β (véase la sección 17.4) es el cambio fraccionario de volumen $\Delta V/V_0$ por cambio unitario de temperatura, y la compresibilidad k (véase la sección 11.4) es el negativo del cambio fraccionario de volumen $\Delta V/V_0$ por cambio unitario de presión. Si cierta cantidad de material tiene un volumen V_0 cuando la presión es p_0 y la temperatura es T_0, el volumen V a una presión p y temperatura T ligeramente distintas es aproximadamente

$$V = V_0[1 + \beta(T - T_0) - k(p - p_0)] \tag{18.1}$$

[El término $k(p - p_0)$ tiene signo negativo porque un *aumento* en la presión causa una *disminución* del volumen.] Llamamos a la ecuación (18.1) la *ecuación de estado* del material.

La ecuación del gas ideal

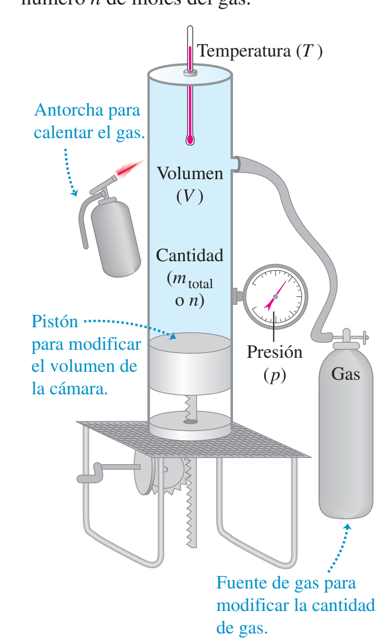
Otra ecuación de estado sencilla es la del *gas ideal*. La figura 18.1 muestra un sistema experimental para estudiar el comportamiento de un gas. El cilindro tiene un pistón móvil para variar el volumen, la temperatura puede variarse por calentamiento, y podemos bombear cualquier cantidad de gas que deseemos al cilindro. Luego medimos la presión, el volumen, la temperatura y la cantidad de gas. Observe que *presión* se refiere tanto a la fuerza por unidad de área ejercida por el cilindro sobre el gas como a la fuerza ejercida por el gas sobre el cilindro; por la tercera ley de Newton, éstas deben ser iguales.

Por lo general, lo más fácil es describir la cantidad de un gas en términos del número de moles n, en vez de la masa. Hicimos esto al definir la capacidad calorífica molar en la sección 17.5; tal vez quiera repasar esa sección. La **masa molar** M de un compuesto (a veces llamada *peso molecular*) es la masa de un mol, y la masa total m_{total} de una cantidad dada de ese compuesto es el número de moles n multiplicado por la masa de un mol M:

$$m_{total} = nM \qquad \text{(masa total, número de moles y masa molar)} \tag{18.2}$$

De esta forma, si conocemos el número de moles de gas en el cilindro, podemos determinar la masa del gas mediante la ecuación (18.2).

18.1 Sistema hipotético para estudiar el comportamiento de los gases. Si calentamos el gas, variamos el volumen con un pistón móvil y añadimos más gas, podremos controlar la presión p, el volumen V, la temperatura T y el número n de moles del gas.



Las mediciones del comportamiento de diversos gases dan origen a tres conclusiones:

1. El volumen V es proporcional al número de moles n. Si duplicamos el número de moles, manteniendo constantes la temperatura y la presión, el volumen se duplica.
2. El volumen varía *inversamente* con la presión absoluta p. Si duplicamos la presión manteniendo constantes la temperatura T y el número de moles n, el gas se comprime a la mitad de su volumen inicial. Dicho de otro modo, pV = constante cuando n y T son constantes.
3. La presión es proporcional a la temperatura *absoluta*. Si duplicamos la temperatura absoluta, manteniendo constantes el volumen y el número de moles, la presión se duplica. En otras palabras, $p = (\text{constante})T$ si n y V son constantes.

18.2 La ecuación del gas ideal $pV = nRT$ da una buena descripción del aire dentro de un neumático inflado, donde la presión es aproximadamente de 3 atmósferas y la temperatura es demasiado alta para que el nitrógeno o el oxígeno se licuen. Conforme el neumático se calienta (T aumenta), el volumen V cambia sólo ligeramente, pero la presión p aumenta.



Estas tres relaciones se pueden combinar en una sola ecuación, llamada **ecuación del gas ideal**:

$$pV = nRT \qquad \text{(ecuación del gas ideal)} \tag{18.3}$$

donde R es una constante de proporcionalidad. El **gas ideal** es un gas para el que la ecuación (18.3) se cumple con precisión a *todas* las presiones y temperaturas. Se trata de un modelo idealizado; funciona mejor a presiones muy bajas y altas temperaturas, cuando las moléculas del gas están muy separadas y en rápido movimiento. El modelo funciona razonablemente bien (dentro de un escaso margen porcentual) a presiones moderadas (unas cuantas atmósferas) y temperaturas muy por encima de aquélla en la que el gas se licua (figura 18.2).

Cabría esperar que la constante R de la ecuación del gas ideal tuviera diferentes valores para diferentes gases, pero resulta ser la misma para *todos* los gases, al menos a baja presión y alta temperatura. Llamamos a R la **constante de los gases** (o *constante del gas ideal*); su valor numérico depende de las unidades de p, V y T. En unidades del SI, con p en Pa (1 Pa = 1 N/m^2) y V en m^3, el mejor valor numérico actual de R es

$$R = 8.314472(15)\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$$

o bien, $R = 8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K}$ con cuatro cifras significativas. Observe que las unidades de presión multiplicada por volumen son las unidades de trabajo o energía (por ejemplo, N/m^2 por m^3); por eso R tiene unidades de energía por mol por unidad de temperatura absoluta. En los cálculos químicos, los volúmenes suelen expresarse en litros (L) y las presiones en atmósferas (atm). En este sistema, con cuatro cifras significativas,

$$R = 0.08206 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Podemos expresar la ecuación del gas ideal (ecuación 18.3) en términos de la masa m_{total} del gas, usando $m_{\text{total}} = nM$ de la ecuación (18.2):

$$pV = \frac{m_{\text{total}}}{M} RT \tag{18.4}$$

De esto, podemos obtener una expresión para la densidad $\rho = m_{\text{total}}/V$ del gas:

$$\rho = \frac{pM}{RT} \tag{18.5}$$

CUIDADO **Densidad contra presión** Al usar la ecuación (18.5), cerciórese de distinguir entre la letra griega ρ ("rho") para la densidad y la letra p para la presión.

Para una *masa constante* (o número constante de moles) del gas ideal, el producto nR es constante, así que la cantidad pV/T también es constante. Si los subíndices 1 y 2 se refieren a dos estados cualesquiera de la misma masa de gas, entonces

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = \text{constante} \qquad \text{(gas ideal, con masa constante)} \tag{18.6}$$

Advierta que usted no necesita el valor de R para usar esta ecuación.

Ya conocíamos la proporcionalidad entre la presión y la temperatura absoluta; de hecho, en el capítulo 17 *definimos* una escala de temperatura en términos de la presión en un termómetro de gas a volumen constante. Esto podría hacer parecer que la relación presión-temperatura de la ecuación del gas ideal es sólo un resultado de la forma como definimos temperatura. Sin embargo, la ecuación también nos dice qué sucede cuando cambiamos el volumen o la cantidad de sustancia. Además, sucede que la escala del termómetro de gas tiene una correspondencia cercana con una escala de temperatura que definiremos en el capítulo 20 y que *no* depende de las propiedades de ningún material específico. Por ahora, consideremos que esta ecuación se basa en tal escala de temperatura independiente del material.

Estrategia para resolver problemas 18.1 Gas ideal



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* A menos que se especifique otra cosa en el problema, se puede usar la ecuación del gas ideal en cualquier situación en la que es preciso determinar el estado (presión, volumen, temperatura y/o número de moles) de un gas.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:

1. Identifique las incógnitas.
2. En algunos problemas sólo nos interesará un estado del sistema; en tal caso, la ecuación (18.3) es la relación que debemos usar. Conoceremos algunas cantidades de esta ecuación; otras serán incógnitas. Elabore una lista de lo que sabe y lo que debe averiguar.
3. En otros problemas comparará dos estados de la misma cantidad de gas. Decida cuál estado es el 1 y cuál el 2, y elabore una lista de las cantidades para cada uno: p_1, p_2, V_1, V_2, T_1, T_2. Si conoce todas menos una de ellas, podrá usar la ecuación (18.6); si no, tendrá que usar la ecuación (18.3). Por ejemplo, si se dan p_1, V_1 y n, no podrá usar la ecuación (18.6) porque no conoce T_1.
4. En algunos problemas interviene la densidad ρ (masa por volumen) en vez del número de moles n y el volumen V. En tal caso, lo más conveniente es utilizar la ecuación (18.5), $\rho = pM/RT$.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Como siempre, use unidades consistentes. Tal vez tenga que convertir atmósferas en pascales o litros en m^3 ($1\ m^3 = 10^3\ L = 10^6\ cm^3$). A veces, el enunciado del problema implicará que un sistema de unidades es claramente mejor que otros. Decida qué sistema usará y ajústese a él.
2. No olvide que T siempre debe ser temperatura *absoluta*. Si le dan temperaturas en °C, conviértalas a K sumándoles 273.15 (con tres cifras significativas, 273). Igualmente, p siempre es la presión absoluta, nunca la presión manométrica.
3. A veces tendrá que convertir entre masa m_{total} y número de moles n. La relación es $m_{total} = Mn$, donde M es la masa molar. Tenga cuidado: si usa la ecuación (18.4), *deberá* usar las mismas unidades de masa para m_{total} y M. Si M está en gramos por mol (como es habitual para masas molares), m_{total} deberá estar en gramos. Si quiere usar m_{total} en kg, deberá convertir M a kg/mol. Por ejemplo, la masa molar del oxígeno es de $32\ g/mol = 32 \times 10^{-3}\ kg/mol$. ¡Tenga cuidado!
4. Después de haber seguido los pasos 1 a 3, despeje las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Examine detenidamente sus resultados y verifique que sean físicamente lógicos. Así, en el ejemplo 18.1 veremos que un mol de gas a una atmósfera de presión y 0 °C ocupa un volumen de 22.4 litros. Si calcula la cantidad de aire que hay dentro de un volumen de 1 litro y obtiene una respuesta altísima, como $n = 5000$ moles, es probable que haya convertido erróneamente unidades o que haya cometido un error algebraico.

Ejemplo 18.1 Volumen de un gas a TPE

La condición llamada **temperatura y presión estándar** (TPE) para un gas se define como una temperatura de 0 °C = 273.15 K y una presión de 1 atm = 1.013×10^5 Pa. Si quiere mantener un mol de un gas ideal en su habitación a TPE, ¿qué tamaño debe tener el recipiente?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica las propiedades de un gas ideal. Nos dan la presión y la temperatura, y nuestra incógnita es el volumen.

PLANTEAR: Nos preguntan acerca de las propiedades de un solo estado del sistema, así que usamos la ecuación (18.3).

EJECUTAR: Por la ecuación (18.3), usando R en $J/mol \cdot K$,

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{(1\ \text{mol})(8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(273.15\ \text{K})}{1.013 \times 10^5\ \text{Pa}}$$

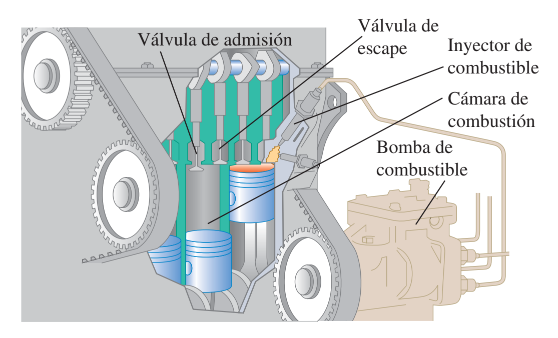
$$= 0.0224\ m^3 = 22.4\ L$$

EVALUAR: Quizá en sus cursos de química ya haya visto este resultado. Observe que 22.4 L es casi exactamente el volumen de tres balones de baloncesto. También serviría un cubo de 0.282 m de lado.

Ejemplo 18.2 Compresión de gas en un motor de automóvil

En un motor de automóvil, una mezcla de aire y gasolina se comprime en los cilindros antes de encenderse. Un motor representativo tiene una razón de compresión de 9.00 a 1: esto implica que el gas en los cilindros se comprime a 1/(9.00) de su volumen original (figura 18.3). La presión inicial es de 1.00 atm y la temperatura inicial es de 27 °C. La presión después de la compresión es de 21.7 atm; calcule la temperatura del gas comprimido.

18.3 Vista recortada de un motor de coche. Mientras la mezcla aire-gasolina se comprime antes de la ignición, las válvulas de admisión y escape están en la posición cerrada (arriba).



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema se nos pide comparar dos estados de la misma cantidad de gas ideal. La incógnita es la temperatura en el estado comprimido. Las válvulas de admisión y de escape en la parte superior del cilindro en la figura 18.3 permanecen cerradas durante la compresión, de manera que la cantidad de gas es constante.

PLANTEAR: Sea el estado 1 el gas sin comprimir, y el 2, el gas comprimido. Así, $p_1 = 1.00$ atm, $p_2 = 21.7$ atm y $V_1 = 9.00\ V_2$. Si convertimos la temperatura a la escala Kelvin sumándole 273, obtenemos $T_1 = 300$ K; la temperatura final T_2 es la incógnita. El número de moles de gas n es constante, así que podemos utilizar la ecuación (18.6).

EJECUTAR: Despejamos la temperatura T_2 del gas comprimido en la ecuación (18.6):

$$T_2 = T_1 \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = (300\ \text{K}) \frac{(21.7\ \text{atm})\ V_2}{(1.00\ \text{atm})(9.00\ V_2)}$$
$$= 723\ \text{K} = 450\ °\text{C}$$

No fue necesario conocer los valores de V_1 ni V_2, sólo la razón entre ambos.

EVALUAR: Observe que T_2 es la temperatura de la mezcla aire-gasolina *antes* de encenderse; al iniciar la combustión, la temperatura sube aún más.

Ejemplo 18.3 Masa de aire en un tanque de buceo

Un tanque de buceo común tiene un volumen de 11.0 L y una presión manométrica, cuando está lleno, de 2.10×10^7 Pa. El tanque "vacío" contiene 11.0 L de aire a 21 °C y 1 atm (1.013×10^5 Pa). Cuando el tanque se llena con aire caliente de una compresora, la temperatura es de 42 °C y la presión manométrica es de 2.10×10^7 Pa. ¿Qué masa de aire se agregó? (El aire es una mezcla de gases: aproximadamente 78% de nitrógeno, 21% de oxígeno y 1% de otros gases; su masa molar media es de 28.8 g/mol = 28.8×10^{-3} kg/mol.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La incógnita es la *diferencia* entre la masa presente al principio (estado 1) y al final (estado 2).

PLANTEAR: Nos dan la masa molar del aire, así que podemos usar la ecuación (18.2) para obtener la incógnita si conocemos el número de moles presentes en los estados 1 y 2. Determinamos n_1 y n_2 aplicando individualmente la ecuación (18.3) a cada estado.

EJECUTAR: Debemos recordar convertir las temperaturas a la escala Kelvin sumándoles 273, y convertir las presiones a absolutas sumándoles 1.013×10^5 Pa. De acuerdo con la ecuación (18.3), el número de moles n_1 en el tanque "vacío" es

$$n_1 = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = \frac{(1.013 \times 10^5\ \text{Pa})(11.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{(8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(294\ \text{K})} = 0.46\ \text{mol}$$

El volumen del tanque metálico prácticamente no cambia por el aumento de presión, así que $V_1 = V_2$. El número de moles en el tanque lleno es

$$n_2 = \frac{p_2 V_2}{R T_2} = \frac{(2.11 \times 10^7\ \text{Pa})(11.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{(8.314\ \text{J/mol} \cdot \text{K})(315\ \text{K})} = 88.6\ \text{mol}$$

Agregamos $n_2 - n_1 = 88.6$ moles $- 0.46$ moles $= 88.1$ moles al tanque. De acuerdo con la ecuación (18.2), la masa agregada es: $M(n_2 - n_1) = (88.1\ \text{mol})(28.8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}) = 2.54$ kg.

EVALUAR: La masa agregada es considerable; bien podríamos usar una báscula para determinar si el tanque está vacío o lleno.

¿Podríamos haber resuelto este problema de la misma forma que el ejemplo 18.2? El volumen es constante, así que $p/nT = RV$ es constante y $p_1/n_1T_1 = p_2/n_2T_2$; podríamos despejar n_2/n_1, la razón entre los moles iniciales y finales. Sin embargo, necesitamos la *diferencia* de estos números, no su cociente, así que esa ecuación no basta para resolver el problema.

Ejemplo 18.4 Variación de la presión atmosférica con la altura

Calcule la variación de la presión atmosférica con la altura en la atmósfera terrestre, suponiendo que la temperatura es 0 °C en todos sus puntos. Ignore la variación de g con la altura.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al aumentar la altitud, disminuyen tanto la presión atmosférica como la densidad. Por lo tanto, tenemos *dos* funciones desconocidas de la altura; para despejarlas, necesitamos dos relaciones independientes. Una de ellas es la ecuación del gas ideal, que podemos escribir en términos de presión y densidad; la otra es la relación entre presión y densidad en un fluido en equilibrio, lo cual vimos en la sección 14.2.

PLANTEAR: En la sección 14.2, dedujimos la ecuación general $dp/dy = -\rho g$, ecuación (14.4), para la variación de la presión p con la altitud y en función de la densidad ρ. La ecuación (18.5), $\rho = pM/RT$, plantea la ecuación del gas ideal en términos de densidad. Nos piden suponer que g y T no varían con la altitud; también supondremos que la atmósfera tiene la misma composición química (y, por lo tanto, la misma masa molar M) a cualquier altura. Combinaremos las dos expresiones y despejaremos $p(y)$.

EJECUTAR: Sustituimos $\rho = pM/RT$ en $dp/dy = -\rho g$, separamos variables e integramos, tomando p_1 como la presión a la altura y_1 y p_2 la presión a y_2:

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{pM}{RT}g$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}\int_{y_1}^{y_2} dy$$

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{Mg}{RT}(y_2 - y_1)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = e^{-Mg(y_2-y_1)/RT}$$

Sea ahora $y_1 = 0$ en el nivel del mar, y sea la presión ahí $p_0 = 1.013 \times 10^5$ Pa. Nuestra expresión final para la presión p a cualquier altura y es entonces

$$p = p_0\, e^{-Mgy/RT}$$

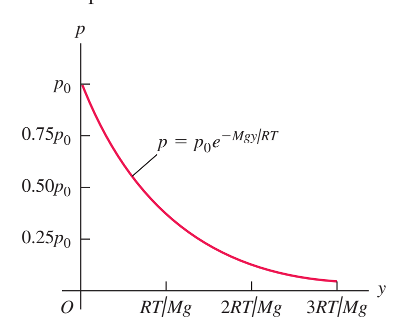
EVALUAR: Según nuestro cálculo, la presión disminuye exponencialmente con la altura. La curva de la figura 18.4 muestra que la pendiente dp/dy se vuelve menos negativa a mayor elevación. Ese resultado es lógico, ya que $dp/dy = -\rho g$ y la densidad también disminuye al aumentar la altura. En la cima del monte Everest, donde $y = 8863$ m,

$$\frac{Mgy}{RT} = \frac{(28.8 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol})(9.80\ \text{m/s}^2)(8863\ \text{m})}{(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273\ \text{K})} = 1.10$$

$$p = (1.013 \times 10^5\ \text{Pa})e^{-1.10} = 0.337 \times 10^5\ \text{Pa}$$
$$= 0.33\ \text{atm}$$

El supuesto de temperatura constante no es realista, y g disminuye un poco al aumentar la altura (véase el problema de desafío 18.92). Aun así, el ejemplo muestra por qué los montañistas deben llevar oxígeno en el monte Everest. También indica por qué los aviones a reacción, que comúnmente vuelan a altitudes de 8000 a 12,000 m, *deben* tener cabinas presurizadas para garantizar la comodidad y la salud de los pasajeros.

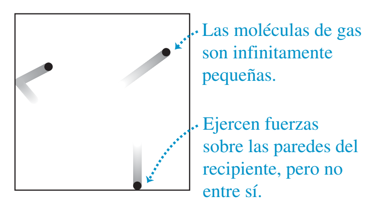
18.4 Variación de la presión atmosférica p con la altura y, suponiendo una temperatura constante T.



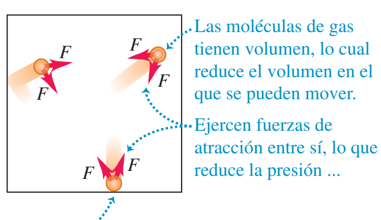
La ecuación de Van der Waals

La ecuación del gas ideal, ecuación (18.3), puede obtenerse a partir de un modelo molecular sencillo que desprecia los volúmenes de las moléculas mismas y las fuerzas de atracción entre ellas (figura 18.5a). Examinaremos ese modelo en la sección 18.3.

a) Modelo idealizado de un gas



b) Un modelo más realista de un gas



18.5 Un gas modelado mediante a) la ecuación del gas ideal y b) la ecuación de Van der Waals.

Por ahora, mencionaremos otra ecuación de estado, la **ecuación de Van der Waals**, que hace correcciones aproximadas por estas dos omisiones (figura 18.5b). La ecuación fue desarrollada en el siglo XIX por el físico holandés J. D. Van der Waals; la interacción atómica que vimos en la sección 13.4 se llamó *interacción de Van der Waals* en su honor. La ecuación de Van der Waals es

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \tag{18.7}$$

Las constantes a y b son constantes empíricas, diferentes para cada gas; b representa aproximadamente el volumen de un mol de moléculas, así que el volumen total de las moléculas es nb y el volumen neto disponible para que se muevan es $V - nb$. La constante a depende de las fuerzas de atracción intermoleculares, las cuales reducen la presión del gas para valores dados de n, V y T *juntando* las moléculas al tiempo que éstas *empujan* las paredes del recipiente. La reducción de presión es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen en una capa cerca de la pared (las moléculas que ejercen la presión sobre la pared) y también es proporcional al número por unidad de volumen en la siguiente capa más allá de la pared (que son las que atraen). Así, la reducción de presión debida a fuerzas intermoleculares es proporcional a n^2/V^2.

Si n/V es un valor pequeño (es decir, cuando el gas está *diluido*), la distancia media entre moléculas es grande, las correcciones de la ecuación de Van der Waals se vuelven insignificantes y la ecuación (18.7) se reduce a la ecuación del gas ideal. Por ejemplo, para dióxido de carbono (CO_2) gaseoso, las constantes de la ecuación de Van der Waals son $a = 0.364\ \text{J}\cdot\text{m}^3/\text{mol}^2$ y $b = 4.27 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$. Vimos en el ejemplo 18.1 que un mol de un gas ideal a $T = 0\ °\text{C} = 273.15\ \text{K}$ y $p = 1\ \text{atm} = 1.013 \times 10^5\ \text{Pa}$ ocupa un volumen $V = 0.0224\ \text{m}^3$; según la ecuación (18.7), un mol de CO_2 que ocupara este volumen a esta temperatura estaría a una presión 532 Pa menor que 1 atm, una diferencia de sólo 0.5% con respecto al valor para el gas ideal.

Gráficas *pV*

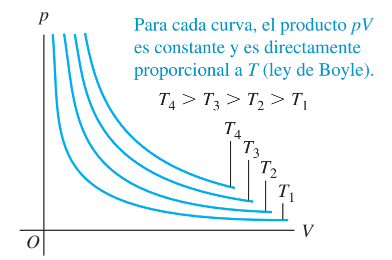
En principio, podríamos representar la relación p-V-T gráficamente como una *superficie* en un espacio tridimensional con coordenadas p, V y T. Esta representación a veces ayuda a entender el comportamiento global de una sustancia, pero las gráficas bidimensionales ordinarias suelen ser más útiles. Una de las más útiles es un juego de curvas de presión en función del volumen, cada una para una temperatura constante dada. Una gráfica de este tipo se llama **gráfica *pV***. Cada curva, que representa el comportamiento a cierta temperatura, se denomina **isoterma**, o *isoterma pV*.

La figura 18.6 muestra isotermas pV para una cantidad constante de gas ideal. La temperatura más alta es T_4; la más baja, T_1. Ésta es una representación gráfica de la ecuación de estado del gas ideal. Podemos leer el volumen V correspondiente a cualquier presión p y temperatura T dadas en el intervalo mostrado.

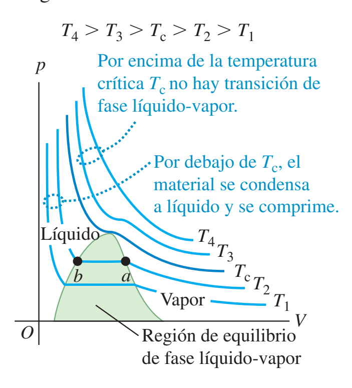
La figura 18.7 presenta una gráfica pV para un material que *no* obedece la ecuación del gas ideal. A temperaturas por debajo de T_c, las isotermas tienen regiones planas en las que podemos comprimir el material sin aumentar la presión. La observación del gas revela que se está *condensando* de la fase de vapor (gas) a la de líquido. Las partes planas de las isotermas en la parte sombreada de la figura 18.7 representan condiciones de *equilibrio de fase* líquido-vapor. Al disminuir el volumen, más y más material pasa de vapor a líquido, pero la presión no cambia. (Para mantener la temperatura constante durante la condensación, debemos eliminar el calor de vaporización, como se explicó en la sección 17.6.)

Si comprimimos un gas así a temperatura constante T_2 en la figura 18.7, es vapor hasta llegar al punto a, donde comienza a licuarse; al reducirse más el volumen, más material se licua, y *tanto* la presión *como* la temperatura permanecen constantes. En el punto b, todo el material se encuentra en estado líquido. Cualquier compresión posterior causa un aumento muy rápido en la presión, porque los líquidos en general son mucho menos compresibles que los gases. A una temperatura constante menor T_1 se presenta un comportamiento similar, pero la condensación comienza a menor presión

18.6 Isotermas (curvas de temperatura constante) para una cantidad constante de un gas ideal.



18.7 Gráfica pV para un gas no ideal, con isotermas para temperaturas mayores y menores que la temperatura crítica T_c. La región de equilibrio líquido-vapor aparece en verde. A temperaturas aún menores, el material podría experimentar transiciones de fase de líquido a sólido o de gas a sólido; esto no se muestra en la gráfica.



y mayor volumen que a T_2 constante. A temperaturas mayores que T_c, *no* hay transición de fase al comprimirse el material; a las temperaturas más altas, como T_4, las curvas semejan las de gas ideal de la figura 18.6. Llamamos a T_c la *temperatura crítica* del material. En la sección 18.6 veremos qué pasa con la fase del gas por encima de la temperatura crítica.

Usaremos gráficas pV a menudo en los siguientes dos capítulos. Mostraremos que el *área* bajo una curva pV (sea o no isoterma) representa el *trabajo* efectuado por el sistema durante un cambio de volumen. Este trabajo, a la vez, está directamente relacionado con la transferencia de calor y con los cambios en la *energía interna* del sistema, como veremos en el capítulo 19.

Evalúe su comprensión de la sección 18.1 Clasifique los siguientes gases ideales en orden decreciente de acuerdo con el número de moles: i) 1 atm de presión, 1 L de volumen y temperatura de 300 K; ii) 2 atm de presión, 1 L de volumen y temperatura de 300 K; iii) 1 atm de presión, 2 L de volumen y temperatura de 300 K; iv) 1 atm de presión, 1 L de volumen y temperatura de 600 K; v) 2 atm de presión, 1 L de volumen y temperatura de 600 K.

18.2 Propiedades moleculares de la materia

Hemos estudiado varias propiedades de la materia en volumen, como elasticidad, densidad, tensión superficial, capacidad calorífica y ecuaciones de estado, haciendo apenas referencia a la estructura molecular. Ahora queremos ver con mayor detalle la relación entre el comportamiento en volumen y la estructura microscópica. Empezaremos con un análisis general de la estructura molecular de la materia. En las dos secciones siguientes desarrollaremos el modelo cinético-molecular de un gas ideal, obteniendo de él la ecuación de estado y una expresión para la capacidad calorífica.

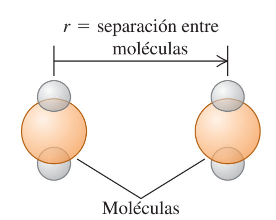
Moléculas y fuerzas intermoleculares

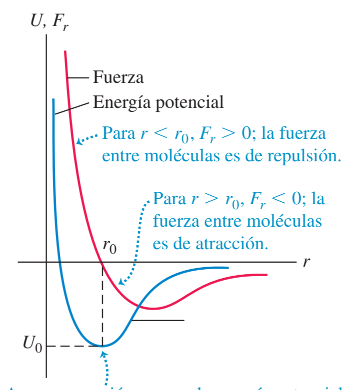
Toda la materia conocida se compone de **moléculas**. Todas las moléculas de un compuesto químico específico son idénticas. Las moléculas más pequeñas contienen un solo átomo y su tamaño es del orden de 10^{-10} m; las más grandes contienen muchos átomos y son al menos 10,000 veces más grandes. En los gases, las moléculas se mueven de forma casi independiente; en líquidos y sólidos se mantienen unidas por fuerzas intermoleculares de naturaleza eléctrica que surgen de las interacciones de las partículas con carga eléctrica que constituyen las moléculas. Las fuerzas gravitacionales entre las moléculas son insignificantes en comparación con las fuerzas eléctricas.

La interacción de dos cargas eléctricas *puntuales* se describe con una fuerza (de repulsión para cargas iguales, de atracción para cargas distintas) cuya magnitud es proporcional a $1/r^2$, donde r es la distancia entre los puntos. Estudiaremos esta relación, llamada *ley de Coulomb*, en el capítulo 21. Las moléculas *no* son cargas puntuales, sino estructuras complejas que contienen carga tanto positiva como negativa, y sus interacciones son más complejas. La fuerza entre las moléculas de un gas varía con la distancia r entre las moléculas aproximadamente como se muestra en la figura 18.8, donde una F_r positiva corresponde a una fuerza de repulsión, y una negativa corresponde a una fuerza de atracción. Si las moléculas están alejadas, las fuerzas intermoleculares son muy pequeñas y generalmente de atracción. Al comprimirse un gas y juntarse sus moléculas, las fuerzas de atracción aumentan. La fuerza intermolecular es cero a una separación de equilibrio r_0, que corresponde aproximadamente al espaciado de las moléculas en los estados líquido y sólido. En los líquidos y sólidos se requieren presiones relativamente grandes para comprimir apreciablemente la sustancia. Esto indica que, a distancias intermoleculares un poco *menores* que la separación de equilibrio, las fuerzas se vuelven *repulsivas* y relativamente grandes.

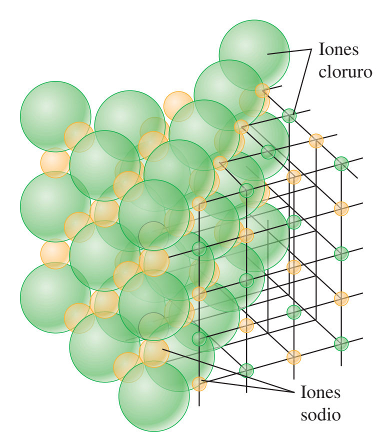
La figura 18.8 también muestra la energía potencial en función de r. Esta función tiene un *mínimo* en r_0, donde la fuerza es cero. Las dos curvas están relacionadas por $F_r(r) = -dU/dr$, como vimos en la sección 7.4. Semejante función de energía potencial se denomina **pozo de potencial**. Una molécula en reposo a una distancia r_0 de otra necesitaría una energía adicional $|U_0|$, la "profundidad" del pozo de potencial, para "escapar" a un valor indefinidamente grande de r.

18.8 Cómo la fuerza entre moléculas y su energía potencial de interacción dependen de su separación r.

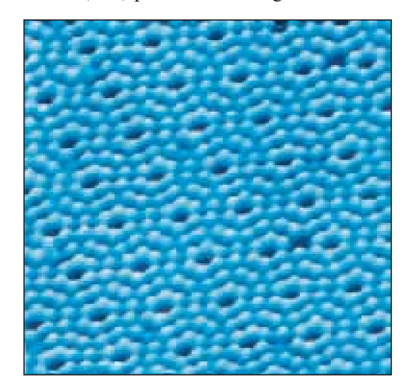




18.9 Representación esquemática de la estructura cristalina cúbica del cloruro de sodio.



18.10 Imagen de microscopio de barrido por tunelamiento de la superficie de un cristal de silicio. El área mostrada sólo tiene 9.0 nm (9.0×10^{-9} m) de anchura. Cada "cuenta" azul es un átomo individual de silicio; puede verse claramente cómo estos átomos están dispuestos en una matriz (casi) perfecta de hexágonos.



Las moléculas siempre están en movimiento; su energía cinética normalmente aumenta con la temperatura. A temperaturas muy bajas, la energía cinética media de una molécula puede ser mucho *menor* que la profundidad del pozo de potencial. Las moléculas se condensan entonces a la fase líquida o sólida con distancias intermoleculares medias cercanas a r_0. A temperaturas mayores, la energía cinética media se hace mayor que la profundidad $|U_0|$ del pozo de potencial. Las moléculas pueden entonces escapar de la fuerza intermolecular y quedar libres para moverse independientemente, como en la fase gaseosa de la materia.

En los *sólidos*, las moléculas vibran alrededor de puntos más o menos fijos. En un sólido cristalino, esos puntos están dispuestos en una *red cristalina* recurrente. La figura 18.9 representa la estructura cúbica cristalina del cloruro de sodio (sal común). La figura 18.10 es una imagen de microscopio de barrido por tunelamiento de los átomos de silicio individuales en la superficie de un cristal.

La vibración de las moléculas de un sólido alrededor de sus posiciones de equilibrio puede ser casi armónica simple si el pozo de potencial tiene forma aproximadamente parabólica a distancias cercanas a r_0. (Vimos este tipo de movimiento armónico simple en la sección 13.4.) No obstante, si la curva de energía potencial sube más gradualmente para $r > r_0$ que para $r < r_0$, como en la figura 18.8, la posición media se desplazará a una r mayor al aumentar la amplitud. Como señalamos en la sección 17.4, ésta es la base de la expansión térmica.

En un *líquido*, las distancias intermoleculares no suelen ser mucho mayores que en la fase sólida de la misma sustancia, pero las moléculas tienen una libertad de movimiento mucho mayor. Los líquidos sólo muestran estructuras regulares en las inmediaciones de unas cuantas moléculas. Esto se denomina *orden de corto alcance*, en contraste con el *orden de largo alcance* de un cristal sólido.

Las moléculas de un *gas* suelen estar muy separadas y por ello sólo tienen fuerzas de atracción muy pequeñas. Una molécula de gas se mueve en línea recta hasta chocar con otra molécula o con una pared del recipiente. En términos moleculares, el *gas ideal* es un gas cuyas moléculas *no* ejercen fuerzas de atracción entre sí (figura 18.5a) y, por lo tanto, no tienen energía *potencial*.

A bajas temperaturas, casi todas las sustancias comunes están en la fase sólida. Al aumentar la temperatura, las sustancias se funden y luego se vaporizan. Desde un punto de vista molecular, estas transiciones van en la dirección de energía cinética molecular creciente, así que la temperatura y la energía cinética molecular están íntimamente relacionadas.

Moles y número de Avogadro

Hemos usado el mol como medida de cantidad de sustancia. Un **mol** de cualquier elemento o compuesto químico puro contiene un número definido de moléculas, igual para todos los elementos y compuestos. La definición oficial del SI es que

Un mol es la cantidad de sustancia que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en 0.012 kg de carbono 12.

En nuestra explicación, las "entidades elementales" son moléculas. (En una sustancia monoatómica como el carbono o el helio, cada molécula tiene un solo átomo, pero de todos modos la llamaremos molécula.) Cabe señalar que los átomos de un elemento dado pueden existir en varias formas isotópicas (isótopos), que son químicamente idénticas pero tienen diferente masa atómica; "carbono 12" se refiere a un isótopo específico del carbono.

El número de moléculas en un mol se denomina **número de Avogadro** y se denota con N_A. El mejor valor numérico actual para N_A es

$$N_A = 6.02214199(47) \times 10^{23} \text{ moléculas/mol} \qquad \text{(número de Avogadro)}$$

La *masa molar M* de un compuesto es la masa de un mol. Esto es igual a la masa m de una sola molécula multiplicada por el número de Avogadro.

$$M = N_A m \qquad \text{(masa molar, número de Avogadro y masa de una molécula)} \qquad (18.8)$$

Si la molécula consiste en un solo átomo, es común usar el término *masa atómica* en vez de masa molar o peso molecular.

Ejemplo 18.5 Masa atómica y molecular

Calcule la masa de un solo átomo de hidrógeno y la masa de una molécula de oxígeno.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la relación entre la masa de una molécula o átomo (nuestra incógnita) y la correspondiente masa molar.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (18.8) en la forma $m = M/N_A$ y tomaremos los valores de masa molar de la tabla periódica de los elementos (véase el Apéndice D).

EJECUTAR: La masa por mol de hidrógeno atómico (la masa atómica) es 1.008 g/mol. Por lo tanto, la masa m_H de un solo átomo de hidrógeno es

$$m_H = \frac{1.008 \text{ g/mol}}{6.022 \times 10^{23} \text{ átomos/mol}} = 1.674 \times 10^{-24} \text{ g/átomo}$$

Del Apéndice D, la masa atómica del oxígeno es de 16.0 g/mol, así que la masa molar del oxígeno, que tiene moléculas diatómicas (es decir, de dos átomos), es de 32.0 g/mol. La masa de una sola molécula de O_2 es

$$m_{O_2} = \frac{32.0 \text{ g/mol}}{6.022 \times 10^{23} \text{ moléculas/mol}} = 53.1 \times 10^{-24} \text{ g/molécula}$$

EVALUAR: Cabe señalar que los valores del Apéndice D son las masas atómicas *medias* de una muestra natural de cada elemento. Tal muestra podría contener varios isótopos del elemento, cada uno con masa atómica distinta. Las muestras naturales de hidrógeno y oxígeno se componen casi exclusivamente de un solo isótopo, pero esto no sucede con todos los elementos.

Evalúe su comprensión de la sección 18.2 Imagine que pudiera ajustar el valor de r_0 para las moléculas de cierto compuesto químico (figura 18.8) con una perilla. Si se duplicara el valor de r_0, la densidad de la forma sólida del compuesto sería: i) dos veces mayor, ii) cuatro veces mayor; iii) ocho veces mayor; iv) la mitad; v) $\frac{1}{4}$; vi) $\frac{1}{8}$.

MP

18.3 Modelo cinético-molecular del gas ideal

ActivPhysics ONLINE

8.1 Características de un gas

El objetivo de cualquier teoría molecular de la materia es entender las propiedades *macroscópicas* de la materia en términos de su estructura y comportamiento atómicos o moleculares. Tales teorías tienen una enorme importancia práctica; con esos conocimientos, es posible diseñar materiales con las propiedades específicas deseadas. Este análisis ha dado pie a la creación de aceros de alta resistencia, vidrios con propiedades ópticas especiales, semiconductores para dispositivos electrónicos y un sinnúmero de otros materiales que son indispensables para la tecnología actual.

En esta sección y las siguientes, consideraremos un modelo molecular sencillo del gas ideal. Este *modelo cinético-molecular* representa el gas como un gran número de partículas que rebotan dentro de un recipiente cerrado. En esta sección usaremos ese modelo para entender la relación entre la ecuación de estado del gas ideal (ecuación 18.3) y las leyes de Newton. En la siguiente sección usaremos el modelo cinético-molecular para predecir la capacidad calorífica molar de un gas ideal. Luego ampliaremos el modelo para incluir "partículas" que no sean puntos, sino que tengan tamaño finito, y entenderemos por qué los gases poliatómicos tienen mayores capacidades caloríficas molares que los monoatómicos.

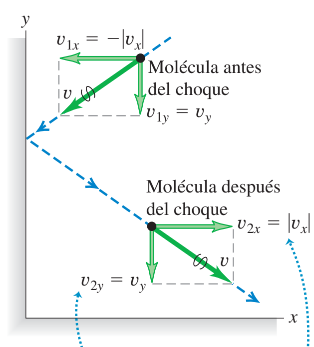
La siguiente explicación del modelo cinético-molecular abarca varios pasos, y tal vez el lector tenga que repasarlo varias veces para entender cómo embona todo. ¡No se desanime!

He aquí los supuestos de nuestro modelo:

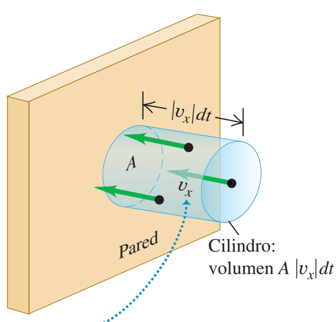
1. Un recipiente con volumen V contiene un número muy grande N de moléculas idénticas, cada una con masa m.
2. Las moléculas se comportan como partículas puntuales; su tamaño es pequeño en comparación con la distancia media entre partículas y las dimensiones del recipiente.
3. Las moléculas están en constante movimiento, y obedecen las leyes del movimiento de Newton. Las moléculas chocan ocasionalmente con las paredes del recipiente. Tales choques son perfectamente elásticos.
4. Las paredes del recipiente son perfectamente rígidas y con masa infinita; no se mueven.

CUIDADO **Moléculas contra moles** Asegúrese de no confundir N, el número de *moléculas* del gas, con n, el número de *moles*. El número de moléculas es igual al número de moles multiplicado por el número de Avogadro: $N = nN_A$.

18.11 Choque elástico de una molécula con la pared de un recipiente idealizado.



18.12 Para que una molécula golpee la pared dentro del área A durante un intervalo de tiempo dt, debe moverse en dirección hacia la pared y estar dentro del cilindro sombreado de altura $|v_x|\ dt$ al principio del intervalo.



Colisiones y presión de gas

Durante los choques, las moléculas ejercen *fuerzas* sobre las paredes del recipiente; éste es el origen de la *presión* del gas. En un choque representativo (figura 18.11) la componente de velocidad paralela a la pared no cambia, y la componente perpendicular a la pared invierte su dirección sin cambiar de magnitud.

De acuerdo con nuestro programa, primero determinaremos el *número* de choques por unidad de tiempo para cierta área de pared A. Luego calcularemos el cambio de cantidad de movimiento total asociado con estos choques y la fuerza necesaria para provocar ese cambio. Así podremos determinar la presión, que es la fuerza por unidad de área, y comparar el resultado con la ecuación del gas ideal. Encontraremos una conexión directa entre la temperatura del gas y la energía cinética de sus moléculas.

Para comenzar, supondremos que todas las moléculas del gas tienen la misma *magnitud* de la componente x de velocidad, $|v_x|$. Esto no es correcto, pero ayuda a aclarar las ideas básicas. Después demostraremos que este supuesto no es realmente necesario.

Como se ve en la figura 18.11, en cada choque la componente x de velocidad cambia de $-|v_x|$ a $+|v_x|$, así que la componente x de la cantidad de movimiento cambia de $-m|v_x|$ a $+m|v_x|$, y el *cambio* de la componente x de la cantidad de movimiento es $m|v_x| - (-m|v_x|) = 2m|v_x|$.

Si una molécula va a chocar con cierta área de pared A durante un breve intervalo de tiempo dt, al comenzar dt deberá estar cuando mucho a una distancia $|v_x|\ dt$ de la pared (figura 18.12) y dirigida hacia la pared. Así, el número de moléculas que chocan con A durante dt es igual al número de moléculas que están dentro de un cilindro con área de la base A y longitud $|v_x|\ dt$ cuya velocidad x está dirigida hacia la pared. El volumen de tal cilindro es $A|v_x|\ dt$. Suponiendo que el número de moléculas por unidad de volumen (N/V) es uniforme, el *número* de moléculas en este cilindro es $(N/V)(A|v_x|\ dt)$. En promedio, la mitad de estas moléculas se están acercando a la pared y la mitad se está alejando, así que el número de choques con A durante dt es

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N}{V}\right)(A|v_x|\ dt)$$

Para el sistema de todas las moléculas del gas, el cambio total de cantidad de movimiento dP_x durante dt es el *número* de choques multiplicado por $2m|v_x|$:

$$dP_x = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{V}\right)(A|v_x|\ dt)(2m|v_x|) = \frac{NAmv_x^2\ dt}{V} \tag{18.9}$$

(Estamos usando P mayúscula para la cantidad de movimiento total y p para la presión. ¡Tenga cuidado!) Escribimos v_x^2 en vez de $|v_x|^2$ en la expresión final porque el cuadrado del valor absoluto de un número es igual al cuadrado de ese número. La *tasa* de cambio de la componente de cantidad de movimiento P_x es

$$\frac{dP_x}{dt} = \frac{NAmv_x^2}{V} \tag{18.10}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, esta tasa de cambio de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza ejercida por el área de pared A sobre las moléculas del gas. Por la *tercera* ley de Newton, ésta es igual y opuesta a la fuerza ejercida *sobre* la pared *por* las moléculas. La presión p es la magnitud de la fuerza ejercida sobre la pared por unidad de área, y obtenemos

$$p = \frac{F}{A} = \frac{Nmv_x^2}{V} \tag{18.11}$$

La presión ejercida por el gas depende del número de moléculas por volumen (N/V), la masa m por molécula y la rapidez de las moléculas.

Presión y energías cinéticas moleculares

Mencionamos que $|v_x|$ *no* es realmente igual para todas las moléculas, pero podríamos haber organizado las moléculas en grupos con la misma $|v_x|$ dentro de cada grupo, y luego sumado las contribuciones resultantes a la presión. El efecto neto de esto es simplemente sustituir $v_x{}^2$ en la ecuación (18.11) por el valor *medio* de $v_x{}^2$, que denotamos con $(v_x{}^2)_{med}$. Además, $(v_x{}^2)_{med}$ tiene una relación sencilla con la *rapidez* de las moléculas. La rapidez v de cualquier molécula está relacionada con las componentes de velocidad v_x, v_y y v_z por

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Podemos promediar esta relación para todas las moléculas:

$$(v^2)_{med} = (v_x^2)_{med} + (v_y^2)_{med} + (v_z^2)_{med}$$

Sin embargo, en nuestro modelo no hay una diferencia real entre las direcciones x, y y z. (Las rapideces moleculares son muy altas en un gas típico, así que los efectos de la gravedad son insignificantes.) Se deduce que $(v_x{}^2)_{med}$, $(v_y{}^2)_{med}$ y $(v_z{}^2)_{med}$ deben ser *iguales*. Por lo tanto, $(v^2)_{med}$ es igual a $3(v^2)_{med}$, y

$$(v_x^2)_{med} = \frac{1}{3}(v^2)_{med}$$

Así que la ecuación (18.11) se convierte en

$$pV = \frac{1}{3}Nm(v^2)_{med} = \frac{2}{3}N\left[\frac{1}{2}m(v^2)_{med}\right] \qquad (18.12)$$

Observamos que $\frac{1}{2}m(v^2)_{med}$ es la energía cinética de traslación media de una sola molécula. El producto de esto por el número de moléculas N es igual a la energía cinética aleatoria total K_{tr} del movimiento de traslación de todas las moléculas. (La notación K_{tr} nos recuerda que esta energía está asociada al movimiento de *traslación*. Podría haber energías adicionales relacionadas con la rotación y la vibración de las moléculas.) El producto pV es igual a dos tercios de la energía cinética de traslación total:

$$pV = \frac{2}{3}K_{tr} \qquad (18.13)$$

Ahora comparamos esto con la ecuación del gas ideal,

$$pV = nRT$$

que se basa en estudios experimentales del comportamiento de los gases. Para que las dos ecuaciones concuerden, debemos tener

$$K_{tr} = \frac{3}{2}nRT \quad \text{(energía cinética de traslación media de } n \text{ moles de gas ideal)} \qquad (18.14)$$

Este resultado tan sencillo indica que K_{tr} es *directamente proporcional* a la temperatura absoluta T (figura 18.13). Usaremos este importante resultado varias veces en la explicación que sigue.

La energía cinética de traslación media de una sola molécula es la energía cinética de traslación total K_{tr} de todas las moléculas dividida entre el número de moléculas, N:

$$\frac{K_{tr}}{N} = \frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3nRT}{2N}$$

Asimismo, el número total de moléculas N es el número de moles n multiplicado por el número de Avogadro N_A, de manera que

$$N = nN_A \qquad \frac{n}{N} = \frac{1}{N_A}$$

y

$$\frac{K_{tr}}{N} = \frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N_A}\right)T \qquad (18.15)$$

18.13 El aire veraniego (arriba) es más cálido que el aire invernal (abajo); es decir, la energía cinética de traslación media de las moléculas de aire es mayor durante el verano.





La razón R/N_A aparece con frecuencia en la teoría molecular; se llama **constante de Boltzmann**, k:

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}}{6.022 \times 10^{23}\ \text{moléculas/mol}}$$
$$= 1.381 \times 10^{-23}\ \text{J/molécula}\cdot\text{K}$$

(El mejor valor numérico actual de k es $1.3806503(24) \times 10^{-23}$ J/molécula · K.) Podemos replantear la ecuación (18.15) en términos de k:

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{med}} = \frac{3}{2}kT \quad \text{(energía cinética de traslación media de una molécula de gas)} \tag{18.16}$$

Esto indica que la energía cinética de traslación media *por molécula* depende sólo de la temperatura; no de la presión ni del volumen, ni tampoco del tipo de molécula. Podemos obtener la energía cinética de traslación media *por mol* multiplicando la ecuación (18.16) por el número de Avogadro y usando la relación $M = N_A m$:

$$N_A\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{med}} = \frac{1}{2}M(v^2)_{\text{med}} = \frac{3}{2}RT \quad \text{(energía cinética de traslación media por mol de gas)} \tag{18.17}$$

La energía cinética de traslación de un mol de moléculas de gas ideal depende sólo de T.

Por último, a veces es útil plantear la ecuación del gas ideal sobre una base molecular. Usamos $N = N_A n$ y $R = N_A k$ para obtener la forma alternativa de la ecuación del gas ideal:

$$pV = NkT \tag{18.18}$$

Esto indica que podemos considerar la constante de Boltzmann k como una constante de los gases "por molécula", en vez de la R "por mol" que normalmente se usa.

Rapideces moleculares

A partir de las ecuaciones (18.16) y (18.17), podemos obtener expresiones para la raíz cuadrada de $(v^2)_{\text{med}}$, llamada **rapidez eficaz** o **rapidez cuadrática media** (o **rapidez rms**, por las siglas de *root-mean-square speed*) v_{rms}:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{(v^2)_{\text{med}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{(rapidez eficaz de una molécula de gas)} \tag{18.19}$$

Tal vez parezca más natural caracterizar las rapideces moleculares por su valor *medio* y no por v_{rms}, pero vemos que v_{rms} se obtiene más directamente de las ecuaciones (18.16) y (18.17). Para calcular la rapidez eficaz, elevamos al cuadrado cada rapidez molecular, sumamos, dividimos entre el número de moléculas y sacamos la raíz cuadrada; v_{rms} es la *raíz* de la *media* de los *cuadrados* (*root mean squares*, en inglés). El ejemplo 18.7 ilustra este procedimiento.

Las ecuaciones (18.16) y (18.19) indican que, a una temperatura dada T, las moléculas de gas con diferente masa m tienen la misma energía cinética media pero diferente rapidez eficaz. En promedio, las moléculas de nitrógeno (M = 28 g/mol) del aire se mueven más rápidamente que las de oxígeno (M = 32 g/mol). Las moléculas de hidrógeno (M = 2 g/mol) son las más rápidas; por eso casi no hay hidrógeno en la atmósfera terrestre, a pesar de ser el elemento más común del universo (figura 18.14). Una fracción apreciable de cualesquier moléculas de H_2 en la atmósfera rebasaría la "rapidez de escape" de la Tierra, que es de 1.12×10^4 m/s (calculada en el ejemplo 12.5, sección 12.3) y escaparía al espacio. Los gases más pesados y lentos no pueden escapar con tanta facilidad, y por ello predominan en nuestra atmósfera.

La suposición de que los choques de las moléculas con las paredes del recipiente son perfectamente elásticos es una simplificación excesiva. Investigaciones más deta-

18.14 Mientras el hidrógeno es un combustible deseable para los vehículos, es sólo un constituyente o una traza en nuestra atmósfera (sólo hay el 0.00005% de hidrógeno por volumen). Por consiguiente, el combustible de hidrógeno tiene que generarse mediante electrólisis del agua, que por sí solo es un proceso intensivo de energía.



lladas han revelado que, casi siempre, las moléculas se adhieren a las paredes durante un breve lapso y luego salen con una rapidez que es característica de la temperatura *de la pared*. No obstante, el gas y la pared por lo regular están en equilibrio térmico y tienen la misma temperatura, así que no hay transferencia neta de energía entre el gas y la pared, y este descubrimiento no altera la validez de nuestras conclusiones.

Estrategia para resolver problemas 18.2 Teoría cinética-molecular



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Use los resultados del modelo cinético-molecular siempre que le pidan relacionar las propiedades macroscópicas de un gas, como presión y temperatura, con propiedades microscópicas, como la rapidez molecular.

PLANTEAR *el problema* de acuerdo con los siguientes pasos:
1. Identifique las cantidades conocidas y las incógnitas que se van a calcular.
2. Elija la ecuación (o ecuaciones) a usar del grupo de las ecuaciones (18.14), (18.16) y (18.19).

EJECUTAR *la solución* como sigue: Al despejar la incógnita, cuide de no introducir inconsistencias de unidades. Tenga especial cuidado con lo siguiente:
1. Las unidades acostumbradas para la masa molar M son gramos/mol; por ejemplo, la masa molar del oxígeno (O_2) es 32 g/mol. Estas unidades suelen omitirse en las tablas. En ecuaciones como la (18.19), cuando se usan unidades del SI, *se debe* expresar M en kg/mol multiplicando el valor de tablas por (1 kg/10^3 g). Así, en unidades del SI, M para las moléculas de oxígeno es 32×10^{-3} kg/mol.
2. ¿Está trabajando "por molécula" o "por mol"? Recuerde que m es la masa de una molécula y M es la masa de un mol de moléculas; N es el número de moléculas, n es el número de moles; k es la constante de los gases por molécula, y R es la constante de los gases por mol. Puede realizarse una verificación completa de unidades si se considera que N tiene la unidad "moléculas"; entonces m tiene unidades de "masa por molécula" y k tiene unidades de "joules por molécula por kelvin".
3. Recuerde que T siempre es temperatura *absoluta* (Kelvin).

EVALUAR *la respuesta:* ¿Son razonables las respuestas? Tenga presente que las rapideces moleculares típicas a temperatura ambiente son de varios cientos de metros por segundo. Si su respuesta es de un orden drásticamente distinto, revise sus cálculos.

Ejemplo 18.6 Cálculo de energía cinética molecular y v_{rms}

a) Calcule la energía cinética de traslación media de una molécula de un gas ideal a 27 °C. *b*) Calcule la energía cinética de traslación aleatoria total de las moléculas de un mol de ese gas. *c*) Calcule la rapidez eficaz de las moléculas de oxígeno a 27 °C.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica la energía cinética de traslación de un gas ideal por molécula y por mol, así como la rapidez rms de las moléculas en el gas.

PLANTEAR: Nos dan la temperatura $T = 27$ °C y el número de moles $n = 1$ mol, y la masa molecular m es la del oxígeno. Usaremos la ecuación (18.16) para determinar la energía cinética media de una molécula, la ecuación (18.14) para obtener la energía cinética molecular total y la ecuación (18.19) para obtener la rapidez eficaz de una molécula.

EJECUTAR: *a*) Para usar la ecuación (18.16), primero convertimos la temperatura a la escala Kelvin: 27 °C = 300 K. Luego,

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{\text{med}} = \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})$$
$$= 6.21 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

Esta respuesta no depende de la masa de la molécula.

b) De acuerdo con la ecuación (18.14), la energía cinética de traslación total de un mol de moléculas es

$$K_{\text{tr}} = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}(1\ \text{mol})(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})$$
$$= 3740\ \text{J}$$

Ésta es aproximadamente la energía cinética de un velocista en una carrera de 100 m planos.

c) Por el ejemplo 18.5 (sección 18.2), la masa de una molécula de oxígeno es

$$m_{O_2} = (53.1 \times 10^{-24}\ \text{g})(1\ \text{kg}/10^3\ \text{g}) = 5.31 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Por la ecuación (18.19),

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{5.31 \times 10^{-26}\ \text{kg}}}$$
$$= 484\ \text{m/s}$$

Esto es ¡1740 km/h! De forma alternativa,

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K})}{32.0 \times 10^{-3}\ \text{kg/mol}}}$$
$$= 484\ \text{m/s}$$

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado del inciso *b*) observando que la energía cinética de traslación por mol debe ser igual a la energía cinética de traslación media por molécula del inciso *a*) multiplicada por el número de Avogadro N_A: $K_{\text{tr}} = (6.022 \times 10^{23}$ moléculas$)(6.21 \times 10^{-21}$ J/molécula$) = 3740$ J.

En el inciso *c*), observe que, si usamos la ecuación (18.19) con R en unidades del SI, debemos expresar M en *kilogramos* por mol, no en gramos por mol. En este ejemplo usamos $M = 32.0 \times 10^{-3}$ kg/mol, *no* 32.0 g/mol.

Ejemplo 18.7 Rapideces eficaz y media

Cinco moléculas de gas elegidas al azar viajan a 500, 600, 700, 800 y 900 m/s. Calcule la rapidez eficaz. ¿Es igual a la rapidez *media*?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para resolver este problema, usamos la definición del valor eficaz (rms) y la media de un conjunto de números.

PLANTEAR: Para encontrar el valor *cuadrático medio* (rms), elevamos al cuadrado cada valor de rapidez, obtenemos la media de esos cuadrados y luego calculamos la raíz cuadrada del resultado.

EJECUTAR: El valor medio de v^2 para las cinco moléculas es

$$(v^2)_{\text{med}} = \frac{\begin{bmatrix} (500 \text{ m/s})^2 + (600 \text{ m/s})^2 + (700 \text{ m/s})^2 \\ + (800 \text{ m/s})^2 + (900 \text{ m/s})^2 \end{bmatrix}}{5}$$

$$= 5.10 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

La raíz cuadrada de esto es v_{rms}:

$$v_{\text{rms}} = 714 \text{ m/s}$$

La rapidez *media* v_{med} está dada por

$$v_{\text{med}} = \frac{500 \text{ m/s} + 600 \text{ m/s} + 700 \text{ m/s} + 800 \text{ m/s} + 900 \text{ m/s}}{5}$$

$$= 700 \text{ m/s}$$

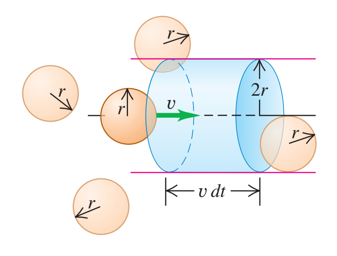
EVALUAR: Vemos que, en general, v_{rms} y v_{med} *no* son iguales; v_{rms} da más importancia a las rapideces más altas.

Choques entre moléculas

No hemos considerado la posibilidad de que dos moléculas de gas choquen. Si realmente son puntos, *nunca* chocan; pero consideremos un modelo más realista en el que las moléculas son esferas rígidas con radio r. ¿Con qué frecuencia chocan con otras moléculas? ¿Cuánto viajan, en promedio, entre choques? Podemos obtener respuestas aproximadas del siguiente modelo, un tanto primitivo.

Considere N moléculas esféricas con radio r en un volumen V. Suponga que sólo una molécula se mueve: chocará con otra molécula cuando la distancia entre sus centros sea $2r$. Suponga que dibujamos un cilindro con radio $2r$, con su eje paralelo a la velocidad de la molécula (figura 18.15). La molécula que se mueve choca con cualquier otra molécula cuyo centro está dentro de este cilindro. En un tiempo corto dt, una molécula con rapidez v recorre una distancia $v\,dt$, chocando con cualquier molécula que esté en el volumen cilíndrico con radio $2r$ y longitud $v\,dt$. El volumen del cilindro es $4\pi r^2 v\,dt$. Hay N/V moléculas por unidad de volumen, así que el número dN de las que tienen su centro en este cilindro es

18.15 En un tiempo dt una molécula con radio r choca con cualquier otra molécula que esté dentro de un volumen cilíndrico con radio $2r$ y longitud $v\,dt$.



$$dN = 4\pi r^2 v\,dt\,N/V$$

Así, el número de choques por *unidad de tiempo* es

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi r^2 v N}{V}$$

Este resultado supone que sólo se mueve una molécula. El análisis se complica mucho más si todas las moléculas se mueven a la vez. En tal caso, los choques son más frecuentes, y la ecuación anterior debe multiplicarse por un factor de $\sqrt{2}$:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi\sqrt{2}\,r^2 v N}{V}$$

El tiempo medio t_{med} entre choques, llamado *tiempo libre medio*, es el recíproco de esta expresión:

$$t_{\text{med}} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}\,r^2 v N} \qquad (18.20)$$

La distancia media recorrida entre choques se llama **trayectoria libre media**, denotada por λ (la letra griega lambda). En nuestro sencillo modelo, esta trayectoria es simplemente la rapidez de la molécula v multiplicada por t_{med}:

$$\lambda = vt_{med} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2N} \quad \text{(trayectoria libre media de una molécula de gas)} \qquad (18.21)$$

La trayectoria libre media es inversamente proporcional al número de moléculas por unidad de volumen (N/V) e inversamente proporcional al área de sección transversal πr^2 de una molécula; cuantas más moléculas haya y mayor sea su tamaño, más corta será la distancia media entre choques (figura 18.16). Observe que la trayectoria libre media *no* depende de la rapidez de la molécula.

Podemos expresar la ecuación (18.21) en términos de propiedades macroscópicas del gas, utilizando la ecuación del gas ideal en la forma de la ecuación (18.18), $pV = NkT$. Tenemos

$$\lambda = \frac{kT}{4\pi\sqrt{2}r^2p} \qquad (18.22)$$

Si se aumenta la temperatura a presión constante, el gas se expande, la distancia media entre moléculas aumenta, y λ aumenta. Si se aumenta la presión a temperatura constante, el gas se comprime y λ disminuye.

18.16 Si usted trata de caminar entre una multitud, su trayectoria libre media —la distancia que usted puede desplazarse en promedio sin chocar con alguien— depende del tamaño de las personas y de qué tan cerca estén entre sí.



Ejemplo 18.8 Cálculo de la trayectoria libre media

a) Estime la trayectoria libre media de una molécula de aire a 27 °C y 1 atm. Modele las moléculas como esferas con radio $r = 2.0 \times 10^{-10}$ m. *b*) Estime la trayectoria libre media de una molécula de oxígeno con $v = v_{rms}$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza los conceptos de trayectoria libre media y tiempo libre medio (que son nuestras incógnitas).

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (18.21) para determinar la trayectoria libre media λ. Podríamos usar la ecuación (18.20) para obtener el tiempo libre medio t_{med}, pero es más fácil usar la relación básica $\lambda = vt_{med}$ de la ecuación (18.21). Para la rapidez v, usaremos la rapidez eficaz del oxígeno que calculamos en el ejemplo 18.6.

EJECUTAR: *a*) De acuerdo con la ecuación (18.22):

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{kT}{4\pi\sqrt{2}r^2p} \\ &= \frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K})}{4\pi\sqrt{2}(2.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(1.01 \times 10^5\ \text{Pa})} \\ &= 5.8 \times 10^{-8}\ \text{m}\end{aligned}$$

La molécula no llega muy lejos entre choques, pero aun así la distancia es varios cientos de veces el radio de la molécula. Para obtener una trayectoria libre media de un metro, la presión debe ser del orden de 5.8×10^{-8} atm. Encontramos este tipo de presiones 100 km arriba de la superficie terrestre, en el borde exterior de la atmósfera.

b) De acuerdo con el ejemplo 18.6, para oxígeno a 27 °C, la rapidez eficaz es $v_{rms} = 484$ m/s, así que el tiempo libre medio para una molécula con esta rapidez es

$$t_{med} = \frac{\lambda}{v} = \frac{5.8 \times 10^{-8}\ \text{m}}{484\ \text{m/s}} = 1.2 \times 10^{-10}\ \text{s}$$

¡Esta molécula choca unas 10^{10} veces por segundo!

EVALUAR: Observe que la *trayectoria* libre media calculada en el inciso *a*) no depende de la rapidez de la molécula, pero el *tiempo* libre medio sí. Las moléculas más lentas tienen un intervalo t_{med} mayor entre choques que las rápidas, pero la *distancia* media λ entre choques es la misma, sea cual sea la rapidez de la molécula.

Evalúe su comprensión de la sección 18.3 Clasifique los siguientes gases *a*) de mayor a menor rapidez rms de las moléculas y *b*) de mayor a menor energía cinética de traslación media de una molécula: i) oxígeno (M = 32.0 g/mol) a 300 K; ii) nitrógeno (M = 28.0 g/mol) a 300 K; iii) oxígeno a 330 K; iv) nitrógeno a 330 K.



18.4 Capacidades caloríficas

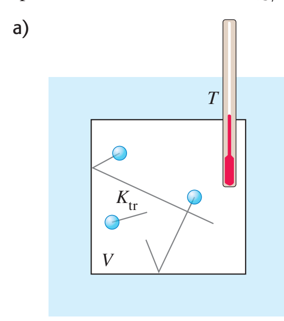
Cuando presentamos el concepto de capacidad calorífica en la sección 17.5, hablamos de maneras de *medir* el calor específico o la capacidad calorífica molar de un material. Ahora veremos cómo podemos *predecir* estos valores a partir de la teoría. Esto es un avance importante.

Capacidades caloríficas de los gases

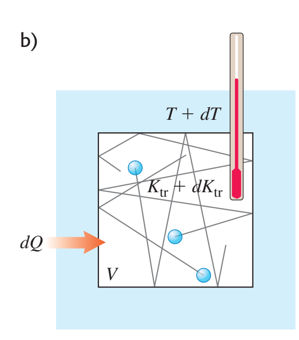
La base de nuestro análisis es que el calor es *energía* en tránsito. Si agregamos calor a una sustancia, aumentamos su energía molecular. En esta explicación mantendremos el volumen de gas constante para no tener que preocuparnos por la transferencia de energía mediante trabajo mecánico. Si dejamos que el gas se expanda, efectuará trabajo empujando las paredes móviles de su recipiente, y tendríamos que incluir esta transferencia de energía adicional en los cálculos. Volveremos a este caso más general en el capítulo 19. Por ahora, con el volumen constante, nos interesa C_V, la capacidad calorífica molar *a volumen constante*.

18.17 a) Volumen fijo V de un gas ideal monoatómico. b) Si se agrega una cantidad de calor dQ al gas, la energía cinética de traslación total aumenta en $dK_{tr} = dQ$, y la temperatura aumenta en $dT = dQ/nC_V$.

a)



b)



En el sencillo modelo cinético-molecular de la sección 18.3, la energía molecular consiste sólo en la energía cinética de traslación K_{tr} de las moléculas puntuales. Esta energía es directamente proporcional a la temperatura absoluta T, como indica la ecuación (18.14), $K_{tr} = \frac{3}{2}nRT$. Si el cambio de temperatura dT es pequeño, el cambio correspondiente de la energía cinética es

$$dK_{tr} = \frac{3}{2}nR\,dT \qquad (18.23)$$

De acuerdo con la definición de capacidad calorífica molar a volumen constante, C_V (véase la sección 17.5), también tenemos

$$dQ = nC_V\,dT \qquad (18.24)$$

donde dQ es el aporte de calor necesario para un cambio de temperatura dT. Ahora bien, si K_{tr} representa la energía molecular total, como hemos supuesto, dQ y dK_{tr} deben ser *iguales* (figura 18.17). Igualando las ecuaciones (18.23) y (18.24), obtenemos

$$nC_V\,dT = \frac{3}{2}nR\,dT$$

$$C_V = \frac{3}{2}R \qquad \text{(gas ideal de partículas puntuales)} \qquad (18.25)$$

Este resultado sorprendentemente sencillo indica que la capacidad calorífica molar (a volumen constante) de *todo* gas cuyas moléculas pueden representarse como puntos es igual a $3R/2$.

Para ver si esto es lógico, verifiquemos primero las unidades. La constante de los gases *sí* tiene unidades de energía por mol por kelvin, las unidades correctas para una capacidad calorífica molar. Pero es más importante que la ecuación (18.25) concuerde con valores *medidos* de capacidades caloríficas molares. En unidades del SI, la ecuación (18.25) da

$$C_V = \frac{3}{2}(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}) = 12.47\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Como comparación, la tabla 18.1 presenta valores medidos de C_V para varios gases. Vemos que, para los gases *monoatómicos*, nuestra predicción es excelente, pero difiere mucho para los gases diatómicos y poliatómicos.

Tabla 18.1 Capacidades caloríficas molares de gases

Tipo de gas	Gas	C_V (J/mol · K)
Monoatómico	He	12.47
	Ar	12.47
Diatómico	H_2	20.42
	N_2	20.76
	O_2	21.10
	CO	20.85
Poliatómico	CO_2	28.46
	SO_2	31.39
	H_2S	25.95

Esta comparación nos dice que nuestro modelo de moléculas puntuales es bueno para gases monoatómicos, pero para moléculas diatómicas y poliatómicas necesitamos algo más complejo. Por ejemplo, podemos visualizar una molécula diatómica como *dos* masas puntuales, como una pequeña mancuerna elástica, con una fuerza de

interacción interatómica como la que se representa en la figura 18.8. Una molécula así podría tener energía cinética adicional asociada con la *rotación* alrededor de ejes que pasan por su centro de masa. Los átomos también podrían tener un movimiento *vibratorio* sobre la línea que los une, con energías cinética y potencial adicionales. Las posibilidades se muestran en la figura 18.18.

Cuando fluye calor hacia un gas *monoatómico* a volumen constante, *toda* la energía agregada aumenta la energía cinética molecular de traslación. La ecuación (18.23) indica que esto aumenta la temperatura. Pero cuando la temperatura aumenta en la misma cantidad en un gas *diatómico* o *poliatómico*, se requiere calor adicional para el aumento en las energías rotacional y vibracional. Por ello, los gases poliatómicos tienen capacidades caloríficas molares *mayores* que los monoatómicos, como se aprecia en la tabla 18.1.

¿Cómo sabemos cuánta energía corresponde a cada tipo de movimiento adicional de una molécula compleja, en comparación con la energía cinética de traslación? El nuevo principio que necesitamos es el de **equipartición de la energía**. Este principio puede deducirse de consideraciones complejas de mecánica estadística que rebasan nuestro alcance, así que lo trataremos como un axioma.

El principio de equipartición de la energía dice que cada componente de velocidad (lineal o angular) tiene, en promedio, una energía cinética asociada por molécula de $\frac{1}{2}kT$, la mitad del producto de la constante de Boltzmann por la temperatura absoluta. El número de componentes de velocidad necesarias para describir cabalmente el movimiento de una molécula se denomina número de **grados de libertad**. En el caso de un gas monoatómico, hay tres grados de libertad (para las componentes de velocidad v_x, v_y y v_z); esto da una energía cinética media total por molécula de $3\left(\frac{1}{2}kT\right)$, congruente con la ecuación (18.16).

En el caso de una molécula *diatómica*, hay dos posibles ejes de rotación, perpendiculares entre sí y perpendiculares al eje de la molécula. (No incluimos la rotación alrededor del eje de la molécula porque en choques ordinarios este movimiento no puede cambiar.) Si asignamos cinco grados de libertad a una molécula diatómica, la energía cinética media total por molécula es $\frac{5}{2}kT$ en vez de $\frac{3}{2}kT$. La energía cinética total de n moles es $K_{\text{total}} = nN_A\left(\frac{5}{2}kT\right) = \frac{5}{2}n(kN_A)T = \frac{5}{2}nRT$, y la capacidad calorífica molar (a volumen constante) es

$$C_V = \frac{5}{2}R \qquad \text{(gas diatómico, incluida la rotación)} \qquad (18.26)$$

En unidades del SI,

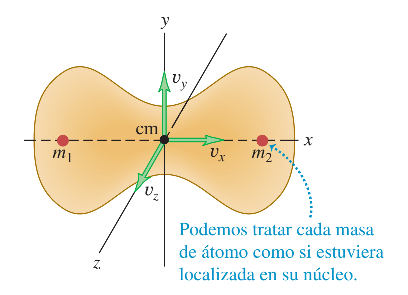
$$C_V = \frac{5}{2}(8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}) = 20.79 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

Esto difiere de los valores medidos para gases diatómicos, dados en la tabla 18.1, sólo en unos cuantos puntos porcentuales.

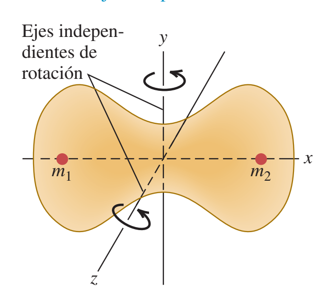
El movimiento *vibracional* también puede contribuir a las capacidades caloríficas de los gases. Los enlaces moleculares no son rígidos; pueden estirarse y doblarse, y las vibraciones resultantes dan lugar a grados de libertad y energías adicionales. Sin embargo, en la mayoría de los gases diatómicos, la vibración *no* contribuye apreciablemente a la capacidad calorífica. La razón es sutil e implica conceptos de mecánica cuántica. En pocas palabras, la energía de vibración sólo puede cambiar en pasos finitos. Si el cambio de energía del primer paso es mucho mayor que la energía de la mayor parte de las moléculas, casi todas éstas permanecerán en el estado de movimiento de mínima energía. En tal caso, un cambio de temperatura no altera apreciablemente su energía vibracional media, y los grados de libertad vibracionales quedan "excluidos". En moléculas más complejas, las diferencias entre los niveles de energía permitidos llegan a ser mucho menores, y la vibración *sí* contribuye a la capacidad calorífica. La energía rotacional de una molécula también cambia en pasos finitos, pero éstos suelen ser mucho más pequeños; la "exclusión" de grados de libertad rotacionales sólo se da en unos cuantos casos, como en la molécula de hidrógeno por debajo de 100 K.

18.18 Movimientos de una molécula diatómica.

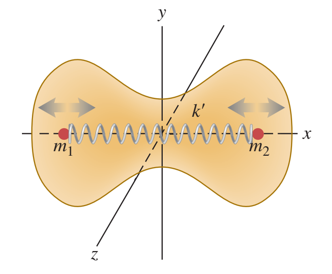
a) **Movimiento de traslación.** La molécula se mueve como un todo; su velocidad puede describirse como los componentes x, y y z de su centro de masa.

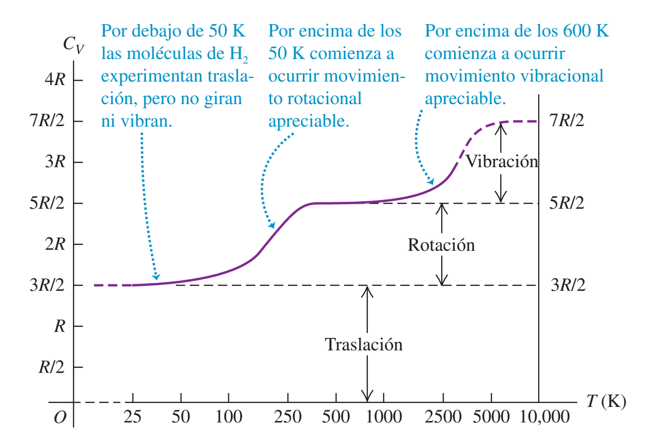


b) **Movimiento de rotación.** La molécula gira alrededor de su centro de masa. Esta molécula tiene dos ejes independientes de rotación.



c) **Movimiento vibracional.** La molécula oscila como si los ncleos est uvieran conectados mediante un resorte.





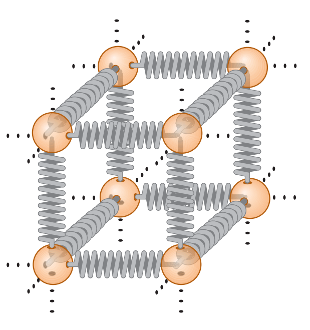
18.19 Valores experimentales de C_V, la capacidad calorífica molar a volumen constante, para el hidrógeno gaseoso (H_2). La temperatura está graficada en una escala logarítmica.

En la tabla 18.1, los valores grandes de C_V para algunas moléculas poliatómicas revelan las aportaciones de la energía de vibración. Además, una molécula con tres o más átomos que no están en línea recta tiene tres grados de libertad rotacionales, no dos.

Por lo anterior, cabe esperar que la capacidad calorífica dependa de la temperatura y que, en general, aumente al incrementarse T. La figura 18.19 muestra la dependencia de C_V respecto a la temperatura para hidrógeno gaseoso (H_2), e indica las temperaturas a las que las energías de rotación y de vibración comienzan a contribuir a la capacidad calorífica.

Capacidades caloríficas de sólidos

Podemos realizar un análisis similar para la capacidad calorífica de un sólido cristalino. Consideremos un cristal formado por N átomos idénticos (un *sólido monoatómico*). Cada átomo está atado a una posición de equilibrio por fuerzas interatómicas. La elasticidad de los materiales sólidos demuestra que tales fuerzas permiten el estiramiento y la flexión de los enlaces. Podemos visualizar un cristal como una matriz de átomos conectados por pequeños resortes (figura 18.20). Cada átomo puede *vibrar* alrededor de su posición de equilibrio.



18.20 Para visualizar las fuerzas entre átomos vecinos de un cristal, imagine que cada átomo está conectado a sus vecinos mediante resortes.

Cada átomo tiene tres grados de libertad, correspondientes a sus tres componentes de velocidad. Según el principio de equipartición, cada átomo tiene una energía cinética media de $\frac{1}{2}kT$ por cada grado de libertad. Además, cada átomo tiene energía *potencial* asociada con la deformación elástica. En el caso de un oscilador armónico simple (que se explicó en el capítulo 13), no es difícil demostrar que la energía cinética media de un átomo es *igual* a su energía potencial media. En nuestro modelo de un cristal, cada átomo es básicamente un oscilador armónico tridimensional; puede demostrarse que la igualdad de las energías cinética y potencial también se cumple aquí, siempre que las fuerzas de "resorte" obedezcan la ley de Hooke.

Así, cabe esperar que cada átomo tenga una energía cinética media de $\frac{3}{2}kT$ y una energía potencial media de $\frac{3}{2}kT$, es decir, una energía total media de $3kT$ por átomo. Si el cristal contiene N átomos o n moles, su energía total es

$$E_{\text{total}} = 3NkT = 3nRT \tag{18.27}$$

De lo anterior, concluimos que la capacidad calorífica molar de un cristal debería ser

$$C_V = 3R \qquad \text{(sólido monoatómico ideal)} \tag{18.28}$$

En unidades del SI,

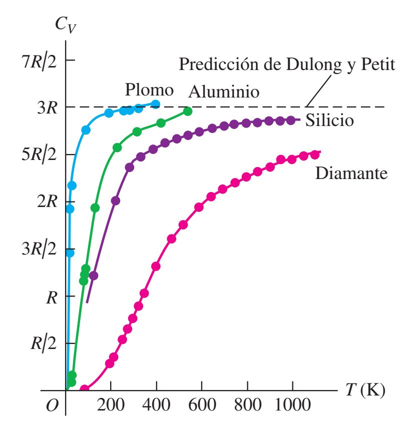
$$C_V = (3)(8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}) = 24.9 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

Ésta es la **regla de Dulong y Petit**, que conocimos como resultado *empírico* en la sección 17.5: todos los sólidos elementales tienen capacidades caloríficas molares cercanas a 25 J/mol · K. Ahora hemos *deducido* esta regla a partir de la teoría cinética.

La concordancia sólo es aproximada, pero, dada la sencillez de nuestro modelo, resulta muy significativa.

A bajas temperaturas, las capacidades caloríficas de la mayoría de los sólidos *disminuyen* al bajar la temperatura (figura 18.21) por la misma razón que los grados de libertad vibracionales de las moléculas se excluyen a bajas temperaturas. A muy bajas temperaturas, la cantidad kT es mucho *menor* que el paso de energía más pequeño que pueden dar los átomos en vibración. Por ello, casi todos los átomos permanecen en sus estados de mínima energía; el siguiente nivel de energía más alto está fuera de su alcance. La energía vibracional media por átomo es entonces *menor* que $3kT$, y la capacidad calorífica por molécula es *menor* que $3k$. A temperaturas más altas, cuando kT es *grande* en comparación con el paso de energía mínimo, se cumple el principio de equipartición y la capacidad calorífica total es de $3k$ por molécula o $3R$ por mol, como predice la relación de Dulong y Petit. El entendimiento cuantitativo de la variación de las capacidades caloríficas con la temperatura fue uno de los triunfos de la mecánica cuántica durante su desarrollo inicial en la década de 1920.

18.21 Valores experimentales de C_V para plomo, aluminio, silicio y diamante. A altas temperaturas, C_V para los sólidos se acerca a $3R$, en concordancia con la regla de Dulong y Petit. A bajas temperaturas, C_V es mucho menor que $3R$.



Evalúe su comprensión de la sección 18.4 Un cilindro con volumen fijo contiene hidrógeno gaseoso (H_2) a 25 K. Ahora se agrega calor al gas a ritmo constante hasta que su temperatura llega a 500 K. ¿La temperatura del gas aumenta a ritmo constante? ¿Por qué? Si no, ¿la temperatura aumenta con mayor rapidez cerca del principio o cerca del final de este proceso?

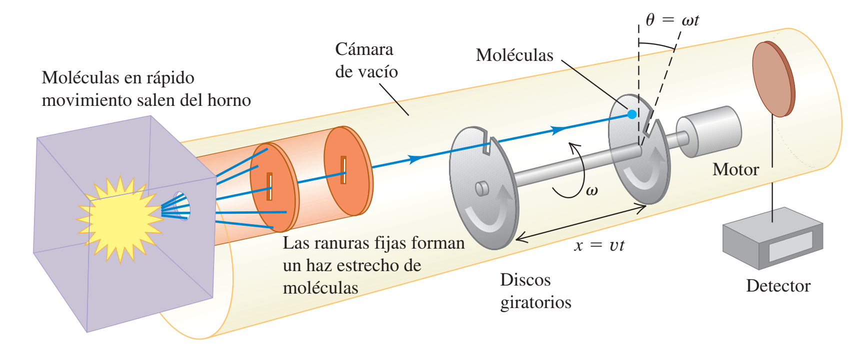
*18.5 Rapideces moleculares

Como mencionamos en la sección 18.3, no todas las moléculas de un gas tienen la misma rapidez. La figura 18.22 muestra un sistema experimental para medir la distribución de las rapideces moleculares. Una sustancia se vaporiza en un horno; las moléculas de vapor escapan por una abertura en la pared del horno hacia una cámara de vacío. Una serie de ranuras bloquea el paso de todas las moléculas excepto las de un haz angosto, dirigido a un par de discos giratorios. Una molécula que pasa por la ranura del primer disco es bloqueada por el segundo disco a menos que llegue justo cuando la ranura del segundo disco está alineada con el haz. Los discos funcionan como un selector de rapidez que deja pasar sólo moléculas dentro de un intervalo estrecho de velocidades. Ese intervalo puede variarse alterando la rapidez de rotación de los discos, y podemos medir cuántas moléculas hay en cada intervalo de rapidez.

Para describir los resultados de tales mediciones, definimos una función $f(v)$ llamada *función de distribución*. Si observamos un total de N moléculas, el número dN cuya rapidez está en el intervalo entre v y $v + dv$ está dado por

$$dN = Nf(v)\,dv \tag{18.29}$$

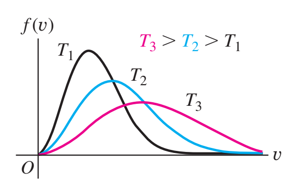
18.22 Una molécula con rapidez v pasa por la ranura del primer disco giratorio. Al llegar la molécula al segundo disco giratorio, las ranuras han girado el ángulo de desfasamiento θ. Si $v = \omega x/\theta$, la molécula pasará por la ranura del segundo disco giratorio y llegará al detector.



También podemos decir que *la probabilidad* de que una molécula elegida al azar tenga una rapidez en el intervalo de v a $v + dv$ es $f(v)dv$. Por lo tanto, $f(v)$ es la probabilidad por unidad de *intervalo* de rapidez; *no* es igual a la probabilidad de que una molécula tenga una rapidez exactamente igual a v. Dado que las probabilidades son números puros, $f(v)$ tiene unidades del recíproco de la rapidez (s/m).

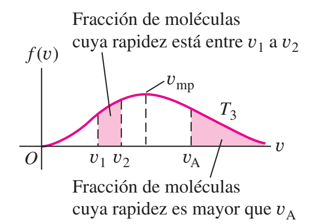
18.23 a) Curvas de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann $f(v)$ para diversas temperaturas. b) El área sombreada bajo cada curva representa la fracción de moléculas cuya rapidez está dentro de cierto intervalo. La rapidez más probable v_{mp} para una temperatura dada está en el máximo de la curva.

a)



Conforme aumenta la temperatura:
- La curva se aplana.
- El valor máximo se desplaza hacia mayor rapidez.

b)





8.2 Análisis conceptual de la distribución de Maxwell-Boltzmann

8.3 Análisis cuantitativo de la distribución de Maxwell-Boltzmann

La figura 18.23a muestra funciones de distribución para tres temperaturas distintas. A cada temperatura, la altura de la curva para cualquier valor de v es proporcional al número de moléculas cuya rapidez es cercana a v. El máximo de la curva representa la *rapidez más probable* v_{mp} para la temperatura en cuestión. Al aumentar la temperatura, la energía cinética molecular media aumenta, y el máximo de $f(v)$ se desplaza a rapideces cada vez más altas.

La figura 18.23b muestra que el área bajo la curva entre dos valores cualesquiera de v representa la fracción de todas las moléculas cuya rapidez está en ese intervalo. Toda molécula debe tener *algún* valor de v, así que la integral de $f(v)$ sobre toda v debe ser 1 para cualquier T.

Si conocemos $f(v)$, podremos calcular la rapidez más probable v_{mp}, la rapidez media v_{med} y la rapidez eficaz v_{rms}. Para obtener v_{mp}, basta con encontrar el punto donde $df/dv = 0$; esto da el valor de la rapidez en el que la curva tiene su máximo. Para obtener v_{med}, tomamos el número $Nf(v)dv$ de moléculas cuya rapidez está dentro de cada intervalo dv, multiplicamos cada número por la rapidez correspondiente v, sumamos todos estos productos (integrando desde $v = 0$ hasta infinito) y dividimos entre N. Es decir,

$$v_{med} = \int_0^\infty v f(v)\, dv \qquad (18.30)$$

La rapidez rms se obtiene de forma similar; la media de v^2 está dada por

$$(v^2)_{med} = \int_0^\infty v^2 f(v)\, dv \qquad (18.31)$$

y v_{rms} es la raíz cuadrada de esto.

La distribución de Maxwell-Boltzmann

La función $f(v)$ que describe la distribución real de la rapidez molecular se llama **distribución de Maxwell-Boltzmann**, y puede deducirse de consideraciones de mecánica estadística que rebasan nuestro alcance. He aquí el resultado:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} \quad \text{(distribución de Maxwell-Boltzmann)} \qquad (18.32)$$

También podemos expresar esta función en términos de la energía cinética de traslación de una molécula, que denotamos con ϵ. Es decir, $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2$. Invitamos al lector (véase el ejercicio 18.47) a que compruebe que, cuando esto se sustituye en la ecuación (18.32), el resultado es

$$f(v) = \frac{8\pi}{m}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \epsilon e^{-\epsilon/kT} \qquad (18.33)$$

Esta forma indica que el exponente de la función de distribución de Maxwell-Boltzmann es $-\epsilon/kT$ y que la forma de la curva depende de la magnitud relativa de ϵ y kT en cada punto. Dejamos que el lector demuestre (véase el ejercicio 18.48) que el *máximo* de cada curva se presenta donde $\epsilon = kT$ y corresponde a la rapidez más probable v_{mp} dada por

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \qquad (18.34)$$

Para calcular la rapidez media, sustituimos la ecuación (18.32) en la ecuación (18.30) e integramos, haciendo un cambio de variable $v^2 = x$ e integrando por partes. Dejamos los detalles como ejercicio; el resultado es

$$v_{med} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \qquad (18.35)$$

Por último, para calcular la rapidez eficaz (v_{rms}), sustituimos la ecuación (18.32) en la (18.31). La evaluación de la integral resultante requiere algo de acrobacia matemática, pero podemos encontrarla en una tabla de integrales. El resultado es

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \tag{18.36}$$

Este resultado concuerda con la ecuación (18.19); *debe* concordar para que la distribución de Maxwell-Boltzmann sea congruente con el teorema de equipartición y el resto de nuestros cálculos de teoría cinética.

La tabla 18.2 muestra la fracción de las moléculas de gas ideal cuya rapidez es *menor que* diversos múltiplos de v_{rms}. Estas cifras se obtuvieron por integración numérica, y son las mismas para todos los gases que se comportan como gas ideal.

Tabla 18.2 Fracciones de moléculas de un gas ideal cuya rapidez es menor que diversos múltiplos de v/v_{rms}

v/v_{rms}	Fracción
0.20	0.011
0.40	0.077
0.60	0.218
0.80	0.411
1.00	0.608
1.20	0.771
1.40	0.882
1.60	0.947
1.80	0.979
2.00	0.993

La distribución de rapideces moleculares en los líquidos es similar, pero no idéntica, a la distribución en gases. Podemos entender la presión de vapor de un líquido y el fenómeno de ebullición con base en ella. Suponga que una molécula necesita una rapidez mínima v_A (figura 18.23b) para escapar de la superficie de un líquido al vapor adyacente. El número de tales moléculas, representado por el área bajo la "cola" de cada curva (a la derecha de v_A), aumenta rápidamente con la temperatura. Así, la rapidez con que pueden escapar las moléculas depende mucho de la temperatura. Este proceso se equilibra con otro en el que moléculas de la fase de vapor chocan inelásticamente con la superficie y quedan atrapadas en la fase líquida. El número de moléculas que corren esta suerte por unidad de tiempo es proporcional a la presión en la fase de vapor. El equilibrio de fases entre líquido y vapor se presenta cuando estos dos procesos en competencia se efectúan exactamente con la misma rapidez. De esta forma, si conocemos las distribuciones de rapidez de las moléculas a diversas temperaturas, estaremos en condiciones de predecir teóricamente la presión de vapor en función de la temperatura. Cuando se evapora líquido, son las moléculas de alta velocidad las que escapan de la superficie, mientras que las restantes tienen menor energía en promedio; esto permite ver el enfriamiento por evaporación desde una perspectiva molecular.

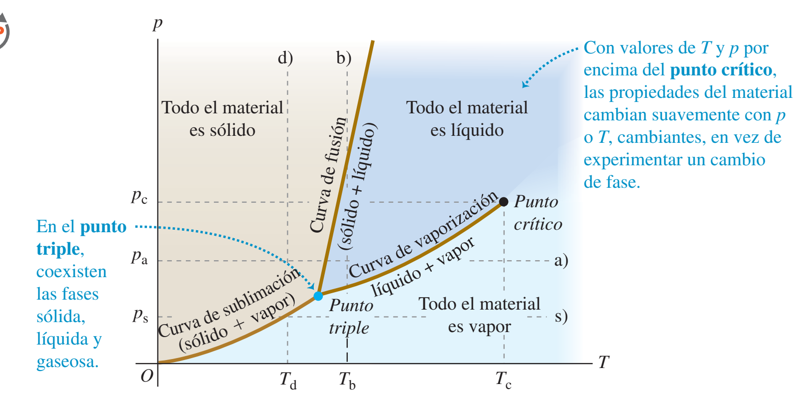
La rapidez de muchas reacciones químicas a menudo depende marcadamente de la temperatura, y esto se explica con la distribución de Maxwell-Boltzmann. Si chocan dos moléculas que podrían reaccionar, sólo habrá reacción si las moléculas están tan cerca que las distribuciones de carga eléctrica de sus electrones interactúan fuertemente. Esto requiere una energía mínima, llamada *energía de activación* y, por lo tanto, cierta rapidez molecular mínima. La figura18.23a indica que el número de moléculas en la cola de elevada rapidez de la curva aumenta rápidamente con la temperatura. Además, cabe esperar que la rapidez de cualquier reacción que dependa de una energía de activación aumente rápidamente con la temperatura. Asimismo, la rapidez de muchos procesos de crecimiento vegetal depende marcadamente de la temperatura; prueba de ello es el rápido y diverso crecimiento en las selvas tropicales.

Evalúe su comprensión de la sección 18.5 Una cantidad de gas que contiene N moléculas tiene una función de distribución de rapidez $f(v)$. ¿Cuántas moléculas tienen rapidez entre v_1 y $v_2 > v_1$? i) $\int_0^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_1} f(v)\,dv$; ii) $N[\int_0^{v_2} f(v)\,dv - \int_0^{v_1} f(v)\,dv]$; iii) $\int_0^{v_1} f(v)\,dv - \int_0^{v_2} f(v)\,dv$; iv) $N[\int_0^{v_1} f(v)\,dv - \int_0^{v_2} f(v)\,dv]$; v) ninguna de las anteriores.

18.6 Fases de la materia

Hablamos mucho de gases ideales en las últimas secciones. Un gas ideal es el sistema más simple que podemos analizar desde una perspectiva molecular porque despreciamos las interacciones entre las moléculas. Sin embargo, son precisamente esas interacciones las que hacen que la materia se condense en las fases líquida y sólida en ciertas condiciones. Por ello, no es sorprendente que el análisis teórico de la estructura y el comportamiento de líquidos y sólidos sea mucho más complicado que en el caso de los gases. No trataremos de llevar muy lejos una perspectiva microscópica, pero podemos hablar en general de fases de la materia, equilibrio de fases y transiciones de fase.

18.24 Diagrama de fases pT representativo, con regiones de temperatura y presión en las que existen las distintas fases y en las que se dan cambios de fase.



En la sección 17.6, vimos que cada fase es estable sólo en ciertos intervalos de temperatura y presión. La transición de una fase a otra normalmente se da en condiciones de **equilibrio de fases** entre las dos fases y, para una presión dada, esto sólo ocurre a una temperatura específica. Podemos representar estas condiciones en una gráfica con ejes p y T, llamada **diagrama de fases**; la figura 18.24 es un ejemplo. Cada punto del diagrama representa un par de valores de p y T. En cada punto, sólo puede existir una fase, excepto sobre las líneas, donde pueden coexistir dos fases en equilibrio de fases.

Estas líneas dividen el diagrama en regiones de sólido, líquido y vapor. Por ejemplo, la curva de fusión separa las áreas de sólido y de líquido y representa posibles condiciones de equilibrio de fases sólido-líquido. De manera similar, la curva de vaporización separa las áreas de líquido y de vapor, y la de sublimación separa las áreas de sólido y de vapor. Las tres curvas se unen en el **punto triple**, la única condición en que pueden coexistir las tres fases (figura 18.25). En la sección 17.3, usamos la temperatura de punto triple del agua para definir la escala de temperatura Kelvin. En la tabla 18.3 se incluyen datos de punto triple para varias sustancias.

18.25 La presión atmosférica terrestre es más alta que la presión del punto triple del agua (véase la línea *a*) en la figura 18.24). Dependiendo de la temperatura, el agua puede existir como vapor (en la atmósfera), como líquido (en el océano) o como sólido (en el iceberg que vemos aquí).

Tabla 18.3 Datos de punto triple

Sustancia	Temperatura (K)	Presión (Pa)
Hidrógeno	13.80	0.0704×10^5
Deuterio	18.63	0.171×10^5
Neón	24.56	0.432×10^5
Nitrógeno	63.18	0.125×10^5
Oxígeno	54.36	0.00152×10^5
Amoniaco	195.40	0.0607×10^5
Dióxido de carbono	216.55	5.17×10^5
Dióxido de azufre	197.68	0.00167×10^5
Agua	273.16	0.00610×10^5

Si agregamos calor a una sustancia a una presión constante p_a, la sustancia pasa por una serie de estados representados por la línea horizontal (a) de la figura 18.24. Las temperaturas de fusión y ebullición a esta presión son aquellas en que la línea interseca las curvas de fusión y vaporización, respectivamente. Si la presión es p_s, el calentamiento a presión constante transforma la sustancia de sólido directamente a vapor. Este proceso se llama *sublimación*; la intersección de la línea (s) con la curva de sublimación da la temperatura T_s a la que se da sublimación a una presión p_s. A cualquier presión menor que la del punto triple, no puede existir fase líquida. La presión de punto triple para el dióxido de carbono es de 5.1 atm. A presión atmosférica normal, el dióxido de carbono sólido ("hielo seco") se sublima; no hay fase líquida a esta presión.

La línea (b) de la figura 18.24 representa compresión a temperatura constante T_b. El material pasa de vapor a líquido y luego a sólido en los puntos en que la línea (b) cruza las curvas de vaporización y fusión, respectivamente. La línea (d) muestra compresión a temperatura constante a una temperatura más baja T_d; el material pasa de vapor a sólido donde la línea (d) cruza la curva de sublimación.

En la gráfica *pV* de la figura 18.7 vimos que sólo hay una transición de fase líquido-vapor cuando la temperatura y la presión son menores que en el punto de la parte superior del área verde rotulada "Región de equilibrio de fase líquido-vapor". Ese punto corresponde al punto final en la parte superior de la curva de vaporización en la figura 18.24; se llama **punto crítico**, y los valores correspondientes de *p* y *T* se denominan presión y temperatura críticas, p_c y T_c. Un gas a presión *mayor* que la crítica no se separa en dos fases cuando se enfría a presión constante (sobre una línea horizontal arriba del punto crítico en la figura 18.24). En vez de ello, sus propiedades cambian gradual y continuamente de las que ordinariamente asociamos con los gases (baja densidad, alta compresibilidad) a las propiedades de un líquido (alta densidad, baja compresibilidad) *sin transición de fase*.

Si esto parece increíble, consideremos las transiciones a la fase líquida en puntos cada vez más altos en la curva de vaporización. Al acercarnos al punto crítico, las *diferencias* en las propiedades físicas (como densidad, módulo de volumen y viscosidad) entre las fases de líquido y de vapor se hacen cada vez más pequeñas. Exactamente *en* el punto crítico, las diferencias se vuelven cero, y desaparece la distinción entre líquido y vapor. El calor de vaporización también se reduce al acercarnos al punto crítico, y también se vuelve cero en ese punto.

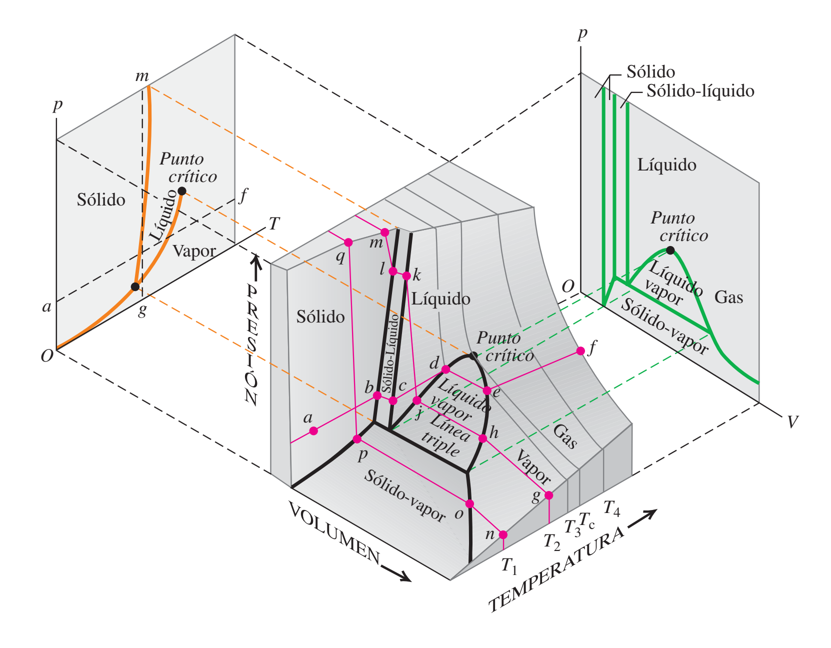
Para casi todos los materiales conocidos, las presiones críticas son mucho mayores que la presión atmosférica, y por ello no observamos este comportamiento en la vida diaria. Por ejemplo, el punto crítico del agua está en 647.4 K y 221.2×10^5 Pa (unas 218 atm). Sin embargo, las calderas de vapor a alta presión en las plantas generadoras de electricidad suelen operar a presiones y temperaturas muy por encima del punto crítico.

Muchas sustancias pueden existir en más de una fase sólida. Un ejemplo conocido es el carbono, que existe como hollín no cristalino, grafito y diamante cristalino. El agua es otro ejemplo; se han observado hasta ocho tipos de hielo, con diferentes estructuras cristalinas y propiedades físicas, a presiones muy altas.

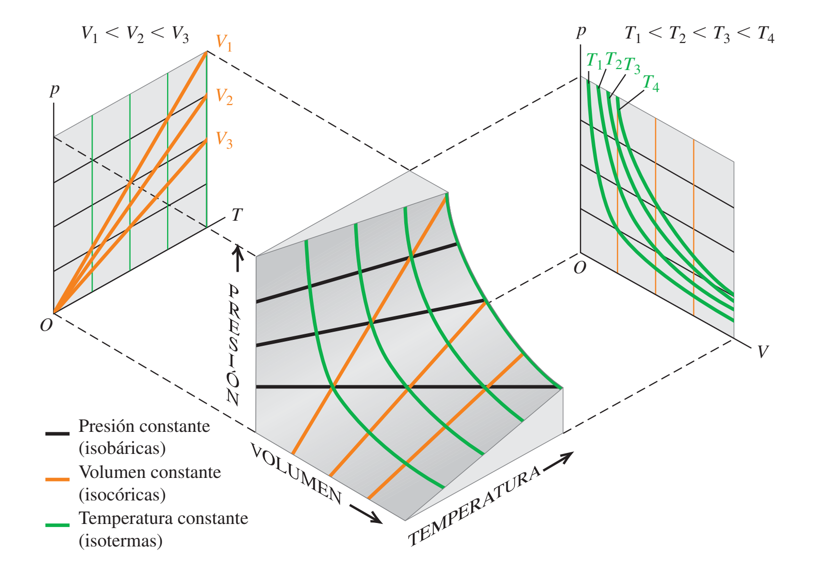
Superficies *pVT*

En la sección 18.1 comentamos que la ecuación de estado de cualquier material puede representarse gráficamente como una superficie en un espacio tridimensional con coordenadas *p*, *V* y *T*. Tales superficies casi nunca sirven para representar información cuantitativa detallada, pero pueden ayudarnos a entender en general el comportamiento de los materiales a diferentes temperaturas y presiones. La figura 18.26 muestra una superficie *pVT* típica. Las líneas delgadas representan isotermas *pV*; su proyección en el plano *pV* daría una gráfica similar a la de la figura 18.7. Estas isotermas *pV* representan líneas de contorno de la superficie *pVT*, de manera análoga a como las líneas de contorno de un mapa topográfico representan la elevación (la tercera dimensión) en cada punto. Las proyecciones de los bordes de la superficie en el plano *pT* dan el diagrama de fases *pT* de la figura 18.24.

La línea *abcdef* en la figura 18.26 representa calentamiento a presión constante, con fusión en *bc* y vaporización en *de*. Observe los cambios de volumen que se presentan al aumentar *T* siguiendo esta línea. La línea *ghjklm* corresponde a una compresión isotérmica (a temperatura constante), con licuefacción en *hj* y solidificación en *kl*. Entre éstas, los segmentos *gh* y *jk* representan compresión isotérmica con aumento de presión; estos aumentos son mucho mayores en la región líquida *jk* y en la sólida *lm* que en la de vapor *gh*. Por último, *nopq* representa solidificación isotérmica directamente de la fase de vapor; éste es el proceso que interviene en el crecimiento de cristales directamente de vapor, como en la formación de copos de nieve o escarcha y en la fabricación de algunos dispositivos electrónicos de estado sólido. Estas tres líneas de la superficie *pVT* merecen un estudio detenido.



18.26 Superficie pVT para una sustancia que se expande al fundirse. También se muestran proyecciones de las fronteras sobre la superficie en los planos pT y pV.



18.27 Superficie pVT para un gas ideal. A la izquierda, cada línea naranja corresponde a cierto volumen constante; a la derecha, cada línea verde corresponde a cierta temperatura constante.

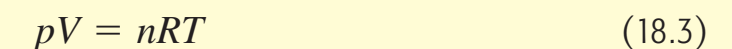
Como contraste, la figura 18.27 muestra la superficie pVT mucho más sencilla para una sustancia que obedece la ecuación de estado del gas ideal en todas las condiciones. Las proyecciones de las curvas de temperatura constante en el plano pV corresponden a las curvas de la figura 18.6, y las proyecciones de las curvas de volumen constante en el plano pT muestran la proporcionalidad directa de la presión y la temperatura absoluta.

Evalúe su comprensión de la sección 18.6 La presión atmosférica media en Marte es de 6.0×10^2 Pa. ¿Podría haber lagos o ríos en Marte en la actualidad? ¿Y en el pasado, cuando, según se cree, la presión atmosférica era considerablemente mayor que ahora?

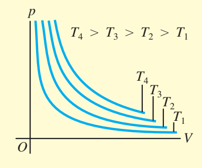
CAPÍTULO 18 RESUMEN

Ecuación de estado: La presión p, el volumen V y la temperatura absoluta T de una cantidad dada de una sustancia se llaman variables de estado y están relacionadas por una ecuación de estado. Esa relación implica únicamente estados de equilibrio, con p y T uniformes en todo el sistema. La ecuación de estado del gas ideal relaciona p, V, T y el número de moles n a través de una constante R que es la misma para todos los gases. (Véanse los ejemplos 18.1 a 18.4.)

Una gráfica pV presenta una serie de curvas, llamadas isotermas, que muestran la presión en función del volumen, cada una a cierta temperatura constante.



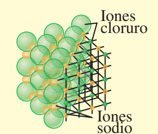
$$pV = nRT \qquad (18.3)$$



Propiedades molares de la materia: La masa molar M de una sustancia pura es la masa por mol. La masa total m_{total} de una cantidad de sustancia es igual a M multiplicada por el número de moles n. El número de Avogadro N_A es el número de moléculas que hay en un mol. La masa m de una molécula individual es M dividida entre N_A. (Véase el ejemplo 18.5.)

$$m_{total} = nM \qquad (18.2)$$

$$M = N_A m \qquad (18.8)$$



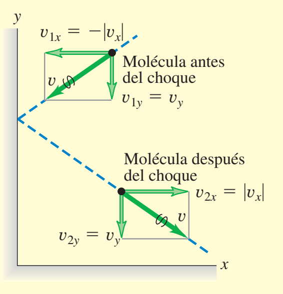
Modelo cinético molecular de un gas ideal: En un gas ideal, la energía cinética de traslación total del gas en conjunto (K_{tr}) y la energía cinética de traslación media por molécula $[\frac{1}{2}m(v^2)_{med}]$ son proporcionales a la temperatura absoluta T. La rapidez eficaz de las moléculas de un gas ideal es proporcional a la raíz cuadrada de T. En estas expresiones interviene la constante de Boltzmann $k = R/N_A$. (Véanse los ejemplos 18.6 y 18.7.)
La trayectoria libre media λ de las moléculas de un gas ideal depende el número de moléculas por volumen (N/V) y del radio molecular r. (Véase el ejemplo 18.8.)

$$K_{tr} = \frac{3}{2}nRT \qquad (18.14)$$

$$\frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}kT \qquad (18.16)$$

$$v_{rms} = \sqrt{(v^2)_{med}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (18.19)$$

$$\lambda = vt_{med} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2N} \qquad (18.21)$$

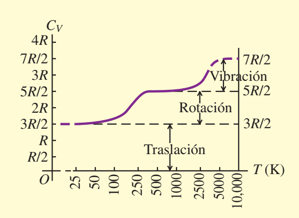


Capacidades caloríficas: La capacidad calorífica molar C_V a volumen constante se puede expresar como múltiplo sencillo de la constante de los gases R en ciertos casos idealizados: el gas monoatómico ideal [ecuación (18.25)]; el gas diatómico ideal con inclusión de energía rotacional [ecuación (18.26)]; y el sólido monoatómico ideal [ecuación (18.28)]. Podemos aproximar satisfactoriamente muchos sistemas reales con esas idealizaciones.

$$C_V = \frac{3}{2}R \quad \text{(gas monatómico)} \qquad (18.25)$$

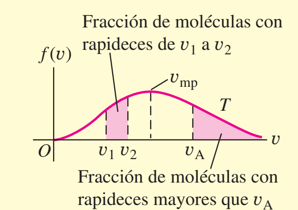
$$C_V = \frac{5}{2}R \quad \text{(gas diatómico)} \qquad (18.26)$$

$$C_V = 3R \quad \text{(sólido monoatómico)} \qquad (18.28)$$

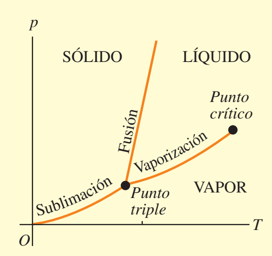


Rapidez molecular: Las rapideces de las moléculas de un gas ideal se distribuyen según la distribución de Maxwell-Boltzmann $f(v)$. La cantidad $f(v)dv$ describe la fracción de las moléculas que tiene rapideces entre v y $v + dv$.

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-mv^2/2kT} \qquad (18.32)$$



Fases de la materia: La materia ordinaria existe en las fases sólida, líquida y gaseosa. Un diagrama de fases muestra las condiciones en las que dos fases pueden coexistir en equilibrio. Las tres fases pueden coexistir en el punto triple. La curva de vaporización termina en el punto crítico, arriba del cual desaparece la distinción entre las fases líquida y gaseosa.



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Por la ecuación (18.19), la rapidez eficaz de una molécula de gas es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T. El intervalo de temperaturas que estamos considerando es de (25 + 273.15) K = 298 K a (100 + 273.15) K = 373 K. Por lo tanto, las rapideces aumentan en un factor de $\sqrt{(373\text{ K})/(298\text{ K})} = 1.12$; es decir, hay un aumento del 12%. Si bien 100 °C se siente mucho más caliente que 25 °C, la diferencia de rapideces moleculares es relativamente pequeña.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

18.1 Respuestas: ii) y iii) (empate), i) y v) (empate), iv) Podemos rescribir la ecuación del gas ideal, ecuación (18.3), como $n = pV/RT$. Esto nos dice que el número de moles n es proporcional a la presión y al volumen e inversamente proporcional a la temperatura absoluta. Por lo tanto, en comparación con i) el número de moles en cada caso es ii) (2) (1)/(1) = 2 veces más, iii) (1) (2)/(1) = 2 veces más, iv) $(1)(1)/(2) = \frac{1}{2}$, y v) (2) (1)/(2) = 1, es decir, igual.

18.2 Respuesta: vi) El valor de r_0 determina la separación en equilibrio de las moléculas de la fase sólida, así que un aumento de r_0 al doble implica duplicar la separación. Por lo tanto, un cubo sólido de este compuesto aumentaría de 1 cm de lado a 2 cm. El volumen sería entonces $2^3 = 8$ veces mayor y la densidad (masa dividida entre volumen) sería $\frac{1}{8}$ de la original.

18.3 Respuestas: *a*) iv), ii), iii) y i); *b*) iii) y iv) (empate), i) y ii) (empate) *a*) La ecuación (18.19) nos dice que $v_{rms} = \sqrt{3RT/M}$, de manera que la rapidez eficaz es proporcional a la raíz cuadrada de la razón de temperatura absoluta T a la masa molar M. En comparación con **i)**, el oxígeno a 300 K, v_{rms} en los otros casos es
ii) $\sqrt{(32.0\text{ g/mol})/(28.0\text{ g/mol})} = 1.07$ veces más rápido,
iii) $\sqrt{(330\text{ K})/(300\text{ K})} = 1.05$ veces más rápido y
iv) $\sqrt{(330\text{ K})(32.0\text{ g/mol})/(300\text{ K})(28.0\text{ g/mol})} = 1.12$ veces más rápido. *b*) De acuerdo con la ecuación (18.16), la energía cinética de traslación media por molécula es $\frac{1}{2}m(v^2)_{med} = \frac{3}{2}kT$, que es directamente proporcional a T e independiente de M. Tenemos $T = 300$ K para los casos i) y ii) y $T = 330$ K para los casos iii) y iv), de manera que $\frac{1}{2}m(v^2)_{med}$ tiene valores iguales para los casos iii) y iv) y valores iguales (pero más pequeños) para los casos i) y ii).

18.4 Respuestas: no, cerca del principio La adición de una cantidad pequeña de calor dQ al gas produce un cambio de temperatura dT, donde $dQ = nC_V\,dT$ [ecuación (18.24)]. La figura 18.19 muestra que C_V para el H_2 varía con la temperatura entre 25 K y 500 K, así que una cantidad dada de calor produce diferentes cambios de temperatura durante el proceso. Por lo tanto, la temperatura *no* aumentará a ritmo constante. El cambio de temperatura $dT = dQ/nC_V$ es inversamente proporcional a C_V, así que la temperatura aumenta más rápidamente al principio del proceso cuando la temperatura es más baja y C_V es más pequeño (véase la figura 18.19).

18.5 Respuesta: ii) La figura 18.23b muestra que la *fracción* de moléculas con rapideces entre v_1 y v_2 es igual al área bajo la curva de $f(v)$ contra v desde $v = v_1$ a $v = v_2$. Esto es igual a la integral $\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv$, que a la vez es igual a la diferencia entre las integrales $\int_0^{v_2} f(v)\,dv$ (la fracción de moléculas con rapideces de 0 a v_2 y $\int_0^{v_1} f(v)\,dv$ (la fracción de moléculas con rapideces de 0 a la menor rapidez v_1). El *número* de moléculas con rapideces de v_1 a v_2 es igual a la fracción de moléculas en este intervalo de rapidez multiplicado por N, el número total de moléculas.

18.6 Respuestas: no, sí La presión de punto triple del agua (tabla 18.3) es 6.10×10^2 Pa. La presión atmosférica actual en Marte es un poco menor y corresponde a la línea rotulada p_s en la figura 18.24. Por lo tanto, no puede existir agua líquida en la superficie de Marte, así que no hay lagos ni ríos. Los estudiosos de los planetas han llegado a la conclusión de que en el pasado, cuando la atmósfera era más densa, pudo haber existido, y casi seguramente existió, agua líquida en Marte.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P18.1. En la sección 18.1 se dice que, en condiciones ordinarias, no es posible cambiar individualmente la presión, el volumen o la temperatura sin afectar las demás. Sin embargo, al evaporarse un líquido, su volumen cambia, aunque su presión y temperatura son constantes. ¿Es inconsistente esto? ¿Por qué?

P18.2. En la ecuación del gas ideal, ¿podría emplearse la temperatura Celsius equivalente en vez de la temperatura Kelvin si se usara un valor numérico apropiado de la constante R? ¿Por qué?

P18.3. En una noche fría podemos "ver nuestro aliento". ¿Es verdad esto? ¿Qué vemos realmente? ¿Este fenómeno depende de la temperatura del aire, de la humedad o de ambas cosas? Explique.

P18.4. Cuando se conduce un automóvil a cierta distancia, la presión del aire en los neumáticos aumenta. ¿Por qué? ¿Es aconsejable extraer aire para reducir la presión? ¿Por qué?

P18.5. El refrigerante de un radiador de automóvil se mantiene a una presión mayor que la atmosférica. ¿Por qué es deseable esto? La tapa del radiador libera refrigerante si la presión manométrica de éste alcanza cierto valor, por lo regular 15 $\mathrm{lb/in^2}$. ¿Por qué no simplemente se sella el sistema?

P18.6. La comida no envuelta que se encuentra en un congelador sufre deshidratación, conocida como "quemadura de congelador". ¿Por qué?

P18.7. La "liofilización" implica el mismo proceso que la "quemadura de congelador" mencionada en la pregunta anterior. Para liofilizar la comida, ésta generalmente se congela, se coloca en una cámara de vacío y se irradia con infrarrojo. ¿Por qué se usa vacío? ¿Por qué se usa radiación? ¿Qué ventajas podría tener la liofilización sobre el secado ordinario?

P18.8. Un grupo de estudiantes viajaron en auto desde su universidad (casi al nivel del mar) a las montañas para esquiar el fin de semana. Al llegar, descubrieron que las bolsas de papas fritas que llevaban se habían reventado. ¿Qué causó esto?

P18.9. ¿Cómo enfría nuestro cuerpo la evaporación del sudor de la piel?

P18.10. Un recipiente rígido y perfectamente aislado tiene una membrana que divide su volumen en mitades. Un lado contiene un gas a una temperatura absoluta T_0 y presión p_0, mientras que la otra mitad está completamente vacía. De repente, se forma un pequeño orificio en la membrana, permitiendo que el gas se filtre hacia la otra mitad hasta que termina por ocupar el doble de su volumen original. En términos de T_0 y p_0, ¿cuál será la nueva temperatura y presión del gas cuando se distribuye equitativamente en ambas mitades del recipiente? Explique su razonamiento.

P18.11. *a*) ¿Qué tiene más átomos, 1 kg de hidrógeno o 1 kg de plomo? ¿Cuál tiene más masa? *b*) ¿Qué tiene más átomos, un mol de hidrógeno o un mol de plomo? ¿Cuál tiene más masa? Explique su razonamiento.

P18.12. Use los conceptos del modelo cinético-molecular para explicar *a*) por qué la presión de un gas en un recipiente rígido aumenta al añadirse calor al gas y *b*) por qué la presión de un gas aumenta cuando lo comprimimos, aunque no alteremos su temperatura.

P18.13. La proporción de diversos gases en la atmósfera cambia un poco con la altura. ¿Cabría esperar que la proporción de oxígeno a gran altura fuera mayor o menor que en el nivel del mar, en comparación con la proporción de nitrógeno? ¿Por qué?

P18.14. Comente esta afirmación: *si se mezclan dos gases, para que estén en equilibrio térmico deben tener la misma rapidez molecular media*. ¿Es correcta? Explique por qué.

P18.15. El modelo cinético-molecular contiene un supuesto oculto respecto a la temperatura de las paredes del recipiente. ¿Cuál es? ¿Qué sucedería si no fuera válido?

P18.16. La temperatura de un gas ideal es directamente proporcional a la energía cinética media de sus moléculas. Si un recipiente con gas ideal pasa junto a usted a 2000 m/s, ¿es mayor su temperatura que si estuviera en reposo? Explique su razonamiento.

P18.17. Si se aumenta la presión de un gas monoatómico ideal mientras se mantiene constante el número de moles, ¿qué sucede con la energía cinética de traslación media de un átomo del gas? ¿Es posible modificar *tanto* el volumen como la presión del gas ideal y mantener constante la energía cinética de traslación media de sus átomos?

P18.18. Al deducir la ecuación del gas ideal del modelo cinético-molecular, despreciamos la energía potencial debida a la gravedad terrestre. ¿Se justifica esta omisión? ¿Por qué?

P18.19. La deducción de la ecuación del gas ideal incluyó el supuesto de que el número de moléculas es muy grande y podemos calcular la fuerza media debida a muchos choques. Sin embargo, esa ecuación sólo se cumple con exactitud a bajas presiones, donde las moléculas son pocas y dispersas. ¿Hay una inconsistencia aquí? Explique.

P18.20. Un tanque de almacenamiento de gas tiene una pequeña fuga. La presión en el tanque baja con mayor rapidez si el gas es hidrógeno o helio que si es oxígeno. ¿Por qué?

P18.21. Considere dos muestras de gas ideal que están a la misma temperatura. La muestra A tiene la misma masa total que B, pero sus moléculas tienen mayor masa molar. ¿En cuál muestra es mayor la energía cinética total? ¿Su respuesta depende de la estructura molecular de los gases? ¿Por qué?

P18.22. La temperatura de un gas monoatómico ideal aumenta de 25 °C a 50 °C. ¿Aumenta al doble la energía cinética de traslación media de cada átomo de gas? Explique. Si su respuesta es no, ¿cuál sería la temperatura final si la energía cinética de traslación media se duplicara?

P18.23. Si se quiere aumentar al doble la rapidez eficaz de los átomos de un gas ideal, ¿en qué factor deberá aumentarse la temperatura Kelvin del gas? Explique.

P18.24. *a*) Si usted aplica la misma cantidad de calor a 1.00 mol de un gas monoatómico ideal y a 1.00 mol de un gas diatómico ideal, ¿cuál de ellos (si acaso) aumentará más su temperatura? *b*) Físicamente, ¿por qué los gases diatómicos tienen mayor capacidad calorífica molar que los gases monoatómicos?

P18.25. La explicación en la sección 18.4 concluyó que todos los gases diatómicos ideales tienen la misma capacidad calorífica C_V. ¿Significa esto que se requiere la misma cantidad de calor para elevar la temperatura de 1.0 g de cada uno de ellos en 1.0 K? Explique su razonamiento.

***P18.26.** En un gas que contiene N moléculas, ¿sería correcto decir que el número de moléculas con rapidez v es igual a $f(v)$? ¿O que ese número está dado por $Nf(v)$? Explique sus respuestas.

***P18.27.** Imagine un filtro de aire especial en la ventana de una casa. Los diminutos agujeros del filtro sólo dejan salir moléculas que se mueven con más de cierta rapidez mínima, y sólo dejan entrar moléculas que se mueven con menor rapidez. ¿Qué efecto tendría este filtro sobre la temperatura interior de la casa? (Resulta que la segunda ley de la termodinámica —que veremos en el capítulo 20— nos dice que tan maravilloso filtro es imposible de construir.)

P18.28. Un vaso con agua a temperatura ambiente se coloca en una campana en la que se va reduciendo gradualmente la presión del aire. Cuando la presión del aire se reduce lo suficiente, el agua comienza a hervir. La temperatura del agua no aumenta al hervir; de hecho, *baja* un poco. Explique estos fenómenos.

P18.29. Es fácil resbalar caminando sobre hielo, sobre todo si usamos patines de hielo. ¿Qué nos dice esto acerca de cómo el punto de fusión del hielo depende de la presión? Explique.

P18.30. Las ventosas hidrotermales son aberturas en el piso oceánico que descargan agua muy caliente. El agua que sale de una de ellas cerca de la costa de Oregon, a 2400 m de profundidad, está a 279 °C. A pesar de su alta temperatura, el agua no hierve. ¿Por qué?

P18.31. Las áreas oscuras de la superficie lunar se llaman *mares*, y en alguna época se pensó que eran cuerpos de agua. En realidad, estos "mares" son llanuras de lava solidificada. Dado que no hay atmósfera en la Luna, ¿cómo puede explicarse la ausencia de agua líquida en su superficie?

P18.32. Además de las instrucciones normales impresas en una caja de arroz, hay "instrucciones para cocer a gran altura". La única diferencia es que se sugiere usar un mayor volumen de agua y mayor tiempo de cocción para cocer el arroz a gran altura. ¿Por qué dependen de la altura las instrucciones?

Ejercicios

Sección 18.1 Ecuaciones de estado

18.1. Un tanque de 20.0 L contiene 0.225 kg de helio a 18.0 °C. La masa molar del helio es de 4.00 g/mol. *a*) ¿Cuántos moles de helio hay en el tanque? *b*) Calcule la presión en el tanque en Pa y atm.

18.2. Helio gaseoso con un volumen de 2.60 L, a 1.30 atm de presión y una temperatura de 41.0 °C, se calienta hasta duplicar la presión y el volumen. *a*) Calcule la temperatura final. *b*) ¿Cuántos gramos de helio hay? La masa molar del helio es de 4.00 g/mol.

18.3. Un tanque cilíndrico tiene un pistón ajustado que permite cambiar el volumen del tanque. El tanque contiene originalmente 0.110 m^3 de aire a 3.40 atm de presión. Se tira lentamente del pistón hasta aumentar el volumen del aire a 0.390 m^3. Si la temperatura permanece constante, ¿qué valor final tiene la presión?

18.4. Un tanque de 3.00 L contiene aire a 3.00 atm y 20.0 °C. El tanque se sella y enfría hasta que la presión es de 1.00 atm. *a*) ¿Qué temperatura tiene ahora el gas en grados Celsius? Suponga que el volumen del tanque es constante. *b*) Si la temperatura se mantiene en el valor determinado en el inciso *a*) y el gas se comprime, ¿qué volumen tendrá cuando la presión vuelva a ser de 3.00 atm?

18.5. *a*) Use la ley del gas ideal para estimar el número de moléculas de aire que hay en su laboratorio de física, suponiendo que todo el aire es N_2. *b*) Calcule la densidad de partículas en el laboratorio (es decir, el número de moléculas por centímetro cúbico).

18.6. Imagine que tiene varios globos idénticos y determina experimentalmente que uno de ellos se revienta si su volumen excede 0.900 L. La presión del gas dentro del globo es igual a la atmosférica (1.00 atm). *a*) Si el aire dentro del globo está a una temperatura constante de 22.0 °C y se comporta como gas ideal, ¿qué masa de aire podrá introducir en uno de esos globos sin que reviente? *b*) Repita el inciso *a*) si el gas es helio en vez de aire.

18.7. Un Jaguar XK8 convertible tiene un motor de ocho cilindros. Al principio de su carrera de compresión, uno de los cilindros contiene 499 cm^3 de aire a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa) y temperatura de 27.0 °C. Al final de la carrera, el aire se ha comprimido a un volumen de 46.2 cm^3 y la presión manométrica aumentó a 2.72×10^6 Pa. Calcule la temperatura final.

18.8. Un soldador llena un tanque de 0.0750 m^3 con oxígeno (masa molar = 32.0 g/mol) a una presión manométrica de 3.00×10^5 Pa y una temperatura de 37.0 °C. El tanque tiene una pequeña fuga, y con el tiempo se escapa algo de oxígeno. Cierto día en que la temperatura es de 22.0 °C, la presión manométrica del oxígeno en el tanque es de 1.80×10^5 Pa. Calcule *a*) La masa inicial de oxígeno y *b*) la masa que se fugó.

18.9. Un tanque cilíndrico grande contiene 0.750 m^3 de nitrógeno gaseoso a 27 °C y 1.50×10^5 Pa (presión absoluta). El tanque tiene un pistón ajustado que permite cambiar el volumen. Determine la presión si el volumen se reduce a 0.480 m^3 y la temperatura se aumenta a 157 °C.

18.10. Un recipiente cilíndrico y vacío de 1.50 m de largo y 90.0 cm de diámetro se va a llenar con oxígeno puro a 22.0 °C para almacenarse en una estación espacial. Para guardar tanto como sea posible, la presión absoluta del oxígeno será de 21.0 atm. La masa molar del oxígeno es 32.0 g/mol. *a*) ¿Cuántos moles de oxígeno puede almacenar este recipiente? *b*) Para alguien que levante este recipiente, ¿por cuántos kilogramos aumenta este gas la masa que habrá de ser levantada?

18.11. El gas dentro de un globo siempre tiene una presión casi igual a la presión atmosférica, pues ésta es la presión aplicada al exterior del globo. Un globo se llena con helio (un gas casi ideal) hasta un volumen de 0.600 L a 19.0 °C. ¿Qué volumen tendrá el globo si se le enfría hasta el punto de ebullición del nitrógeno líquido (77.3 K)?

18.12. Desviaciones respecto a la ecuación del gas ideal. Para el dióxido de carbono (CO_2) gaseoso, las constantes de la ecuación de Van der Waals son: $a = 0.364\ \text{J} \cdot \text{m}^3/\text{mol}^2$ y $b = 4.27 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$. *a*) Si 1.00 mol de CO_2 gaseoso a 350 K se confina a un volumen de 400 cm^3, calcule la presión del gas usando la ecuación del gas ideal y la de Van der Waals. *b*) ¿Cuál ecuación da una presión menor? ¿Por qué? ¿Qué porcentaje de diferencia hay entre los dos resultados? *c*) El gas se mantiene a la misma temperatura mientras se expande hasta un volumen de 4000 cm^3. Repita los cálculos de los incisos *a*) y *b*). *d*) Explique por qué estos cálculos demuestran que la ecuación de Van der Waals es equivalente a la del gas ideal si n/V es pequeño.

18.13. El volumen pulmonar total de una estudiante de física es de 6.00 L. Ella llena sus pulmones con aire a una presión absoluta de 1.00 atm y luego, deteniendo la respiración, comprime su cavidad torácica para reducir su volumen pulmonar a 5.70 L. ¿A qué presión está ahora el aire en sus pulmones? Suponga que la temperatura del aire no cambia.

18.14. Un buzo observa una burbuja de aire que sube del fondo de un lago (donde la presión absoluta es de 3.50 atm) a la superficie (donde

es de 1.00 atm). La temperatura en el fondo es de 4.0 °C, y en la superficie, de 23.0 °C. *a*) Calcule la razón entre el volumen de la burbuja al llegar a la superficie y el que tenía en el fondo. *b*) ¿Puede el buzo detener la respiración sin peligro mientras sube del fondo del lago a la superficie? ¿Por qué?

18.15. Un tanque metálico con un volumen de 3.10 L revienta si la presión absoluta del gas que contiene excede 100 atm. *a*) Si 11.0 moles de gas ideal se ponen en el tanque a 23.0 °C, ¿a qué temperatura podrá calentarse el gas antes de que se rompa el tanque? Desprecie la expansión térmica del tanque. *b*) Con base en su respuesta al inciso *a*), ¿es razonable despreciar la expansión térmica del tanque? Explique.

18.16. Tres moles de gas ideal están en una caja cúbica rígida que mide 0.200 m por lado. *a*) ¿Qué fuerza ejerce el gas sobre cada una de las seis caras de la caja cuando su temperatura es de 20.0 °C? *b*) ¿Qué fuerza ejerce si su temperatura se aumenta a 100.0 °C?

18.17. Con los supuestos del ejemplo 18.4 (sección 18.1), ¿a qué altura sobre el nivel del mar la presión del aire es el 90% de la presión en el nivel del mar?

18.18. Considere las mismas suposiciones del ejemplo 18.4 (sección 18.1). Compare la disminución porcentual en la presión del aire al subir del nivel del mar a una elevación de 100 m con la que se observa al subir del nivel del mar a una elevación de 1000 m. Si su segunda respuesta no es 10 veces la primera, explique por qué.

18.19. Con los supuestos del ejemplo 18.4 (sección 18.1), compare la densidad del aire en el nivel del mar con la densidad a una elevación de 100 m.

18.20. Suponiendo que el aire tiene una temperatura uniforme de 0 °C (como en el ejemplo 18.4), ¿cuál es la densidad del aire a una altura de 1.00 km como un porcentaje de la densidad en la superficie?

18.21. A una altura de 11,000 m (altura de crucero de un avión de reacción comercial), la temperatura del aire es de -56.5 °C y su densidad es de 0.364 kg/m^3. Determine la presión de la atmósfera a esa altura. (*Nota:* la temperatura a esta altura no es la misma que en la superficie, así que no puede usarse el cálculo del ejemplo 18.4 de la sección 18.1.)

Sección 18.2 Propiedades moleculares de la materia

18.22. Una molécula orgánica grande tiene una masa de 1.41×10^{-21} kg. Calcule la masa molar de este compuesto.

18.23. Suponga que usted hereda de su tío (un químico excéntrico) 3.00 moles de oro cuando este metal se cotiza a $14.75 por gramo. Consulte la tabla periódica en el Apéndice D y la tabla 14.1. *a*) ¿Cuál es el valor del oro aproximando al dólar más cercano? *b*) Si usted tiene su oro en forma de pepita, ¿cuál será el diámetro de ésta?

18.24. Las bombas de vacío modernas alcanzan fácilmente presiones del orden de 10^{-13} atm en el laboratorio. *a*) A una presión 9.00×10^{-14} atm y una temperatura ordinaria de 300 K, ¿cuántas moléculas hay en un volumen de 1.00 cm^3? *b*) ¿Cuántas moléculas estarían presentes a la misma temperatura pero a un presión de 1.00 atm?

18.25. La nebulosa Laguna (figura 18.28) es una nube de hidrógeno gaseoso que está a 3900 años luz de la Tierra; tiene unos 45 años luz de diámetro y brilla a causa de su elevada temperatura de 7500 K. (El gas alcanza esta temperatura gracias a las estrellas que están dentro de la nebulosa.) La nube es muy poco densa; apenas hay 80 moléculas por cm^3. *a*) Calcule la presión del gas (en atm) en la nebulosa Laguna, y compárela con la presión de laboratorio mencionada en el ejercicio 18.24. *b*) Las películas de ciencia ficción a veces muestran naves que son sacudidas por turbulencia al viajar por nubes de gas como la nebulosa Laguna. ¿Le parece realista eso? ¿Por qué?

Figura 18.28 Ejercicio 18.25.



18.26. En un gas en condiciones estándar, ¿cuánto mide una arista de un cubo que contiene tantas moléculas como personas hay en la Tierra (unas 6×10^9)?

18.27. ¿Cuántos moles hay en un frasco con 1.00 kg de agua? ¿Cuántas moléculas? La masa molar del agua es de 18.0 g/mol.

18.28. ¿Qué tan cerca están las moléculas de gas? Considere un gas ideal a 27 °C y a una presión de 1.00 atm. Para tener una idea de qué tan cerca están estas moléculas entre sí, en promedio, imagine que se encuentran separadas de manera uniforme, cada una en el centro de un pequeño cubo. *a*) ¿Cuál es la longitud de la arista de cada cubo si cubos adyacentes se tocan pero no se traslapan? *b*) ¿Cómo se compara esta distancia con el diámetro de una molécula típica? *c*) ¿Cómo se compara esta separación con la que existe entre los átomos de sólidos, los cuales comúnmente se encuentran a 0.3nm de distancia?

18.29. Considere 5.00 moles de agua líquida. *a*) ¿Qué volumen ocupa esta cantidad de agua? La masa molar del agua es de 18.0 g/mol. *b*) Imagine que las moléculas, en promedio, están separadas de manera uniforme, cada una en el centro de un cubo pequeño. ¿Cuánto mide la arista de cada cubo si los cubos adyacentes se tocan pero no se traslapan? *c*) Compare esta distancia con el diámetro de una molécula.

Sección 18.3 Modelo cinético-molecular del gas ideal

18.30. Un matraz contiene una mezcla de los gases neón (Ne), criptón (Kr) y radón (Rn). Compare *a*) las energías cinéticas medias de los tres tipos de átomos; *b*) la rapidez eficaz de sus moléculas. (*Sugerencia:* la tabla periódica del Apéndice D da la masa molar (en g/mol) de todos los elementos, bajo el símbolo químico correspondiente.)

18.31. Difusión gaseosa del uranio. *a*) A menudo se utiliza un proceso llamado *difusión gaseosa* para separar isótopos de uranio, es decir, átomos del elemento que tienen diferentes masas, como ^{235}U y ^{238}U. El único compuesto de uranio que es gaseoso a temperaturas ordinarias es el hexafluoruro de uranio, UF_6. Especule cómo las moléculas de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ podrían separarse por difusión molecular. *b*) Las masas molares de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ son 0.349 kg/mol y 0.352 kg/mol, respectivamente. Si el hexafluoruro de uranio actúa como gas ideal, determine la razón entre las rapideces eficaces de las moléculas de $^{235}UF_6$ y $^{238}UF_6$ suponiendo que la temperatura es uniforme.

18.32. Las ideas de valor medio y eficaz se pueden aplicar a cualquier distribución. Un grupo de 150 estudiantes obtuvo los siguientes puntajes en un examen de 100 puntos:

Puntaje	Número de estudiantes
10	11
20	12
30	24
40	15
50	19
60	10
70	12
80	20
90	17
100	10

a) Calcule el puntaje medio del grupo. *b*) Calcule el puntaje eficaz del grupo.

18.33. Tenemos dos cajas del mismo tamaño, *A* y *B*. Cada caja contiene gas que se comporta como gas ideal. Insertamos un termómetro en cada caja y vemos que el gas de la caja *A* está a 50 °C, mientras que el de la caja *B* está a 10 °C. Esto es todo lo que sabemos acerca del gas contenido en las cajas. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones *deben* ser verdad? ¿Cuáles *podrían* ser verdad? *a*) La presión en *A* es mayor que en *B*. *b*) Hay más moléculas en *A* que en *B*. *c*) *A* y *B* no pueden contener el mismo tipo de gas. *d*) Las moléculas en *A* tienen en promedio más energía cinética por molécula que las de *B*. *e*) Las moléculas en *A* se mueven con mayor rapidez que las de *B*. Explique en qué basó sus respuestas.

18.34. TPE. Las condiciones de temperatura y presión estándar (TPE) son una temperatura de 0.00 °C y una presión de 1.00 atm. *a*) ¿Cuántos litros ocupa 1.00 mol de cualquier gas ideal a TPE? *b*) Para un científico en Venus, una presión absoluta de 1 atmósfera venusina equivale a 92 atmósferas terrestres. Desde luego, el científico utilizaría la atmósfera de Venus para definir TPE. Suponiendo que se mantiene la misma temperatura, ¿cuántos litros ocuparía un mol de gas ideal en Venus?

18.35. *a*) Un deuterón, ${}^{2}_{1}H$, es el núcleo de un isótopo de hidrógeno y consiste en un protón y un neutrón. El plasma de deuterones en un reactor de fusión nuclear debe calentarse a cerca de 300 millones de kelvin. Calcule la rapidez eficaz de los deuterones. ¿Es una fracción apreciable de la rapidez de la luz ($c = 3.0 \times 10^8$ m/s)? *b*) ¿Qué temperatura tendría el plasma si la rapidez eficaz de los deuterones fuera igual a 0.10c?

18.36. Clima en Marte. La atmósfera de Marte está constituida en su mayor parte por CO_2 (masa molar de 44.0 g/mol) bajo una presión de 650 Pa, y supondremos que se mantiene constante. En muchos lugares la temperatura varía de 0.0 °C en el verano a −100 °C en el invierno. En el transcurso de un año de Marte, ¿cuáles son los intervalos *a*) de rapidez eficaz de las moléculas de CO_2 y *b*) de la densidad (en moles/m^3) de la atmósfera?

18.37. *a*) El oxígeno (O_2) tiene una masa molar de 32.0 g/mol. Calcule la energía cinética de traslación media de una molécula de oxígeno a 300 K. *b*) Calcule el valor medio del cuadrado de su rapidez. *c*) Calcule su rapidez eficaz. *d*) Calcule la cantidad de movimiento de una molécula de oxígeno que viaja con esta rapidez. *e*) Suponga que una molécula de oxígeno que viaja con esta rapidez rebota entre los costados opuestos de un recipiente cúbico de 0.10 m por lado. ¿Qué fuerza media ejerce sobre cada una de las paredes del recipiente? (Suponga que la velocidad de la molécula es perpendicular a los dos costados que golpea.) *f*) Calcule la fuerza media por unidad de área. *g*) ¿Cuántas moléculas de oxígeno con esta rapidez se necesitan para producir una presión media de 1 atm? *h*) Calcule el número de moléculas de oxígeno contenidas realmente en un recipiente de este tamaño a 300 K y presión atmosférica. *i*) Su respuesta al inciso *h*) deberá ser 3 veces mayor que su respuesta en *g*). ¿Cuál es el origen de esta discrepancia?

18.38. Calcule la trayectoria libre media de las moléculas de aire a una presión de 3.50×10^{-13} atm y una temperatura de 300 K. (Esta presión se puede obtener fácilmente en el laboratorio; véase el ejercicio 18.24.) Al igual que en el ejemplo 18.8, modele las moléculas de aire como esferas con radio de 2.0×10^{-10} m.

18.39. ¿A qué temperatura es la rapidez eficaz de las moléculas de nitrógeno igual a la de las moléculas de hidrógeno a 20.0 °C? (*Sugerencia:* la tabla periódica del Apéndice D indica la masa molar (en g/mol) de todos los elementos, bajo el símbolo químico correspondiente. La masa molar del H_2 es dos veces la de un átomo de hidrógeno; algo análogo sucede con el N_2.)

18.40. Las partículas de humo en el aire suelen tener masas del orden de 10^{-16} kg. El movimiento browniano (rápido e irregular) de estas partículas, resultado de choques con las moléculas de aire, se puede observar al microscopio. *a*) Calcule la rapidez eficaz en movimiento browniano de una partícula con una masa de 3.00×10^{-16} kg en aire a 300 K. *b*) ¿Sería diferente esa rapidez si la partícula estuviera en hidrógeno gaseoso a la misma temperatura? Explique.

Sección 18.4 Capacidades caloríficas

18.41. *a*) ¿Cuánto calor se requiere para aumentar la temperatura de 2.50 moles de un gas diatómico ideal en 30.0 K cerca de la temperatura ambiente si el gas se mantiene a volumen constante? *b*) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta del inciso *a*) si el gas es monoatómico en vez de diatómico?

18.42. Recipientes perfectamente rígidos contienen cada uno *n* moles de gas ideal: uno de ellos es hidrógeno (H_2) y el otro es neón (Ne). Si se requieren 100 J de calor para aumentar la temperatura del hidrógeno en 2.50 °C, ¿en cuántos grados elevará la misma cantidad de calor la temperatura del neón?

18.43. *a*) Calcule la capacidad calorífica específica a volumen constante del nitrógeno gaseoso (N_2) y compárela con la del agua líquida. La masa molar del N_2 es 28.0 g/mol. *b*) Se calienta 1.00 kg de agua, con volumen constante de 1.00 L, de 20.0 °C a 30.0 °C en una tetera. Con la misma cantidad de calor, ¿cuántos kilogramos de aire a 20.0 °C se podrían calentar a 30.0 °C? ¿Qué volumen (en litros) ocuparía ese aire a 20.0 °C y 1.00 atm de presión? Suponga, para simplificar, que el aire es 100% N_2.

18.44. *a*) Calcule la capacidad calorífica específica a volumen constante del vapor de agua, suponiendo que la molécula triatómica no lineal tiene tres grados de libertad de traslación y tres rotacionales y que el movimiento vibracional no contribuye. La masa molar del agua es 18.0 g/mol. *b*) La capacidad calorífica real del vapor de agua a baja presión es de cerca de 2000 J/kg · K. Compare esto con su cálculo y comente el papel real del movimiento vibracional.

18.45. *a*) Utilice la ecuación 18.28 para calcular la capacidad calorífica a volumen constante del aluminio en unidades de J/kg · K. Consulte la tabla periódica en el Apéndice D. *b*) Compare la respuesta en el inciso *a*) con el valor que se da en la tabla 17.3. Trate de explicar cualquier discordancia entre estos dos valores.

*Sección 18.5 Rapideces moleculares

***18.46.** Para nitrógeno gaseoso (N_2), ¿cuál debe ser la temperatura si la rapidez del 94.7% de las moléculas es menor que *a*) 1500 m/s; *b*) 1000 m/s; *c*) 500 m/s? Use la tabla 18.2. La masa molar del N_2 es 28.0 g/mol.

***18.47.** Deduzca la ecuación (18.33) a partir de la ecuación (18.32).
***18.48.** Demuestre que $f(v)$, dada por la ecuación (18.33), es máxima con $\epsilon = kT$. Use este resultado para obtener la ecuación (18.34).
***18.49.** Para dióxido de carbono diatómico gaseoso (CO_2, masa molar $= 44.0$ g/mol) a $T = 300$ K, calcule *a*) la rapidez más probable v_{mp}; *b*) la rapidez media v_{med}; *c*) la rapidez eficaz v_{rms}.

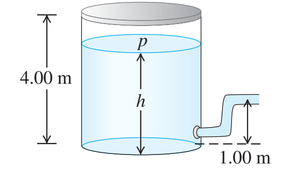
Sección 18.6 Fases de la materia

18.50. Las abullonadas nubes cúmulo, compuestas por gotitas de agua, se forman a baja altura en la atmósfera. Las tenues nubes cirrus, compuestas por cristales de hielo, se forman a mayor altura. Determine la altura y (medida con respecto al nivel del mar) por arriba de la cual sólo puede haber nubes cirrus. En un día típico y a alturas de menos de 11 km, la temperatura a una altura y está dada por $T = T_0 - \alpha y$, donde $T_0 = 15.0$ °C y $\alpha = 6.0$ C°/1000 m.
18.51. Se calienta agua sólida (hielo) desde una temperatura muy baja. *a*) ¿Qué presión externa mínima p_1 debe aplicársele para observar una transición de fase de fusión? Describa la sucesión de transiciones de fase que se da si la presión aplicada p es tal que $p < p_1$. *b*) Por arriba de cierta presión máxima p_2, no se observa transición de ebullición. Determine esta presión. Describa la sucesión de transiciones de fase que se presenta si $p_1 < p < p_2$.
18.52. Un físico coloca un trozo de hielo a 0.00 °C y un vaso de agua a 0.00 °C dentro de una caja de vidrio, cierra la tapa y extrae todo el aire de la caja. Si el hielo, agua y recipiente se mantienen a 0.00 °C, describa el estado de equilibrio final dentro de la caja.
18.53. La atmósfera de Marte es de 95.3% dióxido de carbono (CO_2) y cerca del 0.03% vapor de agua. La presión atmosférica es de sólo 600 Pa, y la temperatura superficial varía entre -30 °C y -100 °C. Los casquetes de hielo polar contienen CO_2 sólido y agua sólida. ¿Podría haber CO_2 *líquido* en la superficie de Marte? ¿Y agua líquida? ¿Por qué?

Problemas

18.54. *a*) Use la ecuación (18.1) para estimar el cambio de volumen de una esfera sólida de acero cuyo volumen inicial es de 11 L, después de que la temperatura y la presión se aumentan de 21 °C y 1.013×10^5 Pa a 42 °C y 2.10×10^7 Pa. (*Sugerencia:* consulte los capítulos 11 y 17 para determinar los valores de β y k.) *b*) En el ejemplo 18.3 se despreció el cambio de volumen de un tanque de 11 L para buceo. ¿Se justifica esa aproximación? Explique.
18.55. Un cilindro de 1.00 m de altura con diámetro interior de 0.120 m contiene gas propano (masa molar, 44.1 g/mol) que se usará en una parrillada. Inicialmente, el tanque se llena hasta que la presión manométrica es de 1.30×10^6 Pa y la temperatura es 22.0 °C. La temperatura del gas se mantiene constante mientras el tanque se vacía parcialmente hasta que la presión manométrica es de 2.50×10^5 Pa. Calcule la masa de propano que se gastó.
18.56. Durante una inmersión de prueba en 1939 antes de ser aceptado por la armada de Estados Unidos, el submarino *Squalus* se hundió en un punto donde la profundidad del agua era de 73.0 m. La temperatura en la superficie era de 27.0 °C, y en el fondo, 7.0 °C. La densidad del agua de mar es de 1030 kg/m^3. *a*) Se usó una campana de inmersión con forma de cilindro circular de 2.30 m de altura, abierto abajo y cerrado arriba, para rescatar a 33 tripulantes atrapados en el *Squalus*. Al bajar la campana al fondo, ¿a qué altura subió el agua dentro de la campana? (*Sugerencia:* puede despreciarse la relativamente pequeña variación en la presión del agua entre el fondo de la campana y la superficie del agua dentro de la campana.) *b*) ¿Con qué presión manométrica debió haberse suministrado aire comprimido a la campana en el fondo para expulsar de ella toda el agua?
18.57. Atmósfera de Titán. Titán, el satélite más grande de Saturno, tiene una gruesa atmósfera de nitrógeno. En su superficie, la presión es de 1.5 atmósferas terrestres y la temperatura es de 94 K. *a*) ¿Cuál es la temperatura de la superficie en °C? *b*) Calcule la densidad de la superficie en la atmósfera de Titán en moléculas por metro cúbico. *c*) Compare la densidad de la atmósfera superficial de Titán con la densidad de la atmósfera de la Tierra a 22 °C. ¿Cuál de ellos tiene la atmósfera más densa?
18.58. Presión en Venus. En la superficie de Venus la temperatura media es de 460 °C como resultado del efecto de invernadero (¡calentamiento global!), la presión es de 92 atmósferas terrestres y la aceleración debida a la gravedad es de 0.894 g_{Tierra}. La atmósfera es casi toda CO_2 (masa molar, 44.0 g/mol) y la temperatura permanece notablemente constante. Supondremos que la temperatura no cambia en lo absoluto con la altitud. *a*) ¿Cuál es la presión atmosférica 1.00 km arriba de la superficie de Venus? Exprese su respuesta en atmósferas de Venus y en atmósferas de la Tierra. *b*) ¿Cuál es la rapidez eficaz de las moléculas de CO_2 en la superficie de Venus y a una altura de 1.00 km?
18.59. Un neumático de automóvil tiene un volumen de 0.0150 m^3 en un día frío cuando la temperatura del aire en el neumático es de 5.0 °C y la presión atmosférica es de 1.02 atm. En estas condiciones, la presión manométrica en el neumático es de 1.70 atm. Después de 30 min de viajar en carretera, la temperatura del aire en los neumáticos ha aumentado a 45.0 °C, y el volumen a 0.0159 m^3. Determine la presión manométrica ahora.
18.60. Un matraz de 1.50 L, provisto de una llave de paso, contiene etano gaseoso (C_2H_6) a 300 K y presión atmosférica (1.013×10^5 Pa). La masa molar del etano es de 30.1 g/mol. El sistema se calienta a 380 K, con la llave abierta a la atmósfera. Luego se cierra la llave y el matraz se enfría a su temperatura original. *a*) Calcule la presión final del etano en el matraz. *b*) ¿Cuántos gramos de etano quedan en el matraz?
18.61. Un globo con un volumen de 750 m^3 se va a llenar con hidrógeno a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa). *a*) Si el hidrógeno se guarda en cilindros de 1.90 m^3 a una presión manométrica de 1.20×10^6 Pa, ¿cuántos cilindros se necesitarán? Suponga que la temperatura del hidrógeno se mantiene constante. *b*) ¿Qué peso total (además del peso del gas) puede sostener el globo si el gas y el aire circundante están a 15.0 °C? La masa molar del hidrógeno (H_2) es de 2.02 g/mol. La densidad del aire a 15.0 °C y la presión atmosférica es de 1.23 kg/m^3. Repase la explicación de la flotación del capítulo 14. *c*) ¿Qué peso se podría sostener si el globo se llenara con helio (masa molar de 4.00 g/mol) en vez de hidrógeno, también a 15.0 °C?
18.62. Un tanque cilíndrico vertical contiene 1.80 moles de un gas ideal a una presión de 1.00 atm y a 20.0 °C. La parte circular del tanque tiene un radio de 10.0 cm y el gas tiene un pistón que puede moverse sin fricción hacia arriba y hacia abajo en el cilindro. *a*) ¿Cuál es la masa de este pistón? *b*) ¿Qué altura tiene la columna de gas que sostiene el pistón?
18.63. Un tanque grande de agua tiene una manguera conectada como se ilustra en la figura 18.29. El tanque está sellado por arriba y tiene aire comprimido entre la superficie del agua y la tapa. Cuando la altura del agua h es de 3.50 m, la presión absoluta p del aire comprimido es de 4.20×10^5 Pa. Suponga que ese aire se expande a

Figura 18.29 Problema 18.63.



temperatura constante, y considere que la presión atmosférica es 1.00×10^5 Pa. *a*) ¿Con qué rapidez sale agua por la manguera cuando $h = 3.50$ m? *b*) Al salir agua del tanque, h disminuye. Calcule la rapidez de flujo para $h = 3.00$ m y $h = 2.00$ m. *c*) ¿En qué valor de h se detiene el flujo?

18.64. En una hora, una persona en reposo consume 0.50 L de oxígeno a 1.00 atm y 20.0 °C. El aire inhalado es 21.0% oxígeno. *a*) ¿Cuántas moléculas de oxígeno consume esta persona con cada inhalación? *b*) Suponga que esta persona ahora está descansando a una altura de 2.000 m, pero la temperatura sigue siendo de 20.0 °C. Suponiendo que el porcentaje de oxígeno y el volumen por inhalación son los mismos que los que se mencionaron antes, ¿cuántas moléculas de oxígeno consume ahora esta persona con cada inhalación? *c*) Si el cuerpo aún requiere el mismo número de moléculas de oxígeno por segundo que a nivel del mar para mantener sus funciones, explique por qué algunas personas reportan que "les falta aire" a grandes alturas.

18.65. ¿Cuántos átomos tenemos? Estime el número de átomos que hay en el cuerpo de una estudiante de física de 50 kg. Considere que el cuerpo humano es en su mayor parte agua ($M = 18.0$ g/mol) y que cada molécula de agua contiene tres átomos.

18.66. El tamaño de una molécula de oxígeno es del orden de 2.0×10^{-10} m. Haga un estimado de la presión a la que el volumen finito de las moléculas deberá causar desviaciones apreciables con respecto al comportamiento de gas ideal a temperaturas ordinarias ($T = 300$ K).

18.67. Usted tiene dos recipientes idénticos, uno contiene el gas A y el otro contiene el gas B. Las masas de estas moléculas son $m_A = 3.34 \times 10^{-27}$ kg y $m_B = 5.34 \times 10^{-26}$ kg. Ambos gases están a la misma presión y a 10.0 °C. *a*) ¿Cuáles moléculas (A o B) tienen la mayor energía cinética de traslación por molécula y la mayor rapidez eficaz? Ahora usted desea elevar la temperatura de sólo uno de esos recipientes de manera que ambos gases tengan la misma rapidez eficaz. *b*) ¿De cuál gas elevaría la temperatura? *c*) ¿A qué temperatura logrará su cometido? *d*) Una vez que haya logrado su meta, ¿qué moléculas (A o B) tienen ahora la mayor energía cinética de traslación media por molécula?

18.68. Colisiones de insectos. Una jaula cúbica de 1.25 m por lado contiene 2500 abejas furiosas; cada una vuela aleatoriamente a 1.10 m/s. Podemos modelar estos insectos como esferas de 1.50 cm de diámetro. En promedio, *a*) ¿qué distancia viaja entre choques una abeja representativa? *b*) ¿Cuál es el tiempo medio entre choques? *c*) ¿Cuántos choques por segundo tiene una abeja?

18.69. Aproximaciones sucesivas y la ecuación de Van der Waals. En la ecuación del gas ideal, el número de moles por volumen n/V es igual a p/RT. En la ecuación de Van der Waals, despejar n/V en términos de p y T es un tanto más complicado. *a*) Demuestre que la ecuación de Van der Waals puede escribirse como

$$\frac{n}{V} = \left(\frac{p + an^2/V^2}{RT}\right)\left(1 - \frac{bn}{V}\right)$$

b) Los parámetros de Van der Waals para el sulfuro de hidrógeno gaseoso (H_2S) son $a = 0.448 \text{ J} \cdot \text{m}^3/\text{mol}^2$ y $b = 4.29 \times 10^{-5} \text{ m}^3/\text{mol}$. Determine el número de moles por volumen de H_2S gaseoso a 127 °C y una presión absoluta de 9.80×10^5 Pa como sigue: i) Calcule una primera aproximación usando la ecuación del gas ideal $n/V = p/RT$. ii) Sustituya esta aproximación en el miembro derecho de la ecuación del inciso *a*). El resultado es una aproximación mejorada de n/V. iii) Sustituya la nueva aproximación en el miembro derecho de la ecuación del inciso *a*). El resultado es una aproximación todavía mejor de n/V. iv) Repita el paso iii) hasta que aproximaciones sucesivas coincidan con el nivel de precisión deseado (en este caso, tres cifras significativas). *c*) Compare su resultado final del inciso *b*) con el valor de p/RT obtenido usando la ecuación del gas ideal. ¿Qué resultado da un valor mayor de n/V? ¿Por qué?

18.70. Gas en Europa. Un recipiente de 1.20 moles de nitrógeno gaseoso (28.0 g/mol) a 25.0 °C se deja en un satélite de Júpiter después de completar una misión espacial. Europa no tiene atmósfera apreciable y la aceleración debida a la gravedad en su superficie es 1.30 m/s². Después de algún tiempo, el recipiente presenta una pequeña fuga, lo que permite que moléculas escapen a través del pequeño agujero. ¿Cuál es la altura máxima (en km) por encima de la superficie de Europa que alcanzará una molécula de N_2 que tiene rapidez igual a la rapidez eficaz si se dispara hacia arriba en línea recta por el orificio del recipiente? Ignore la variación en g con la altura.

18.71. Usted infla un globo esférico hasta que alcance un diámetro de 50.0 cm y la presión absoluta en su interior sea de 1.25 atm y la temperatura de 22.0 °C. Suponga que todo el gas es N_2 con masa molar de 28.0 g/mol. *a*) Calcule la masa de una sola molécula de N_2. *b*) ¿Cuánta energía cinética de traslación tiene una molécula promedio de N_2? *c*) ¿Cuántas moléculas de N_2 hay en el globo? *d*) ¿Cuál es la energía cinética de traslación *total* de las moléculas en el globo?

18.72. *a*) Calcule el aumento de energía potencial gravitacional de una molécula de nitrógeno (masa molar, 28.0 g/mol) para un aumento de elevación de 400 m cerca de la superficie terrestre. *b*) ¿Con qué aumento de temperatura obtendremos la misma energía cinética media de una molécula de nitrógeno en ese cambio de altura? *c*) ¿Es posible que una molécula de nitrógeno cerca del nivel del mar, donde $T = 15.0$ °C, suba a 400 m? ¿Es probable que lo haga sin chocar con otras moléculas en el camino? Explique.

18.73. El potencial Lennard-Jones. Una función de energía potencial de uso común para la interacción de dos moléculas (véase la figura 18.8) es el potencial Lennard-Jones 6-12

$$U(r) = U_0\left[\left(\frac{R_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{R_0}{r}\right)^6\right]$$

donde r es la distancia entre los centros de las moléculas y U_0 y R_0 son constantes positivas. La fuerza $F(r)$ que corresponde a este potencial está dada por la ecuación (13.26). *a*) Grafique $U(r)$ y $F(r)$ contra r. *b*) Sea r_1 el valor de r en el que $U(r) = 0$, y sea r_2 el valor de r en el que $F(r) = 0$. Indique la ubicación de r, y r_2 en sus gráficas. ¿Cuál de ellos representa la separación de equilibrio entre las moléculas? *c*) Determine los valores de r_1 y r_2 en términos de R_0. Además, determine la relación r_1/r_2. *d*) Si las moléculas están separadas una distancia r_2 [según el cálculo del inciso *c*)], ¿cuánto trabajo debe efectuarse para separarlas de manera que $r \to \infty$?

18.74. *a*) Calcule la energía cinética de traslación aleatoria total de 5.00 L de hidrógeno gaseoso (masa molar, 2.016 g/mol) a una presión de 1.01×10^5 Pa y temperatura de 300 K. (*Sugerencia:* utilice el procedimiento del problema 18.71 como guía.) *b*) Si el tanque que contiene el gas se coloca en un rápido avión que se desplaza a 300.0 m/s, ¿en qué porcentaje aumenta la energía cinética *total* del gas? *c*) Como la energía cinética de las moléculas de gas es mayor cuando éste se encuentra en el avión, ¿significa esto que su temperatura aumentó? Explique.

18.75. La rapidez de propagación de una onda de sonido en aire a 27 °C es de 350 m/s. Para comparar, calcule *a*) v_{rms} para las moléculas de nitrógeno y *b*) el valor eficaz de v_x a esta temperatura. La masa molar del nitrógeno (N_2) es 28.0 g/mol.

18.76. Hidrógeno en el Sol. La superficie del Sol está aproximadamente a 5800 K y consiste principalmente en átomos de hidrógeno. *a*) Calcule la rapidez eficaz de un átomo de hidrógeno a esta temperatura. (La masa de un átomo de hidrógeno es de 1.67×10^{-27} kg.) *b*) La rapidez de escape para que una partícula salga de la influencia gravitacional del Sol está dada por $(2GM/R)^{1/2}$, donde M es la masa del Sol, R es su radio y G es la constante gravitacional (véase el ejemplo 12.5, sección 12.3). Use los datos del Apéndice F para calcular esta rapidez de escape. *c*) ¿Pueden escapar cantidades apreciables de hidrógeno del Sol? ¿Puede escapar algo de hidrógeno? Explique.

18.77. *a*) Demuestre que un proyectil con masa m puede "escapar" de la superficie de un planeta si se lanza verticalmente hacia arriba con una energía cinética mayor que mgR_p, donde g es la aceleración debida a la gravedad en la superficie del planeta y R_p es el radio del planeta. Ignore la resistencia del aire. (Véase el problema 18.76.) *b*) Si el planeta en cuestión es la Tierra, ¿a qué temperatura la energía cinética de traslación media de una molécula de nitrógeno (masa molar, 28.0 g/mol) es igual a la requerida para escapar? ¿Y de una molécula de hidrógeno (masa molar, 2.02 g/mol)? *c*) Repita el inciso *b*) para la Luna ($g = 1.63$ m/s^2 y $R_p = 1740$ km). *d*) Aunque la Tierra y la Luna tienen temperaturas superficiales medias similares, la Luna prácticamente no tiene atmósfera. Use sus resultados de los incisos *b*) y *c*) para explicar esto.

18.78. Atmósferas planetarias. *a*) La temperatura en la parte superior de la capa de nubes multicolores de Júpiter es de cerca de 140 K. La temperatura en la parte superior de la troposfera de la Tierra, a una altura aproximada de 20 km, es de cerca de 220 K. Calcule la rapidez eficaz de las moléculas de hidrógeno en ambos entornos. Dé sus respuestas en m/s y como una fracción de la rapidez de escape del planeta respectivo (véase el problema 18.76.) *b*) El hidrógeno gaseoso (H_2) es poco común en la atmósfera terrestre; en cambio, en la atmósfera de Júpiter, el 89% de las moléculas es H_2. Explique por qué, usando sus resultados del inciso *a*). *c*) Suponga que un astrónomo afirma haber descubierto una atmósfera de oxígeno (O_2) en el asteroide Ceres. ¿Es creíble esto? Ceres tiene una masa igual a 0.014 veces la de la Luna, una densidad de 2400 kg/m^3 y una temperatura superficial de cerca de 200 K.

18.79. *a*) ¿Para qué masa de molécula o partícula es v_{rms} igual a 1.00 mm/s a 300 K? *b*) Si la partícula es un cristal de hielo, ¿cuántas moléculas contiene? La masa molar del agua es 18.0 g/mol. *c*) Calcule el diámetro de la partícula si es un trozo esférico de hielo. ¿Sería visible a simple vista?

18.80. Al describir las capacidades caloríficas de los sólidos en la sección 18.4, dijimos que la energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$ de un oscilador armónico promediada durante un periodo del movimiento es igual a la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ promediada durante un periodo. Demuestre este resultado, usando las ecuaciones (13.13) y (13.15) para la posición y la velocidad de un oscilador armónico simple. Por sencillez, suponga que la posición y velocidad iniciales hacen que el ángulo de fase ϕ sea cero. (*Sugerencia:* use las identidades trigonométricas $\cos^2(\theta) = [1 + \cos(2\theta)]/2$ y $\mathrm{sen}^2(\theta) = (1 - \cos(2\theta))/2$. ¿Qué valor medio tiene $\cos(2\omega t)$ promediado durante un periodo?)

18.81. Es posible crear sólidos cristalinos con un espesor de una sola capa de átomos. Tales cristales "bidimensionales" se crean depositando átomos en una superficie muy plana. *a*) Si los átomos de un cristal bidimensional sólo pueden moverse dentro del plano del cristal, ¿qué capacidad calorífica molar tendrán a temperatura ambiente? Dé su respuesta como múltiplo de R y en J/mol · K. *b*) A muy bajas temperaturas, ¿la capacidad calorífica molar de un cristal bidimensional será mayor, menor o igual que el resultado obtenido en el inciso *a*)? Explique por qué.

18.82. *a*) Calcule la energía cinética *rotacional* total de las moléculas de 1.00 mol de un gas diatómico a 300 K. *b*) Calcule el momento de inercia de una molécula de oxígeno (O_2) para rotación sobre el eje y o el eje z de la figura 18.18. Trate la molécula como dos puntos masivos (que representan los átomos de oxígeno) separados una distancia de 1.21×10^{-10} m. La masa molar de los *átomos* de oxígeno es de 16.0 g/mol. *c*) Calcule la velocidad angular eficaz de rotación de una molécula de oxígeno alrededor del eje y o del eje z de la figura 18.15. Compare su respuesta con la velocidad angular de un componente giratorio típico de una máquina (10,000 rpm).

18.83. Para cada uno de los gases poliatómicos de la tabla 18.1, calcule el valor de la capacidad calorífica molar a volumen constante, C_V, suponiendo que no hay energía vibracional. Compare sus resultados con los valores medidos que se dan en la tabla y calcule la fracción de la capacidad calorífica total que se debe a la vibración para cada uno de los tres gases. (*Nota:* CO_2 es lineal, SO_2 y H_2S no lo son. Recuerde que una molécula poliatómica lineal tiene dos grados de libertad rotacionales, y una molécula no lineal tiene tres.)

***18.84.** *a*) Demuestre que $\int_0^\infty f(v)\,dv = 1$, donde $f(v)$ es la distribución de Maxwell-Boltzmann de la ecuación (18.32). *b*) En términos de la definición física de $f(v)$, explique por qué la integral del inciso *a*) *debe* tener ese valor.

***18.85.** Calcule la integral de la ecuación (18.31), $\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv$ y compare este resultado con $(v^2)_{med}$ dada por la ecuación (18.16). (*Sugerencia:* puede usar la integral tabulada

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1}\alpha^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

donde n es un entero positivo y α es una constante positiva.)

***18.86.** Calcule la integral de la ecuación (18.30), $\int_0^\infty v f(v)\,dv$, y compare su resultado con v_{med} dada por la ecuación (18.35). (*Sugerencia:* haga el cambio de variable $v^2 = x$ y use la integral tabulada

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

donde n es un entero positivo y α es una constante positiva.)

***18.87.** *a*) Explique por qué en un gas de N moléculas el número de moléculas cuya rapidez está en el intervalo *finito* de v a $v + \Delta v$ es $\Delta N = N\int_v^{v+\Delta v} f(v)\,dv$. *b*) Si Δv es pequeño, $f(v)$ es aproximadamente constante en el intervalo, y $\Delta N \approx Nf(v)\,\Delta v$. Para oxígeno gaseoso ($O_2$, masa molar = 32.0 g/mol) a $T = 300$ K, use esta aproximación para calcular el número de moléculas cuya rapidez está a $\Delta v = 20$ m/s o menos de v_{mp}. Exprese su respuesta como múltiplo de N. *c*) Repita el inciso *b*) para velocidades dentro de $\Delta v = 20$ m/s o menos de $7v_{mp}$. *d*) Repita los incisos *b*) y *c*) para una temperatura de 600 K. *e*) Repita los incisos *b*) y *c*) para una temperatura de 150 K. *f*) ¿Qué le dicen estos resultados acerca de la forma de la distribución en función de la temperatura? ¿Concuerdan sus conclusiones con lo que se muestra en la figura 18.26?

18.88. Meteorología. La *presión de vapor* es la presión de la fase de vapor de una sustancia cuando está en equilibrio con la fase sólida o líquida de la sustancia. La *humedad relativa* es la presión parcial del vapor de agua en el aire dividida entre la presión de vapor del agua a esa misma temperatura, expresado como porcentaje. El aire está saturado cuando la humedad es del 100%. *a*) La presión de vapor del agua a 20.0 °C es de 2.34×10^3 Pa. Si la temperatura del aire es de 20.0 °C y la humedad relativa es de 60%, determine la presión parcial del vapor de agua en la atmósfera (esto es, la presión debida exclusivamente al vapor de agua). *b*) En las condiciones del inciso *a*), ¿qué masa de agua

hay en 1.00 m^3 de aire? (La masa molar del agua es de 18.0 g/mol. Suponga que el vapor de agua puede tratarse como gas ideal.)

18.89. El punto de rocío. La presión de vapor del agua (véase el problema 18.88) disminuye al bajar la temperatura. Si se mantiene constante la cantidad de vapor de agua en el aire mientras se enfría éste, se llega a una temperatura, llamada *punto de rocío*, en la que la presión parcial y la presión de vapor coinciden y el vapor está saturado. Si el aire se enfría más, se condensará vapor a líquido hasta que la presión parcial otra vez sea igual a la presión de vapor a esa temperatura. La temperatura en un cuarto es de 30.0 °C. Un meteorólogo enfría una lata metálica agregándole gradualmente agua fría. Cuando la temperatura de la lata llega a 16.0 °C, se forman gotas de agua en la superficie exterior de la lata. Calcule la humedad relativa del aire del cuarto a 30.0 °C. La siguiente tabla indica la presión de vapor del agua a diversas temperaturas:

Temperatura (°C)	Presión de vapor (Pa)
10.0	1.23×10^3
12.0	1.40×10^3
14.0	1.60×10^3
16.0	1.81×10^3
18.0	2.06×10^3
20.0	2.34×10^3
22.0	2.65×10^3
24.0	2.99×10^3
26.0	3.36×10^3
28.0	3.78×10^3
30.0	4.25×10^3

18.90. Altura a la que se forman nubes. En un día primaveral en el Medio Oeste de Estados Unidos, la temperatura del aire en la superficie es de 28.0 °C. Se forman abullonadas nubes cúmulo a una altura en la que la temperatura del aire es igual al punto de rocío (véase el problema 18.89). Si la temperatura del aire disminuye al aumentar la altura, a razón de 0.6 C°/100 m, ¿a qué altura sobre el suelo se formarán las nubes si la humedad relativa en la superficie es de 35 y 80%? (*Sugerencia:* use la tabla del problema 18.89.)

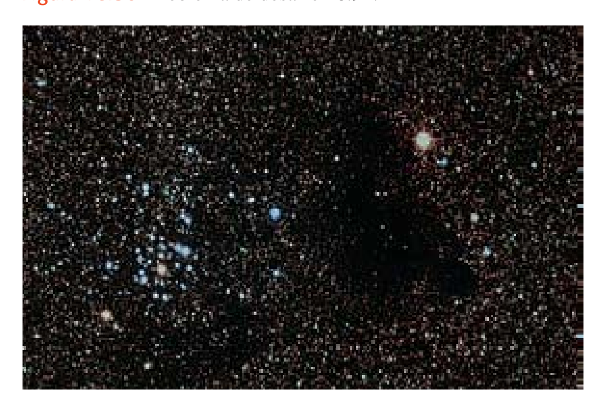
Problemas de desafío

18.91. Nebulosas oscuras y el medio interestelar. El área oscura de la figura 18.30 en la que parece no haber estrellas es una *nebulosa oscura*, una nube de gas frío en el espacio interestelar que contiene suficiente material para tapar la luz de las estrellas que están detrás. Una nebulosa oscura típica tiene un diámetro del orden de 20 años luz y contiene unos 50 átomos de hidrógeno por cm^3 (hidrógeno monoatómico, *no* H_2) a una temperatura cercana a 20 K. (Un año luz es la distancia que la luz viaja en el vacío en un año y es igual a 9.46×10^{15} m.) *a*) Estime la trayectoria libre media de un átomo de hidrógeno en una nebulosa oscura. El radio de un átomo de hidrógeno es de 5.0×10^{-11} m. *b*) Estime la rapidez eficaz de un átomo de hidrógeno y el tiempo libre medio (el tiempo medio entre choques para un átomo dado). Con base en este resultado, ¿cree que los choques atómicos, como los que dan pie a la formación de moléculas de H_2, son muy importantes para determinar la composición de la nebulosa? *c*) Estime la presión dentro de una nebulosa oscura. *d*) Compare la rapidez eficaz de un átomo de hidrógeno con la rapidez de escape en la superficie de la nebulosa (si se supone esférica). Si el espacio que rodea a la nebulosa estuviera vacío, ¿sería estable una nube así, o tendería a evaporarse? *e*) La estabilidad de las nebulosas oscuras se explica por la presencia de *medio interestelar* (MIE), un gas menos denso aún que permea el espacio y en el que están incrustadas las nebulosas oscuras. Demuestre que, para que las nebulosas oscuras estén en equilibrio con el MIE, el número de átomos por volumen N/V y la temperatura T de las nebulosas oscuras y el MIE deben estar relacionados por

$$\frac{(N/V)_{\text{nebulosa}}}{(N/V)_{\text{MIE}}} = \frac{T_{\text{MIE}}}{T_{\text{nebulosa}}}$$

f) En las cercanías del Sol, el MIE contiene cerca de 1 átomo de hidrógeno en 200 cm^3. Estime la temperatura del MIE en las cercanías del Sol, y compárela con la temperatura de la superficie solar cuyo valor es cercano a 5800 K. ¿Se quemaría una nave moviéndose con rapidez constante en el espacio interestelar? ¿Por qué?

Figura 18.30 Problema de desafío 18.91.



18.92. Atmósfera de la Tierra. En la *troposfera*, la parte de la atmósfera que se extiende desde la superficie hasta una altura aproximada de 11 km, la temperatura no es uniforme, sino que disminuye al aumentar la altura. *a*) Demuestre que si la variación de temperatura se aproxima con la relación lineal

$$T = T_0 - \alpha y$$

donde T_0 es la temperatura en la superficie terrestre y T es la temperatura a una altura y, la presión p a la altura y está dada por

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{Mg}{R\alpha}\ln\left(\frac{T_0 - \alpha y}{T_0}\right)$$

donde p_0 es la presión en la superficie terrestre y M es la masa molar del aire. El coeficiente α se denomina razón de decaimiento de temperatura, y varía con las condiciones atmosféricas; un valor medio sería 0.6 C°/100 m. *b*) Demuestre que el resultado anterior se reduce al resultado del ejemplo 18.4 (sección 18.1) en el límite en el que $\alpha \to 0$. *c*) Con $\alpha = 0.6$ C°/100 m, calcule p para $y = 8863$ m y compare su respuesta con el resultado del ejemplo 18.4. Tome $T_0 = 288$ K y $p_0 = 1.00$ atm.

18.93. Ecuación de Van der Waals y puntos críticos. *a*) En las gráficas pV, la pendiente $\partial p/\partial V$ a lo largo de una isoterma nunca es positiva. Explique por qué. *b*) Las regiones en las que $\partial p/\partial V = 0$ representan un equilibrio entre dos fases; el volumen puede cambiar sin un cambio en la presión, como cuando el agua hierve a presión atmosférica. Podemos usar esto para determinar la temperatura, la presión y el volumen por mol en el punto crítico usando la ecuación de estado $p = p(V, T, n)$. Si $T > T_c$, entonces $p(V)$ no tiene máximos a lo largo de una isoterma, pero si $T < T_c$, entonces $p(V)$ tiene un máximo. Explique cómo esto nos lleva a la siguiente condición para determinar el punto crítico:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0 \quad \text{es el punto crítico}$$

c) Despeje p en la ecuación de Van der Waals (ecuación 18.7); es decir, obtenga $p(V, T, n)$. Determine $\partial p/\partial V$ y $\partial^2 p/\partial V^2$ e iguálelas a cero con la finalidad de obtener dos ecuaciones para V, T y n. *d*) La resolución simultánea de las dos ecuaciones obtenidas en el inciso *c*) da la temperatura y el volumen por mol en el punto crítico, T_c y $(V/n)_c$. Determine estas constantes en términos de a y b. (*Sugerencia:* divida una ecuación entre la otra para eliminar T.) *e*) Sustituya estos valores en la ecuación de estado para obtener p_c, la presión en el punto crítico. *f*) Use los resultados de los incisos *d*) y *e*) para obtener la razón $RT_c/p_c(V/n)_c$. Ésta no deberá contener a ni b y, por lo tanto, deberá tener el mismo valor para todos los gases. *g*) Calcule la razón $RT_c/p_c(V/n)_c$ para los gases H_2, N_2 y H_2O usando los siguientes datos de punto crítico:

Gas	T_c (K)	p_c (Pa)	$(V/n)_c$ (m^3/mol)
H_2	33.3	13.0×10^5	65.0×10^{-6}
N_2	126.2	33.9×10^5	90.1×10^{-6}
H_2O	647.4	221.2×10^5	56.0×10^{-6}

(*h*) Analice la comparación de los resultados del inciso *g*) con la predicción del inciso *f*) basada en la ecuación de Van der Waals. ¿Qué concluye usted acerca de la exactitud de la ecuación de Van der Waals como descripción del comportamiento de los gases cerca del punto crítico?

18.94. En el ejemplo 18.7 (sección 18.3) vimos que $v_{rms} > v_{med}$. No es difícil demostrar que esto *siempre* sucede. (La única excepción es cuando las partículas tienen la misma rapidez, en cuyo caso $v_{rms} = v_{med}$.) *a*) Para dos partículas con rapidez v_1 y v_2, demuestre que $v_{rms} \geq v_{med}$, sean cuales fueren los valores numéricos de v_1 y v_2. Después, demuestre que $v_{rms} > v_{med}$ si $v_1 \neq v_2$. *b*) Suponga que, para un conjunto de N partículas, se sabe que $v_{rms} > v_{med}$. Otra partícula, con rapidez u, se agrega al conjunto de partículas. Si denotamos las nuevas rapideces eficaz y media con v'_{rms} y v'_{med}, demuestre que

$$v'_{rms} = \sqrt{\frac{Nv_{rms}{}^2 + u^2}{N + 1}} \qquad \text{y} \qquad v'_{med} = \frac{Nv_{med} + u}{N + 1}$$

c) Use las expresiones del inciso *b*) para demostrar que $v'_{rms} > v'_{med}$ sea cual fuere el valor numérico de u. *d*) Explique por qué sus resultados de *a*) y *c*) juntos demuestran que $v_{rms} > v_{med}$ para cualquier conjunto de partículas si no todas las partículas tienen la misma rapidez.

19 LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la transferencia de calor y el trabajo efectuado en un proceso termodinámico.
- Cómo calcular el trabajo efectuado por un sistema termodinámico cuando cambia su volumen.
- Qué se entiende por trayectoria entre estados termodinámicos.
- Cómo utilizar la primera ley de la termodinámica para relacionar transferencia de calor, trabajo efectuado y cambio de energía interna.
- Cómo distinguir entre los procesos adiabático, isobárico, isocórico e isotérmico.
- Cómo sabemos que la energía interna de un gas ideal depende sólo de su temperatura.
- La diferencia entre capacidades caloríficas molares a volumen constante y a presión constante, y cómo utilizar tales cantidades al realizar cálculos.
- Cómo analizar los procesos adiabáticos en un gas ideal.

?Una locomotora de vapor opera aprovechando la primera ley de la termodinámica: el agua se calienta y hierve, y el vapor al expandirse efectúa trabajo que impulsa a la locomotora. ¿Sería posible que el vapor de agua impulsara la locomotora efectuando trabajo al condensarse?



Cada vez que conducimos un automóvil, que encendemos un acondicionador de aire o cocinamos algún alimento, recibimos los beneficios prácticos de la *termodinámica*, es decir, el estudio de las relaciones donde intervienen calor, trabajo mecánico, y otros aspectos de la energía y de su transferencia. Por ejemplo, en el motor de un automóvil, se genera calor por la reacción química entre el oxígeno y la gasolina vaporizada en sus cilindros. El gas caliente empuja los pistones de los cilindros, efectuando trabajo mecánico que se utiliza para impulsar el vehículo. Éste es un ejemplo de *proceso termodinámico*.

La primera ley de la termodinámica es fundamental para entender tales procesos y es una extensión del principio de conservación de la energía; amplía este principio para incluir el intercambio de energía tanto por transferencia de calor como por trabajo mecánico, e introduce el concepto de la *energía interna* de un sistema. La conservación de la energía desempeña un papel vital en todas las áreas de la física; en tanto que la primera ley tiene una utilidad muy amplia. Para plantear las relaciones de energía con precisión, necesitaremos el concepto de *sistema termodinámico*, y estudiaremos el *calor* y el *trabajo* como dos formas de introducir energía en semejante sistema o de extraerla de él.

19.1 El maíz en la olla es un sistema termodinámico. En el proceso termodinámico que se muestra aquí, se agrega calor al sistema y éste efectúa trabajo sobre el entorno para levantar la tapa de la olla.



19.1 Sistemas termodinámicos

Ya estudiamos la transferencia de energía por trabajo mecánico (capítulo 6) y por transferencia de calor (capítulos 17 y 18). Ahora podemos combinar y generalizar estos principios.

Siempre hablaremos de transferencia de energía hacia o desde algún *sistema* específico. El sistema podría ser un dispositivo mecánico, un organismo biológico o cierta cantidad de material como el refrigerante de un acondicionador de aire o el vapor de agua que se expande en una turbina. En general, un **sistema termodinámico** es cualquier conjunto de objetos que conviene considerar como una unidad, y que podría intercambiar energía con el entorno. Un ejemplo conocido es una cantidad de granos de maíz palomero en una olla con tapa. Al colocarse la olla en una estufa, se agrega

energía al maíz por conducción de calor; al reventarse el maíz y expandirse, realiza trabajo al ejercer una fuerza hacia arriba sobre la tapa y al desplazarla (figura 19.1). El *estado* del maíz cambia en este proceso, ya que el volumen, la temperatura y la presión del maíz cambian cuando revienta. Un proceso así, donde hay cambios en el estado de un sistema termodinámico, se denomina **proceso termodinámico**.

En mecánica, a menudo usamos el concepto de *sistema* en relación con los diagramas de cuerpo libre y la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. En los sistemas *termodinámicos*, al igual que en todos los demás, es indispensable definir con claridad desde un principio exactamente lo que está o no incluido en el sistema. Sólo así podremos describir sin ambigüedad las transferencias de energía al sistema y desde éste. En nuestro ejemplo del maíz palomero, definimos el sistema como el maíz, sin incluir la olla, la tapa ni la estufa.

La termodinámica tiene sus raíces en muchos problemas prácticos aparte del inflado de rosetas (palomitas) de maíz (figura 19.2). El motor de gasolina en un automóvil, los motores a reacción de un avión y los motores en los cohetes de un vehículo de lanzamiento usan el calor de la combustión del combustible para realizar trabajo mecánico e impulsar el vehículo. El tejido muscular de los organismos vivos metaboliza la energía química del alimento y realiza trabajo mecánico sobre el entorno del organismo. Una máquina o una turbina de vapor usa el calor de combustión del carbón u otro combustible para realizar trabajo mecánico, como al impulsar un generador eléctrico o arrastrar un tren.

19.2 a) Un motor de cohete usa el calor de combustión de su combustible para realizar trabajo impulsando el vehículo. b) El ser humano y otros organismos biológicos son sistemas demasiado complicados como para analizarlos cabalmente en este libro; no obstante, los mismos principios básicos de termodinámica son válidos en ellos.

a) b)



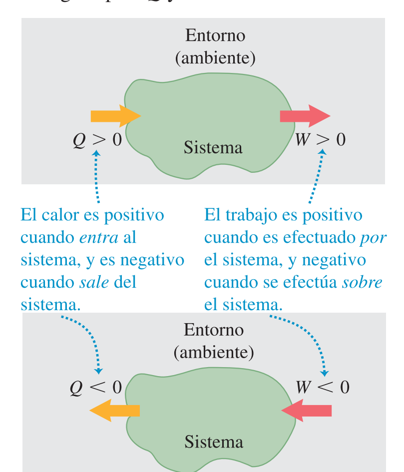
Signos del calor y el trabajo en termodinámica

Describimos las relaciones de energía de cualquier proceso termodinámico en términos de la cantidad de calor Q agregada *al* sistema y el trabajo W realizado *por* él. Tanto Q como W pueden ser positivos, negativos o cero. (figura 19.3). Un valor positivo de Q representa flujo de calor *hacia* el sistema, con un suministro de energía correspondiente; un Q negativo representa flujo de calor hacia *afuera del* sistema. Un valor positivo de W representa trabajo realizado *por* el sistema contra el entorno, como el de un gas en expansión y, por lo tanto, corresponde a la energía que *sale* del sistema. Un W negativo, como el realizado durante la compresión de un gas, cuando el entorno realiza trabajo *sobre el gas*, representa energía que *entra en* el sistema. Usaremos estas convenciones de manera consistente en los ejemplos de este capítulo y el siguiente.

CUIDADO **Tenga en cuenta el signo del trabajo *W*** Note que nuestra regla de signo para el trabajo es *opuesta* a la que usamos en mecánica, donde siempre hablamos del trabajo realizado por las fuerzas que actúan *sobre* un cuerpo. En termodinámica, suele ser más conveniente tomar W como el trabajo efectuado *por* el sistema, de modo que cuando un sistema se expanda, la presión, el cambio de volumen y el trabajo sean todos positivos. ¡Tenga cuidado de usar las reglas de signos para el trabajo y el calor de forma consistente! ▮

Evalúe su comprensión de la sección 19.1 En el ejemplo 17.8 (sección 17.6), ¿qué signo tiene Q para el café? ¿Y para la taza de aluminio? Si un bloque se desliza por una superficie horizontal con fricción, ¿qué signo tiene W para el bloque? ▮

19.3 Un sistema termodinámico podría intercambiar energía con su entorno (ambiente) mediante calor, trabajo o ambos. Tome nota de las convenciones de signos para Q y W.

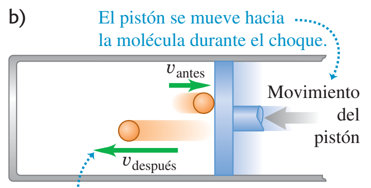


19.2 Trabajo realizado al cambiar el volumen

Una cantidad de gas en un cilindro con un pistón móvil es un ejemplo sencillo pero común de sistema termodinámico. Los motores de combustión interna, las máquinas de vapor y las compresoras de refrigeradores y acondicionadores de aire usan alguna versión de este tipo de sistema. En las siguientes secciones usaremos el sistema de gas en un cilindro para explorar varios tipos de procesos donde hay transformaciones de energía.

Usaremos una perspectiva microscópica, basada en las energías cinética y potencial de las moléculas individuales de un material, para desarrollar nuestra intuición con respecto a las cantidades termodinámicas. No obstante, es importante entender que los principios centrales de la termodinámica pueden tratarse *macroscópicamente*, sin referencia a modelos microscópicos. De hecho, parte de la utilidad y generalidad de la termodinámica radica en que *no* depende de los detalles estructurales de la materia.

19.4 Una molécula que golpea un pistón a) efectúa trabajo positivo si el pistón se aleja de la molécula y b) efectúa trabajo negativo si el pistón se acerca a la molécula. Por lo tanto, un gas efectúa trabajo positivo cuando se expande como en a) pero trabajo negativo cuando se comprime como en b).



Consideremos primero el *trabajo* efectuado por un sistema durante un cambio de volumen. Al expandirse un gas, empuja las superficies de sus fronteras, las cuales se mueven hacia afuera; por lo tanto, siempre realiza trabajo positivo. Lo mismo sucede con cualquier sólido o fluido que se expande a presión, como el maíz de la figura 19.1.

Podemos entender el trabajo efectuado por un gas en un cambio de volumen considerando sus moléculas. Cuando una de ellas choca contra una superficie estacionaria, ejerce una fuerza momentánea sobre ella pero no realiza trabajo porque la superficie no se mueve. En cambio, si la superficie se mueve, como un pistón de un motor de gasolina, la molécula *sí* realiza trabajo sobre la superficie durante el choque. Si el pistón de la figura 19.4a se mueve a la derecha, de modo que aumente el volumen del gas, las moléculas que golpean el pistón ejercen una fuerza a lo largo de una distancia y realizan trabajo *positivo* sobre el pistón. Si éste se mueve a la izquierda (figura 19.4b), reduciendo el volumen del gas, se realiza trabajo positivo *sobre* la molécula durante el choque. Por lo tanto, las moléculas de gas realizan trabajo *negativo* sobre el pistón.

La figura 19.5 muestra un sistema cuyo volumen puede cambiar (un gas, líquido o sólido) en un cilindro con pistón móvil. Suponga que el área transversal del cilindro es A y la presión ejercida por el sistema en la cara del pistón es p. La fuerza total F ejercida por el sistema sobre el pistón es $F = pA$. Si el pistón se mueve hacia afuera una distancia infinitesimal dx, el trabajo dW realizado por dicha fuerza es

$$dW = F\,dx = pA\,dx$$

Pero

$$A\,dx = dV$$

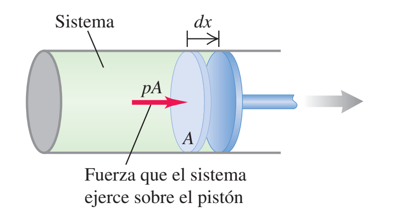
donde dV es el cambio infinitesimal de volumen del sistema. Así, podemos expresar el trabajo efectuado por el sistema en este cambio infinitesimal de volumen como

$$dW = p\,dV \qquad (19.1)$$

En un cambio finito de volumen de V_1 a V_2,

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV \qquad \text{(trabajo efectuado en un cambio de volumen)} \qquad (19.2)$$

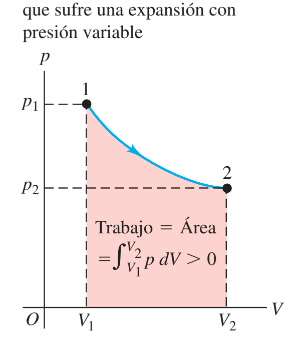
19.5 El trabajo infinitesimal realizado por el sistema durante la pequeña expansión dx es $dW = pA\,dx$.



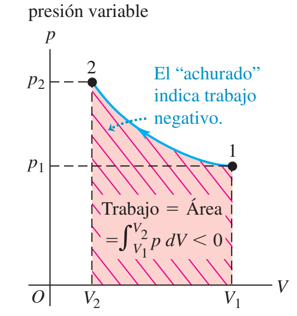
En general, la presión del sistema puede variar durante un cambio de volumen. Eso sucede, por ejemplo, en los cilindros de un motor de automóvil durante el movimiento hacia arriba y hacia abajo de los pistones. Para evaluar la integral de la ecuación (19.2), hay que saber cómo varía la presión en función del volumen. Podemos representar esta relación en una gráfica de p en función de V (una gráfica pV, que describimos al final de la sección 18.1). La figura 19.6a muestra un ejemplo sencillo. En esta figura, la ecuación (19.2) se representa gráficamente como el *área* bajo la curva

19.6 El trabajo efectuado es igual al área bajo la curva en una gráfica pV.

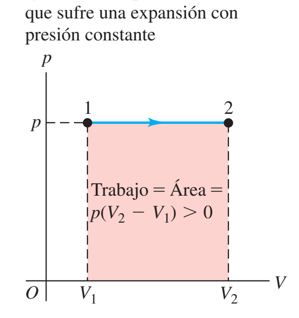
a) Gráfica pV para un sistema que sufre una expansión con presión variable



b) Gráfica pV para un sistema que sufre una compresión con presión variable



c) Gráfica pV para un sistema que sufre una expansión con presión constante



de p contra V entre los límites V_1 y V_2. (En la sección 6.3 usamos una interpretación similar del trabajo efectuado por una fuerza F como el área bajo la curva de F contra x entre los límites x_1 y x_2.)

Según la regla planteada en la sección 19.1, el trabajo es *positivo* cuando un sistema se *expande*. En una expansión del estado 1 al 2 en la figura 19.6a, el área bajo la curva y el trabajo son positivos. Una *compresión* de 1 a 2 en la figura 19.6b da una área *negativa*; cuando un sistema se comprime, su volumen disminuye y realiza trabajo *negativo* sobre su entorno (véase también la figura 19.4b).

CUIDADO **Use los subíndices 1 y 2 con precaución** Al usar la ecuación (19.2), recuerde siempre que V_1 es el volumen *inicial* y V_2 es el volumen *final*. Por ello, se invirtieron los subíndices 1 y 2 en la figura 19.6b, en comparación con la figura 19.6a, aunque ambos procesos se dan entre los mismos dos estados termodinámicos.

Si la presión p permanece constante mientras el volumen cambia de V_1 a V_2 (figura 19.6c), el trabajo efectuado por el sistema es

$$W = p(V_2 - V_1) \qquad \text{(trabajo efectuado en un cambio de volumen a presión constante)} \qquad (19.3)$$

ActivPhysics ONLINE
8.5 Trabajo efectuado por un gas

En cualquier proceso donde el volumen sea *constante*, el sistema no efectúa trabajo porque no hay desplazamiento.

Ejemplo 19.1 Expansión isotérmica de gas ideal

Un gas de comportamiento ideal sufre una *expansión isotérmica* (a temperatura constante) a una temperatura T, durante la cual su volumen cambia de V_1 a V_2. ¿Cuánto trabajo efectúa el gas?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La ley del gas ideal nos indica que si se mantiene constante la temperatura de un gas ideal, la cantidad $pV = nRT$ también permanece constante. Si cambia el volumen V, también debe cambiar la presión p. De esta manera, ahora nos piden calcular el trabajo efectuado por un gas que cambia de volumen con presión variable.

PLANTEAR: Aunque estemos tentados a hacerlo, *no podemos* usar la ecuación (19.3) para calcular el trabajo efectuado porque lo que se mantiene constante es la temperatura, no la presión. Debemos usar la ecuación (19.2). Para evaluar la integral en esta ecuación, necesitamos conocer la presión en función del volumen, lo cual está dado por la ley del gas ideal, ecuación (18.3).

EJECUTAR: Por la ecuación (19.2),

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV$$

Por la ecuación (18.3), la presión p de n moles de gas ideal que ocupan un volumen V a una temperatura absoluta T es

$$p = \frac{nRT}{V}$$

donde R es la constante de los gases. Sustituimos esto en la integral, sacamos las constantes n, R y T, y evaluamos la integral:

$$W = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \qquad \text{(gas ideal, proceso isotérmico)}$$

Además, si T es constante,

$$p_1V_1 = p_2V_2 \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

así que el trabajo isotérmico también puede expresarse como

$$W = nRT \ln \frac{p_1}{p_2} \qquad \text{(gas ideal, proceso isotérmico)}$$

EVALUAR: Comprobamos nuestro resultado recordando que, en una expansión, $V_2 > V_1$ y el cociente V_2/V_1 es mayor que 1. El logaritmo de un número mayor que 1 es positivo, así que $W > 0$, como debería ser. Como verificación adicional, examinemos nuestra segunda expresión para W: en una expansión isotérmica, el volumen aumenta y la presión disminuye, así que $p_2 < p_1$, el cociente $p_1/p_2 > 1$ y $W = nRT \ln(p_1/p_2)$ es también positivo.

Estos resultados también son válidos para una *compresión* isotérmica de un gas, en la que $V_2 < V_1$ y $p_2 > p_1$.

Evalúe su comprensión de la sección 19.2 Una cantidad de un gas ideal sufre una expansión que incrementa su volumen de V_1 a $V_2 = 2V_1$. La presión final del gas es p_2. ¿El gas efectúa más trabajo sobre su ambiente, si la expansión es a *presión* constante o a *temperatura* constante? i) presión constante; ii) temperatura constante; iii) se efectúa la misma cantidad de trabajo en ambos casos; iv) no hay suficiente información para decidir.

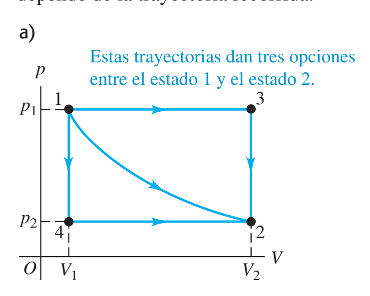
MP

19.3 Trayectoria entre estados termodinámicos

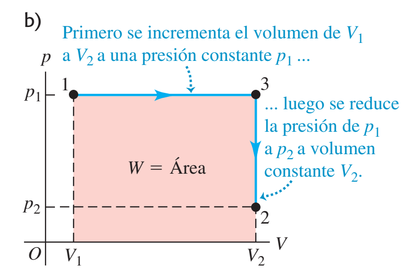
Hemos visto que, si un proceso termodinámico implica un cambio de volumen, el sistema realiza trabajo (positivo o negativo) sobre su entorno. También entrará o saldrá calor del sistema durante el proceso, si hay una diferencia de temperatura entre el sistema y su entorno. Veamos ahora cómo el trabajo efectuado por el sistema, y el calor agregado a él durante un proceso termodinámico, dependen de cómo se realiza el proceso.

19.7 El trabajo efectuado por el sistema durante una transición entre dos estados depende de la trayectoria recorrida.

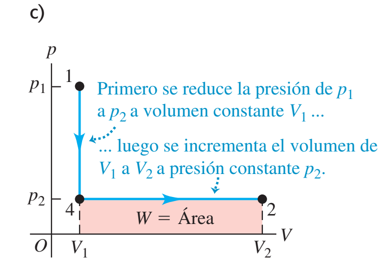
a)



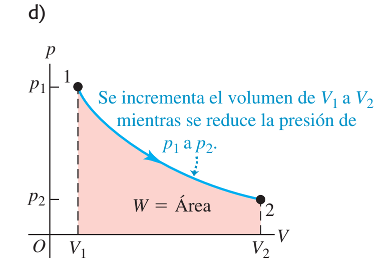
b)



c)



d)



Trabajo efectuado en un proceso termodinámico

Cuando un sistema termodinámico cambia de un estado inicial a uno final, pasa por una serie de estados intermedios, a los que llamamos **trayectoria**. Siempre hay un número infinito de posibilidades para dichos estados intermedios. Si todos son estados de equilibrio, la trayectoria podrá verse en una gráfica pV (figura 19.7a). El punto 1 representa un estado inicial con presión p_1 y volumen V_1, y el punto 2 representa un estado final con presión p_2 y volumen V_2. Para pasar del estado 1 al 2, podríamos mantener la presión en p_1 mientras el sistema se expande al volumen V_2 (punto 3, figura 19.7b) y luego reducir la presión a p_2 (tal vez reduciendo la temperatura) mientras se mantiene el volumen en V_2 (al punto 2 del diagrama). El trabajo efectuado por el sistema durante este proceso es el área bajo la línea $1 \rightarrow 3$; no se efectúa trabajo durante el proceso a volumen constante $3 \rightarrow 2$. O bien, el sistema podría seguir la trayectoria $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ (figura 19.7c); en tal caso, el trabajo es el área bajo la línea $4 \rightarrow 2$, ya que no se efectúa trabajo durante el proceso a volumen constante $1 \rightarrow 4$. La curva continua de 1 a 2 (figura 19.7d) es otra posibilidad, y el trabajo para esta trayectoria es diferente del de cualquiera de las otras.

Concluimos que *el trabajo realizado por el sistema depende no sólo de los estados inicial y final, sino también de los estados intermedios, es decir, de la trayectoria*. Además, podemos llevar al sistema por una serie de estados que formen un ciclo completo, como $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. En este caso, el estado final será el mismo que el inicial, pero el trabajo total efectuado por el sistema *no* es cero. (De hecho, se representa en la gráfica con el área encerrada por el ciclo; ¿puede usted demostrarlo? Véase el ejercicio 19.7.) Por lo tanto, no tiene sentido hablar de la cantidad de trabajo *contenida* en un sistema. En cierto estado, un sistema puede tener valores definidos de las coordenadas de estado p, V y T; no obstante, sería absurdo decir que tiene un valor definido de W.

Calor agregado en un proceso termodinámico

Al igual que el trabajo, el *calor* agregado a un sistema termodinámico cuando cambia de estado depende de la trayectoria del estado inicial al final. Por ejemplo, suponga que nos interesa cambiar el volumen de cierta cantidad de gas ideal de 2.0 L a 5.0 L manteniendo la temperatura en $T = 300$ K. La figura 19.8 muestra dos formas diferentes de hacerlo. En la figura 19.8a, el gas está en un cilindro provisto de un pistón, con un volumen inicial de 2.0 L. Dejamos que el gas se expanda lentamente, suministrando calor con el calentador eléctrico para mantener la temperatura en 300 K. Después de expandirse de esta forma lenta, controlada e isotérmica, el gas alcanza su volumen final de 5.0 L, absorbiendo una cantidad definida de calor en el proceso.

La figura 19.8b muestra un proceso distinto que conduce al mismo estado final. El recipiente está rodeado por paredes aislantes y dividido por una membrana delgada rompible en dos compartimientos. La parte inferior tiene un volumen de 2.0 L, y la superior, de 3.0 L. En el compartimiento inferior colocamos la misma cantidad del mismo gas que en la figura 19.8a, también a 300 K. El estado inicial es el mismo que antes. Ahora rompemos la membrana; el gas sufre una expansión rápida sin control,

sin que pase calor por las paredes aislantes. El volumen final es de 5.0 L, como en la figura 19.8a. El gas no realiza trabajo durante esta expansión porque no empuja contra algo que se mueva. Esta expansión sin control de un gas a un vacío se denomina **expansión libre**; hablaremos más de ella en la sección 19.6.

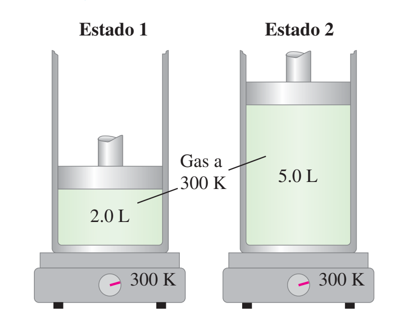
Se ha observado experimentalmente que, si un gas con comportamiento ideal sufre una expansión libre, no hay cambio de temperatura. Por lo tanto, el estado final del gas es el mismo que en la figura 19.8a. Los estados intermedios (presiones y volúmenes) durante la transición del estado 1 al 2 son muy diferentes en ambos casos; las figuras 19.8a y 19.8b representan *dos trayectorias distintas* que conectan los *mismos estados* 1 y 2. En la trayectoria de la figura 19.8b, *no* se transfiere calor al sistema, y éste no efectúa trabajo. Al igual que el trabajo, *el calor depende no sólo de los estados inicial y final, sino también de la trayectoria.*

Por esta dependencia de la trayectoria, es absurdo decir que un sistema "contiene" cierta cantidad de calor. Para ver esto, suponga que asignamos un valor arbitrario al "calor de un cuerpo" en algún estado de referencia. Entonces, es de suponer que el "calor en el cuerpo" en algún otro estado sería igual al calor en el estado de referencia más el calor agregado cuando el cuerpo pasa al segundo estado. Pero eso es ambiguo, como acabamos de ver: el calor agregado depende de la *trayectoria* que se sigue del estado de referencia al segundo estado. Debemos concluir que *no* hay una forma congruente de definir el "calor en un cuerpo"; no es un concepto útil.

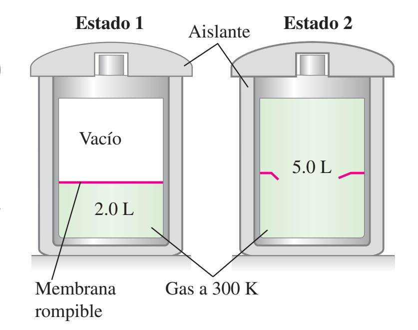
Si bien no tiene sentido hablar del "trabajo en un cuerpo" o el "calor en un cuerpo", *sí* lo tiene hablar de la cantidad de *energía interna* en un cuerpo. Este importante concepto es nuestro siguiente tema.

19.8 a) Expansión isotérmica lenta y controlada de un gas de un estado inicial 1 a un estado final 2, con la misma temperatura pero menor presión.
b) Expansión rápida, sin control, del mismo gas, partiendo del mismo estado 1 y terminando en el mismo estado 2.

a) El sistema realiza trabajo sobre el pistón; la plancha caliente agrega calor al sistema ($W > 0$ y $Q > 0$).



b) El sistema no efectúa trabajo; ni entra ni sale calor del sistema ($W = 0$ y $Q = 0$).



Evalúe su comprensión de la sección 19.3 El sistema que se describe en la figura 19.7a sufre cuatro procesos termodinámicos distintos. Cada proceso se representa en una gráfica pV como una recta que va de un estado inicial a un estado final. (Estos procesos son diferentes de los que se muestran en las gráficas pV de la figura 19.7.) Ordene del más positivo al más negativo, los procesos para la cantidad de trabajo efectuado por el sistema. i) $1 \rightarrow 2$; ii) $2 \rightarrow 1$; iii) $3 \rightarrow 4$; iv) $4 \rightarrow 3$.

19.4 Energía interna y la primera ley de la termodinámica

La energía interna es uno de los conceptos más importantes de la termodinámica. En la sección 7.3, cuando hablamos de los cambios de energía de un cuerpo que se desliza con fricción, mencionamos que calentar un cuerpo aumentaba su energía interna y que enfriarlo la disminuía. Pero, ¿qué *es* energía interna? Podemos verla de varios modos; comencemos con uno basado en las ideas de la mecánica. La materia consiste en átomos y moléculas, y éstas se componen de partículas que tienen energías cinética y potencial. Definimos *tentativamente* la **energía interna** de un sistema como la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas constituyentes, más la suma de todas las energías potenciales de interacción entre ellas.

ActivPhysics Online
8.6 Calor, energía térmica y primera ley de la termodinámica

CUIDADO **¿Es interna?** Observe que la energía interna *no* incluye la energía potencial debida a la interacción entre el sistema y su entorno. Si el sistema es un vaso con agua, colocarlo en una repisa alta aumenta su energía potencial gravitacional debida a la interacción entre el vaso y la Tierra; sin embargo, esto no afecta las interacciones de las moléculas del agua entre sí, por lo que la energía interna del agua no cambia.

Usamos el símbolo U para la energía interna. (Usamos el mismo símbolo para energía potencial en mecánica. Tenga presente que U tiene un significado distinto en termodinámica.) Durante un cambio de estado del sistema, la energía interna podría cambiar de un valor inicial U_1 a uno final U_2. Denotamos el cambio en energía interna con $\Delta U = U_2 - U_1$.

Sabemos que la transferencia de calor es transferencia de energía. Si agregamos cierta cantidad de calor Q a un sistema y éste no realiza trabajo en el proceso, la energía interna aumenta en una cantidad igual a Q; es decir, $\Delta U = Q$. Si el sistema efectúa un trabajo W expandiéndose contra su entorno y no se agrega calor durante ese proceso, sale energía del sistema y disminuye la energía interna. Es decir, si W es positivo, ΔU es negativo, y viceversa: $\Delta U = -W$. Si hay *tanto* transferencia de calor *como* trabajo, el cambio *total* de energía interna es

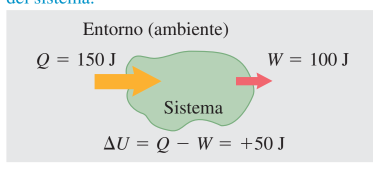
$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q - W \qquad \text{(primera ley de la termodinámica)} \qquad (19.4)$$

Podemos reacomodar esto así:

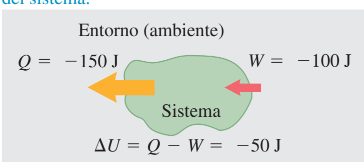
$$Q = \Delta U + W \qquad (19.5)$$

19.9 En un proceso termodinámico, la energía interna U de un sistema puede **a)** aumentar ($\Delta U > 0$), **b)** disminuir ($\Delta U < 0$) o **c)** permanecer sin cambio ($\Delta U = 0$).

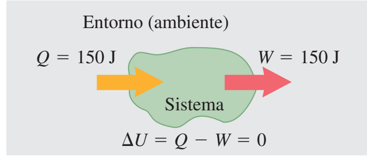
a) Se agrega al sistema más calor que el trabajo efectuado por éste: aumenta la energía interna del sistema.



b) Sale del sistema más calor que el trabajo efectuado: disminuye la energía interna del sistema.



c) El calor agregado al sistema es igual al trabajo que éste realiza: no cambia la energía interna del sistema.



El mensaje de la ecuación (19.5) es que, en general, cuando se agrega calor Q a un sistema, una parte de esta energía agregada permanece en el sistema, modificando su energía interna en una cantidad ΔU; el resto sale del sistema cuando éste efectúa un trabajo W contra su entorno. Puesto que W y Q pueden ser positivos, negativos o cero, ΔU puede ser positiva, negativa o cero para diferentes procesos (figura 19.9).

La ecuación (19.4) o la (19.5) es la **primera ley de la termodinámica**, que es una generalización del principio de conservación de la energía para incluir la transferencia de energía como calor y como trabajo mecánico. Como veremos en capítulos posteriores, este principio puede extenderse a clases de fenómenos aún más amplias, mediante la identificación de formas adicionales de energía y de transferencia de energía. En todas las situaciones donde parecía que la energía total en todas las formas conocidas no se conserva, fue posible identificar una nueva forma de energía tal que la energía total, incluida la nueva forma, *sí* se conserva. Hay energía asociada a campos eléctricos, campos magnéticos y, según la teoría de la relatividad, a la masa misma.

Comprensión de la primera ley de la termodinámica

Al principio de esta explicación, definimos tentativamente la energía interna en términos de energías cinética y potencial microscópicas; no obstante, ello tiene desventajas. *Calcular* la energía interna de este modo para cualquier sistema real sería demasiado complicado. Además, esta definición no es *operativa* porque no describe cómo determinar la energía interna a partir de cantidades físicas que podamos medir directamente.

Veamos la energía interna de otro modo. Para empezar, definimos el *cambio* de energía interna ΔU durante cualquier cambio de un sistema como la cantidad dada por la ecuación (19.4), $\Delta U = Q - W$. Ésta *sí* es una definición operativa, porque podemos medir Q y W; no define la U misma, sólo ΔU. Ésta no es una deficiencia, ya que podemos *definir* que la energía interna de un sistema tiene cierto valor en algún estado de referencia, y luego usar la ecuación (19.4) para definir la energía interna en cualquier otro estado. Esto es análogo a como manejamos la energía potencial en el capítulo 7, donde definimos arbitrariamente que la energía potencial de un sistema mecánico era cero en cierta posición.

Esta nueva definición cambia una dificultad por otra. Si definimos ΔU con la ecuación (19.4), entonces, cuando el sistema pase del estado 1 al 2 por dos trayectorias distintas, ¿cómo sabemos que ΔU es el mismo para las dos trayectorias? Ya vimos que, en general, Q y W *no* son iguales para diferentes trayectorias. Si ΔU, que es $Q - W$, también depende de la trayectoria, ΔU será ambiguo. De ser así, el concepto de energía interna de un sistema merecerá la misma crítica que el concepto erróneo de cantidad de calor contenida en un sistema, como vimos al final de la sección 19.3.

La única forma de contestar esta pregunta es *experimentando*. Medimos Q y W para varios materiales, cambios de estado y trayectorias, para saber si ΔU depende de la trayectoria o no. Los resultados de todas esas investigaciones son claros e inequívocos: en tanto que Q y W dependen de la trayectoria, $\Delta U = Q - W$ *es independiente de la trayectoria. El cambio de energía interna de un sistema durante un*

proceso termodinámico depende sólo de los estados inicial y final, no de la trayectoria que lleva de uno al otro.

De esta manera, la experimentación es la justificación definitiva para creer que un sistema termodinámico en cierto estado tiene una energía interna única que depende sólo de ese estado. Un planteamiento equivalente es que la energía interna U de un sistema es función de las coordenadas de estado: p, V y T (de hecho, de cualesquiera dos de ellas, ya que las tres variables están relacionadas por la ecuación de estado).

Es correcto decir que la primera ley de la termodinámica, dada por la ecuación (19.4) o la (19.5), representa la conservación de la energía en procesos termodinámicos. No obstante, un aspecto *adicional* importante de la primera ley es el hecho de que la energía interna depende sólo del estado del sistema (figura 19.10). En cambios de estado, el cambio de energía interna es independiente de la trayectoria.

Todo esto parecería un tanto abstracto si nos contentamos con pensar que la energía interna es energía mecánica microscópica. No hay nada incorrecto en esa perspectiva, y la usaremos varias veces en nuestra explicación. Sin embargo, si queremos definiciones *operativas* precisas, la energía interna, como el calor, puede y debe definirse de forma independiente de la estructura microscópica detallada del material.

19.10 La energía interna de una taza de café depende únicamente de su estado termodinámico: cuánta agua y café molido contiene, y a qué temperatura está. No depende de cómo se preparó el café (es decir, la trayectoria termodinámica que llevó a su estado actual).



Procesos cíclicos y sistemas aislados

Vale la pena mencionar dos casos especiales de la primera ley de la termodinámica. Un proceso que tarde o temprano vuelve un sistema a su estado inicial es un proceso *cíclico*. En un proceso así, el estado final es el mismo que el inicial, así que el cambio *total* de energía interna debe ser cero. Entonces,

$$U_2 = U_1 \quad \text{y} \quad Q = W$$

Si el sistema realiza una cantidad neta de trabajo W durante este proceso, deberá haber entrado en el sistema una cantidad igual de energía como calor Q. Pero no es necesario que Q o W individualmente sean cero (figura 19.11).

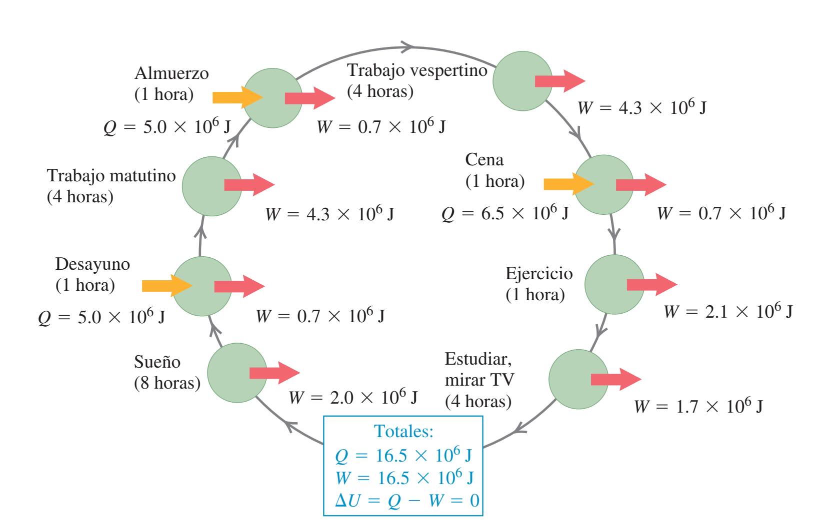
Otro caso especial se da en un *sistema aislado*, que no realiza trabajo sobre su entorno ni intercambia calor con él. Para cualquier proceso que se efectúa en un sistema aislado:

$$W = Q = 0$$

y, por lo tanto,

$$U_2 = U_1 = \Delta U = 0$$

En otras palabras, *la energía interna de un sistema aislado es constante*.



19.11 Todos los días, nuestro cuerpo (un sistema termodinámico) realiza un proceso termodinámico cíclico como el que se muestra aquí. Se agrega calor Q metabolizando alimento, y el cuerpo realiza un trabajo W al respirar, caminar y efectuar otras actividades. Si volvemos al mismo estado al final del día, $Q = W$ y el cambio neto de nuestra energía interna es cero.

Estrategia para resolver problemas 19.1 Primera ley de la termodinámica



IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* La primera ley de la termodinámica es el planteamiento de la ley de conservación de la energía en su forma más general. Podemos aplicarla a *cualquier* situación en la que nos interesen los cambios de energía interna de un sistema, el flujo de calor hacia un sistema o desde éste, o el trabajo efectuado por o sobre un sistema.

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Defina cuidadosamente el sistema termodinámico.
2. La primera ley de la termodinámica se concentra en sistemas que sufren procesos termodinámicos. En algunos problemas, los procesos tendrán dos o más pasos; así que asegúrese de identificar el estado inicial y el final de cada paso.
3. Identifique las cantidades conocidas y las incógnitas.
4. Compruebe que tiene suficientes ecuaciones. La primera ley, $\Delta U = Q - W$, sólo puede aplicarse una vez a cada paso de un proceso termodinámico, por lo que en muchos casos se necesitarán ecuaciones adicionales. Las más utilizadas son la ecuación (19.2) para el trabajo efectuado durante un cambio de volumen y la ecuación de estado del material que constituye el sistema termodinámico (en el caso del gas ideal, $pV = nRT$).

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. No debería extrañarle que le digamos que la consistencia de unidades es vital. Si p está en Pa y V en m^3, W debe estar en joules. Si no, lo mejor sería convertir las unidades de presión y volumen a Pa y m^3. Si una capacidad calorífica se da en calorías, lo más fácil suele ser convertirla en joules. Tenga especial cuidado con los moles. Si usa $n = m_{total}/M$ para convertir masa total a moles, recuerde que, si m_{total} está en kilogramos, M debe estar en *kilogramos* por moles. Las unidades usuales para M son *gramos* por moles; ¡tenga cuidado!
2. El cambio de energía interna ΔU en cualquier proceso termodinámico o serie de procesos es independiente de la trayectoria, ya sea que la sustancia se comporte como gas ideal o no. Esto es crucial en los problemas de este capítulo y el siguiente. En algunos casos, se da suficiente información acerca de una trayectoria entre el estado inicial y el final como para calcular ΔU para esa trayectoria. Puesto que ΔU es el mismo para cualquier trayectoria entre dos estados dados, podremos relacionar las diversas cantidades de energía para otras trayectorias.
3. Si un proceso consta de varios pasos discretos, suele ser útil graficar y tabular: Q, W y ΔU para cada paso. Coloque tales cantidades para cada paso en una línea distinta y acomódelas en columnas. Así, podrá aplicar la primera ley a cada línea; además, podrá sumar las columnas y aplicar la primera ley a las sumas. ¿Entiende por qué?
4. Despeje las incógnitas siguiendo los pasos 1 a 3.

EVALUAR *la respuesta:* Verifique que sus resultados sean razonables. En particular, asegúrese de que cada respuesta tenga el signo algebraico correcto. Recuerde que Q positivo implica *entrada* de calor en el sistema y Q negativo implica *salida* de calor del sistema. W positivo significa que el sistema efectúa trabajo sobre su entorno; mientras que un valor negativo de W implica que el entorno efectúa trabajo sobre el sistema.

Ejemplo 19.2 Para quemar el postre

Un estudiante se propone comer un mantecado de 900 calorías (con crema batida) y luego subir corriendo varios tramos de escaleras para quemar la energía que ingirió. ¿A qué altura debe ascender? Suponga que la masa del estudiante es de 60.0 kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La ingestión del mantecado corresponde a un flujo de calor hacia el cuerpo, mientras que la subida de las escaleras implica efectuar trabajo. Podemos relacionar estas cantidades con la primera ley de la termodinámica.

PLANTEAR: El sistema consiste del cuerpo del estudiante. Nos dicen que 900 calorías alimentarias de calor entran en el organismo. El objetivo de subir corriendo las escaleras es lograr que el estado final del sistema sea igual al inicial (ni más gordo ni más delgado), así que no hay cambio neto de energía interna: $\Delta U = 0$. El trabajo necesario para elevar una masa m una altura h es $W = mgh$; la incógnita es h.

EJECUTAR: Usamos la primera ley de la termodinámica: $\Delta U = 0 = Q - W$, así que $Q = W$: el trabajo efectuado subiendo escaleras debe ser igual al calor aportado por el mantecado. Utilizando $W = mgh$, la altura que hay que subir es $h = Q/mg$. Antes de sustituir valores en esta ecuación, convertimos unidades: una caloría de valor alimentario es 1 kcal = 1000 cal = 4190 J (con tres cifras significativas), así que

$$Q = 900\text{ kcal}\,(4190\text{ J}/1\text{ kcal}) = 3.77 \times 10^6\text{ J}$$

Entonces

$$h = \frac{Q}{mg} = \frac{3.77 \times 10^6\text{ J}}{(60.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)}$$
$$= 6410\text{ m} \qquad (\text{aprox. }21{,}000\text{ ft})$$

EVALUAR: ¡Buena suerte! Hemos supuesto una eficiencia de conversión de energía alimentaria en trabajo mecánico del 100%; esto no es muy realista. Por lo tanto, la distancia real que tendría que ascender es bastante menor que la calculada. Hablaremos más de la eficiencia después.

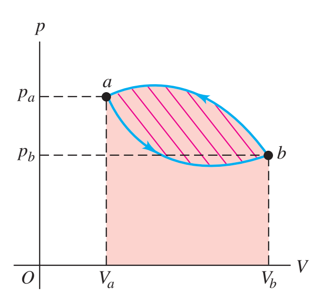
Ejemplo 19.3 Un proceso cíclico

La figura 19.12 es una gráfica pV para un proceso *cíclico*, donde los estados inicial y final son el mismo. Inicia en a y procede en sentido antihorario en la gráfica pV hasta b y vuelve a a, siendo el trabajo total $W = -500$ J. *a*) ¿Por qué es negativo el trabajo? *b*) Calcule el cambio de energía interna y el calor agregado en el proceso.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema requiere relacionar el cambio de energía interna, el calor agregado y el trabajo realizado en un proceso termodinámico. Por ello, podemos aplicar la primera ley de la termodinámica.

19.12 El trabajo neto efectuado por el sistema en el proceso *aba* es de −500 J. ¿Cuál habría sido si el proceso se hubiera realizado en sentido horario en esta gráfica *pV*?



PLANTEAR: El proceso termodinámico tiene dos pasos: $a \rightarrow b$ siguiendo la curva inferior de la figura 19.12 y $b \rightarrow a$ siguiendo la curva superior. Sin embargo, los incisos *a*) y *b*) se refieren a el proceso cíclico *completo* $a \rightarrow b \rightarrow a$ (dando toda la vuelta en la figura 19.12).

EJECUTAR: *a*) El trabajo realizado es igual al área bajo la curva, tomando el área positiva cuando aumenta el volumen, y negativa cuando disminuye. El área bajo la curva inferior de *a* a *b* es positiva, pero es menor que el valor absoluto del área negativa bajo la curva superior de *b* a *a*. Por lo tanto, el área neta (encerrada por la trayectoria y marcada con diagonales rojas) y el trabajo son negativos. En otras palabras, el entorno efectúa *sobre* el sistema 500 joules más de trabajo, que el trabajo efectuado *por* el sistema.

b) En éste y en cualquier otro proceso cíclico (cuyos puntos inicial y final son el mismo), $\Delta U = 0$, así que $Q = W = -500$ J. Es decir, deben *salir* 500 joules de calor del sistema.

EVALUAR: Este ejemplo ilustra un principio general de las gráficas *pV* de procesos cíclicos: el trabajo total es positivo si el proceso recorre el ciclo en dirección horaria, y es negativo si el proceso recorre el ciclo en dirección antihoraria (como en la figura 19.12).

Ejemplo 19.4 Comparación de procesos termodinámicos

La gráfica *pV* de la figura 19.13 muestra una serie de procesos termodinámicos. En el proceso *ab*, se agregan 150 J de calor al sistema; en el proceso *bd*, se agregan 600 J. Calcule *a*) el cambio de energía interna en el proceso *ab*; *b*) el cambio de energía interna en el proceso *abd* (azul claro); y *c*) el calor total agregado en el proceso *acd* (azul oscuro).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En todos los procesos, usaremos $\Delta U = Q - W$ para determinar la cantidad deseada.

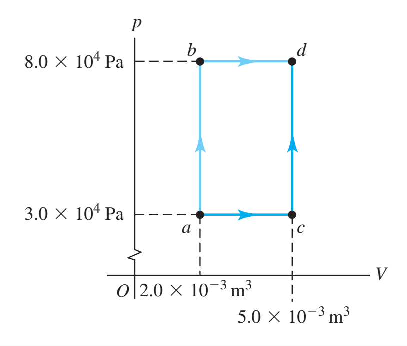
PLANTEAR: Nos dan $Q_{ab} = +150$ J y $Q_{bd} = +600$ J (los dos valores son positivos porque se *agrega* calor al sistema). Las incógnitas son *a*) ΔU_{ab}, *b*)ΔU_{abd} y *c*) Q_{acd}.

EJECUTAR: *a*) No hay cambio de volumen durante el proceso *ab*, así que $W_{ab} = 0$ y $\Delta U_{ab} = Q_{ab} = 150$ J.

b) El proceso *bd* se da a presión constante, así que el trabajo efectuado por el sistema durante esta expansión es

$$\begin{aligned} W_{bd} &= p(V_2 - V_1) \\ &= (8.0 \times 10^4 \text{ Pa})(5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= 240 \text{ J} \end{aligned}$$

19.13 Gráfica *pV* que muestra los diversos procesos termodinámicos.



El trabajo total para el proceso *abd* es

$$W_{abd} = W_{ab} + W_{bd} = 0 + 240 \text{ J} = 240 \text{ J}$$

y el calor total es

$$Q_{abd} = Q_{ab} + Q_{bd} = 150 \text{ J} + 600 \text{ J} = 750 \text{ J}$$

Aplicando la ecuación (19.4) a *abd*, obtenemos

$$\Delta U_{abd} = Q_{abd} - W_{abd} = 750 \text{ J} - 240 \text{ J} = 510 \text{ J}$$

c) Dado que ΔU es independiente de la trayectoria, el cambio de energía interna es el mismo para la trayectoria *acd* que para la *abd*; es decir,

$$\Delta U_{acd} = \Delta U_{abd} = 510 \text{ J}$$

El trabajo total para la trayectoria *acd* es

$$\begin{aligned} W_{acd} &= W_{ac} + W_{cd} = p(V_2 - V_1) + 0 \\ &= (3.0 \times 10^4 \text{ Pa})(5.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 2.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= 90 \text{ J} \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la ecuación (19.5) al proceso *acd*:

$$Q_{acd} = \Delta U_{acd} + W_{acd} = 510 \text{ J} + 90 \text{ J} = 600 \text{ J}$$

Veamos una tabulación de las distintas cantidades:

Paso	Q	W	$\Delta U = Q - W$	Paso	Q	W	$\Delta U = Q - W$
ab	150 J	0 J	150 J	*ac*	?	90 J	?
bd	600 J	240 J	360 J	*cd*	?	0 J	?
abd	750 J	240 J	510 J	*acd*	600 J	90 J	510 J

EVALUAR: Vemos que, a pesar de que ΔU es el mismo (510 J) para *abd* y para *acd*, W (240 J contra 90J) y Q (750 J contra 600 J) tienen valores muy diferentes para los dos procesos.

Observe que no tenemos suficiente información para obtener Q ni ΔU en los procesos *ac* y *cd*. No obstante, pudimos analizar el proceso compuesto *acd* comparándolo con el proceso *abd*, que tiene los mismos estados inicial y final, y para el cual poseemos información más completa.

Ejemplo 19.5 Termodinámica del agua en ebullición

Un gramo de agua (1 cm^3) se convierte en 1671 cm^3 de vapor cuando se hierve a presión constante de 1 atm (1.013×10^5 Pa). El calor de vaporización a esta presión es $L_v = 2.256 \times 10^6$ J/kg. Calcule *a*) el trabajo efectuado por el agua al vaporizarse y *b*) su aumento de energía interna.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La nueva característica de este problema es que el calor agregado hace que el sistema (el agua) cambie de la fase líquida a la gaseosa. No obstante, podemos aplicar la primera ley de la termodinámica, que es válida para cualquier clase de proceso termodinámico.

PLANTEAR: El agua se evapora a presión constante, así que podemos usar la ecuación (19.3) para calcular el trabajo W efectuado por el agua. Calculamos el calor Q agregado al agua a partir de la masa y el calor de vaporización; después podremos calcular el cambio de energía interna empleando $\Delta U = Q - W$.

EJECUTAR: *a*) Por la ecuación (19.3), el trabajo efectuado por el agua al vaporizarse es

$$\begin{aligned} W &= p(V_2 - V_1) \\ &= (1.013 \times 10^5\ \text{Pa})(1671 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 - 1 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) \\ &= 169\ \text{J} \end{aligned}$$

b) Por la ecuación (17.20), el calor agregado al agua para vaporizarla es

$$Q = mL_v = (10^{-3}\ \text{kg})(2.256 \times 10^6\ \text{J/kg}) = 2256\ \text{J}$$

Por la primera ley de la termodinámica [ecuación (19.4)], el cambio de energía interna es

$$\Delta U = Q - W = 2256\ \text{J} - 169\ \text{J} = 2087\ \text{J}$$

EVALUAR: Para vaporizar 1 gramo de agua, debemos agregar 2256 J de calor. Casi toda esta energía (2087 J) permanece en el sistema como aumento de la energía interna. Los 169 J restantes salen del sistema cuando éste efectúa trabajo contra su entorno al expandirse de líquido a vapor. El aumento de energía interna se asocia en su mayoría a las fuerzas intermoleculares que mantienen unidas a las moléculas en el estado líquido. Estas fuerzas son de atracción, así que las energías potenciales correspondientes son mayores después de realizarse trabajo para separar las moléculas y formar vapor. Es como aumentar la energía potencial gravitacional de un elevador alejándolo del centro de la Tierra.

Cambios infinitesimales de estado

En los ejemplos anteriores, los estados inicial y el final difieren en una cantidad finita. Más adelante consideraremos cambios *infinitesimales* de estado donde se agrega una cantidad pequeña de calor dQ al sistema, éste efectúa poco trabajo dW y la energía interna cambia en dU. En un proceso así, expresamos la primera ley en su forma diferencial:

$$dU = dQ - dW \quad \text{(primera ley de la termodinámica, proceso infinitesimal)} \tag{19.6}$$

En los sistemas que veremos, el trabajo dW está dado por $dW = p\,dV$, así que también podemos escribir la primera ley como:

$$dU = dQ - p\,dV \tag{19.7}$$

Evalúe su compresión de la sección 19.4 Ordene del más positivo al más negativo, los siguientes procesos termodinámicos, según el cambio de energía interna en cada uno. i) Cuando usted hace 250 J de trabajo sobre un sistema, éste transfiere 250 J de calor a su entrono; ii) cuando usted hace 250 J de trabajo sobre un sistema, éste absorbe 250 J de calor de su entorno; iii) cuando un sistema hace 250 J de trabajo sobre usted, se transfieren 250 J de calor a su entorno; iv) cuando un sistema efectúa 250 J de trabajo sobre usted, el sistema absorbe 250 J de calor desde el entorno.

19.5 Tipos de procesos termodinámicos



8.4 Variables de estado y ley del gas ideal

En esta sección, describiremos cuatro clases específicas de procesos termodinámicos que se dan con frecuencia en situaciones prácticas y que podemos resumir como "sin transferencia de calor" o *adiabáticos*, "a volumen constante" o *isocóricos*, "a presión constante" o *isobáricos*, y "a temperatura constante" o *isotérmicos*. Con algunos de ellos, podremos usar una versión simplificada de la primera ley de la termodinámica.

Proceso adiabático

Definimos un **proceso adiabático** como aquel donde no entra ni sale calor del sistema: $Q = 0$. Podemos evitar el flujo de calor ya sea rodeando el sistema con material térmicamente aislante o realizando el proceso con tal rapidez que no haya tiempo para un flujo de calor apreciable. Por la primera ley, para todo proceso adiabático,

$$U_2 - U_1 = \Delta U = -W \qquad \text{(proceso adiabático)} \qquad (19.8)$$

Cuando un sistema se expande adiabáticamente, W es positivo (el sistema efectúa trabajo sobre su entorno), así que ΔU es negativo y la energía interna disminuye. Si un sistema se *comprime* adiabáticamente, W es negativo (el entorno efectúa trabajo sobre el sistema) y U aumenta. En muchos sistemas (aunque no en todos), el aumento de energía interna va acompañado por un aumento de temperatura; y una disminución de energía interna, de un descenso en la temperatura (figura 19.14).

El golpe de compresión en un motor de combustión interna es un proceso aproximadamente adiabático. La temperatura aumenta al comprimirse la mezcla aire-combustible en el cilindro. La expansión del combustible quemado durante la descarga eléctrica también es aproximadamente adiabática, con un descenso de temperatura. En la sección 19.8 consideraremos procesos adiabáticos en el gas ideal.

19.14 Cuando salta el corcho de una botella de champaña, los gases presurizados dentro de la botella es expanden hacia el aire exterior con tal rapidez, que no hay tiempo para que intercambien calor con su entorno. Por ende, la expansión es adiabática. Conforme los gases en expansión realizan trabajo sobre su entorno, disminuyen tanto su energía interna como su temperatura; la temperatura más baja provoca que el vapor de agua se condense y forme una nube en miniatura.



Proceso isocórico

Un **proceso isocórico** se efectúa a *volumen constante*. Si el volumen de un sistema termodinámico es constante, no efectúa trabajo sobre su entorno; por lo que $W = 0$ y

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q \qquad \text{(proceso isocórico)} \qquad (19.9)$$

En un proceso isocórico, toda la energía agregada como calor permanece en el sistema como aumento de energía interna. Calentar un gas en un recipiente cerrado de volumen constante es un ejemplo de proceso isocórico. Los procesos *ab* y *cd* del ejemplo 19.4 son también ejemplos de procesos isocóricos. (Observe que hay tipos de trabajo que no implican un cambio de volumen. Por ejemplo, efectuamos trabajo sobre un fluido agitándolo. En algunos libros, "isocórico" implica que no se efectúa ningún tipo de trabajo.)

Proceso isobárico

Un **proceso isobárico** se efectúa *a presión constante*. En general, ninguna de las tres cantidades: ΔU, Q y W es cero en un proceso isobárico, pero aun así es fácil calcular W. Por la ecuación (19.3),

$$W = p(V_2 - V_1) \qquad \text{(proceso isobárico)} \qquad (19.10)$$

El ejemplo 19.5 se refiere a un proceso isobárico: hervir agua a presión constante (figura 19.15).

19.15 Casi todos los procesos de cocción son isobáricos, pues la presión del aire sobre una cazuela o sartén, o dentro de un horno de microondas, se mantiene prácticamente constante mientras se calienta la comida.

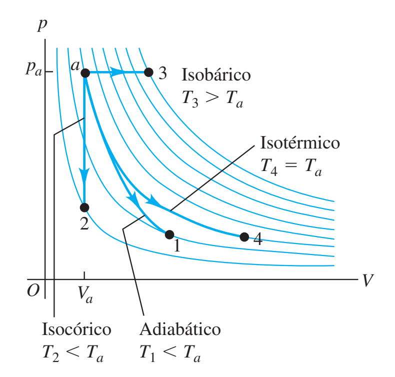


Proceso isotérmico

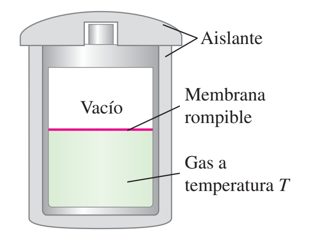
Un **proceso isotérmico** se efectúa a *temperatura constante*. Para ello, todo intercambio de calor con el entorno debe efectuarse con tal lentitud para que se mantenga el equilibrio térmico. En general, ninguna de las cantidades ΔU, Q *o* W es cero en un proceso isotérmico.

En algunos casos especiales, la energía interna de un sistema depende *únicamente* de su temperatura, no de su presión ni de su volumen. El sistema más conocido que posee esta propiedad especial es el gas ideal, como veremos en la siguiente sección. En tales sistemas, si la temperatura es constante, la energía interna también lo es: $\Delta U = 0$ y $Q = W$. Es decir, toda la energía que entre en el sistema como calor Q deberá salir como trabajo W efectuado por el sistema. El ejemplo 19.1, que implica un gas ideal, es un ejemplo de proceso isotérmico donde U es constante. En casi todos los

19.16 Cuatro procesos distintos para una cantidad constante de gas ideal, todos parten del estado a. Para el proceso adiabático, $Q = 0$; para el isocórico, $W = 0$; y para el isotérmico, $\Delta U = 0$. La temperatura sólo aumenta durante la expansión isobárica.



19.17 La membrana se rompe (o se quita) para iniciar la expansión libre del gas hacia la región al vacío.



demás sistemas, la energía interna depende de la presión y de la temperatura, así que U podría variar incluso si T es constante.

La figura 19.16 muestra una gráfica pV para cada uno de estos cuatro procesos con una cantidad constante de gas ideal. La trayectoria seguida en un proceso adiabático (a a 1) se llama **adiabática**. Una línea vertical (volumen constante) es una **isocórica**; una línea horizontal (presión constante) es una **isobárica**; y una curva de temperatura constante (las líneas azul claro) es una **isoterma**.

Evalúe su comprensión de la sección 19.5 ¿Cuáles de los procesos de la figura 19.7 son isocóricos? ¿Cuáles son isobáricos? ¿Es posible saber si alguno de los procesos es isotérmico o adiabático?

19.6 Energía interna de un gas ideal

Ahora demostraremos que, para un gas ideal, la energía interna U depende sólo de la temperatura, no de la presión ni del volumen. Consideremos de nuevo el experimento de expansión libre descrito en la sección 19.3. Un recipiente térmicamente aislado con paredes rígidas se divide en dos compartimentos usando una membrana (figura 19.17). Un compartimiento tiene una cantidad de gas ideal; el otro está al vacío.

Si la membrana se rompe o se elimina, el gas se expande para llenar ambas partes del recipiente. El gas no efectúa trabajo sobre su entorno porque las paredes del recipiente no se mueven, y no fluye calor a través del aislante. Por lo tanto, Q y W son cero, y la energía interna U es constante. Esto se cumple para cualquier sustancia, se trate de un gas ideal o no.

¿Cambia la *temperatura* durante una expansión libre? Supongamos que *sí* cambia, aunque la energía interna no lo hace. En tal caso, debemos concluir que la energía interna depende de la temperatura y el volumen, o bien de la temperatura y la presión, aunque ciertamente no sólo de la temperatura. En cambio, si T es constante durante una expansión libre, para la cual sabemos que U es constante a pesar de que tanto p como V cambian, tendremos que concluir que U depende sólo de T, no de p ni de V.

Muchos experimentos han demostrado que, cuando un gas de baja densidad sufre una expansión libre, su temperatura *no* cambia. Tal gas es en esencia el gas ideal. La conclusión es que

La energía interna de un gas ideal depende sólo de su temperatura, no de su presión ni de su volumen.

Esta propiedad, además de la ecuación de estado del gas ideal, forma parte del modelo de gas ideal. Cerciórese de entender que, para el gas ideal, U sólo depende de T, pues usaremos esto muchas veces.

En el caso de los gases que no se comportan como el gas ideal, hay cambios de temperatura durante las expansiones libres, aunque la energía interna sea constante. Ello indica que la energía interna no puede depender *sólo* de la temperatura; debe depender también de la presión. Desde la perspectiva microscópica, en la que U es la suma de las energías cinéticas y potenciales de todas las partículas que constituyen el sistema, esto no es sorprendente. Los gases de comportamiento no ideal suelen tener fuerzas de atracción intermoleculares y, cuando sus moléculas se separan, aumentan las energías potenciales correspondientes. Si la energía interna total es constante, las energías cinéticas deben disminuir. La temperatura está relacionada directamente con la energía *cinética* molecular; por lo tanto, en un gas así, una expansión libre usualmente va acompañada de una *caída* en la temperatura.

Evalúe su comprensión de la sección 19.6 ¿Es probable que la energía interna de un sólido sea independiente de su volumen, como sucede con el gas ideal? Explique su razonamiento. (*Sugerencia:* véase la figura 18.20.)

19.7 Capacidad calorífica del gas ideal

Definimos el calor específico y la capacidad calorífica molar en la sección 17.5. También comentamos al final de esa sección que el calor específico o la capacidad calorífica molar de una sustancia dependen de las condiciones en que se agrega calor. Suele ser más fácil medir la capacidad calorífica de un gas en un recipiente cerrado en condiciones de volumen constante. La cantidad correspondiente es la **capacidad calorífica molar a volumen constante**, que se denota con C_V. En el caso de sólidos y líquidos, tales mediciones generalmente se realizan en la atmósfera a presión atmosférica constante, y llamamos a la cantidad correspondiente **capacidad calorífica molar a presión constante**, C_p. Si p y V no son constantes, tenemos un número infinito de capacidades caloríficas posibles.

Consideremos la C_V y C_p del gas ideal. Para medir C_V, elevamos la temperatura del gas ideal en un recipiente rígido de volumen constante (despreciando su expansión térmica; figura 19.18a). Para medir C_p, dejamos que el gas se expanda apenas lo suficiente como para mantener la presión constante al aumentar la temperatura (figura 19.18b).

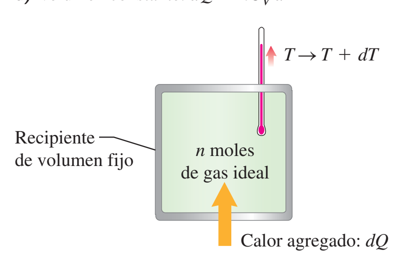
¿Por qué son diferentes estas dos capacidades caloríficas molares? La respuesta está en la primera ley de la termodinámica. En un aumento de temperatura con volumen constante, el sistema no efectúa trabajo y el cambio de energía interna ΔU es igual al calor agregado Q. En un aumento de temperatura a presión constante, en cambio, el volumen *debe* aumentar; si no, la presión (dada por la ecuación de estado del gas ideal, $p = nRT/V$) no se podría permanecer constante. Al expandirse el material, realiza un trabajo W. Según la primera ley,

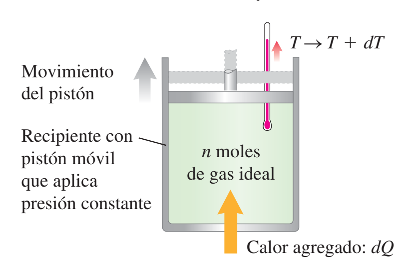
$$Q = \Delta U + W \qquad (19.11)$$

Para un aumento de temperatura dado, el cambio de energía interna ΔU de un gas con comportamiento ideal tiene el mismo valor sin importar el proceso (recuerde que la energía interna del gas ideal sólo depende de la temperatura, no de la presión ni del volumen). La ecuación (19.11) indica entonces que el suministro de calor en un proceso a presión constante debe ser *mayor* que en uno a volumen constante, porque se requiere energía adicional para el trabajo W realizado durante la expansión. Así, C_p del gas ideal es mayor que C_V. La gráfica pV de la figura 19.19 muestra esta relación. Para el aire, C_p es un 40% mayor que C_V.

En el caso de unas cuantas sustancias (una de las cuales es el agua entre 0 °C y 4 °C) el volumen *disminuye* durante el calentamiento. En este caso, W es negativo, el suministro de calor es *menor* que en el caso a volumen constante, y C_p es *menor* que C_V.

19.18 Medición de la capacidad calorífica molar de un gas ideal a) a volumen constante y b) a presión constante.





Relación entre C_p y C_V para un gas ideal

Podemos deducir una relación sencilla entre C_p y C_V para el gas ideal. Considere primero el proceso a *volumen* constante. Colocamos n moles de gas ideal a temperatura T en un recipiente de volumen constante, que colocamos en contacto térmico con un cuerpo más caliente; una cantidad infinitesimal de calor dQ fluye hacia el gas, y su temperatura aumenta en una cantidad infinitesimal dT. Por la definición de C_V, la capacidad calorífica molar a volumen constante,

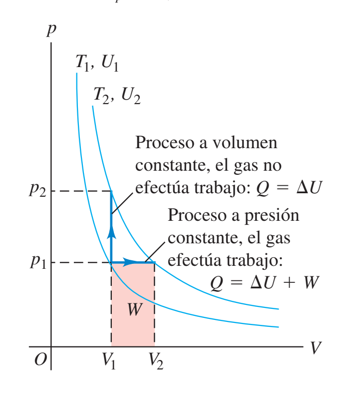
$$dQ = nC_V\,dT \qquad (19.12)$$

La presión aumenta durante este proceso, pero el gas no realiza trabajo ($dW = 0$) porque el volumen es constante. La primera ley en forma diferencial [ecuación (19.6)] es $dQ = dU + dW$. Puesto que $dW = 0$, $dQ = dU$ y la ecuación (19.12) también puede escribirse como

$$dU = nC_V\,dT \qquad (19.13)$$

Considere ahora un proceso *a presión* constante con el mismo cambio de temperatura dT. Colocamos el mismo gas en un cilindro con un pistón que permitimos moverse apenas lo suficiente para mantener una presión constante, como se indica en la figura 19.18b. Otra vez, ponemos el sistema en contacto con un cuerpo más caliente. Al fluir calor hacia el gas, se expande a presión constante y efectúa trabajo. Por la

19.19 Elevación de la temperatura del gas ideal de T_1 a T_2 mediante un proceso a volumen o a presión constante. En el gas ideal, U depende sólo de T, así que ΔU es el mismo en ambos procesos. Sin embargo, en el proceso a presión constante, es preciso agregar más calor Q para aumentar U y también efectuar un trabajo W. Por lo tanto, $C_p > C_V$.





8.7 Capacidad calorífica
8.8 Proceso isocórico
8.9 Proceso isobárico
8.10 Proceso isotérmico

definición de C_p, la capacidad calorífica molar a presión constante, la cantidad de calor dQ que entra en el gas es

$$dQ = nC_p\, dT \tag{19.14}$$

El trabajo dW efectuado por el gas en este proceso a presión constante es

$$dW = p\, dV$$

También podemos expresar dW en términos del cambio de temperatura dT usando la ecuación de estado del gas ideal, $pV = nRT$. Al ser p constante, el cambio de V es proporcional al cambio de T:

$$dW = p\, dV = nR\, dT \tag{19.15}$$

Ahora sustituimos las ecuaciones (19.14) y (19.15) en la primera ley, $dQ = dU + dW$. Obtenemos

$$nC_p\, dT = dU + nR\, dT \tag{19.16}$$

Llegamos ahora al meollo del cálculo. El cambio de energía interna dU para el proceso a presión constante está dado aún por la ecuación (19.13), $dU = nC_V\, dT$, *pese a que ahora el volumen no es constante*. ¿Por qué? Recuerde lo dicho en la sección 19.6: una de las propiedades del gas ideal es que su energía interna depende *sólo* de la temperatura. Por lo tanto, el *cambio* de energía interna durante un proceso debe estar determinado sólo por el cambio de temperatura. Si la ecuación (19.13) es válida para el gas ideal durante un proceso, debe ser válida para el gas ideal durante *cualquier* proceso con el mismo dT. Por ende, sustituimos dU en la ecuación (19.16) por $nC_V\, dT$:

$$nC_p\, dT = nC_V\, dT + nR\, dT$$

Al dividir cada término entre el factor común $n\, dT$:

$$C_p = C_V + R \qquad \text{(capacidades caloríficas molares del gas ideal)} \tag{19.17}$$

Como lo anticipamos, la capacidad calorífica molar del gas ideal a presión constante es *mayor* que a volumen constante; la diferencia es la constante de los gases R. (Desde luego, R debe expresarse en las mismas unidades que C_p y C_V, como J/mol · K.)

Hemos usado el modelo del gas ideal para deducir la ecuación (19.17), pero resulta que muchos gases reales a presiones moderadas se ajustan a él con muy poco error. En la tabla 19.1 se dan valores medidos de C_p y C_V para varios gases reales a baja presión; la diferencia en casi todos los casos es aproximadamente $R = 8.314$ J/mol · K.

La tabla también muestra que la capacidad calorífica molar de un gas está relacionada con su estructura molecular, como vimos en la sección 18.4. De hecho, las dos primeras columnas de la tabla 19.1 son las mismas de la tabla 18.1.

Tabla 19.1 Capacidades caloríficas molares de gases a baja presión

Tipo de gas	Gas	C_V (J/mol · K)	C_p (J/mol · K)	$C_p - C_V$ (J/mol · K)	$\gamma = C_p/C_V$
Monoatómico	He	12.47	20.78	8.31	1.67
	Ar	12.47	20.78	8.31	1.67
Diatómico	H_2	20.42	28.74	8.32	1.41
	N_2	20.76	29.07	8.31	1.40
	O_2	20.85	29.17	8.31	1.40
	CO	20.85	29.16	8.31	1.40
Poliatómico	CO_2	28.46	36.94	8.48	1.30
	SO_2	31.39	40.37	8.98	1.29
	H_2S	25.95	34.60	8.65	1.33

El cociente de capacidades caloríficas

La última columna de la tabla 19.1 da los valores del **cociente de capacidades caloríficas** adimensional, C_p/C_V, denotada por γ (la letra griega gamma).

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \qquad \text{(cociente de capacidades caloríficas)} \qquad (19.18)$$

(Esto también se llama "cociente de calores específicos".) En el caso de los gases, C_p siempre es mayor que C_V y γ siempre es mayor que 1. Esta cantidad desempeña un papel importante en los procesos *adiabáticos* de gases con comportamiento ideal, que estudiaremos en la siguiente sección.

Podemos usar nuestro análisis de la capacidad calorífica molar del gas ideal según la teoría cinética (sección 18.4) para predecir los valores de γ. Por ejemplo, un gas monoatómico con comportamiento ideal tiene $C_V = \frac{3}{2}R$. Por la ecuación (19.17),

$$C_p = C_V + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

así que

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R}{\frac{3}{2}R} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Como muestra la tabla 19.1, esto concuerda a grandes rasgos con los valores de γ calculados a partir de capacidades caloríficas medidas. Para la mayoría de los gases diatómicos a temperatura ambiente, $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40$$

lo cual también concuerda aproximadamente con los valores medidos.

Veamos un recordatorio final: para el gas ideal, el cambio de energía interna en *cualquier* proceso está dado por $\Delta U = nC_V\,\Delta T$, *sea constante el volumen o no*. Esta relación, muy útil en el siguiente ejemplo, se cumple para otras sustancias *sólo* si el volumen es constante.

Ejemplo 19.6 Enfriamiento de una habitación

Una recámara común contiene unos 2500 moles de aire. Calcule el cambio de energía interna de esta cantidad de aire cuando se enfría de 23.9 °C a 11.6 °C a presión constante de 1.00 atm. Trate el aire como gas ideal con $\gamma = 1.400$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es el cambio de energía interna ΔU de un gas ideal en un proceso a presión constante. Se nos dan el número de moles y el cambio de temperatura.

PLANTEAR: Quizá nuestro primer impulso sea obtener C_p y luego calcular Q a partir de $Q = nC_p\Delta T$, determinar el cambio de volumen, calcular el trabajo efectuado por el gas con $W = p\,\Delta V$ y, finalmente, usar la primera ley para obtener ΔU. Esto sería correcto, pero hay una forma mucho más fácil. Para un gas con comportamiento ideal, el cambio en la energía interna es $\Delta U = nC_V\,\Delta T$ en *cualquier* proceso, *sea constante el volumen o no*. Por lo tanto, sólo necesitamos obtener C_V y usar esta expresión para ΔU.

EJECUTAR: Nos dan el valor de γ para el aire, así que usamos las ecuaciones (19.17) y (19.18) para determinar C_V:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}$$

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K}}{1.400 - 1} = 20.79\ \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta U &= nC_V\,\Delta T\\ &= (2500\ \text{mol})(20.79\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(11.6\ °\text{C} - 23.9\ °\text{C})\\ &= -6.39 \times 10^5\ \text{J}\end{aligned}$$

EVALUAR: Un acondicionador de aire tendría que extraer esta energía interna del aire de la habitación y transferirla al aire exterior. Veremos cómo se hace esto en el capítulo 20.

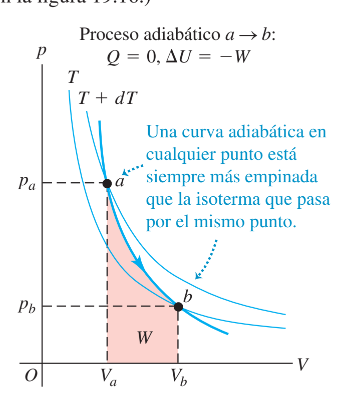
Evalúe su comprensión de la sección 19.7 Se quiere enfriar un cilindro de almacenamiento que contiene 10 moles de gas comprimido de 30 °C a 20 °C. ¿Para qué clase de gas sería más sencillo? i) un gas monoatómico; ii) un gas diatómico; iii) un gas poliatómico; iv) sería igual de sencillo para todos éstos.

19.8 Proceso adiabático para el gas ideal

Un proceso adiabático, definido en la sección 19.5, es un proceso en el que no hay transferencia de calor entre un sistema y su entorno. Esto es una idealización; no obstante, un proceso es aproximadamente adiabático si el sistema está bien aislado, o si el proceso se efectúa con tal rapidez que no hay tiempo para que ocurra un flujo de calor apreciable.

En un proceso adiabático, $Q = 0$ y, por la primera ley, $\Delta U = -W$. En la gráfica pV de la figura 19.20 se muestra un proceso adiabático para el gas ideal. Al expandirse el gas de V_a a V_b, realiza trabajo positivo, así que su energía interna disminuye y su temperatura baja. Si el punto a, que representa el estado inicial, está en una isoterma a temperatura $T + dT$, entonces el punto b para el estado final está en una isoterma distinta a una temperatura menor T. Para el gas ideal, una curva adiabática en cualquier punto siempre es *más inclinada* que la isoterma que pasa por el mismo punto. Para una *compresión* adiabática de V_b a V_a, la situación se invierte y aumenta la temperatura.

19.20 Gráfica pV de un proceso adiabático ($Q = 0$) para el gas ideal. Al expandirse el gas de V_a a V_b, efectúa un trabajo positivo W sobre su entorno, su energía interna disminuye ($\Delta U = -W < 0$), y su temperatura baja de $T + dT$ a T. (También se muestra un proceso adiabático en la figura 19.16.)



El aire en los tubos de salida de los compresores de aire usados en las gasolineras y los equipos para pintar por aspersión y al llenar tanques de buceo siempre está más caliente que el aire que entra en el compresor; la razón es que la compresión es rápida y por ende casi adiabática. Hay *enfriamiento* adiabático cuando abrimos una botella de una refrescante bebida gaseosa. El gas inmediatamente arriba de la superficie del líquido se expande rápidamente en un proceso casi adiabático; la temperatura del gas baja tanto que el vapor de agua que contiene se condensa, formando una nube miniatura (véase la figura 19.14).

CUIDADO **"Calentamiento" y "enfriamiento" sin calor** Tenga presente que, al hablar de "calentamiento adiabático" y "enfriamiento adiabático", en realidad queremos decir "subir la temperatura" y "bajar la temperatura", respectivamente. En un proceso adiabático, el cambio de temperatura se debe al trabajo realizado por el sistema o sobre él; *no* hay flujo de calor.

Gas ideal adiabático: Relación entre V, T y p

ActivPhysics ONLINE
8.11 Proceso adiabático

Podemos deducir una relación entre el volumen y los cambios de temperatura para un proceso adiabático infinitesimal en el gas ideal. La ecuación (19.13) da el cambio de energía interna dU para *cualquier* proceso del gas ideal, adiabático o no, así que tenemos $dU = nC_V\,dT$. Además, el trabajo efectuado por el gas durante el proceso está dado por $dW = p\,dV$. Entonces, dado que $dU = -dW$ para un proceso adiabático, tenemos

$$nC_V\,dT = -p\,dV \qquad (19.19)$$

Para obtener una relación que contenga sólo el volumen V y la temperatura T, eliminamos p usando la ecuación del gas ideal en la forma $p = nRT/V$. Después de sustituir esto en la ecuación (19.19) y reacomodar:

$$nC_V\,dT = -\frac{nRT}{V}\,dV$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = 0$$

El coeficiente R/C_V se puede expresar en términos de $\gamma = C_p/C_V$. Tenemos

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1$$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0 \qquad (19.20)$$

Dado que γ siempre es mayor que 1 para un gas, $(\gamma - 1)$ siempre es positivo. Esto implica que, en la ecuación (19.20), dV y dT siempre tienen signos opuestos. Una *expansión* adiabática de un gas ideal ($dV > 0$) siempre sucede con una *caída* de temperatura ($dT < 0$), y una *compresión* adiabática ($dV < 0$) siempre va acompañada de un *aumento* de temperatura ($dT > 0$); esto confirma nuestra predicción.

Para cambios finitos de temperatura y volumen, integramos la ecuación (19.20):

$$\ln T + (\gamma - 1)\ln V = \text{constante}$$
$$\ln T + \ln V^{\gamma-1} = \text{constante}$$
$$\ln\left(TV^{\gamma-1}\right) = \text{constante}$$

y, por último,

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \tag{19.21}$$

Así, para un estado inicial (T_1, V_1) y un estado final (T_2, V_2),

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \quad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \tag{19.22}$$

Puesto que usamos la ecuación del gas ideal para deducir las ecuaciones (19.21) y (19.22), las T siempre deben ser temperaturas *absolutas* (Kelvin).

También podemos convertir la ecuación (19.21) en una relación entre la presión y el volumen, eliminando T con la ayuda de la ecuación del gas ideal en la forma $T = pV/nR$. Sustituyendo esto en la ecuación (19.21), obtenemos

$$\frac{pV}{nR}V^{\gamma-1} = \text{constante}$$

o bien, puesto que n y R son constantes,

$$pV^{\gamma} = \text{constante} \tag{19.23}$$

Para un estado inicial (p_1, V_1) y un estado final (p_2, V_2), la ecuación (19.23) se convierte en

$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma} \qquad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \tag{19.24}$$

También podemos calcular el *trabajo* efectuado por un gas con comportamiento ideal durante un proceso adiabático. Sabemos que $Q = 0$ y $W = -\Delta U$ para *cualquier* proceso adiabático. Para el gas ideal, $\Delta U = nC_V(T_2 - T_1)$. Si conocemos el número de moles n y las temperaturas inicial y final, tenemos simplemente

$$W = nC_V(T_1 - T_2) \qquad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \tag{19.25}$$

También podemos usar $pV = nRT$ en esta ecuación para obtener

$$W = \frac{C_V}{R}(p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2) \qquad \text{(proceso adiabático, gas ideal)} \tag{19.26}$$

(Usamos el resultado $C_V = R/(\gamma - 1)$ del ejemplo 19.6.) Si el proceso es una expansión, la temperatura baja, T_1 es mayor que T_2, p_1V_1 es mayor que p_2V_2 y el trabajo *es positivo*, como esperaríamos. Si el proceso es una compresión, el trabajo es negativo.

En todo este análisis de los procesos adiabáticos, hemos usado la ecuación de estado del gas ideal, que sólo es válida para estados de *equilibrio*. Estrictamente hablando, nuestros resultados sólo son válidos para un proceso tan rápido, que no permite un intercambio de calor apreciable con el entorno (así que $Q = 0$ y el proceso es adiabático); pero que es lo bastante lento como para que el sistema no se aleje mucho del equilibrio térmico y mecánico. Aun si no se satisfacen estrictamente estas condiciones, las ecuaciones (19.22), (19.24) y (19.26) dan aproximaciones útiles.

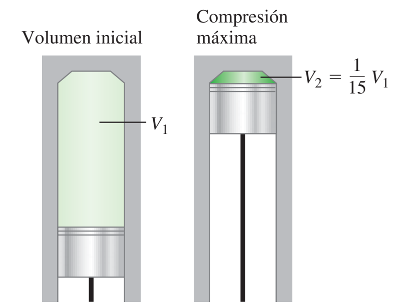
Ejemplo 19.7 Compresión adiabática en un motor a diesel

La razón de compresión de un motor a diesel es de 15 a 1; esto implica que el aire de los cilindros se comprime a $\frac{1}{15}$ de su volumen inicial (figura 19.21). Si la presión inicial es de 1.01×10^5 Pa y la temperatura inicial es de 27 °C (300 K), calcule la presión y temperatura finales después de la compresión. El aire es en su mayoría una mezcla de oxígeno y nitrógeno diatómicos; trátelo como gas ideal con $\gamma = 1.40$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como este problema tiene que ver con la compresión adiabática de un gas ideal, podemos utilizar los conceptos de esta sección.

19.21 Compresión adiabática de aire en un cilindro de un motor diesel.



PLANTEAR: Nos dan la presión inicial $p_1 = 1.01 \times 10^5$ Pa y la temperatura inicial $T_1 = 300$ K, y nos dicen que la relación entre los volúmenes inicial y final es $V_1/V_2 = 15$. Podemos obtener la temperatura final T_2 con la ecuación (19.22); y la presión final p_2, con la ecuación (19.24).

EJECUTAR: Por la ecuación (19.22),

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = (300\text{ K})(15)^{0.40} = 886\text{ K} = 613\text{ °C}$$

Por la ecuación (19.24),

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} = (1.01 \times 10^5\text{ Pa})(15)^{1.40}$$
$$= 44.8 \times 10^5\text{ Pa} = 44\text{ atm}$$

EVALUAR: Si la compresión hubiera sido isotérmica, la presión final habría sido 15 atm; sin embargo, como la temperatura también aumenta durante una compresión adiabática, la presión final es mucho mayor. Cuando se inyecta combustible en los cilindros cerca del final de la carrera de compresión, la alta temperatura que el aire alcanza durante la compresión hace que el combustible se encienda espontáneamente, sin necesidad de bujías.

Ejemplo 19.8 Trabajo efectuado en un proceso adiabático

En el ejemplo 19.7, ¿cuánto trabajo efectúa el gas durante la compresión, si el volumen inicial del cilindro es de 1.00 L = 1.00×10^{-3} m³? Suponga que C_V para el aire es de 20.8 J/mol · K y $\gamma = 1.40$.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Nuestra incógnita es el trabajo efectuado *por* el gas durante la compresión adiabática. Nos dan el volumen inicial del gas y conocemos (del ejemplo anterior) los valores inicial y final de la temperatura y la presión.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (19.25) para determinar el trabajo efectuado. No nos dan el número de moles n, pero podemos calcularlo a partir de los datos, empleando la ecuación del gas ideal $pV = nRT$.

EJECUTAR: El número de moles es

$$n = \frac{p_1V_1}{RT_1} = \frac{(1.01 \times 10^5\text{ Pa})(1.00 \times 10^{-3}\text{ m}^3)}{(8.314\text{ J/mol}\cdot\text{K})(300\text{ K})}$$
$$= 0.0405\text{ mol}$$

y la ecuación (19.25) da

$$W = nC_V(T_1 - T_2)$$
$$= (0.0405\text{ mol})(20.8\text{ J/mol}\cdot\text{K})(300\text{ K} - 886\text{ K})$$
$$= -494\text{ J}$$

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado con la ecuación (19.26), la expresión alterna para el trabajo efectuado por el gas ideal en un proceso adiabático:

$$W = \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2)$$
$$= \frac{1}{1.40 - 1}\left[\begin{array}{l}(1.01 \times 10^5\text{ Pa})(1.00 \times 10^{-3}\text{ m}^3)\\ -(44.8 \times 10^5\text{ Pa})\left(\dfrac{1.00 \times 10^{-3}\text{ m}^3}{15}\right)\end{array}\right]$$
$$= -494\text{ J}$$

El trabajo es negativo porque el gas se comprime.

Evalúe su comprensión de la sección 19.8 Usted tiene cuatro muestras de gas ideal, cada una de las cuales contiene el mismo número de moles de gas y tiene los mismos temperatura inicial, volumen y presión. Luego comprime cada muestra a la mitad de su volumen inicial. Ordene de mayor a menor las cuatro muestras, de acuerdo con el valor de su presión final. i) un gas monoatómico comprimido isotérmicamente; ii) un gas monoatómico comprimido adiabáticamente; iii) un gas diatómico comprimido isotérmicamente; iv) un gas diatómico comprimido adiabáticamente.

CAPÍTULO 19 RESUMEN

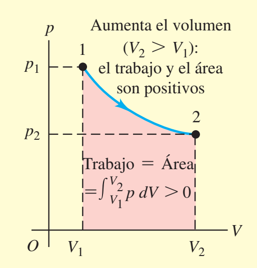
Calor y trabajo en los procesos termodinámicos: Un sistema termodinámico puede intercambiar energía con su entorno por transferencia de calor o mediante trabajo mecánico. Cuando un sistema a presión p cambia su volumen de V_1 a V_2, efectúa una cantidad de trabajo W dada por la integral de p con respecto al volumen. Si la presión es constante, el trabajo efectuado es igual a p multiplicado por el cambio de volumen. Un valor negativo de W implica que se efectúa trabajo sobre el sistema. (Véase el ejemplo 19.1.)

En cualquier proceso termodinámico, el calor agregado al sistema y el trabajo efectuado por el sistema no sólo dependen de los estados inicial y final, sino también dependen de la trayectoria (la serie de estados intermedios por los que pasa el sistema).

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV \qquad (19.2)$$

$$W = p(V_2 - V_1) \qquad (19.3)$$

(sólo presión constante)



La primera ley de la termodinámica: La primera ley de la termodinámica establece que, cuando se agrega calor Q a un sistema mientras éste efectúa un trabajo W, la energía interna U cambia en una cantidad igual a $Q - W$. Esta ley también puede plantearse para un proceso infinitesimal. (Véanse los ejemplos 19.2, 19.3 y 19.5.)

La energía interna de cualquier sistema termodinámico depende exclusivamente de su estado. El cambio de energía interna durante cualquier proceso depende únicamente de los estados inicial y final, no de la trayectoria seguida. La energía interna de un sistema aislado es constante. (Véase el ejemplo 19.4.)

$$\Delta U = Q - W \qquad (19.4)$$

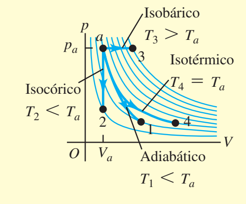
$$dU = dQ - dW \qquad (19.6)$$

(proceso infinitesimal)

Entorno
(ambiente)
$Q = 150$ J
$W = 100$ J
Sistema
$\Delta U = Q - W = +50$ J

Tipos de procesos termodinámicos importantes:

- Proceso adiabático: no entra calor al sistema ni sale de él, $Q = 0$.
- Proceso isocórico: volumen constante, $W = 0$.
- Proceso isobárico: presión constante, $W = p(V_2 - V_1)$.
- Proceso isotérmico: temperatura constante.

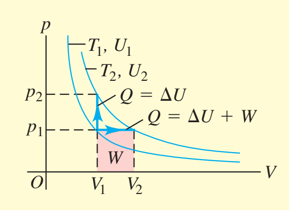


Termodinámica de los gases ideales: La energía interna del gas ideal depende únicamente de su temperatura, no de su presión ni de su volumen. En el caso de otras sustancias, la energía interna generalmente depende tanto de la presión como de la temperatura.

Las capacidades caloríficas molares C_V y C_p del gas ideal difieren por R, la constante del gas ideal. El cociente adimensional de capacidades caloríficas, C_p/C_V, se denota con γ. (Véase el ejemplo 19.6.)

$$C_p = C_V + R \qquad (19.17)$$

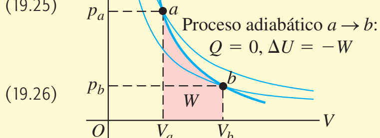
$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} \qquad (19.18)$$



Procesos adiabáticos en gases ideales: En un proceso adiabático de un gas con comportamiento ideal, las cantidades $TV^{\gamma-1}$ y pV^{γ} son constantes. El trabajo efectuado por el gas ideal durante una expansión adiabática puede expresarse en términos de los valores inicial y final de la temperatura, o en términos de los valores inicial y final de la presión y el volumen. (Véanse los ejemplos 19.7 y 19.8.)

$$W = nC_V(T_1 - T_2) = \frac{C_V}{R}(p_1V_1 - p_2V_2) \qquad (19.25)$$

$$= \frac{1}{\gamma - 1}(p_1V_1 - p_2V_2) \qquad (19.26)$$



Términos clave

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

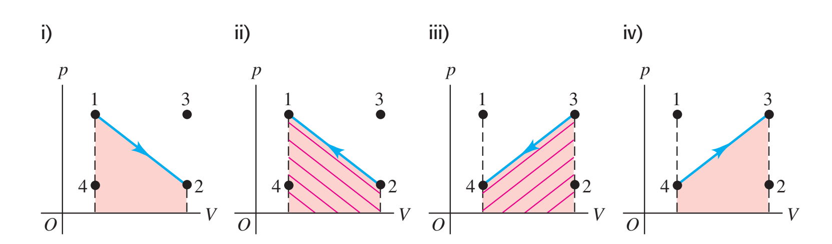
No. El trabajo efectuado por un *gas* cuando su volumen cambia de V_1 a V_2 es igual a la integral $\int p\, dV$ entre esos dos límites de volumen. Si el gas se contrae, el volumen final V_2 es menor que el volumen inicial V_1, y el gas efectúa trabajo negativo. Para impulsar la locomotora, el gas debe efectuar trabajo positivo, así que el gas no contribuye a la propulsión mientras se contrae.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

19.1 Respuestas: negativo, positivo, positivo Sale calor del café, así que $Q_{\text{café}} < 0$; entra calor en la taza de aluminio, así que $Q_{\text{aluminio}} > 0$. En mecánica, diríamos que se efectúa trabajo negativo *sobre* el bloque, porque la superficie ejerce sobre éste una fuerza que se opone al movimiento del bloque. En termodinámica, en cambio, usamos la convención opuesta y decimos que $W > 0$, lo cual implica que el bloque efectúa trabajo positivo sobre la superficie.

19.2 Respuesta: ii) El trabajo efectuado en una expansión se representa mediante el área bajo la curva de presión p contra volumen V. En una expansión isotérmica, la presión se reduce conforme el volumen aumenta, así que la grafica pV se asemeja a la figura 19.6a y el trabajo efectuado es igual al área sombreada bajo la curva azul desde el punto 1 hasta el punto 2. No obstante, si la expansión es a presión constante, la curva de p contra V sería la misma que la línea horizontal punteada a presión p_2 de la figura 19.6a. El área bajo esta línea punteada es menor que el área bajo la curva azul para una expansión isotérmica, de manera que se efectúa menos trabajo en una expansión a presión constante que en una expansión isotérmica.

19.3 Respuestas: i) y iv) (empate); ii) y iii) (empate) La siguiente figura muestra las gráficas pV para cada uno de los cuatro procesos. El área trapezoidal bajo la curva y, por lo tanto, el valor absoluto del trabajo, es la misma en los cuatro casos. En los casos i) y iv) el volumen aumenta, de manera que el sistema realiza trabajo positivo conforme se expande contra su entorno. En los casos ii) y iii) el volumen se reduce, así que el sistema efectúa trabajo negativo (que se indica con el "achurado") conforme el entorno empuja hacia adentro sobre él.



19.4 Respuestas: ii), i) y iv) (empate); iii) En la expresión $\Delta U = Q - W$, Q es el calor *agregado* al sistema y W es el trabajo efectuado *por* el sistema. Si se transfiere calor desde el sistema hacia su entorno, Q es negativo; Si el trabajo es efectuado sobre el sistema, W es negativo. Por ello, tenemos i) $Q = -250\text{ J}$, $W = -250\text{ J}$, $\Delta U = -250\text{ J} - (-250\text{ J}) = 0$; ii) $Q = 250\text{ J}$, $W = -250\text{ J}$, $\Delta U = 250\text{ J} - (-250\text{ J}) = 500\text{ J}$; iii) $Q = -250\text{ J}$, $W = 250\text{ J}$, $\Delta U = -250\text{ J} - 250\text{ J} = -500\text{ J}$; y iv) $Q = 250\text{ J}$, $W = 250\text{ J}$, $\Delta U = 250\text{ J} - 250\text{ J} = 0$.

19.5 Respuestas: 1 → 4 y 3 → 2 son isocóricos; 1 → 3 y 4 → 2 son isobáricos; no En un diagrama pV como los de la figura 19.7, los procesos isocóricos se representan con líneas verticales (de volumen constante); y los procesos isobáricos, con líneas horizontales (de presión constante). El proceso 1 → 2 de la figura 19.7 se representa con una línea curva que, a primera vista, se parece a los procesos adiabático e isotérmico del gas ideal en la figura 19.16. Pero sin más información, es imposible saber si el proceso 1 → 2 es isotérmico, adiabático o ninguno de ellos.

19.6 Respuesta: no Utilizando el modelo de un sólido de la figura 18.20, vemos que la energía interna de un sólido *si* depende de su volumen. Comprimir el sólido implica comprimir los "resortes" que hay entre los átomos, aumentando la energía potencial que almacenan y, por ende, la energía interna del sólido.

19.7 Respuesta: i) Para un número dado de n moles y un cambio de temperatura ΔT dado, la cantidad de calor que debe transferirse fuera de un volumen fijo de aire es $Q = nC_V\Delta T$. Así, la cantidad de transferencia de calor necesaria es menor para el gas con el valor de C_V menor. De la tabla 19.1, el valor de C_V es el menor en los gases monoatómicos.

19.8 Respuestas: ii), iv) y i) y iii) (empate) Las muestras i) y iii) están isotérmicamente comprimidas, así que $pV =$ constante. El volumen de cada muestra disminuye a la mitad de su valor inicial, por lo que la presión final es del doble de la presión inicial. En cambio, las muestras ii) y iv) están adiabáticamente comprimidas, de manera que $pV^{\gamma} =$ constante y la presión aumenta en un factor de 2^{γ}. La muestra ii) es un gas monoatómico para el que $\gamma = \frac{5}{3}$, y su presión final es $2^{\frac{5}{3}} = 3.17$ veces mayor que la presión inicial. La muestra iv) es un gas diatómico para el que $\gamma = \frac{7}{5}$, y su presión final es mayor que la presión inicial en un factor de $2^{\frac{7}{5}} = 2.64$.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com** 

Preguntas para análisis

P19.1. En los siguientes procesos, el trabajo efectuado por el sistema (definido como un gas que se expande o se contrae) sobre el ambiente es positivo o negativo? *a*) La expansión de una mezcla aire-gasolina quemada en el cilindro de un motor automotriz; *b*) abrir una botella de champaña; *c*) llenar un tanque de buceo con aire comprimido; *d*) la abolladura parcial de una botella de agua vacía y cerrada, al conducir descendiendo desde las montañas hacia el nivel del mar.

P19.2. No es correcto decir que un cuerpo contiene cierta cantidad de calor; no obstante, un cuerpo puede transferir calor a otro. Entonces, ¿cómo un cuerpo cede algo que no tiene?

P19.3. En que situaciones debe usted efectuar más trabajo: al inflar un globo al nivel del mar o al inflar el mismo globo con el mismo volumen en la cima del monte McKinley? Explique su repuesta en términos de presión y cambio de volumen.

P19.4. Si le dan los estados inicial y final de un sistema y el cambio correspondiente de energía interna, ¿podría determinar si dicho cambio se debió a trabajo o a transferencia de calor? Explique su respuesta.

P19.5. Comente la aplicación de la primera ley de la termodinámica a una alpinista que ingiere alimentos, se calienta y suda mucho durante un ascenso, y efectúa mucho trabajo mecánico para subir su cuerpo a la cima. La alpinista también se acalora durante el descenso. ¿La fuente de esta energía es la misma que durante el ascenso?

P19.6. Cuando se derrite hielo a 0 °C, su volumen disminuye. ¿El cambio de energía interna es mayor, menor o igual que el calor agregado? ¿Cómo lo sabe?

P19.7. Usted sostiene un globo inflado sobre un ducto de aire caliente de su casa y observa que se expande lentamente. Después, usted lo aleja del ducto y lo deja enfriar a la temperatura ambiente. Durante la expansión, ¿cuál era mayor: el calor agregado al globo o el trabajo efectuado por el aire dentro de éste? Explique su respuesta. (Suponga que el aire es un gas ideal.) Una vez que el globo regresa a la temperatura ambiente, ¿cómo el calor neto ganado o perdido por el aire dentro del globo se compara con el trabajo neto efectuado sobre el aire circundante o con el trabajo realizado por éste?

P19.8. Usted hornea galletas con chispas de chocolate y las coloca aun calientes dentro un recipiente con una tapa suelta (sin cerrar herméticamente). ¿Qué tipo de proceso sufre el aire dentro del recipiente, conforme gradualmente las galletas se enfrían a temperatura ambiente (isotérmico, isocórico, adiabático, isobárico o alguna combinación de ellos)? Explique su respuesta.

P19.9. Imagine un gas constituido exclusivamente por electrones con carga negativa. Las cargas iguales se repelen, así que los electrones ejercen fuerzas de repulsión entre sí. ¿Cabría esperar que la temperatura de semejante gas aumentara, disminuyera o se mantuviera igual durante una expansión libre? ¿Por qué?

P19.10. Hay unos cuantos materiales que se contraen cuando aumenta su temperatura, como el agua entre 0 °C y 4 °C. ¿Cabría esperar que C_p para tales materiales fuera mayor o menor que C_V? ¿Por qué?

P19.11. Si soplamos sobre el dorso de nuestra mano con la boca bien abierta, el aliento se siente tibio. En cambio, si cerramos parcialmente la boca como para pronunciar una "o" y soplamos sobre la mano, el aliento se siente fresco. ¿Por qué?

P19.12. En los globos aerostáticos el aire dentro de la envoltura del globo se calienta por un orificio en la pare inferior usando un quemador de propano. El aire caliente dentro de la envoltura permanece a presión atmosférica debido al orificio inferior, y a que el volumen de la envoltura es esencialmente constante. Así, cuando el piloto enciende el quemador para calentar el aire, el volumen de la envoltura y la presión dentro de ésta son constantes, aunque la temperatura aumenta. La ley del gas ideal parecería contradecir esto. ¿Por qué?

P19.13. En un tibio día de verano, se usó un cilindro grande de gas comprimido (propano o butano), para alimentar varios quemadores grandes de gas durante una comida al aire libre. Después de un rato, se formó escarcha en el exterior del tanque. ¿Por qué sucedió esto?

P19.14. Cuando se usa una bomba manual para inflar los neumáticos de una bicicleta, la bomba se calienta después de un rato. ¿Por qué? ¿Qué sucede con la temperatura del aire en la bomba al comprimirse? ¿Por qué sucede así? Cuando se levanta el mango de la bomba para succionar aire exterior hacia el interior de ésta, ¿qué sucede con la temperatura del aire admitido? De nuevo, ¿por qué sucede eso?

P19.15. En el carburador de un motor para automóvil o avión, el aire fluye por una abertura relativamente pequeña y luego se expande. Si el tiempo es fresco y con niebla, llega a formarse hielo en esa abertura, aun cuando la temperatura del aire exterior esté arriba del punto de congelación. ¿Por qué?

P19.16. En un día soleado, se forman grandes "burbujas" de aire sobre la tierra que calienta el Sol, se expanden gradualmente y, por último, se liberan para subir por la atmósfera. Las aves y los planeadores aprovechan estás "corrientes térmicas" para ganar altitud con facilidad. Esta expansión es en esencia un proceso adiabático. ¿Por qué?

P19.17. Los vientos prevalecientes en la isla hawaiana de Kauai soplan del noreste. Los vientos se enfrían al subir por las faldas del monte Waialeale (altura 1523 m), haciendo que se condense vapor de agua y que llueva. Hay mucha más precipitación en la cima que en la base de la montaña. De hecho, el monte Waialeale es el lugar más lluvioso del planeta, con una precipitación media de 11.7 m al año. ¿Qué hace que los vientos se enfríen?

P19.18. Aplicando las mismas consideraciones que en la pregunta 19.17, explique por qué la isla de Niihau, unos cuantos kilómetros al suroeste de Kauai, es casi un desierto, y los campos agrícolas de esa isla necesitan riego.

P19.19. En un proceso a volumen constante, $dU = nC_V dT$. En cambio, en un proceso a presión constante, *no* se cumple que $dU = nC_p\, dT$. ¿Por qué no?

P19.20. Cuando un gas se comprime adiabáticamente contra el aire circundante, su temperatura aumenta aunque no fluya calor hacia el gas. ¿De dónde proviene la energía que eleva la temperatura?

P19.21. Cuando un gas se expande adiabáticamente, efectúa trabajo sobre su entorno. Pero, si no fluye calor hacia el gas, ¿de dónde proviene la energía para efectuar trabajo?

P19.22. El gas que se utiliza para separar los dos isótopos de uranio ^{235}U y ^{238}U tiene la fórmula UF_6. Si se agrega calor a tasas iguales a un mol de UF_6 gaseoso y a un mol de H_2 gaseoso, ¿cuál temperatura esperaría usted que se elevara más rápido? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 19.2 Trabajo realizado al cambiar el volumen y Sección 19.3 Trayectoria entre estados termodinámicos

19.1. Dos moles de gas ideal se calientan a presión constante desde $T = 27$ °C hasta 107 °C. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para este proceso. *b*) Calcule el trabajo efectuado por el gas.

19.2. Seis moles de gas ideal están en un cilindro provisto en un extremo con un pistón móvil. La temperatura inicial del gas es 27.0 °C y la presión es constante. Como parte de un proyecto de diseño de maquinaria, calcule la temperatura final del gas una vez que haya efectuado 1.75×10^3 J de trabajo.

19.3. Dos moles de gas ideal están comprimidos en un cilindro a temperatura constante de 85.0 °C hasta que se triplique la presión original. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para este proceso. *b*) Calcule la cantidad de trabajo efectuado.

19.4. Un cilindro metálico con paredes rígidas contiene 2.50 moles de oxígeno gaseoso. El gas se enfría hasta que la presión disminuye al 30.0% de su valor original. Se puede despreciar la contracción térmica del cilindro. *a*) Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) Calcule el trabajo efectuado por el gas.

19.5. Durante el tiempo en que 0.305 moles de un gas ideal sufren una compresión isotérmica a 22.0 °C, su entorno efectúa 518 J de trabajo sobre él. *a*) Si la presión final es de 1.76 atm, ¿cuál fue la presión inicial? *b*) Dibuje una gráfica pV para e1 proceso.

19.6. Un gas se somete a dos procesos. En el primero, el volumen permanece constante en 0.200 m^3 y la presión aumenta de 2.00×10^5 Pa a 5.00×10^5 Pa. El segundo proceso es una compresión a un volumen de 0.120 m^3, a presión constante de 5.00×10^5 Pa. *a*) Muestre ambos procesos en una gráfica pV. *b*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas durante los dos procesos.

19.7. Trabajo efectuado en un proceso cíclico. *a*) En la figura 19.7a, considere el ciclo cerrado $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, que es un proceso *cíclico* donde los estados inicial y final son el mismo. Calcule el trabajo total efectuado por el sistema en este proceso y demuestre que es igual al área encerrada por el ciclo. *b*) ¿Qué relación hay entre el trabajo efectuado por el proceso del inciso *a*) y el efectuado si se recorre el ciclo en la dirección opuesta, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$? Explique su respuesta.

Sección 19.4 Energía interna y la primera ley de la termodinámica

19.8. Usted clausura (tapa) la boquilla de una bomba para inflar neumáticos de bicicleta y muy lentamente oprime el émbolo, de manera que el aire interior se comprime hasta la mitad de su volumen original. Suponga que el aire se comporta como un gas ideal. Si usted hace esto tan lentamente que la temperatura del aire dentro de la bomba nunca cambie: *a*) ¿el trabajo efectuado por el aire en la bomba es positivo o negativo? *b*) ¿El flujo de calor hacia el aire es positivo o negativo? *c*) ¿Qué puede decir acerca de las *magnitudes* relativas del flujo de calor y del trabajo? Explique su respuesta.

19.9. Un gas en un cilindro se expande desde un volumen de 0.110 m^3 a 0.320 m^3. Fluye calor hacia el gas con la rapidez mínima que permite mantener la presión constante a 1.80×10^5 Pa durante la expansión. El calor total agregado es de 1.15×10^5 J. *a*) Calcule el trabajo efectuado por el gas. *b*) Calcule el cambio de energía interna del gas. *c*) ¿Importa si el gas tiene comportamiento ideal o no? ¿Por qué?

19.10. Cinco moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal y temperatura inicial de 127 °C se expanden. Al hacerlo, absorben 1200 J de calor y efectúan 2100 J de trabajo. Calcule la temperatura final del gas.

19.11. Usted patea un balón de fútbol y lo comprime repentinamente a $\frac{2}{3}$ de su volumen original. En el proceso, efectúa 410 J de trabajo sobre el aire (que se supone un gas ideal) dentro del balón. *a*) ¿Cuál es el cambio en energía interna del aire dentro del balón debido a que se comprime? *b*) ¿La temperatura del aire dentro del balón aumenta o disminuye debido a la compresión? Explique su respuesta.

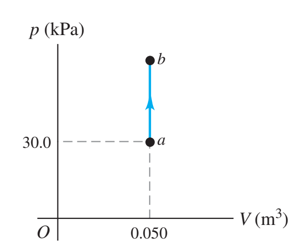
19.12. Un gas en un cilindro se mantiene a presión constante de 2.30×10^5 Pa mientras se enfría y se comprime de 1.70 m^3 a 1.20 m^3. La energía interna del gas disminuye 1.40×10^5 J. *a*) Calcule el trabajo efectuado por el gas. *b*) Obtenga el valor absoluto $|Q|$ del flujo de calor hacia o desde el gas, e indique la dirección del flujo. *c*) ¿Importa si el gas tiene comportamiento ideal o no? ¿Por qué?

19.13. Donas: ¡desayuno de campeones! Una dona representativa contiene 2.0 g de proteínas, 17.0 g de carbohidratos y 7.0 g de grasas. Los valores medios de energía alimentaria de esas sustancias son de 4.0 kcal/g para las proteínas y los carbohidratos, y de 9.0 kcal/g para las grasas. *a*) Al hacer ejercicio intenso, una persona representativa consume energía a una tasa de 510 kcal/h. ¿Cuánto tiempo hay que hacer ejercicio para "quemar" una dona? *b*) Si fuera posible convertir la energía de una dona en energía cinética del cuerpo entero, ¿con qué rapidez se podría mover una persona después de comer una dona? Suponga que la masa de la persona es de 60 kg y exprese su respuesta en m/s y en km/h.

19.14. Un líquido se agita irregularmente en un recipiente bien aislado, con lo que aumenta su temperatura. Considere el líquido como el sistema. *a*) ¿Se ha transferido calor? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Se ha efectuado trabajo? ¿Cómo lo sabe? ¿Por qué es importante que la agitación sea irregular? *c*) ¿Qué signo tiene ΔU? ¿Cómo lo sabe?

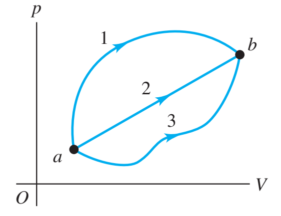
19.15. Un gas ideal se lleva de a a b en la gráfica pV que se muestra en la figura 19.22. Durante este proceso, se agregan 400 J de calor y se duplica la presión. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas o se efectúa sobre éste? Explique su respuesta. *b*) ¿Cómo la temperatura del gas en a se compara con su temperatura en b? Especifique. *c*) ¿Cómo la energía interna del gas en a se compara con la energía interna en b? De nuevo, especifique y explique su respuesta.

Figura 19.22 Ejercicio 19.15.



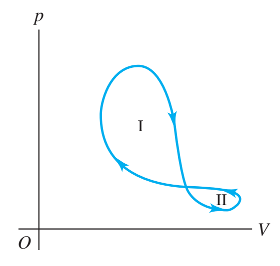
19.16. Un sistema se lleva del estado a al b por las tres trayectorias de la figura 19.23. *a*) ¿Por qué trayectoria el trabajo efectuado por el sistema es máximo? ¿Y menor? *b*) Si $U_b > U_a$, ¿por cuál trayectoria es mayor el valor absoluto $|Q|$ de la transferencia de calor? En esa trayectoria, ¿el sistema absorbe o desprende calor?

Figura 19.23 Ejercicio 19.16.



19.17. Un sistema termodinámico sufre un proceso cíclico como se muestra en la figura 19.24. El ciclo consiste en dos lazos cerrados, el lazo I y el lazo II. *a*) Durante un ciclo completo, ¿el sistema efectúa trabajo positivo o negativo? *b*) En cada lazo, I y II, ¿el trabajo neto efectuado por el sistema es positivo o negativo? *c*) Durante un ciclo completo, ¿entra calor en el sistema o sale de él? *d*) En cada lazo, I y II, ¿entra calor en el sistema o sale de él?

Figura 19.24 Ejercicio 19.17.



19.18. Un estudiante efectúa un experimento de combustión quemando una mezcla de combustible y oxígeno en una lata metálica de volumen constante rodeada por un baño de agua. Durante el experimento, la temperatura del agua aumenta. Considere la mezcla de combustible y oxígeno como el sistema. *a*) ¿Se transfirió calor? ¿Cómo lo sabe? *b*) ¿Se efectuó trabajo? ¿Cómo lo sabe? *c*) ¿Qué signo tiene ΔU? ¿Cómo lo sabe?

19.19. Agua en ebullición a alta presión. Cuando se hierve agua a una presión de 2.00 atm, el calor de vaporización es de 2.20×10^6 J/kg y el punto de ebullición es de 120 °C. A esta presión, 1.00 kg de agua tiene un volumen de 1.00×10^{-3} m^3, y 1.00 kg de vapor de agua tiene un volumen de 0.824 m^3. *a*) Calcule el trabajo efectuado cuando se forma 1.00 kg de vapor de agua a esta temperatura. *b*) Calcule el incremento en la energía interna del agua.

Sección 19.5 Tipos de procesos termodinámicos Sección 19.6 Energía interna del gas ideal, y Sección 19.7 Capacidad calorífica del gas ideal

19.20. Durante una compresión isotérmica de gas ideal, es preciso extraer 335 J de calor al gas para mantener la temperatura constante. ¿Cuánto trabajo efectúa el gas durante el proceso?

19.21. Un cilindro contiene 0.250 moles de dióxido de carbono (CO_2) gaseoso a una temperatura de 27.0 °C. El cilindro cuenta con un pistón sin fricción, el cual mantiene una presión constante de 1.00 atm sobre el gas. El gas se calienta hasta que su temperatura aumenta a 127.0 °C. Suponga que el CO_2 se puede tratar como gas ideal. *a*) Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa el gas en este proceso? *c*) ¿Sobre qué se efectúa ese trabajo? *d*) ¿Cuánto cambia la energía interna del gas? *e*) ¿Cuánto calor se suministró al gas? *f*) ¿Cuánto trabajo se habría efectuado si la presión hubiera sido 0.50 atm?

19.22. Un cilindro contiene 0.0100 moles de helio a $T = 27.0$ °C. *a*) ¿Cuánto calor se requiere para elevar la temperatura a 67.0 °C manteniendo constante el volumen? Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) Si, en vez del volumen, se mantiene constante la presión del helio, ¿cuánto calor se requiere para elevar la temperatura de 27.0 °C a 67.0 °C? Dibuje una gráfica pV para este proceso. *c*) ¿Qué explica la diferencia entre las respuestas a los incisos *a*) y *b*)? ¿En qué caso se requiere más calor? ¿Qué sucede con el calor adicional? *d*) Si el gas tiene comportamiento ideal, ¿cuánto cambia la energía interna en el inciso *a*)? ¿Y en el inciso *b*)? Compare las respuestas y explique cualquier diferencia.

19.23. En un experimento para simular las condiciones dentro de un motor de automóvil, 0.185 moles de aire a una temperatura de 780 K y a una presión de 3.00×10^6 Pa están contenidos en un cilindro cuyo volumen es de 40.0 cm^3. Después se transfieren 645 J de calor al cilindro. *a*) Si el volumen del cilindro se mantiene fijo, ¿qué temperatura final alcanza el aire? Suponga que el aire es prácticamente nitrógeno puro y use los datos de la tabla 19.1 aunque la presión no sea baja. Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) Calcule la temperatura final del aire, si se permite que el volumen del cilindro aumente mientras la presión se mantiene constante. Dibuje una gráfica pV para este proceso.

19.24. Un gas con comportamiento ideal se expande mientras la presión se mantiene constante. Durante este proceso ¿entra calor al gas o sale de él? Justifique su respuesta.

19.25. Fluye calor Q hacia un gas monoatómico con comportamiento ideal y el volumen aumenta mientras la presión se mantiene constante. ¿Qué fracción de la energía calorífica se usa para efectuar el trabajo de expansión del gas?

19.26. Cuando una cantidad de gas ideal monoatómico se expande a una presión constante de 4.00×10^4 Pa, el volumen del gas aumenta de 2.00×10^{-3} m^3 a 8.00×10^{-3} m^3. ¿Cuánto cambia la energía interna del gas?

19.27. Un cilindro con un pistón móvil contiene 3.00 moles de N_2 gaseoso (que se comporta como un gas ideal). *a*) El N_2 se calienta a volumen constante hasta que se agregan 1557 J de calor. Calcule el cambio de temperatura. *b*) Suponga que la misma cantidad de calor se agrega al N_2, pero en este tiempo se permite al gas expandirse mientras se mantiene a presión constante. Determine el cambio de temperatura. *c*) ¿En cuál caso, *a*) o *b*), la energía interna final del N_2 es mayor? ¿Cómo lo sabe? ¿Qué explica la diferencia entre ambos casos?

19.28. Tres moles de un gas monoatómico ideal se expanden a una presión constante de 2.50 atm; el volumen del gas cambia de 3.20×10^{-2} m^3 a 4.50×10^{-2} m^3. *a*) Calcule las temperaturas inicial y final del gas. *b*) Calcule la cantidad de trabajo que efectúa el gas al expandirse. *c*) Determine la cantidad de calor agregado al gas. *d*) Calcule el cambio de energía interna del gas.

19.29. La temperatura de 0.150 moles de gas ideal se mantiene constante en 77.0 °C mientras su volumen se reduce al 25.0% de su volumen inicial. La presión inicial del gas es de 1.25 atm. *a*) Determine el trabajo efectuado por el gas. *b*) Determine el cambio de energía interna. *c*) ¿El gas intercambia calor con su entorno? Si lo hace, ¿cuánto es? ¿El gas absorbe o desprende calor?

19.30. Propano (C_3H_8) gaseoso se comporta como gas ideal con $\gamma = 1.127$. Determine la capacidad calorífica molar a volumen constante y a presión constante.

19.31. Un experimentador agrega 970 J de calor a 1.75 moles de un gas ideal, para calentarlo de 10.0 °C a 25.0 °C a presión constante. El gas realiza $+223$ J de trabajo al expandirse. *a*) Calcule el cambio en la energía interna del gas. *b*) Calcule γ para el gas.

Sección 19.8 Proceso adiabático para el gas ideal

19.32. En un proceso adiabático con gas ideal, la presión disminuye. ¿La energía interna del gas aumenta o disminuye durante ese proceso? Explique su razonamiento.

19.33. Un gas monoatómico con comportamiento ideal que está a una presión de 1.50×10^5 Pa y ocupa un volumen de 0.0800 m^3 se comprime adiabáticamente a un volumen de 0.0400 m^3. *a*) Calcule la presión final. *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa el gas? *c*) Determine la razón temperatura final con temperatura inicial del gas. ¿Esta compresión calienta o enfría el gas?

19.34. El motor de un automóvil deportivo Ferrari F355 admite aire a 20.0 °C y 1.00 atm y lo comprime adiabáticamente a 0.0900 veces el volumen original. El aire se puede tratar como gas ideal con $\gamma = 1.40$. *a*) Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) Calcule la temperatura y presión finales.

19.35. Dos moles de monóxido de carbono (CO) están a una presión de 1.2 atm y ocupan un volumen de 30 litros. Después, el gas se comprime adiabáticamente a $\frac{1}{3}$ de ese volumen. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal. ¿Cuánto cambia su energía interna? ¿La energía interna aumenta o disminuye? ¿La temperatura del gas aumenta o disminuye durante el proceso? Explique su respuesta.

19.36. Un jugador rebota un balón de baloncesto en el piso, comprimiéndolo a un 80.0% de su volumen original. Dentro del balón el aire (que se supone esencialmente N_2 gaseoso) está originalmente a una temperatura de 20.0 °C y a una presión de 2.00 atm. El diámetro del balón es de 23.9 cm. *a*) ¿A qué temperatura el aire en el balón alcanzará su compresión máxima? *b*) ¿Cuánto cambia la energía interna del aire entre el estado original del balón y su máxima compresión?

19.37. Durante una expansión adiabática, la temperatura de 0.450 moles de argón (Ar) baja de 50.0 °C a 10.0 °C. El argón puede tratarse como gas ideal. *a*) Dibuje una gráfica pV para este proceso. *b*) ¿Cuánto trabajo realiza el gas? *c*) ¿Cuánto cambia la energía interna del gas?

19.38. Un cilindro contiene 0.100 moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal a una presión inicial de 1.00×10^5 Pa, en un volumen de 2.50×10^{-3} m^3. *a*) Calcule la temperatura inicial del gas en kelvins. *b*) Se permite que el gas se expanda al doble de su volumen inicial. Calcule la temperatura (en kelvins) y la presión finales del gas, si la expansión es i) isotérmica, ii) isobárica, iii) adiabática.

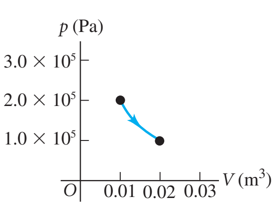
19.39. En un tibio día de verano, una masa grande de aire (presión atmosférica 1.01×10^5 pa) se calienta con el suelo a una temperatura de 26.0 °C y luego empieza a ascender por el aire circundante más frío. (Éste puede tratarse aproximadamente como un proceso adiabático. ¿Por qué?) Calcule la temperatura de la masa del aire cuando se ha elevado a un nivel donde la presión atmosférica es de sólo 0.850×10^5 Pa. Suponga que el aire es un gas ideal con $\gamma = 1.40$. (Esta tasa de enfriamiento con aire seco ascendente, que corresponde aproximadamente a 1 °C por 100 m de altura, se denomina *gradiente adiabático seco*.)

Problemas

19.40. La figura 19.25 muestra la gráfica pV para una expansión isotérmica de 1.50 moles de un gas ideal, a una temperatura de 15.0 °C. *a*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas? Explique su respuesta. *b*) Calcule el trabajo efectuado por el gas (o sobre éste) y el calor absorbido (o liberado) por el gas durante la expansión.

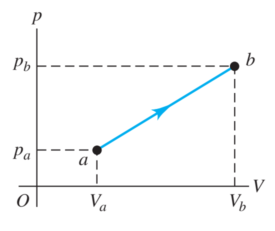


Figura 19.25 Problema 19.40.



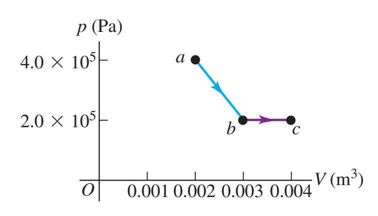
19.41. Una cantidad de aire se lleva del estado a al b siguiendo una trayectoria recta en una gráfica pV (figura 19.26). *a*) En este proceso, ¿la temperatura del gas aumenta, disminuye o no cambia? Explique su respuesta. *b*) Si $V_a = 0.0700\ \text{m}^3$, $V_b = 0.1100\ \text{m}^3$, $p_a = 1.00 \times 10^5$ Pa y $p_b = 1.40 \times 10^5$ Pa, ¿cuánto trabajo W efectúa el gas en este proceso? Suponga que el gas tiene comportamiento ideal.

Figura 19.26 Problema 19.41.



19.42. Media mole de un gas ideal se lleva del estado a al estado c, como se indica en la figura 19.27. *a*) Calcule la temperatura final del gas. *b*) Determine el trabajo efectuado por el gas (o sobre él), conforme se mueve del estado a al estado c. *c*) En el proceso, ¿sale calor del sistema o entra a éste? ¿Qué tanto calor? Explique su respuesta.

Figura 19.27 Problema 19.42.

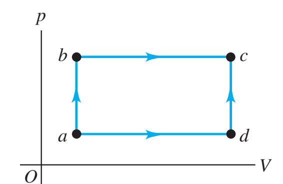


19.43. Cuando un sistema se lleva del estado a al b por la trayectoria acb (figura 19.28), 90.0 J de calor entran en el sistema y éste efectúa 60.0 J de trabajo. *a*) ¿Cuánto calor entra en el sistema por la trayectoria adb si el trabajo efectuado por el sistema es de 15.0 J? *b*) Cuando el sistema regresa de b a a siguiendo la trayectoria curva, el valor absoluto del trabajo efectuado por el sistema es de 35.0 J. ¿El sistema absorbe o desprende calor? ¿Cuánto? *c*) Si $U_a = 0$ y $U_d = 8.0$ J, ¿cuánto calor se absorbe en los procesos ad y db?

Figura 19.28 Problema 19.43.

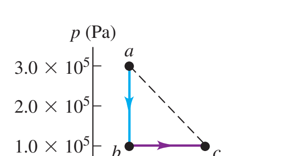
19.44. Un sistema termodinámico se lleva del estado a al estado c de la figura 19.29 siguiendo la trayectoria abc, o bien, la trayectoria adc. Por la trayectoria abc, el trabajo W efectuado por el sistema es de 450 J. Por la trayectoria adc, W es de 120 J. Las energías internas de los cuatro estados mostrados en la figura son: $U_a = 150$ J, $U_b = 240$ J, $U_c = 680$ J y $U_d = 330$ J. Calcule el flujo de calor Q para cada uno de los cuatro procesos: ab, bc, ad y dc. En cada proceso, ¿el sistema absorbe o desprende calor?

Figura 19.29 Problema 19.44.



19.45. Un volumen de aire (que se supone gas ideal) primero se enfría sin cambiar su volumen y, luego, se expande sin cambiar su presión, como se indica en la trayectoria abc de la figura 19.30. *a*) ¿Cómo se compara la temperatura final del gas con su temperatura inicial? *b*) ¿Cuánto calor intercambia el aire con su entrono durante el proceso abc? ¿El aire absorbe o libera calor en el proceso? Explique su respuesta. *c*) Si ahora el aire se expande del estado a al estado c por la trayectoria rectilínea que se indica, ¿cuánto calor intercambia con su entorno?

Figura 19.30 Problema 19.45.

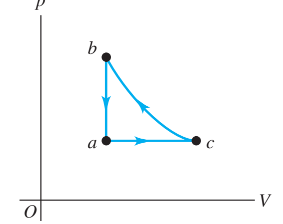


19.46. Tres moles de argón gaseoso (que se supone gas ideal) originalmente están a presión de 1.50×10^4 Pa y a un volumen de $0.0280\ \text{m}^3$; se calientan, primero, y se expanden a presión constante a un volumen de $0.0435\ \text{m}^3$, luego se calientan a volumen constante hasta que la presión llega a 3.50×10^4 Pa, después se enfrían y se comprimen a presión constante hasta que otra vez el volumen es de $0.0280\ \text{m}^3$, y por último se enfrían a volumen constante hasta que la presión se reduce a su valor original de 1.50×10^4 Pa. *a*) Elabore una gráfica pV para este ciclo. *b*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas (o sobre éste) durante el ciclo. *c*) Determine el calor neto intercambiado con el entorno. En general, ¿el gas pierde o gana calor?

19.47. Dos moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal se someten al ciclo abc. En un ciclo completo, salen 800 J de calor del gas. El proceso ab se efectúa a presión constante; y el proceso bc, a volumen constante. Los estados a y b tienen temperaturas $T_a = 200$ K y $T_b = 300$ K. *a*) Dibuje una gráfica pV para el ciclo. *b*) ¿Cuánto trabajo W se efectúa en el proceso ca?

19.48. Tres moles de gas ideal se llevan por el ciclo abc de la figura 19.31. Para este gas, $C_p = 29.1$ J/mol · K. El proceso ac se efectúa a presión constante, el proceso ba se efectúa a volumen constante y el proceso cb es adiabático. La temperatura del gas en los estados a, c y b es $T_a = 300$ K, $T_c = 492$ K y $T_b = 600$ K. Calcule el trabajo total W del ciclo.

Figura 19.31 Problema 19.48.



19.49. Al empezar con 2.50 moles de N_2 gaseoso (que se supone ideal) en un cilindro a 1.00 atm y 20.0 °C, un químico calienta primero el gas a volumen constante, agrega 1.52×10^4 J de calor, luego continúa calentando y permite que el gas se expanda a presión constante al doble de su volumen original. *a*) Calcule la temperatura final del gas. *b*) Determine la cantidad de trabajo efectuado por el gas. *c*) Calcule la cantidad de calor agregado al gas mientras se expande. *d*) Calcule el cambio de energía interna del gas en todo el proceso.

19.50. Nitrógeno gaseoso en un recipiente expandible se enfría de 50.0 °C a 10.0 °C manteniendo constante la presión en 3.00×10^5 Pa. El calor total desprendido por el gas es de 2.50×10^4 J. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal. *a*) Calcule el número de moles del gas. *b*) Calcule el cambio de energía interna del gas. *c*) Calcule el trabajo efectuado por el gas. *d*) ¿Cuánto calor desprendería el gas con el mismo cambio de temperatura si el volumen fuera constante?

19.51. En cierto proceso, un sistema desprende 2.15×10^5 J de calor, al tiempo que se contrae bajo una presión externa constante de 9.50×10^5 Pa. La energía interna del sistema es la misma al principio y al final del proceso. Calcule el cambio de volumen del sistema. (El sistema *no* tiene comportamiento ideal.)

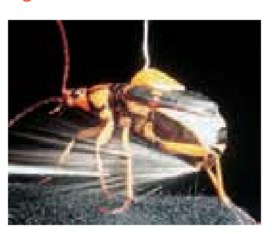
19.52. Un cilindro con un pistón móvil sin fricción, como el de la figura 19.5, contiene una cantidad de helio gaseoso. En un principio, su presión es de 1.00×10^5 Pa, su temperatura es de 300 K y ocupa un volumen de 1.50 L. Después, el gas se somete a dos procesos. En el primero, el gas se calienta y se permite que el pistón se mueva a modo de mantener la temperatura constante en 300 K. Esto continúa hasta que la presión alcanza 2.50×10^4 Pa. En el segundo proceso, el gas se comprime a presión constante hasta que vuelve a su volumen original de 1.50 L. Suponga que el gas tiene comportamiento ideal. *a*) Muestre ambos procesos en una gráfica *pV*. *b*) Calcule el volumen del gas al final del primer proceso, y la presión y temperatura del gas al final del segundo proceso. *c*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas durante ambos procesos. *d*) ¿Qué tendría que hacer con el gas para volverlo a su presión y temperatura originales?

19.53. Proceso termodinámico en un líquido. Una ingeniera química está estudiando las propiedades del metanol (CH_3OH) líquido. Usa un cilindro de acero con área de sección transversal de 0.0200 m^2 que contiene 1.20×10^{-2} m^3 de metanol. El cilindro está equipado con un pistón ajustado que sostiene una carga de 3.00×10^4 N. La temperatura del sistema se aumenta de 20.0 °C a 50.0 °C. El coeficiente de expansión de volumen del metanol es de 1.20×10^{-3} K^{-1}, su densidad es de 791 kg/m^3 y su calor específico a presión constante es $c_p = 2.51 \times 10^3$ J/kg · K. Se puede despreciar la expansión del cilindro de acero. Calcule: *a*) el aumento de volumen del metanol; *b*) el trabajo mecánico efectuado por el metanol contra la fuerza de 3.00×10^4 N; *c*) la cantidad de calor agregada al metanol; *d*) el cambio de energía interna del metanol. *e*) Con base en sus resultados, explique si hay una diferencia apreciable entre los calores específicos c_p (a presión constante) y c_v (a volumen constante) del metanol en estas condiciones.

19.54. Proceso termodinámico en un sólido. Un cubo de cobre de 2.00 cm por lado cuelga de un cordón. (Las propiedades físicas del cobre se dan en las tablas 14.1, 17.2 y 17.3.) El cubo se calienta con un mechero de 20.0 °C a 90.0 °C. El aire que rodea al cubo está a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa). Calcule: *a*) El aumento de volumen del cubo; *b*) el trabajo mecánico efectuado por el cubo para expandirse contra la presión del aire circundante; *c*) la cantidad de calor agregada al cubo; *d*) el cambio de energía interna del cubo. *e*) Con base en sus resultados, explique si hay una diferencia sustancial entre los calores específicos c_p (a presión constante) y c_V (a volumen constante) del cobre en estas condiciones.

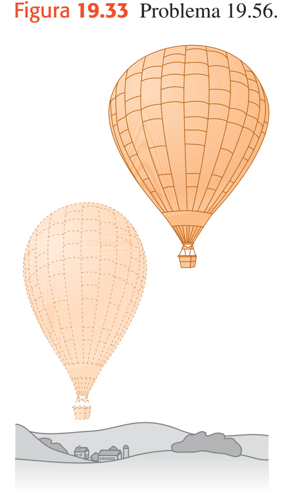
19.55. Proceso termodinámico en un insecto. El escarabajo bombardero africano *Stenaptinus insignis* puede emitir un chorro de líquido repelente por la punta móvil de su abdomen (figura 19.32). El cuerpo del insecto tiene depósitos de dos sustancias; cuando se molesta el escarabajo, las sustancias se combinan en una cámara de reacción, produciendo un compuesto que se calienta de 20 °C a 100 °C por el calor de reacción. La elevada presión que se genera permite expulsar el compuesto con una rapidez de hasta 19 m/s (68 km/h) para asustar a depredadores de todo tipo. (El escarabajo que se muestra en la figura mide 2 cm a lo largo.) Calcule el calor de reacción de las dos sustancias (en J/kg). Suponga que el calor específico de las dos sustancias y del producto es igual al del agua, 4.19×10^3 J/kg · K, y que la temperatura inicial de las sustancias es de 20 °C.

Figura 19.32 Problema 19.55.



19.56. Investigación de gran altura. Un globo de investigación grande contiene 2.00×10^3 m^3 de helio gaseoso a 1.00 atm y a una temperatura de 15.0 °C se eleva rápidamente desde el nivel del suelo hasta una altura donde la presión atmosférica es de sólo 0.900 atm (figura 19.33). Suponga que el helio se comporta como un gas ideal y que el globo sube tan rápido que permite mucho intercambio de calor con el aire circundante. *a*) Calcule el volumen del gas a la máxima altura. *b*) Determine la temperatura del gas a la máxima altura. *c*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del helio conforme el globo se eleva a su máxima altura?

Figura 19.33 Problema 19.56.



19.57. Chinook. En ciertas épocas del año, fuertes vientos llamados *chinooks* soplan desde el oeste, bajando por las faldas orientales de las Rocallosas hacia Denver y regiones circunvecinas. Aunque las montañas son frías, el viento en Denver es muy caliente; pocos minutos después de llegar el chinook, la temperatura llega a subir 20 °C ("chinook" es una palabra en una lengua indígena norteamericana que significa "devorador de nieve"). Se presentan vientos similares en los Alpes (llamados favones) y en el sur de California (donde se llaman "Santa Anas"). *a*) Explique por qué la temperatura del viento chinook aumenta al descender las laderas. ¿Por qué es importante que el viento sea rápido? *b*) Suponga que sopla un viento fuerte hacia Denver (elevación, 1630 m) desde el Pico Grays (80 km al oeste de Denver, con una elevación de 4350 m), donde la presión del aire es de 5.60×10^4 Pa y la temperatura del aire es -15.0 °C. La temperatura y presión en Denver antes de que llegue el viento son 2.0 °C y 8.12×10^4 Pa. ¿En cuántos grados Celsius subirá la temperatura en Denver cuando llegue el chinook?

19.58. La capacidad calorífica molar a volumen constante de cierto gas con comportamiento ideal es C_V. Una muestra de este gas ocupa inicialmente un volumen V_0 a una presión p_0 y una temperatura absoluta T_0. El gas se expande isobáricamente a un volumen $2V_0$ y luego se sigue expandiendo adiabáticamente hasta un volumen final de $4V_0$. *a*) Dibuje una gráfica *pV* para esta sucesión de procesos. *b*) Calcule el trabajo total efectuado por el gas en esta sucesión de procesos. *c*) Calcule la temperatura final del gas. *d*) Determine el valor absoluto $|Q|$ del flujo total de calor que entra en el gas o sale de él durante esta sucesión de procesos, e indique la dirección del flujo.

19.59. Una bomba de aire tiene un cilindro de 0.250 m de longitud, con un pistón móvil. La bomba se utiliza para comprimir aire de la atmósfera (a una presión absoluta de 1.01×10^5 Pa) e introducirlo en un tanque muy grande, cuya presión manométrica es de 4.20×10^5 Pa. (Para el aire, $C_V = 20.8$ J/mol · K.) *a*) El pistón inicia la carrera de compresión en el extremo abierto del cilindro. ¿Qué distancia se ha movido el pistón en el cilindro cuando comienza a fluir aire del cilindro al tanque? Suponga que la compresión es adiabática. *b*) Si el aire se introduce en la bomba a 27.0 °C, ¿qué temperatura tendrá una vez comprimido? *c*) ¿Cuánto trabajo efectúa la bomba al introducir 20.0 moles de aire en el tanque?

19.60. Turbocargadores e interenfriadores (radiadores) para motores. La potencia desarrollada por un motor de automóvil es

directamente proporcional a la masa de aire que se puede introducir en el volumen de los cilindros del motor, para reaccionar químicamente con la gasolina. Muchos automóviles tienen un *turbocargador* que comprime el aire antes de que entre en el motor, para que haya mayor masa de aire en el mismo volumen. Esta compresión rápida, prácticamente adiabática, también calienta el aire. Con la finalidad de comprimir el aire aún más, se le hace pasar por un *interenfriador*, en el cual intercambia calor con su entorno a presión prácticamente constante. Después, el aire es succionado hacia los cilindros. En una instalación típica, se introduce aire en el turbocargador a presión atmosférica (1.01×10^5 Pa), densidad $\rho = 1.23$ kg/m^3 y temperatura 15.0 °C. Se le comprime adiabáticamente a 1.45×10^5 Pa. En el interenfriador, el aire se enfría a la temperatura original de 15.0 °C a presión constante de 1.45×10^5 Pa. *a*) Dibuje una gráfica pV para esta sucesión de procesos. *b*) Si el volumen de uno de los cilindros del motor es de 575 cm^3, ¿qué masa de aire salida del interenfriador llenará el cilindro a 1.45×10^5 Pa? En comparación con la potencia desarrollada por un motor que admite aire a 1.01×10^5 Pa a 15.0 °C, ¿qué porcentaje de aumento de potencia se obtiene empleando un turbocargador y un interenfriador? *c*) Si no se usa el interenfriador, ¿qué masa de aire salida del turbocargador llenará el cilindro a 1.45×10^5 Pa? En comparación con la potencia desarrollada por un motor que admite aire a 1.01×10^5 Pa a 15.0 °C, ¿qué porcentaje de aumento de potencia se obtiene empleando un turbocargador solo?

19.61. Un gas monoatómico con comportamiento ideal se expande lentamente al doble de su volumen original, efectuando 300 J de trabajo en el proceso. Calcule el calor agregado al gas y el cambio de energía interna del gas, si el proceso es *a*) isotérmico, *b*) adiabático, *c*) isobárico.

19.62. Un cilindro con pistón contiene 0.250 moles de oxígeno a 2.40×10^5 Pa y 355 K. El oxígeno puede tratarse como gas ideal. Primero, el gas se expande isobáricamente al doble de su volumen original. Después, se comprime isotérmicamente a su volumen original y, por último, se enfría isocóricamente hasta su presión original. *a*) Muestre esta serie de procesos en una gráfica pV. *b*) Calcule la temperatura durante la compresión isotérmica. *c*) Calcule la presión máxima. *d*) Calcule el trabajo total efectuado por el pistón sobre el gas durante la serie de procesos.

19.63. Use las condiciones y los procesos del problema 19.62 para calcular *a*) el trabajo efectuado por el gas, el calor agregado a éste y su cambio de energía interna durante la expansión inicial; *b*) El trabajo efectuado, el calor agregado y el cambio de energía interna durante el enfriamiento final; *c*) el cambio de energía interna durante la compresión isotérmica.

19.64. Un cilindro con pistón contiene 0.150 moles de nitrógeno a 1.80×10^5 Pa y 300 K. El nitrógeno puede tratarse como un gas ideal. Primero, el gas se comprime isobáricamente a la mitad de su volumen original. Luego, se expande adiabáticamente hasta su volumen original. Por último, se calienta isocóricamente hasta su presión original. *a*) Muestre esta serie de procesos en una gráfica pV. *b*) Calcule las temperaturas al principio y al final de la expansión adiabática. *c*) Calcule la presión mínima.

19.65. Use las condiciones y los procesos del problema 19.64 para calcular: *a*) El trabajo efectuado por el gas, el calor agregado a éste y su cambio de energía interna durante la compresión inicial; *b*) el trabajo efectuado por el gas, el calor agregado a éste y el cambio de energía interna durante la expansión adiabática; *c*) el trabajo efectuado, el calor agregado y el cambio de energía interna durante el calentamiento final.

19.66. Comparación de procesos termodinámicos. En un cilindro, 1.20 moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal, a 3.60×10^5 Pa y 300 K, se expande hasta triplicar su volumen. Calcule el trabajo efectuado por el gas, si la expansión es *a*) isotérmica, *b*) adiabática, *c*) isobárica. *d*) Muestre cada proceso en una gráfica pV. ¿En qué caso es máximo el valor absoluto del trabajo efectuado por el gas? ¿Y mínimo? *e*) ¿En qué caso es máximo el valor absoluto de la transferencia de calor? ¿Y mínimo? *f*) ¿En qué caso es máximo el valor absoluto del cambio de energía interna del gas? ¿Y mínimo?

19.67. En un cilindro sellado con un pistón, se comprimen rápidamente 3.00 L de N_2 gaseoso, inicialmente a una presión de 1.00 atm y a 0.00 °C, a la mitad de su volumen original. Suponga que el N_2 se comporta como un gas ideal. *a*) Calcule la temperatura y la presión finales del gas. *b*) Si ahora el gas se enfría a los 0.00 °C sin cambiar la presión, ¿cuál será su volumen final?

Problemas de desafío

19.68. Oscilaciones de un pistón. Un cilindro vertical de radio r contiene una cantidad de gas ideal, y está provisto de un pistón con masa m que puede moverse libremente (figura 19.34). El pistón y las paredes del cilindro carecen de fricción, y el cilindro completo se coloca en un baño a temperatura constante. La presión del aire exterior es p_0. En equilibrio, el pistón está a una altura h sobre la base del cilindro. *a*) Calcule la presión absoluta del gas atrapado bajo el pistón cuando está en equilibrio. *b*) Se tira del pistón para subirlo una distancia corta y después se suelta. Determine la fuerza neta que actúa sobre el pistón cuando su base está a una distancia $h + y$ sobre la base del cilindro, donde y es mucho menor que h. *c*) Después de que el pistón se desplaza del equilibrio y se suelta, oscila verticalmente. Calcule la frecuencia de estas pequeñas oscilaciones. Si el desplazamiento no es pequeño, ¿las oscilaciones son armónicas simples? ¿Cómo lo sabe?

Figura 19.34 Problema de desafío 19.68.

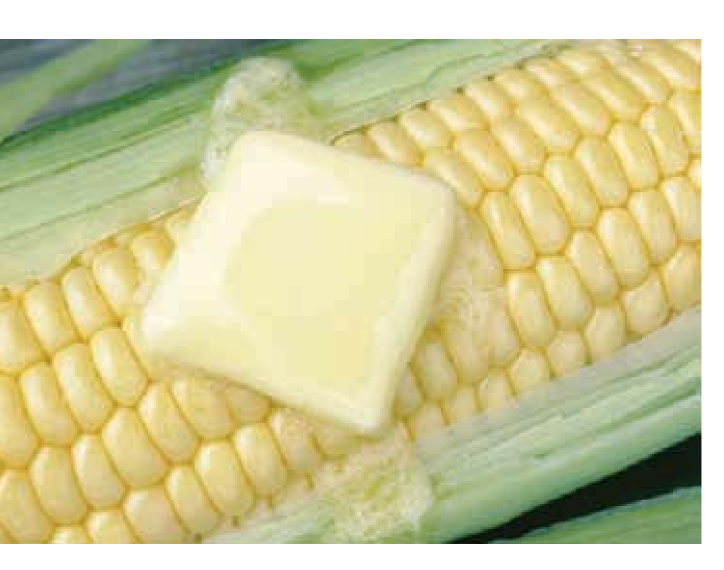
19.69. La ecuación de estado de Van der Waals, una representación aproximada del comportamiento de los gases a presión elevada, está dada por la ecuación (18.7):

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde a y b son constantes con diferentes valores para gases distintos. En el caso especial de $a = b = 0$, ésta es la ecuación del gas ideal. *a*) Calcule el trabajo efectuado por un gas que obedece esta ecuación de estado, durante una expansión isotérmica de V_1 a V_2. Demuestre que su respuesta concuerda con el resultado para el gas ideal obtenido en el ejemplo 19.1 (sección 19.2) cuando se hace $a = b = 0$. *b*) Para etano (C_2H_6) gaseoso, $a = 0.554$ J · m^3/mol^2 y $b = 6.38 \times 10^{-5}$ m^3/mol. Calcule el trabajo W efectuado por 1.80 moles de etano cuando se expande de 2.00×10^{-3} m^3 a 4.00×10^{-3} m^3 a una temperatura constante de 300 K. Efectúe el cálculo utilizando: i) la ecuación de estado de Van der Waals y ii) la ecuación de estado del gas ideal. *c*) ¿Qué tan grande es la diferencia entre los dos resultados de W en el inciso *b*)? ¿Con qué ecuación de estado W es mayor? Utilice la interpretación de los términos a y b dada en la sección 18.1 para explicar por qué debería ser así. ¿En este caso son importantes las diferencias entre las dos ecuaciones de estado?

LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA

20



? La segunda ley de la termodinámica nos indica que el calor fluye naturalmente de un cuerpo caliente (como una mazorca tierna recién cocinada) a uno frío (como esta porción de mantequilla). ¿Es posible que alguna vez el calor fluya de un cuerpo frío a uno caliente?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Qué determina si un proceso termodinámico es reversible o irreversible.
- Qué es una máquina térmica y cómo se calcula su eficiencia.
- La física del motor de combustión interna.
- Cómo se relacionan los refrigeradores y las máquinas térmicas, y cómo analizar el rendimiento de un refrigerador.
- Cómo la segunda ley de la termodinámica establece límites sobre la eficiencia de motores y el rendimiento de refrigeradores.
- Cómo efectuar los cálculos que implican el ciclo de Carnot idealizado para motores y refrigeradores.
- Qué se entiende por entropía y cómo utilizar este concepto para analizar los procesos termodinámicos.

Muchos procesos termodinámicos se efectúan naturalmente en una dirección pero no en la opuesta. Por ejemplo, el calor siempre fluye de un cuerpo caliente a uno más frío, nunca al revés. El flujo de calor de un cuerpo frío a uno caliente no violaría la primera ley de la termodinámica, pues se conservaría la energía; sin embargo, no ocurre en la naturaleza. ¿Por qué? También, resulta fácil convertir energía mecánica totalmente en calor; esto sucede cada vez que usamos los frenos del automóvil para detenerlo. En la dirección inversa, hay muchos dispositivos que convierten calor *parcialmente* en energía mecánica. (El motor del auto es un ejemplo.) Pero ni los inventores más brillantes han logrado construir una máquina que convierta el calor *totalmente* en energía mecánica. ¿Por qué?

La respuesta a ambas preguntas tiene que ver con la *dirección* de los procesos termodinámicos y constituye la *segunda ley de la termodinámica*. Esta ley impone limitaciones fundamentales a la eficiencia de una máquina o una planta de electricidad, así como al aporte de energía mínimo necesario para hacer funcionar un refrigerador. Por lo tanto, la segunda ley se aplica directamente a muchos problemas prácticos importantes.

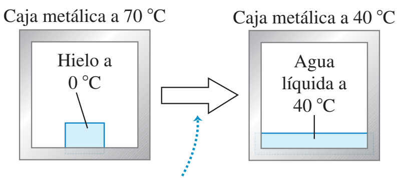
También podemos plantear la segunda ley en términos del concepto de *entropía*, una medida cuantitativa del grado de desorden o aleatoriedad de un sistema. La noción de entropía ayuda a explicar por qué la tinta mezclada con agua nunca se separa espontáneamente y por qué multitud de otros procesos al parecer posibles nunca se observan.

20.1 Dirección de los procesos termodinámicos

Todos los procesos termodinámicos que se dan en la naturaleza son **procesos irreversibles**, es decir, procesos que se efectúan espontáneamente en una dirección pero no en otra (figura 20.1a). El flujo de calor de un cuerpo caliente a uno más frío es irreversible, lo mismo que la expansión libre de un gas que vimos en las secciones 19.3 y 19.6. Al deslizar un libro sobre una mesa, convertimos la energía mecánica en calor por fricción. Este proceso es irreversible, pues nadie ha observado el proceso

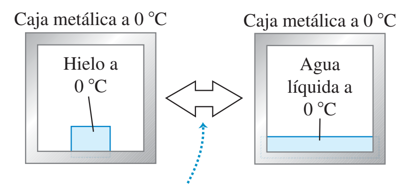
20.1 Procesos reversible e irreversible.

a) Un bloque de hielo se derrite *irreversiblemente* cuando lo colocamos en una caja metálica caliente (70 °C).



Fluye calor de la caja al hielo y el agua, nunca al revés.

b) En una caja metálica a 0 °C podemos derretir *reversiblemente* un bloque de hielo a 0 °C.



Si aumentamos o reducimos infinitesimalmente la temperatura de la caja, podemos hacer que fluya calor de la caja hacia el hielo derritiendo este, o hacia la caja desde el agua volviendo a congelar ésta.

inverso (que un libro que inicialmente está en reposos sobre una mesa comience a moverse espontáneamente, y se enfríen la mesa y el libro). El tema principal de este capítulo es la *segunda ley de la termodinámica*, que determina la dirección preferida de tales procesos.

A pesar de esta dirección preferida para todos los procesos naturales, podemos imaginar una clase de procesos idealizados que *serían* reversibles. Un sistema que sufre semejante **proceso reversible** idealizado siempre está muy cerca del equilibrio termodinámico dentro de sí y con su entorno. Cualquier cambio de estado que se presente podría revertirse (hacer que proceda en el otro sentido) modificando infinitesimalmente las condiciones del sistema. Por ejemplo, el flujo de calor entre dos cuerpos cuyas temperaturas difieran sólo infinitesimalmente puede revertirse haciendo un cambio muy pequeño en una temperatura o en la otra (figura 20.1b).

Entonces, los procesos reversibles son **proceso en equilibrio**, con el sistema siempre en equilibrio termodinámico. Desde luego, si semejante sistema estuviera *realmente* en equilibrio termodinámico, no habría cambio de estado. No hay flujo de calor dentro de un sistema que tiene una temperatura verdaderamente uniforme en todas sus partes, y un sistema que en verdad está en equilibrio mecánico no se expande ni realiza trabajo sobre su entorno. Los procesos reversibles son una idealización que nunca puede lograrse perfectamente en el mundo real pero, si hacemos los gradientes de temperatura y las diferencias de presión en la sustancia muy pequeños, mantendríamos el sistema muy cerca de estados de equilibrio y haríamos el proceso casi reversible. Por lo tanto, llamamos a un proceso reversible un *proceso en cuasiequilibrio*.

En contraste, el flujo de calor con una diferencia finita de temperatura, la expansión libre de un gas y la conversión de trabajo en calor por fricción son procesos *irreversibles*; ningún cambio pequeño en las condiciones podría hacer que uno de ellos procediera en la dirección opuesta. Estos procesos *no están en equilibrio*, en cuanto a que el sistema no está en equilibrio termodinámico en ningún punto hasta el final del proceso.

Desorden y procesos termodinámicos

Hay una relación entre la dirección de un proceso y el *desorden* o *aleatoriedad* del estado resultante. Por ejemplo, imagine un trabajo de clasificación u ordenamiento tedioso, como alfabetizar mil títulos de libros escritos en tarjetas para fichero. Lance la pila de tarjetas alfabetizadas al aire. ¿Caen en orden alfabético? Por desgracia, no. Su tendencia es a caer en un estado aleatorio o desordenado. En la expansión libre de un gas que vimos en las secciones 19.3 y 19.6, el aire está más desordenado después de expandirse a todo el recipiente que cuando estaba confiando a un lado, así como nuestra ropa está más desordenada cuando está tirada en el piso que cuando está confinada a un armario.

Asimismo, la energía cinética macroscópica es energía asociada a movimientos organizados y coordinados de muchas moléculas; en tanto que la transferencia de calor implica cambios de energía en un movimiento molecular desordenado, aleatorio. Por lo tanto, la conversión de energía mecánica en calor implica un aumento de la aleatoriedad o el desorden.

En las secciones siguientes presentaremos la segunda ley de la termodinámica considerando dos clases amplias de dispositivos: las *máquinas térmicas*, que convierten parcialmente calor en trabajo, y los *refrigeradores*, que logran transportar parcialmente calor de cuerpos fríos a cuerpos más calientes.

Evalúe su comprensión de la sección 20.1 Nuestras manos derecha e izquierda normalmente están a la misma temperatura, como la caja metálica y el hielo de la figura 20.1b. ¿Frotarnos las manos para calentarlas es i) un proceso reversible, o ii) un proceso irreversible?

20.2 Máquinas térmicas

ActivPhysics ONLINE
8.12 Proceso cíclico: estrategias
8.13 Proceso cíclico: problemas

La base de nuestra sociedad tecnológica es la capacidad de usar fuentes de energía distintas de la potencia muscular. Hay casos en que la energía mecánica está disponible directamente, como la del agua y la del viento; sin embargo, casi toda nuestra energía proviene de quemar combustibles fósiles (carbón, petróleo y gas) y de reacciones nucleares. Esa energía se transfiere como *calor*, el cual es útil directamente para calentar edificios, cocinar y realizar procesos químicos; no obstante, para hacer funcionar una máquina o impulsar un vehículo, necesitamos energía *mecánica*.

Por lo tanto, es importante saber cómo tomar calor de una fuente y convertir, tanto de él como sea posible, en energía mecánica o trabajo. Esto es lo que sucede en los motores de gasolina de los automóviles, los motores a reacción de los aviones, las turbinas de vapor en las plantas de electricidad y muchos otros sistemas. Se efectúan procesos muy simples en el reino animal; los alimentos se "queman" —es decir, los carbohidratos se combinan con oxígeno para producir agua, dióxido de carbono y energía—, y esa energía se convierte parcialmente en energía mecánica cuando los músculos del animal efectúan trabajo sobre su entorno.

Un dispositivo que transforma calor parcialmente en trabajo o energía mecánica es una **máquina térmica** (figura 20.2). Por lo regular, una cantidad de materia dentro del motor experimenta entrada y salida de calor, expansión y compresión, y a veces cambia de fase. Llamamos a ésta la **sustancia de trabajo** de la máquina. En los motores de combustión interna, la sustancia de trabajo es una mezcla de aire y combustible; en una turbina de vapor, es el agua.

20.2 Todos los vehículos motorizados, excepto los exclusivamente eléctricos, usan máquinas térmicas para impulsarse. (Los vehículos híbridos usan su motor de combustión interna para ayudar a cargar las baterías para el motor eléctrico.)



El tipo de máquina más fácil de analizar es aquel donde la sustancia de trabajo efectúa un **proceso cíclico**, es decir, una sucesión de procesos que al final deja la sustancia en el estado que inició. En una turbina de vapor, el agua se recicla usándose una y otra vez. Los motores de combustión interna no usan el mismo aire una y otra vez, pero de todos modos podemos analizarlos en términos de procesos cíclicos que aproximan su funcionamiento real.

Fuentes fría y caliente

Todas las máquinas térmicas *absorben* calor de una fuente a una temperatura relativamente alta, realizan un trabajo mecánico y *desechan* o *rechazan* algo de calor a una temperatura más baja. En lo que a la máquina concierne, el calor desechado se desperdicia. En los motores de combustión interna, éste es el calor que se elimina en los gases de escape y en el sistema de enfriamiento; en una turbina de vapor, es el calor que debe salir del vapor usado para condensar y reciclar el agua.

Si un sistema pasa por un proceso cíclico, sus energías internas inicial y final son la misma. Para todo proceso cíclico, la primera ley de la termodinámica exige que

$$U_2 - U_1 = 0 = Q - W \qquad \text{así que} \qquad Q = W$$

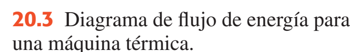
Es decir, el calor neto que fluye hacia la máquina en un proceso cíclico es igual al trabajo neto realizado por la máquina.

Al analizar máquinas térmicas, resulta útil considerar dos fuentes con las cuales la sustancia de trabajo puede interactuar. Una, llamada *fuente caliente*, proporciona

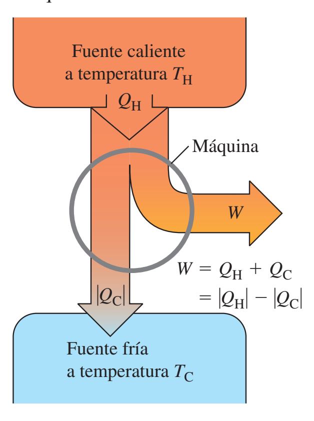
calor; puede dar a la sustancia de trabajo grandes cantidades de calor a temperatura constante T_H sin cambiar apreciablemente su propia temperatura. La otra, llamada *fuente fría*, puede absorber grandes cantidades de calor desechado por la máquina a una temperatura constante menor T_C. En un sistema de turbina de vapor, las flamas y los gases calientes de la caldera son la fuente caliente; y el agua fría y el aire empleados para condensar y enfriar el vapor usado, la fuente fría.

Denotamos las cantidades de calor transferido de las fuentes caliente y fría como Q_H y Q_C, respectivamente. Una cantidad de calor Q es positiva cuando se transfiere *a* la sustancia de trabajo, y negativa si sale de dicha sustancia. Así, en una máquina térmica, Q_H es positivo pero Q_C es negativo, pues representa calor *que sale* de la sustancia de trabajo. Esta convención de signos es congruente con las reglas establecidas en la sección 19.1, reglas que seguiremos usando aquí. Muchas veces, las relaciones son más claras si se plantean en términos de los valores absolutos de Q y W, porque siempre son positivos. Cuando lo hagamos, nuestra notación lo indicará explícitamente.

Diagramas de flujo de energía y eficiencia



20.3 Diagrama de flujo de energía para una máquina térmica.



Podemos representar las transformaciones de energía en una máquina térmica con el *diagrama de flujo de energía* de la figura 20.3. La máquina en sí se representa con un círculo. El calor Q_H suministrado a la máquina por la fuente caliente es proporcional a la anchura de la "tubería" de entrada en la parte superior del diagrama. La anchura de la tubería de salida abajo es proporcional a la magnitud $|Q_C|$ del calor rechazado en el escape. El ramal de la derecha representa la porción del calor suministrado que la máquina convierte en trabajo mecánico, W.

Si una máquina repite el mismo ciclo una y otra vez, Q_H y Q_C representan el calor absorbido y rechazado por la máquina *durante un ciclo*; Q_H es positivo, y Q_C, negativo. El calor *neto* Q absorbido por ciclo es

$$Q = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C| \tag{20.1}$$

La salida útil de la máquina es el trabajo neto W efectuado por la sustancia de trabajo. Por la primera ley,

$$W = Q = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C| \tag{20.2}$$

Idealmente, nos gustaría convertir todo el calor Q_H en trabajo; en tal caso, tendríamos $Q_H = W$ y $Q_C = 0$. La experiencia muestra que esto es imposible; siempre se desperdicia algo de calor y Q_C *nunca es cero*. Definimos la **eficiencia térmica** de una máquina, denotada con e, como el cociente

$$e = \frac{W}{Q_H} \tag{20.3}$$

La eficiencia térmica e representa la fracción de Q_H que sí se convierte en trabajo. Dicho de otro modo, e es lo que se obtiene dividido entre lo que se paga, y siempre es menor que 1: ¡una experiencia demasiado común! En términos del diagrama de flujo de la figura 20.3, la máquina más eficiente es aquella en la que el ramal que representa la salida de trabajo es lo más ancho posible, y la tubería de escape que representa el calor desechado es lo más angosta posible.

Si sustituimos las dos expresiones para W dadas por la ecuación (20.2) en la ecuación (20.3), obtenemos las siguientes expresiones equivalentes para e:

$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| \quad \text{(eficiencia térmica de una máquina)} \tag{20.4}$$

Observe que e es el cociente de dos cantidades de energía y por lo tanto es un número puro, sin unidades. Desde luego, siempre debemos expresar W, Q_H y Q_C en las mismas unidades.

Estrategia para resolver problemas 20.1 Máquinas térmicas



Los problemas en que intervienen máquinas térmicas son, ante todo, problemas de la primera ley de la termodinámica. Por lo tanto, la Estrategia para resolver problemas 19.1 (sección 19.4) es igualmente útil para este capítulo, y le sugerimos repasarla.

IDENTIFICAR *los conceptos relevantes:* Una máquina térmica es cualquier dispositivo que parcialmente convierte calor en trabajo, como se muestra esquemáticamente en la figura 20.3. En la sección 20.4, veremos que un refrigerador es, en esencia, una máquina térmica que opera en reversa, así que son válidos muchos de los mismos conceptos.

PLANTEAR *el problema* como se sugiere en la Estrategia para resolver problemas 19.1. La ecuación (20.4) es útil en situaciones en las que es importante la eficiencia térmica de la máquina. Se recomienda elaborar un diagrama de flujo de energía como la figura 20.3.

EJECUTAR *la solución* como sigue:

1. Tenga mucho cuidado con las convenciones de signos para W y los diversos Q. W es positivo si el sistema se expande y efectúa trabajo, y negativo cuando se comprime. Un Q es positivo si representa calor que entra en el sistema y negativo si representa calor que sale. Si sabe que una cantidad es negativa, como Q_C en la explicación anterior, podría ser útil escribirla como $Q_C = -|Q_C|$.
2. Algunos problemas manejan potencia en vez de energía. Potencia es trabajo por unidad de tiempo ($P = W/t$), y la tasa de transferencia de calor (corriente de calor) H es transferencia de calor por unidad de tiempo ($H = Q/t$). En tales problemas conviene preguntarse: "¿cuánto es W o Q en un segundo (o una hora)?"
3. Teniendo presentes los pasos 1 y 2, despeje las incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Use la primera ley de la termodinámica para comprobar sus resultados, prestando especial atención a los signos algebraicos.

Ejemplo 20.1 Análisis de una máquina térmica

Un motor de gasolina de un camión toma 10,000 J de calor y produce 2000 J de trabajo mecánico por ciclo. El calor se obtiene quemando gasolina, cuyo calor de combustión es $L_c = 5.0 \times 10^4$ J/g. *a*) Calcule la eficiencia térmica del motor. *b*) ¿Cuánto calor se desecha en cada ciclo? *c*) ¿Cuánta gasolina se quema en cada ciclo? *d*) Si el motor ejecuta 25 ciclos por segundo, ¿qué potencia desarrolla en watts y en hp? *e*) ¿Cuánta gasolina se quema por segundo? ¿Y por hora?

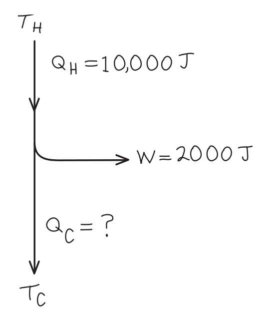
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El problema se refiere a una máquina térmica, de manera que podemos usar las ideas de esta sección.

PLANTEAR: La figura 20.4 es nuestro diagrama de flujo de energía para un ciclo del motor. Se nos dan la cantidad de trabajo efectuada por ciclo (W = 2000 J) y la cantidad de calor admitida por ciclo (Q_H = 10,000 J).

Por lo tanto, usaremos la primera forma de la ecuación (20.4) para obtener la eficiencia térmica. La primera ley de la termodinámica nos da la cantidad de calor rechazada por ciclo; mientras que el calor de combustión nos dice cuánta gasolina es preciso quemar en cada ciclo y, por lo tanto, en la unidad de tiempo.

20.4 Nuestro diagrama para este problema.



EJECUTAR: *a*) Por la primera expresión de la ecuación (20.4), la eficiencia térmica es

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{2000\ \text{J}}{10{,}000\ \text{J}} = 0.20 = 20\%$$

Ésta es una cifra típica para automóviles y camiones, si W sólo incluye el trabajo suministrado a las ruedas.

b) Por la ecuación (20.2), $W = Q_H + Q_C$ así que

$$Q_C = W - Q_H = 2000\ \text{J} - 10{,}000\ \text{J}$$
$$= -8000\ \text{J}$$

Es decir, 8000 J de calor salen del motor en cada ciclo.

c) Sea m la masa de gasolina quemada en cada ciclo. Entonces,

$$Q_H = mL_c$$
$$m = \frac{Q_H}{L_c} = \frac{10{,}000\ \text{J}}{5.0 \times 10^4\ \text{J/g}} = 0.20\ \text{g}$$

d) La potencia P (rapidez con que se efectúa trabajo) es el trabajo por ciclo multiplicado por el número de ciclos por segundo:

$$P = (2000\ \text{J/ciclo})(25\ \text{ciclos/s}) = 50{,}000\ \text{W} = 50\ \text{kW}$$
$$= (50{,}000\ \text{W})\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}} = 67\ \text{hp}$$

e) La masa de gasolina quemada por segundo es la masa por ciclo multiplicada por el número de ciclos por segundo:

$$(0.20\ \text{g/ciclo})(25\ \text{ciclos/s}) = 5.0\ \text{g/s}$$

La masa quemada por hora es

$$(5.0\ \text{g/s})\frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 18{,}000\ \text{g/h} = 18\ \text{kg/h}$$

EVALUAR: Podemos comprobar nuestro resultado de la parte (e) convirtiéndolo en una cantidad más conocida, la cantidad de combustible consumida por unidad de distancia. La densidad de la gasolina es de cerca de 0.70 g/cm^3, así que esto es aproximadamente 25,700 cm^3 = 25.7 L de gasolina por hora. Si el camión viaja a 88 km/h, esto representa un rendimiento de combustible de 3.4 km/L. Este consumo es mucho mayor que el de un automóvil, pero típico de los camiones grandes.

Evalúe su comprensión de la sección 20.2 Ordene de la mayor a la menor las siguientes máquinas térmicas, según su eficiencia térmica. i) un motor que en un ciclo absorbe 5000 J de calor y expulsa 4500 J de calor; ii) un motor que en un ciclo absorbe 25,000 J de calor y efectúa 2000 J de trabajo; iii) un motor que en un ciclo realiza 400 J de trabajo y expulsa 2800 J de calor.

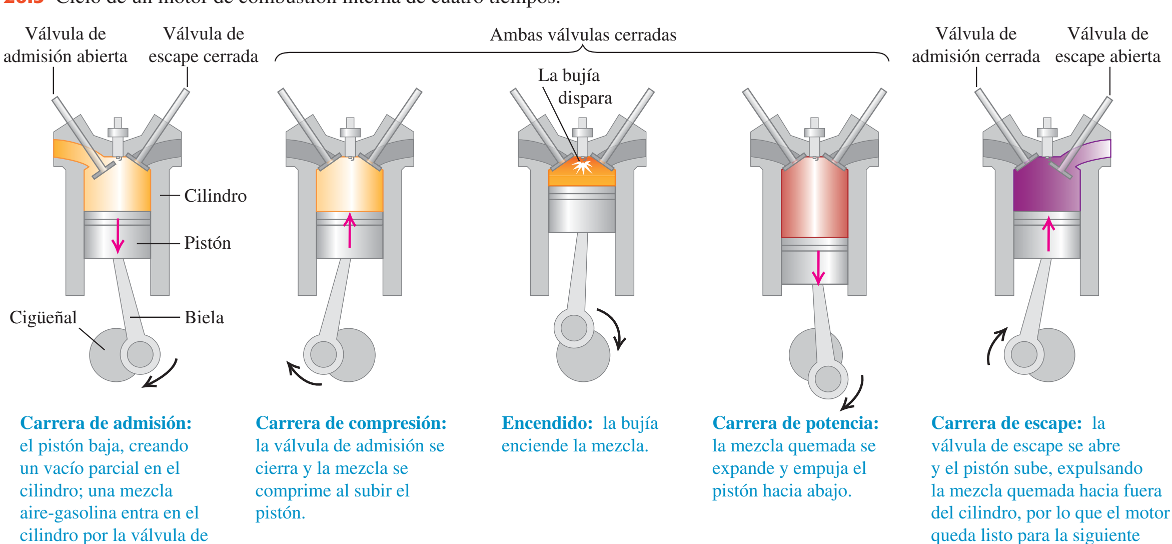
20.3 Motores de combustión interna

El motor de gasolina, empleado en automóviles y muchos otros tipos de maquinaria, es un ejemplo común de máquina térmica. Examinemos su eficiencia térmica. La figura 20.5 muestra el funcionamiento de un tipo de motor de gasolina. Primero, una mezcla de aire y gasolina fluye al interior de un cilindro por una válvula de admisión abierta mientras el pistón desciende, aumentando el volumen del cilindro desde un mínimo de V (cuando el pistón está hasta arriba) hasta un máximo de rV (cuando está hasta abajo). La cantidad r se llama **razón de compresión**; en los motores de automóviles modernos, r suele estar entre 8 y 10. Al final de esta *carrera de admisión*, la válvula de admisión se cierra y la mezcla se comprime, de forma aproximadamente adiabática, a un volumen V durante la *carrera de compresión*. Luego, la bujía enciende la mezcla y el gas caliente se expande, de forma aproximadamente adiabática, otra vez al volumen rV, empujando el pistón y efectuando trabajo; ésta es la *carrera de potencia*. Por último, se abre la válvula de escape y se expulsan los productos de combustión (*carrera de escape*) dejando el cilindro listo para la siguiente carrera de admisión.

El ciclo Otto

La figura 20.6 es un diagrama pV de un modelo idealizado de los procesos termodinámicos en un motor de gasolina. Este modelo se llama **ciclo Otto**. En el punto a, la mezcla aire-gasolina ya entró en el cilindro. La mezcla se comprime adiabáticamente hasta el punto b y se enciende. Al quemarse, la gasolina agrega calor Q_H al sistema, siguiendo la línea bc, y la carrera de potencia es la expansión adiabática al punto d. El gas se enfría a la temperatura del aire exterior por la línea da, expulsando calor $|Q_C|$. En la práctica, este gas sale del motor como escape y no vuelve a entrar en el motor pero, dado que entra una cantidad de aire y gasolina equivalente, podemos considerar que el proceso es cíclico.

20.5 Ciclo de un motor de combustión interna de cuatro tiempos.



Podemos calcular la eficiencia de este ciclo idealizado. Los procesos *bc* y *da* son a volumen constante, así que Q_H y Q_C tienen una relación simple con las temperaturas:

$$Q_H = nC_V(T_c - T_b) > 0$$
$$Q_C = nC_V(T_a - T_d) < 0$$

La eficiencia térmica está dada por la ecuación (20.4). Insertando las expresiones anteriores y cancelando el factor común nC_V, obtenemos

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = \frac{T_c - T_b + T_a - T_d}{T_c - T_b} \qquad (20.5)$$

Para simplificar más esto, usamos la relación temperatura-volumen para procesos adiabáticos con gas ideal, ecuación (19.22). Para los dos procesos adiabáticos *ab* y *cd*,

$$T_a(rV)^{\gamma-1} = T_bV^{\gamma-1} \qquad \text{y} \qquad T_d(rV)^{\gamma-1} = T_cV^{\gamma-1}$$

Dividimos ambas ecuaciones entre el factor común $V^{\gamma-1}$ y sustituimos las expresiones resultantes para T_b y T_c de nuevo en la ecuación (20.5). El resultado es

$$e = \frac{T_dr^{\gamma-1} - T_ar^{\gamma-1} + T_a - T_d}{T_dr^{\gamma-1} - T_ar^{\gamma-1}} = \frac{(T_d - T_a)(r^{\gamma-1} - 1)}{(T_d - T_a)r^{\gamma-1}}$$

Eliminando por división el factor común $(T_d - T_a)$, obtenemos

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}} \qquad \text{(eficiencia térmica en el ciclo Otto)} \qquad (20.6)$$

La eficiencia térmica dada por la ecuación (20.6) siempre es menor que 1, aun para este modelo idealizado. Si $r = 8$ y $\gamma = 1.4$ (el valor para el aire) la eficiencia teórica es $e = 0.56$, es decir, 56%. La eficiencia puede aumentarse aumentando r; sin embargo, esto también aumenta la temperatura al final de la compresión adiabática de la mezcla aire-combustible. Cuando la temperatura es excesiva, la mezcla explota espontáneamente durante la compresión, en vez de quemarse uniformemente después de que la bujía la enciende. Esto se llama *preignición* o *detonación*; causa un golpeteo y puede dañar el motor. El octanaje de una gasolina es una medida de sus cualidades antidetonantes. La razón de compresión práctica máxima para gasolina de alto octano ("premium") es de aproximadamente 10 a 13. Se pueden usar razones mayores con combustibles exóticos.

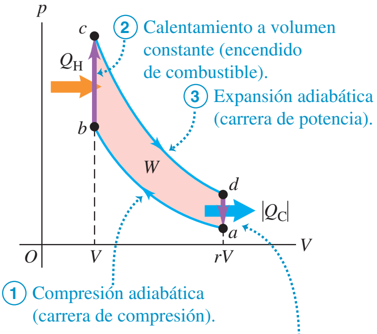
El ciclo Otto, que acabamos de describir, es un modelo muy idealizado; supone que la mezcla se comporta como gas ideal, no toma en cuenta fricción, turbulencia, pérdida de calor a las paredes del cilindro ni muchos otros efectos que reducen la eficiencia de un motor real. Otra fuente de ineficiencia es la combustión incompleta. Una mezcla de vapor de gasolina con el aire preciso para quemar totalmente los hidrocarburos a H_2O y CO_2 no se enciende fácilmente. Un encendido confiable requiere una mezcla "más rica" en gasolina. La combustión incompleta resultante produce CO e hidrocarburos no quemados en el escape. De esta manera, el calor obtenido de la gasolina es menor que el calor de combustión total; la diferencia se desperdicia, y el escape contribuye a la contaminación del aire. Las eficiencias de los motores de gasolina reales suelen ser del orden del 35%.

El ciclo Diesel

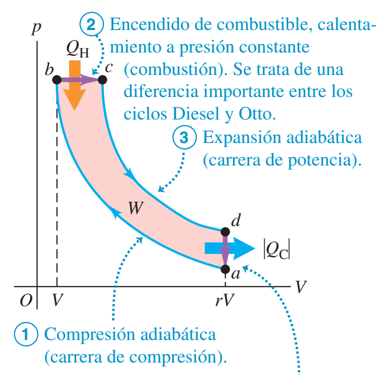
La operación del motor a Diesel es similar a la del motor de gasolina. La diferencia más importante es que no hay combustible en el cilindro al principio de la carrera de compresión. Un poco antes de iniciar la carrera de potencia, los inyectores comienzan a inyectar combustible directamente al cilindro, con la rapidez justa para mantener la presión casi constante durante la primera parte de la carrera de potencia. A causa de

20.6 Diagrama pV del ciclo Otto, un modelo idealizado de los procesos termodinámicos de un motor de gasolina.





20.7 Diagrama pV para el ciclo Diesel idealizado.



la elevada temperatura desarrollada durante la compresión adiabática, el combustible se enciende espontáneamente al inyectarse; no se requieren bujías.

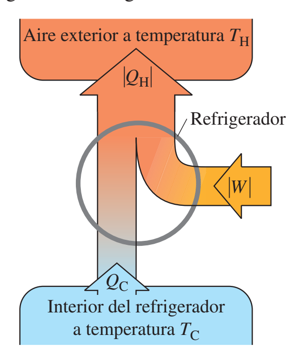
El **ciclo Diesel** idealizado se muestra en la figura 20.7. Empezando en el punto a, el aire se comprime adiabáticamente hasta el punto b, se calienta a presión constante hasta el punto c, se expande adiabáticamente hasta el punto d y se enfría a volumen constante hasta el punto a. Puesto que no hay combustible en el cilindro durante la mayoría de la carrera de compresión, no puede haber preignición, y la razón de compresión r puede ser mucho mayor que en un motor de gasolina. Esto mejora la eficiencia y asegura un encendido confiable al inyectarse el combustible (por la alta temperatura alcanzada durante la compresión adiabática). Son comunes valores de r de 15 a 20; con estos valores y $\gamma = 1.4$, la eficiencia teórica del ciclo Diesel idealizado es de 0.65 a 0.70. Al igual que con el ciclo Otto, la eficiencia de un motor real es mucho menor. Si bien los motores a Diesel son muy eficientes, deben construirse con tolerancias mucho más estrictas que los motores de gasolina, y el sistema de inyección de combustible requiere un mantenimiento cuidadoso.

Evalúe su comprensión de la sección 20.3 Para un motor de ciclo Otto con cilindros de tamaño fijo y tasa de compresión constante, ¿cuál de los siguientes aspectos del diagrama pV de la figura 20.6 cambiarían, al duplicarse la cantidad de combustible quemada por ciclo? (Tal vez haya más de una respuesta correcta.) i) la distancia vertical entre los puntos b y c; ii) la distancia vertical entre los puntos a y d; iii) la distancia horizontal entre los puntos b y a.

20.4 Refrigeradores

Consideremos que un **refrigerador** es como una máquina térmica que opera en reversa. Una máquina térmica toma calor de un lugar caliente y lo cede a un lugar más frío. Un refrigerador hace lo contrario; toma calor de un lugar frío (el interior del refrigerador) y lo cede a un lugar más caliente (generalmente al aire del sitio donde está el refrigerador). Una máquina térmica tiene una *salida* neta de trabajo mecánico; el refrigerador requiere una *entrada* neta de trabajo mecánico. Aplicando las convenciones de signo de la sección 20.2 a un refrigerador, Q_C es positivo, pero tanto W como Q_H son negativos: $|W| = -W$ y $|Q_H| = -Q_H$.

20.8 Diagrama esquemático de flujo de energía de un refrigerador.



La figura 20.8 muestra un diagrama de flujo para un refrigerador. Por la primera ley para un proceso cíclico,

$$Q_H + Q_C - W = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad -Q_H = Q_C - W$$

Es decir, puesto que tanto Q_H como W son negativos,

$$|Q_H| = Q_C + |W| \tag{20.7}$$

Como muestra el diagrama, el calor $|Q_H|$ que sale de la sustancia de trabajo y se cede a la fuente caliente siempre es *mayor* que el calor Q_C tomado de la fuente fría. Observe que la relación de valor absoluto

$$|Q_H| = |Q_C| + |W| \tag{20.8}$$

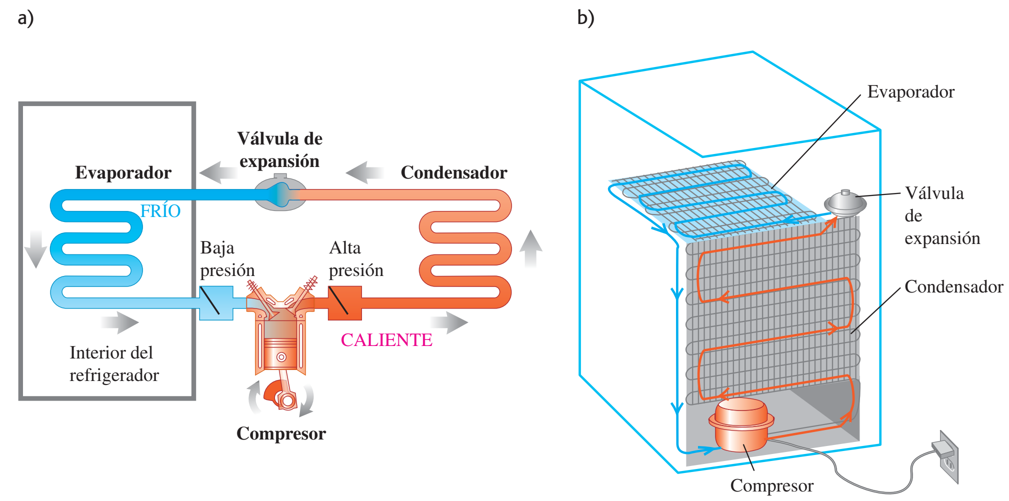
es válida tanto para máquinas térmicas como para refrigeradores.

Desde un punto de vista económico, el mejor ciclo de refrigeración es el que saca el máximo de calor $|Q_C|$ del refrigerador con el menor gasto de trabajo mecánico, $|W|$. Por tanto, la razón relevante es $|Q_C|/|W|$; cuanto mayor sea dicha razón, mejor será el refrigerador. Llamamos a esta razón **coeficiente de rendimiento**, denotado con K. Por la ecuación (20.8), $|W| = |Q_H| - |Q_C|$, así que

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} \qquad \text{(coeficiente de rendimiento de un refrigerador)} \tag{20.9}$$

Como siempre, medimos Q_H, Q_C y W en las mismas unidades de energía; K es entonces un número adimensional.

20.9 a) Principio del ciclo mecánico de refrigeración. b) Cómo están dispuestos los elementos clave en un refrigerador doméstico.

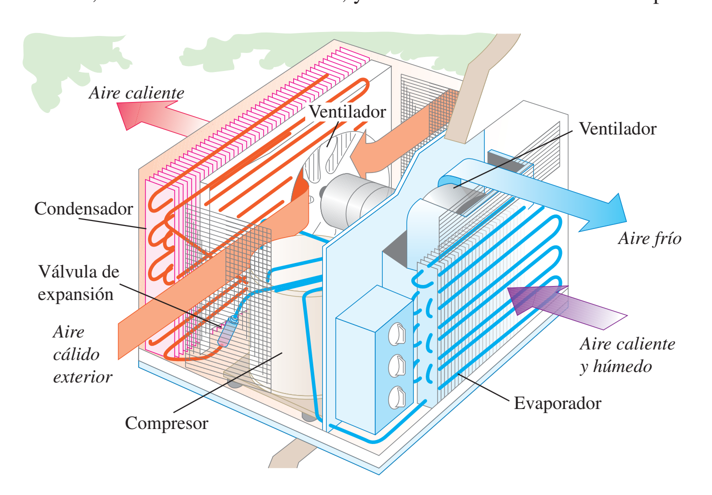


Refrigeradores domésticos

Los principios del ciclo de refrigeración común se muestran esquemáticamente en la figura 20.9a. El "circuito" contiene un fluido refrigerante (la sustancia de trabajo). El lado izquierdo del circuito (que incluye las espiras de enfriamiento dentro del refrigerador) está a baja temperatura y a baja presión; el lado derecho (que incluye las espiras de condensación fuera del refrigerador) está a alta temperatura y alta presión. Por lo regular, ambos lados contienen líquido y vapor en equilibrio de fases.

El compresor admite fluido, lo comprime adiabáticamente y lo alimenta al condensador a alta presión. De esta manera, la temperatura del fluido es mayor que la del aire que rodea el condensador, por lo que el refrigerante cede calor $|Q_H|$ y se condensa parcialmente (se convierte en líquido). Luego, el fluido se expande adiabáticamente hacia el evaporador con una rapidez controlada por la válvula de expansión. Al expandirse, el fluido se enfría considerablemente, tanto que está más frío que el entorno del evaporador. El fluido absorbe calor $|Q_C|$ de su entorno, enfriándolo y vaporizándose parcialmente. A continuación, el fluido pasa al compresor para iniciar otro ciclo. El compresor, usualmente impulsado por un motor eléctrico (figura 20.9b), requiere aporte de energía y realiza trabajo $|W|$ *sobre* la sustancia de trabajo durante cada ciclo.

Los acondicionadores de aire operan según el mismo principio. En este caso, la caja del refrigerador es una habitación o todo un edificio. Las espiras del evaporador están adentro, el condensador está afuera, y los ventiladores recirculan aire por ellos



20.10 Un acondicionador de aire funciona con el mismo principio que un refrigerador.

(figura 20.10). En instalaciones grandes, las espiras del condensador a veces se enfrían con agua. En este caso, las cantidades de mayor importancia práctica son la *tasa* de eliminación de calor (la corriente de calor H de la región enfriada) y la entrada de *potencia* $P = W/t$ al compresor. Si se elimina un calor $|Q_C|$ en un tiempo t, entonces $H = |Q_C|/t$, y podemos expresar el coeficiente de rendimiento como

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{Ht}{Pt} = \frac{H}{P}$$

Los acondicionadores de aire comunes para habitación suelen tener tasas de eliminación de calor H de 5000 a 10,000 Btu/h, es decir, de 1500 a 3000 W, y requieren entradas de potencia eléctrica de 600 a 1200 W. Los coeficientes de rendimiento son del orden de 3; los valores reales dependen de las temperaturas interior y exterior.

Por desgracia, es común que K se exprese comercialmente en unidades mixtas, con H en Btu/h y P en watts. En estas unidades, H/P es la **calificación de eficiencia de energía** (CEE); las unidades, que suelen omitirse, son (Btu/h)/W. Puesto que 1 W = 3.413 Btu/h, la CEE es numéricamente 3.413 mayor que la K adimensional. Los acondicionadores de aire para habitación suelen tener una CEE de aproximadamente 10.

Una variación sobre este tema es la **bomba de calor**, empleada para calentar edificios enfriando el aire exterior. La bomba funciona como un refrigerador al revés. Las espiras del evaporador están afuera, donde toman calor del aire frío, y las del condensador están adentro, donde ceden calor al aire más caliente. Con un diseño correcto, el calor $|Q_H|$ suministrado al interior cada ciclo puede ser mucho mayor que el trabajo $|W|$ necesario para llevarlo ahí.

? *Siempre* se necesita trabajo para transferir calor de un cuerpo más frío a uno más caliente. El calor fluye espontáneamente en el otro sentido, y para revertir el flujo se requiere trabajo del exterior. La experiencia indica que es imposible hacer un refrigerador que transporte calor de un cuerpo más frío a uno más caliente sin agregar trabajo. Si no se necesitara trabajo, el coeficiente de rendimiento sería infinito. Llamamos a tal dispositivo *refrigerador sin trabajo*; es un mito, como el unicornio y las comidas gratuitas.

Evalúe su comprensión de la sección 20.4 ¿Por qué no podemos enfriar una casa dejando abierta la puerta del refrigerador?

20.5 La segunda ley de la termodinámica

Las pruebas experimentales sugieren que es *imposible* construir una máquina térmica que convierta calor totalmente en trabajo, es decir, una máquina con una eficiencia térmica del 100%. Esta imposibilidad es la base de un planteamiento de la **segunda ley de la termodinámica**, que a continuación tenemos:

Es imposible que un sistema efectúe un proceso en el que absorba calor de una fuente de temperatura uniforme y lo convierta totalmente en trabajo mecánico, terminando en el mismo estado en que inició.

Llamaremos a éste el planteamiento de “máquina” de la segunda ley. (Los físicos también lo llaman *planteamiento de Kelvin-Planck*.)

La base de la segunda ley de la termodinámica es la diferencia entre la naturaleza de la energía interna y la de la energía mecánica macroscópica. En un cuerpo que se mueve, las moléculas tienen movimiento aleatorio, al que se superpone un movimiento coordinado de todas las moléculas en la dirección de la velocidad del

cuerpo. La energía cinética asociada a este movimiento macroscópico *coordinado* es lo que llamamos energía cinética del cuerpo en movimiento. Las energías cinéticas y potenciales asociadas al movimiento *aleatorio* constituyen la energía interna.

Si un cuerpo que se desliza sobre una superficie se detiene a causa de la fricción, el movimiento organizado del cuerpo se convierte en movimiento aleatorio de moléculas del cuerpo y de la superficie. Dado que no podemos controlar los movimientos de moléculas individuales, no podemos convertir todo este movimiento aleatorio otra vez en movimiento organizado. Podemos convertir *una parte*, y esto es lo que hace la máquina térmica.

Si la segunda ley *no* se cumpliera, podríamos impulsar un automóvil u operar una planta de electricidad enfriando el aire circundante. Ninguna de estas imposibilidades viola la *primera* ley de la termodinámica. La segunda, por lo tanto, no se deduce de la primera; más bien es una ley natural independiente. La primera ley niega la posibilidad de crear o destruir energía; la segunda limita la *disponibilidad* de la energía y las formas en que puede usarse y convertirse.

Replanteamiento de la segunda ley

Nuestro análisis de los refrigeradores de la sección 20.4 es la base de un planteamiento alterno de la segunda ley de la termodinámica. El calor fluye espontáneamente de los cuerpos más calientes a los más fríos, nunca al revés. Un refrigerador lleva calor de un cuerpo más frío a uno más caliente, aunque para funcionar requiere un aporte de energía mecánica o de trabajo. Generalizando esta observación, decimos:

Es imposible que un proceso tenga como único resultado la transferencia de calor de un cuerpo más frío a uno más caliente.

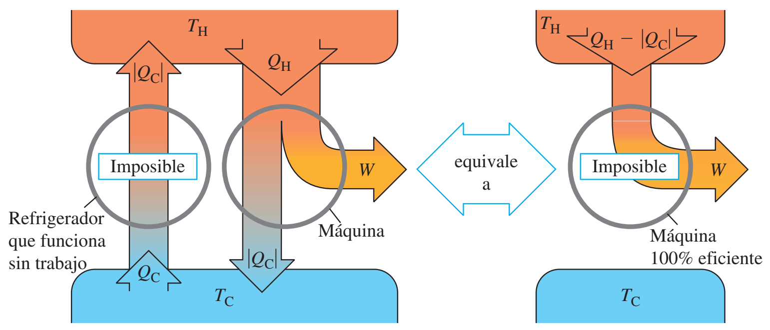
Llamamos a éste el planteamiento de “refrigerador” de la segunda ley. (También se conoce como *planteamiento de Clausius*.) Tal vez no parezca muy relacionado con el planteamiento de “máquina”; pero en realidad son totalmente equivalentes. Si pudiéramos construir un refrigerador sin trabajo, por ejemplo, violando el planteamiento de “refrigerador” de la segunda ley, podríamos usarlo junto con una máquina térmica, bombeando el calor rechazado por la máquina de vuelta a la fuente caliente para reutilizarlo. Esta máquina compuesta (figura 20.11a) violaría el planteamiento de “máquina” de la segunda ley, porque su efecto neto sería tomar una cantidad neta de calor $Q_H - |Q_C|$ de la fuente caliente y convertirla totalmente en trabajo.

Como alternativa, si pudiéramos crear una máquina con una eficiencia térmica del 100%, violando el primer planteamiento, podríamos operarla tomando calor de la fuente caliente y usar el trabajo producido para operar un refrigerador que bombee calor de la fuente fría a la caliente (figura 20.11b). Este dispositivo compuesto violaría el planteamiento de “refrigerador”, porque su efecto neto sería tomar un calor Q_C de la fuente fría y llevarlo a la caliente, sin necesidad de aporte de trabajo. Así, cualquier dispositivo que viole una forma de la segunda ley puede servir para construir un dispositivo que viole la otra forma. Si es imposible violar la primera forma, ¡también lo es violar la segunda!

La conversión de trabajo en calor, como en la fricción o el flujo de fluidos viscosos, y el flujo de calor de caliente a frío a través de un gradiente de temperatura finito, son procesos *irreversibles*. Los planteamientos de “máquina” y “refrigerador” de la segunda ley dicen que tales procesos sólo pueden revertirse parcialmente. Podríamos citar otros ejemplos. Los gases siempre se filtran espontáneamente por una abertura de una región de alta presión a una de baja presión; los gases y líquidos miscibles sin perturbación siempre tienden a mezclarse, no a separarse. La segunda ley de la termodinámica es una expresión del aspecto inherentemente unidireccional de éstos y muchos otros procesos irreversibles. La conversión de energía es un aspecto esencial de la vida de plantas y animales y también de la tecnología humana, así que la segunda ley tiene una importancia fundamental para el mundo en que vivimos.

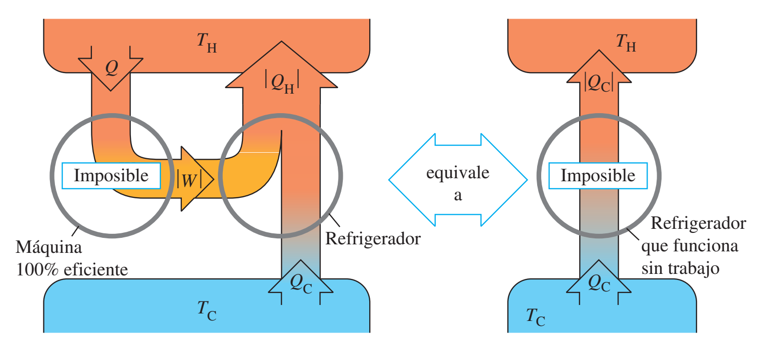
20.11 Diagramas de flujo de energía que muestran que las dos formas de la segunda ley son equivalentes.

a) El planteamiento de "máquina" de la segunda ley de la termodinámica



Si fuera posible que un refrigerador funcionara sin trabajo, junto con una máquina térmica ordinaria, podría usarse para crear una máquina 100% eficiente, convirtiendo el calor $Q_H - |Q_C|$ completamente en trabajo.

b) El planteamiento de "refrigerador" de la segunda ley de la termodinámica



Si fuera posible que una máquina 100% eficiente, junto con un refrigerador doméstico, podría usarse para crear un refrigerador que funcionara sin trabajo, transfiriendo el calor Q_C de la fuente fría a la caliente sin aportar trabajo.

Evalúe la comprensión de la sección 20.5 Una máquina 100% eficiente (figura 20.11a) violaría la *primera* ley de la termodinámica? ¿Y un refrigerador sin trabajo (figura 20.11b)?

20.12 La temperatura de la caja del fogón de una máquina de vapor es mucho mayor que la temperatura del agua en la caldera, así que el calor fluye irreversiblemente del fogón al agua. La búsqueda de Carnot para entender la eficiencia de las máquinas de vapor lo llevó a la idea de que una máquina ideal implicaría sólo procesos *reversibles*.



20.6 El ciclo de Carnot

De acuerdo con la segunda ley, ninguna máquina térmica puede tener eficiencia del 100%. ¿Qué tanta eficiencia *puede* tener una máquina, dadas dos fuentes de calor a temperaturas T_H y T_C? El ingeniero francés Sadi Carnot (1796-1832) contestó esta pregunta en 1824, cuando inventó una máquina térmica idealizada hipotética que tiene la máxima eficiencia posible, congruente con la segunda ley. El ciclo de esta máquina se denomina **ciclo de Carnot**.

Para explicar este ciclo, volvemos a un tema recurrente de este capítulo: la *reversibilidad* y su relación con la dirección de los procesos termodinámicos. La conversión de calor en trabajo es un proceso irreversible; el propósito de una máquina térmica es una reversión *parcial* de este proceso, la conversión de calor en trabajo con la máxima eficiencia posible. Para lograrlo, entonces, *debemos evitar todos los procesos irreversibles* (figura 20.12). Este requisito resulta ser suficiente para determinar la sucesión básica de pasos del ciclo de Carnot, como veremos a continuación.

El *flujo de calor* a través de una diferencia de temperatura finita es un proceso irreversible. Por lo tanto, durante la transferencia de calor en el ciclo de Carnot, *no* debe haber una diferencia de temperatura finita. Cuando la máquina toma calor de la fuente

caliente a temperatura T_H, la sustancia de trabajo de la máquina también debe estar a T_H; si no, habría un flujo de calor irreversible. Asimismo, cuando la máquina desecha calor a la fuente fría que está a T_C, la máquina misma debe estar a T_C. Es decir, todo proceso que implique transferencia de calor debe ser *isotérmico* ya sea a T_H o a T_C.

Por otro lado, en cualquier proceso en el que la temperatura de la sustancia de trabajo de la máquina sea intermedia entre T_H y T_C, *no* deberá haber transferencia de calor entre la máquina y cualquiera de las fuentes, ya que no podría ser reversible. Por lo tanto, cualquier proceso en el que la temperatura T de la sustancia de trabajo cambie deberá ser *adiabático*.

Lo crucial es que todo proceso de nuestro ciclo idealizado sea isotérmico, o bien, adiabático. Además, se debe mantener el equilibrio térmico y mecánico en todo momento para que cada proceso sea totalmente reversible.

Pasos del ciclo de Carnot

El ciclo de Carnot consiste en dos procesos isotérmicos y dos adiabáticos, todos reversibles. La figura 20.13 muestra un ciclo de Carnot que emplea como sustancia de trabajo un gas ideal en un cilindro con un pistón, y consta de los siguientes pasos:

ActivPhysics ONLINE
8.14 Ciclo de Carnot

1. El gas se expande isotérmicamente a temperatura T_H, absorbiendo calor Q_H (ab).
2. El gas se expande adiabáticamente hasta que su temperatura baja a T_C (bc).
3. El gas se comprime isotérmicamente a T_C, expulsando calor $|Q_C|$ (cd).
4. El gas se comprime adiabáticamente hasta su estado inicial a temperatura T_H (da).

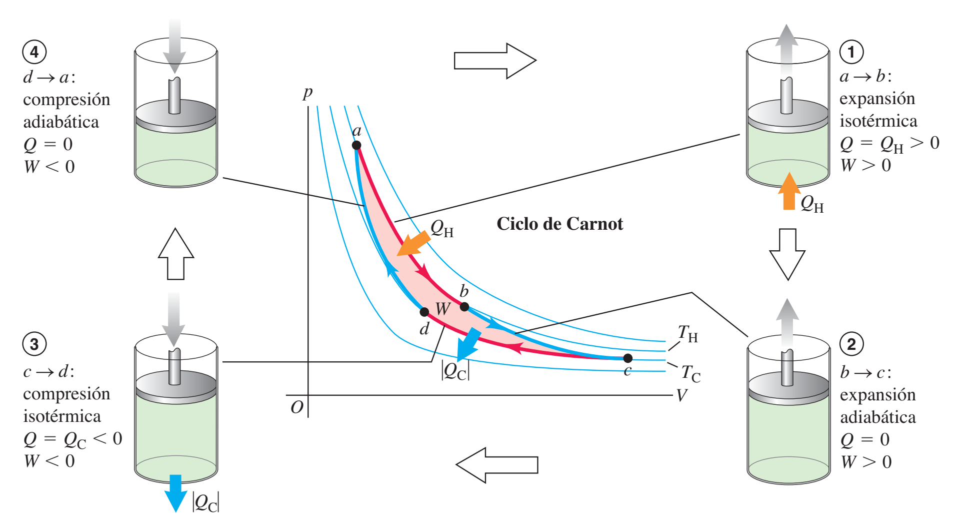
Podemos calcular la eficiencia térmica e de una máquina de Carnot en el caso especial mostrado en la figura 20.13, donde la sustancia de trabajo es un *gas ideal*. Para realizar este cálculo, primero obtendremos la relación Q_C/Q_H de las cantidades de calor transferidas en los dos procesos isotérmicos, y luego usaremos la ecuación (20.4) para calcular e.

La energía interna U del gas ideal depende sólo de la temperatura y por ello es constante en cualquier proceso isotérmico. Para la expansión isotérmica ab, $\Delta U_{ab} = 0$, y Q_H es igual al trabajo W_{ab} realizado por el gas durante su expansión isotérmica a temperatura T_H. Ya calculamos este trabajo en el ejemplo 19.1 (sección 19.2); con este resultado, tenemos

$$Q_H = W_{ab} = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a} \tag{20.10}$$

20.13 Ciclo de Carnot para el gas ideal. Las líneas rojas del diagrama pV son isotermas (curvas de temperatura constante); las líneas azules son adiabáticas (curvas con cero flujo de calor).





De forma similar,

$$Q_C = W_{cd} = nRT_C \ln \frac{V_d}{V_c} = -nRT_C \ln \frac{V_c}{V_d} \tag{20.11}$$

Puesto que V_d es menor que V_c, Q_C es negativo $(Q_C = -|Q_C|)$; sale calor del gas durante la compresión isotérmica a temperatura T_C.

La razón de las dos cantidades de calor es entonces

$$\frac{Q_C}{Q_H} = -\left(\frac{T_C}{T_H}\right)\frac{\ln(V_c/V_d)}{\ln(V_b/V_a)} \tag{20.12}$$

Esto puede simplificarse aún más usando la relación temperatura-volumen para un proceso adiabático, ecuación (19.22). Obtenemos, para los dos procesos adiabáticos:

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_C V_c^{\gamma-1} \qquad \text{y} \qquad T_H V_a^{\gamma-1} = T_C V_d^{\gamma-1}$$

Dividiendo la primera expresión entre la segunda:

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}} \qquad \text{y} \qquad \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

Por lo tanto, los dos logaritmos de la ecuación (20.12) son iguales, y esa ecuación se reduce a

$$\frac{Q_C}{Q_H} = -\frac{T_C}{T_H} \quad \text{o} \quad \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = \frac{T_C}{T_H} \quad \text{(transferencia de calor en máquina de Carnot)} \tag{20.13}$$

La razón del calor expulsado a T_C al absorbido a T_H es igual a la razón T_C/T_H. Entonces, por la ecuación (20.4), la eficiencia de una máquina de Carnot es

$$e_{Carnot} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \quad \text{(eficiencia de una máquina de Carnot)} \tag{20.14}$$

Este sencillo resultado dice que la eficiencia de una máquina de Carnot sólo depende de las temperaturas de las dos fuentes de calor: es grande si la *diferencia* de temperaturas es grande, y muy pequeña cuando las temperaturas son casi iguales. La eficiencia nunca puede ser exactamente 1, a menos que $T_C = 0$; más adelante veremos que esto también es imposible.

CUIDADO **Use temperatura Kelvin en los cálculos de Carnot** En todos los cálculos de ciclo de Carnot asegúrese de usar sólo temperaturas *absolutas* (Kelvin), porque las ecuaciones (20.10) a (20.14) provienen de la ecuación del gas ideal $pV = nRT$, en la que T es temperatura absoluta.

Ejemplo 20.2 Análisis de una máquina de Carnot I

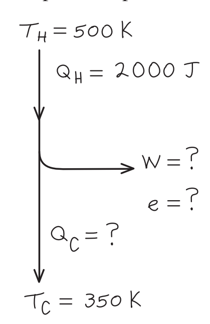
Una máquina de Carnot toma 2000 J de calor de una fuente a 500 K, realiza trabajo, y desecha calor a una fuente a 350 K. ¿Cuánto trabajo efectúa, cuánto calor expulsa y qué eficiencia tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica una máquina de Carnot, así que podemos usar las ideas de esta sección junto con los conceptos de la sección 20.2 (que se aplican a las máquinas térmicas de todas clases).

PLANTEAR: La figura 20.14 muestra un diagrama de flujo de energía para este problema. Para esta máquina de Carnot, nos dan $Q_H = 2000$ J, la cantidad de calor absorbido, y las temperaturas $T_H = 500$ K y $T_C = 350$ K de las fuentes caliente y fría, respectivamente. Obtendremos la cantidad de calor expulsada con la ecuación (20.13) y luego

20.14 Nuestro esquema para este problema.



calcularemos la cantidad de trabajo realizado empleando la primera ley de la termodinámica: el trabajo efectuado en un ciclo completo es la suma del calor absorbido y del calor (negativo) expulsado [véase la ecuación (20.2)]. Obtenemos la eficiencia a partir de las dos temperaturas, empleando la ecuación (20.14).

EJECUTAR: Por la ecuación (20.13), el calor Q_C expulsado por la máquina es

$$Q_C = -Q_H \frac{T_C}{T_H} = -(2000\ J)\frac{350\ K}{500\ K} = -1400\ J$$

Por la primera ley, el trabajo W efectuado por la máquina es

$$W = Q_H + Q_C = 2000\ J + (-1400\ J) = 600\ J$$

Por la ecuación (20.14), la eficiencia térmica es

$$e = 1 - \frac{T_C}{T_H} = 1 - \frac{350\ K}{500\ K} = 0.30 = 30\%$$

EVALUAR: El signo negativo de Q_C es correcto: indica que *sale* calor de la máquina hacia la fuente fría. Podemos comprobar nuestro resultado para e utilizando la definición básica de eficiencia térmica:

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{600\ J}{2000\ J} = 0.30 = 30\%$$

Ejemplo 20.3 Análisis de una máquina de Carnot II

Suponga que 0.200 moles de un gas diatómico con comportamiento ideal ($\gamma = 1.40$) efectúa un ciclo de Carnot con temperaturas de 227 °C y 27 °C. La presión inicial es $p_a = 10.0 \times 10^5$ Pa y, durante la expansión isotérmica a la temperatura superior, se duplica el volumen. *a*) Calcule la presión y el volumen en los puntos a, b, c y d del diagrama pV de la figura 20.13. *b*) Calcule Q, W y ΔU para cada paso y para todo el ciclo. *c*) Determine la eficiencia directamente a partir de los resultados del inciso *b*) y compárela con el resultado de la ecuación (20.14).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema intervienen las propiedades del ciclo de Carnot y las del gas ideal.

PLANTEAR: Nos dan el número de moles y la presión y temperatura en el punto a (que es la más alta de las temperaturas de las dos fuentes), así que podremos calcular el volumen en a utilizando la ecuación del gas ideal. Después, obtendremos la presión y el volumen en los demás puntos utilizando las ecuaciones dadas en esta sección, en combinación con la ecuación del gas ideal. Después, para cada paso del ciclo, usaremos las ecuaciones (20.10) y (20.11) para obtener el flujo de calor y el trabajo efectuado, y la ecuación (19.13), para calcular el cambio de energía interna. Al igual que en el ejemplo anterior, calcularemos la eficiencia con la ecuación (20.14).

EJECUTAR: *a*) Primero convertimos las temperaturas Celsius en absolutas. La temperatura superior es $T_H = (227 + 273.15)$ K = 500 K; y la inferior, $T_C = (27 + 273.15)$ K = 300 K. Luego usamos la ecuación del gas ideal para obtener V_a:

$$V_a = \frac{nRT_H}{p_a} = \frac{(0.200\ mol)(8.314\ J/mol \cdot K)(500\ K)}{10.0 \times 10^5\ Pa} = 8.31 \times 10^{-4}\ m^3$$

El volumen se duplica durante la expansión isotérmica $a \rightarrow b$, así que

$$V_b = 2V_a = 2(8.31 \times 10^{-4}\ m^3) = 16.6 \times 10^{-4}\ m^3$$

Además, durante esa expansión $a \rightarrow b$, $p_aV_a = p_bV_b$, así que

$$p_b = \frac{p_aV_a}{V_b} = 5.00 \times 10^5\ Pa$$

Para la expansión adiabática $b \rightarrow c$, $T_HV_b^{\gamma-1} = T_CV_c^{\gamma-1}$, y

$$V_c = V_b\left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{1/(\gamma-1)} = (16.6 \times 10^{-4}\ m^3)\left(\frac{500\ K}{300\ K}\right)^{2.5} = 59.6 \times 10^{-4}\ m^3$$

Aplicamos otra vez la ecuación del gas ideal en el punto c:

$$p_c = \frac{nRT_C}{V_c} = \frac{(0.200\ mol)(8.314\ J/mol \cdot K)(300\ K)}{59.6 \times 10^{-4}\ m^3} = 0.837 \times 10^5\ Pa$$

Para la compresión adiabática $d \rightarrow a$, $T_CV_d^{\gamma-1} = T_HV_a^{\gamma-1}$, y

$$V_d = V_a\left(\frac{T_H}{T_C}\right)^{1/(\gamma-1)} = (8.31 \times 10^{-4}\ m^3)\left(\frac{500\ K}{300\ K}\right)^{2.5} = 29.8 \times 10^{-4}\ m^3$$

$$p_d = \frac{nRT_C}{V_d} = \frac{(0.200\ mol)(8.314\ J/mol \cdot K)(300\ K)}{29.8 \times 10^{-4}\ m^3} = 1.67 \times 10^5\ Pa$$

b) Para la expansión isotérmica $a \rightarrow b$, $\Delta U_{ab} = 0$. Para calcular W_{ab} ($= Q_H$) usamos la ecuación (20.10):

$$W_{ab} = Q_H = nRT_H \ln\frac{V_b}{V_a} = (0.200\ mol)(8.314\ J/mol \cdot K)(500\ K)(\ln 2) = 576\ J$$

Para la expansión adiabática $b \rightarrow c$, $Q_{bc} = 0$. Por la primera ley de la termodinámica, $\Delta U_{bc} = Q_{bc} - W_{bc} = -W_{bc}$; así que el trabajo W_{bc} efectuado por el gas en este proceso es el negativo del cambio de energía interna del gas. Por la ecuación (19.13), tenemos $\Delta U = nC_V\Delta T$, donde $\Delta T = T_C - T_H$ (temperatura final menos temperatura inicial). Con $C_V = 20.8$ J/mol · K para un gas diatómico que obedece la ecuación del gas ideal, obtenemos

$$W_{bc} = -\Delta U_{bc} = -nC_V(T_C - T_H) = nC_V(T_H - T_C) = (0.200\ mol)(20.8\ J/mol \cdot K)(500\ K - 300\ K) = 832\ J$$

continúa

Para la compresión isotérmica $c \rightarrow d$, $\Delta U_{cd} = 0$; la ecuación (20.11) da

$$W_{cd} = Q_C = nRT_C \ln \frac{V_d}{V_c}$$
$$= (0.200\,\text{mol})(8.314\,\text{J/mol}\cdot\text{K})(300\,\text{K})\left(\ln \frac{29.8 \times 10^{-4}\,\text{m}^3}{59.6 \times 10^{-4}\,\text{m}^3}\right)$$
$$= -346\ \text{J}$$

Para la compresión adiabática $d \rightarrow a$, $Q_{da} = 0$, y

$$W_{da} = -\Delta U_{da} = -nC_V(T_H - T_C) = nC_V(T_C - T_H)$$
$$= (0.200\ \text{mol})(20.8\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(300\ \text{K} - 500\ \text{K})$$
$$= -832\ \text{J}$$

Podemos tabular los resultados como sigue:

Proceso	Q	W	ΔU
$a \rightarrow b$	576 J	576 J	0
$b \rightarrow c$	0	832 J	−832 J
$c \rightarrow d$	−346 J	−346 J	0
$d \rightarrow a$	0	−832 J	832 J
Total	230 J	230 J	0

c) De la tabla, $Q_H = 576$ J y el trabajo total es 230 J. Así,

$$e = \frac{W}{Q_H} = \frac{230\ \text{J}}{576\ \text{J}} = 0.40 = 40\%$$

Podemos comparar esto con el resultado de la ecuación (20.14):

$$e = \frac{T_H - T_C}{T_H} = \frac{500\ \text{K} - 300\ \text{K}}{500\ \text{K}} = 0.40 = 40\%$$

EVALUAR: En la tabla de resultados del inciso *b*), observe que, para todo el ciclo, $Q = W$ y $\Delta U = 0$. Estos resultados son los esperados: en un ciclo completo, el aporte neto de calor se utiliza para realizar trabajo con cero cambio neto en la energía interna del sistema. Observe también que la cantidad de trabajo en los dos procesos adiabáticos es igual con signo opuesto. A partir del análisis que condujo a la ecuación (20.13), ¿puede demostrar qué esto *siempre* sucede en un ciclo de Carnot?

Vemos que la eficiencia en este ejemplo es mayor que la obtenida en el ejemplo 20.2. Ello se debe a que la razón de temperaturas alta a baja es mayor: (500 K)/(300 K) en vez de (500 K)/(350 K).

El refrigerador de Carnot

Dado que cada paso del ciclo de Carnot es reversible, *todo el ciclo* podría revertirse, convirtiendo la máquina en refrigerador. El coeficiente de rendimiento del refrigerador de Carnot se obtiene combinando la definición general de K, ecuación (20.9), con la ecuación (20.13) para el ciclo de Carnot. Primero reescribimos la ecuación (20.9) así:

$$K = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} = \frac{|Q_C|/|Q_H|}{1 - |Q_C|/|Q_H|}$$

Luego sustituimos la ecuación (20.13), $|Q_C|/|Q_H| = T_C/T_H$, en esta expresión. El resultado es

$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \quad \text{(coeficiente de rendimiento de un refrigerador de Carnot)} \qquad (20.15)$$

Si la diferencia de temperatura $T_H - T_C$ es pequeña, K es mucho mayor que 1; en este caso, puede "bombearse" mucho calor de la temperatura inferior a la superior con muy poco gasto de trabajo. Cuanto mayor sea la diferencia de temperatura, menor será K y se requerirá más trabajo para transferir una cantidad dada de calor.

Ejemplo 20.4 Análisis de un refrigerador de Carnot

Si el ciclo descrito en el ejemplo 20.3 se efectúa hacia atrás como refrigerador, ¿qué coeficiente de rendimiento tiene?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema utiliza las ideas de la sección 20.3 (para refrigeradores en general), así como el análisis previo de los refrigeradores de Carnot.

PLANTEAR: La ecuación (20.9) da el coeficiente de rendimiento de *cualquier* refrigerador, en términos del calor extraído de la fuente fría en cada ciclo y el trabajo que debe efectuarse en cada ciclo.

EJECUTAR: En el ejemplo 20.3, vimos que, en un ciclo, la máquina de Carnot expulsa un calor $Q_C = -346$ J a la fuente fría y efectúa un trabajo $W = 230$ J. Por lo tanto, cuando la operamos en reversa como refrigerador, el sistema extrae un calor $Q_C = +346$ J de la fuente fría, y requiere un aporte de trabajo $W = -230$ J. Por la ecuación (20.9),

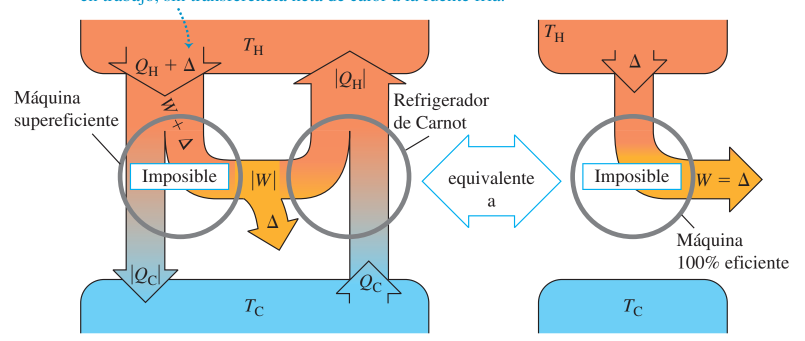
$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{346\ \text{J}}{230\ \text{J}} = 1.50$$

Puesto que se trata de un ciclo de Carnot, también podemos usar la ecuación (20.15):

$$K = \frac{T_C}{T_H - T_C} = \frac{300\ \text{K}}{500\ \text{K} - 300\ \text{K}} = 1.50$$

EVALUAR: En un ciclo de Carnot, e y K sólo dependen de las temperaturas, como indican las ecuaciones (20.14) y (20.15), y no necesitamos calcular Q y W. Sin embargo, si el ciclo contiene procesos irreversibles, estas ecuaciones no son válidas y se requieren cálculos más detallados.

20.15 Demostración de que la máquina de Carnot tiene la máxima eficiencia posible. Una máquina "supereficiente" (más eficiente que una máquina de Carnot), combinada con un refrigerador de Carnot, podría convertir el calor totalmente en trabajo sin transferencia neta de calor a la fuente fría. Ello violaría la segunda ley de la termodinámica.



Ciclo de Carnot y la segunda ley

Podemos demostrar que **ninguna máquina puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas**. La clave para demostrarlo es que, puesto que cada paso del ciclo de Carnot es reversible, *todo el ciclo* puede revertirse. Operada en reversa, la máquina se convierte en un refrigerador. Suponga que tenemos una máquina más eficiente que una de Carnot (figura 20.15). La máquina de Carnot, operada en reversa como refrigerador mediante un aporte de trabajo negativo $-|W|$, toma un calor Q_C de la fuente fría y expulsa un calor $|Q_H|$ a la fuente caliente. La máquina supereficiente expulsa calor $|Q_C|$ pero, para hacerlo, toma una cantidad mayor de calor $Q_H + \Delta$. Así, su salida de trabajo es $W + \Delta$, y el efecto neto de las dos máquinas juntas es tomar una cantidad de calor Δ y convertirla totalmente en trabajo. Esto viola el planteamiento de máquina de la segunda ley. Podríamos elaborar un argumento similar usando una máquina supereficiente para violar el planteamiento de refrigerador de la segunda ley. Observe que no tuvimos que suponer que la máquina supereficiente es reversible. Del mismo modo, podemos demostrar que *ningún refrigerador puede tener un coeficiente de rendimiento mayor que el de un refrigerador de Carnot que opera entre las mismas dos temperaturas*.

Así, la afirmación de que ninguna máquina puede ser más eficiente que una máquina de Carnot es otro planteamiento equivalente de la segunda ley de la termodinámica, y de él se sigue directamente que **todas las máquinas de Carnot que operan entre las mismas dos temperaturas tienen la misma eficiencia, sea cual fuere la naturaleza de la sustancia de trabajo**. Aunque deducimos la ecuación (20.14) para una máquina de Carnot usando un gas ideal como sustancia de trabajo, la ecuación es válida para *cualquier* máquina de Carnot, sea cual fuere la sustancia de trabajo.

La ecuación (20.14), que expresa la eficiencia de una máquina de Carnot, establece un límite superior para la eficiencia de una máquina real, como una turbina de vapor. Con la finalidad de aumentar al máximo este límite y la eficiencia real de la máquina, el diseñador debe hacer la temperatura de admisión T_H lo más alta posible, y la de escape T_C, lo más baja posible (figura 20.16).

La temperatura de escape no puede ser menor que la temperatura más baja con que se cuenta para enfriar el escape. En el caso de una turbina de vapor en una planta eléctrica, T_C podría ser la temperatura de un río o lago; entonces, queremos que la temperatura de la caldera T_H sea lo más alta posible. La presión de vapor de todos los líquidos aumenta rápidamente con la temperatura, así que estamos limitados por la resistencia mecánica de la caldera. A 500 °C, la presión de vapor del agua es de aproximadamente 240×10^5 Pa (235 atm); ésta es generalmente la máxima presión práctica en las grandes calderas de vapor actuales.

20.16 Para obtener la eficiencia máxima, se busca que las temperaturas dentro de un motor a reacción sean lo más altas posible. Se usan materiales cerámicos exóticos que resisten temperaturas de más de 1000 °C sin derretirse ni reblandecerse.



*La escala de temperatura Kelvin

En el capítulo 17 indicamos la necesidad de una escala de temperatura que no dependiera de las propiedades de un material específico. Ahora podemos usar el ciclo de Carnot para definir tal escala. La eficiencia térmica de una máquina de Carnot que opera entre dos fuentes de calor a temperaturas T_H y T_C es independiente de la naturaleza de la sustancia de trabajo y depende únicamente de las temperaturas. Por la ecuación (20.4), la eficiencia térmica es

$$e = \frac{Q_H + Q_C}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H}$$

Por lo tanto, la razón Q_C/Q_H es la misma para *todas* las máquinas de Carnot que operan entre dos temperaturas dadas T_H y T_C.

Kelvin propuso que, *por definición*, la razón T_C/T_H fuera igual a la magnitud del cociente Q_C/Q_H de las cantidades de calor absorbida y expulsada:

$$\frac{T_C}{T_H} = \frac{|Q_C|}{|Q_H|} = -\frac{Q_C}{Q_H} \quad \text{(definición de temperatura de Kelvin)} \tag{20.16}$$

La ecuación (20.16) parece idéntica a la (20.13), pero hay una sutil y crucial diferencia. Las temperaturas de la ecuación (20.13) se basan en un termómetro de gas ideal, definido en la sección 17.3; mientras que la ecuación (20.16) *define* una escala de temperatura con base en el ciclo de Carnot y la segunda ley de la termodinámica, y es independiente del comportamiento de cualquier sustancia específica. Por lo tanto, la **escala de temperatura Kelvin** es en verdad *absoluta*. Para completar la definición de la escala Kelvin, asignamos, como en la sección 17.3, el valor arbitrario de 273.16 K a la temperatura del punto triple del agua. Cuando llevamos una sustancia por un ciclo de Carnot, la razón de los calores absorbido y expulsado, $|Q_H|/|Q_C|$, es igual a la razón de las temperaturas de las fuentes *expresadas en la escala de termómetro de gas* definida en la sección 17.3. Puesto que el punto triple del agua se elige como 273.16 K en ambas escalas, se sigue que *las escalas Kelvin y de gas ideal son idénticas*.

El punto cero de la escala Kelvin se denomina **cero absoluto**, y se puede interpretar en un nivel molecular: en el cero absoluto, el sistema tiene su *mínima* energía interna total (cinética más potencial) posible. Sin embargo, a causa de efectos cuánticos, *no* es cierto que en $T = 0$ cese todo el movimiento molecular. Hay razones teóricas para creer que no es posible lograr el cero absoluto experimentalmente, aunque se hayan alcanzado temperaturas por debajo de 10^{-7} K. Cuanto más nos acercamos al cero absoluto, más difícil será acercarse más. Un planteamiento de la *tercera ley de la termodinámica* es que es imposible alcanzar el cero absoluto en un número finito de pasos termodinámicos.

Evalúe su comprensión de la sección 20.6 Imagine que un inventor en busca de apoyo financiero acude a usted con una idea para un motor de gasolina que opera según un novedoso tipo de ciclo termodinámico. El diseño requiere usar exclusivamente cobre en la construcción, y enfriamiento con aire. El inventor asegura que la eficiencia del motor será del 85%. ¿Le conviene invertir en este maravilloso motor? (*Sugerencia:* véase la tabla 17.4.)

20.7 Entropía

La segunda ley de la termodinámica, tal como la planteamos, tiene una forma un tanto distinta de la de muchas leyes físicas que el lector ya conoce. No es una ecuación ni una relación cuantitativa, sino un planteamiento de *imposibilidad*. No obstante, *sí podemos* expresar esta ley como una relación cuantitativa empleando el concepto de *entropía*, que es el tema de esta sección.

Hemos mencionado varios procesos que se efectúan naturalmente en la dirección de desorden creciente. El flujo de calor irreversible aumenta el desorden porque las moléculas inicialmente están acomodadas en regiones más calientes y más frías; este ordenamiento se pierde cuando el sistema alcanza equilibrio térmico. La adición de calor a un cuerpo aumenta su desorden porque aumenta las velocidades moleculares medias y, con ello, la aleatoriedad del movimiento molecular. La expansión libre de un gas aumenta su desorden porque las moléculas tienen mayor aleatoriedad de posición después de la expansión. La figura 20.17 muestra otro proceso donde aumenta en desorden.

20.17 Cuando explotan los fuegos pirotécnicos, aumenta el desorden. Las sustancias químicas esmeradamente envueltas dentro de cada petardo se dispersa en todas direcciones, y la energía química almacenada se convierte en energía cinética aleatoria de los fragmentos.



Entropía y desorden

La **entropía** es una medida *cuantitativa* del desorden. Para introducir este concepto, consideremos una expansión isotérmica infinitesimal del gas ideal. Agregamos calor dQ y dejamos que el gas se expanda apenas lo suficiente para mantener constante la temperatura. Dado que la energía interna del gas ideal sólo depende de su temperatura, la energía interna también es constante; por la primera ley, el trabajo dW efectuado por el gas es igual al calor dQ agregado. Es decir,

$$dQ = dW = p\,dV = \frac{nRT}{V}dV \qquad \text{así que} \qquad \frac{dV}{V} = \frac{dQ}{nRT}$$

El gas está en un estado más desordenado después de la expansión, porque las moléculas se mueven en un volumen mayor y tienen más aleatoriedad de posición. Por lo tanto, el cambio fraccionario de volumen dV/V es una medida del aumento del desorden, y la ecuación anterior indica que es proporcional a la cantidad dQ/T. Introducimos el símbolo S para la entropía del sistema, y definimos el cambio infinitesimal de entropía dS durante un proceso reversible infinitesimal a temperatura absoluta T como

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad \text{(proceso infinitesimal reversible)} \tag{20.17}$$

Si se agrega un calor total Q durante un proceso isotérmico reversible a temperatura absoluta T, el cambio de entropía total $\Delta S = S_2 - S_1$ está dado por

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T} \qquad \text{(proceso isotérmico reversible)} \tag{20.18}$$

La entropía tiene unidades de energía entre temperatura; la unidad de entropía en el SI es 1 J/K.

Ahora vemos cómo se relaciona el cociente Q/T con el aumento del desorden. Una temperatura más alta implica mayor aleatoriedad de movimiento. Si la sustancia inicialmente está fría, con poco movimiento molecular, la adición de Q causa un aumento fraccionario considerable en el movimiento y la aleatoriedad molecular. Pero si la sustancia ya está caliente, la misma cantidad de calor aumenta relativamente poco el mayor movimiento molecular que ya existe. Así, el cociente Q/T es una caracterización adecuada del aumento de aleatoriedad o desorden, cuando hay flujo de calor hacia un sistema.

Ejemplo 20.5 Cambio de entropía durante la fusión

Un kilogramo de hielo a 0 °C se derrite y convierte en agua a 0 °C. Calcule el cambio de entropía, suponiendo que la fusión es reversible. El calor de fusión del agua es $L_f = 3.34 \times 10^5$ J/kg.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La fusión se efectúa a una temperatura constante de 0 °C, así que se trata de un proceso isotérmico reversible.

PLANTEAR: Nos dan la cantidad de calor agregada (en términos del calor de fusión) y la temperatura $T = 273$ K. (Recuerde que, en cálculos de entropía, siempre debemos usar temperaturas absolutas (Kelvin).) Calcularemos el cambio de entropía con la ecuación (20.18).

continúa

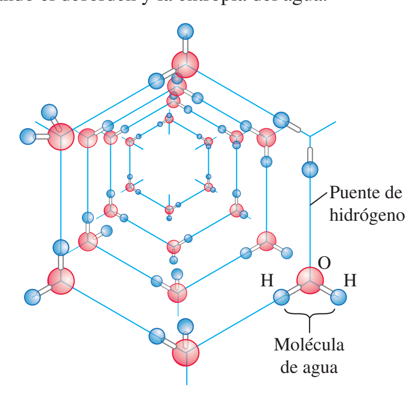
EJECUTAR: El calor necesario para fundir el hielo es $Q = mL_f = 3.34 \times 10^5$ J. Por la ecuación (20.18), el aumento de entropía del sistema es

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T} = \frac{3.34 \times 10^5\ \text{J}}{273\ \text{K}} = 1.22 \times 10^3\ \text{J/K}$$

EVALUAR: Este incremento corresponde al aumento del desorden cuando las moléculas de agua pasan del estado altamente ordenado de un sólido cristalino, al estado mucho más desordenado de un líquido (figura 20.18).

En todo proceso *isotérmico* reversible, el cambio de entropía es igual al calor transferido dividido entre la temperatura absoluta. Si volvemos a congelar el agua, Q tendrá el signo opuesto, y el cambio de entropía del agua será $\Delta S = -1.22 \times 10^3$ J/K. Las moléculas de agua se reacomodan en un cristal para formar hielo, disminuyendo el desorden y la entropía.

20.18 Las moléculas de agua están acomodadas en un patrón regular y ordenado en un cristal de hielo. Al derretirse el hielo, los puentes de hidrógeno entre las moléculas se rompen, aumentando el desorden y la entropía del agua.



Entropía en los procesos reversibles

Podemos generalizar la definición de cambio de entropía para incluir *cualquier* proceso reversible que lleva de un estado a otro, sea isotérmico o no. Representamos el proceso como una serie de pasos reversibles infinitesimales. Durante un paso típico, se agrega una cantidad infinitesimal de calor dQ al sistema a temperatura absoluta T. Luego sumamos (integramos) los cocientes dQ/T para todo el proceso:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad \text{(cambio de entropía en un proceso reversible)} \tag{20.19}$$

Los límites 1 y 2 se refieren a los estados inicial y final.

Dado que la entropía es una medida del desorden de un sistema en un estado específico, debe depender sólo del estado actual del sistema, no de su historia. Después demostraremos esto. Cuando un sistema pasa de un estado inicial con entropía S_1 a uno final con entropía S_2, el cambio de entropía $\Delta S = S_2 - S_1$ definido por la ecuación (20.19) no depende de la trayectoria que lleva del estado inicial al final; es el mismo para *todos* los procesos posibles que conduzcan del estado 1 al 2. Por lo tanto, la entropía de un sistema también debe tener un valor definido para cualquier estado dado del sistema. Recordamos que la *energía interna*, introducida en el capítulo 19, también tiene esta propiedad, aunque la entropía y la energía interna son cantidades muy distintas.

Puesto que la entropía sólo es función del estado de un sistema, también podemos calcular cambios de entropía en procesos *irreversibles* (sin equilibrio), para los que no son válidas las ecuaciones (20.17) y (20.19). Basta con inventar una trayectoria que conecte los estados inicial y final dados, y que *sí* consista totalmente en procesos reversibles que llevan al equilibrio, y calcular el cambio de entropía total para esa trayectoria. No será el verdadero camino, pero el cambio de entropía debe ser el mismo.

Al igual que con la energía interna, lo anterior no nos indica cómo calcular la entropía en sí, sólo el cambio de entropía en un proceso dado. Como hicimos con la energía interna, podemos asignar arbitrariamente un valor a la entropía de un sistema en un estado de referencia específico y luego calcular la entropía de cualquier otro estado con referencia a él.

Ejemplo 20.6 Cambio de entropía en un cambio de temperatura

Un kilogramo de agua a 0 °C se calienta a 100 °C. Calcule su cambio de entropía.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En la práctica, el proceso descrito se efectuaría de manera irreversible, quizá colocando un cazo con agua sobre una parrilla eléctrica cuya superficie de cocción se mantiene a 100 °C. Sin embargo, el cambio de entropía del agua sólo depende de los estados inicial y final del sistema, y es el mismo si el proceso es reversible o si es irreversible.

PLANTEAR: Podemos imaginar que la temperatura del agua se eleva reversiblemente en una serie de pasos infinitesimales, en cada uno de los cuales la temperatura aumenta una cantidad infinitesimal dT. Entonces usamos la ecuación (20.19) para integrar sobre todos esos pasos y calculamos el cambio de entropía del proceso total.

EJECUTAR: Por la ecuación (17.14), el calor requerido para efectuar cada paso infinitesimal es $dQ = mc\,dT$. Sustituyendo esto en la ecuación (20.19) e integrando, obtenemos

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} mc\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$= (1.00\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})\left(\ln\frac{373\text{ K}}{273\text{ K}}\right)$$

$$= 1.31 \times 10^3\text{ J/K}$$

EVALUAR: El cambio de entropía es positivo, como debe ser en un proceso en el que el sistema absorbe calor.

En este cálculo, consideramos que el calor específico c no depende de la temperatura. Tal aproximación es razonable, pues c del agua sólo aumenta en un 1% entre 0 °C y 100 °C.

CUIDADO **No utilice $\Delta S = Q/T$** Al resolver este problema, el lector podría sentirse tentado a evitar la integración empleando la expresión más sencilla de la ecuación (20.18), $\Delta S = Q/T$. Sin embargo, sería un error, porque esa ecuación sólo es válida para procesos *isotérmicos*, y en nuestro ejemplo las temperaturas inicial y final *no* son las mismas. La *única* forma correcta de calcular el cambio de entropía en un proceso en el que las temperaturas inicial y final son distintas es usar la ecuación (20.19).

Ejemplo conceptual 20.7 Proceso adiabático reversible

Un gas se expande de forma adiabática y reversible. Calcule el cambio de entropía.

SOLUCIÓN

En un proceso adiabático, no entra ni sale calor del sistema. Por lo tanto, $dQ = 0$ y la entropía *no* cambia en este proceso reversible, $\Delta S = 0$. Todo proceso adiabático *reversible* es de entropía constante. (Por ello, llamamos *isoentrópicos* a los procesos adiabáticos reversibles.) El aumento en el desorden debido a que el gas ocupa un volumen mayor es exactamente igual a la disminución en el desorden asociada a la disminución de temperatura y la reducción de las velocidades moleculares.

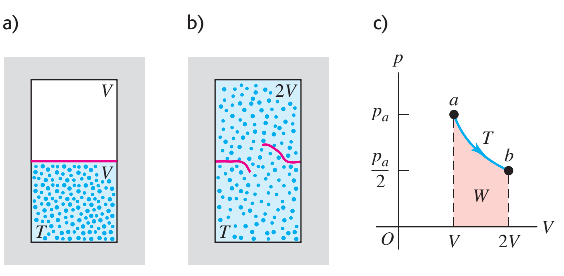
Ejemplo 20.8 Cambio de entropía en una expansión libre

Una caja térmicamente aislada está dividida en dos compartimientos, cada uno con volumen V, por una membrana (figura 20.19). Inicialmente, un compartimiento contiene n moles de gas ideal a temperatura T, y el otro está vacío. Se rompe la membrana y el gas se expande hasta llenar los dos compartimientos. Calcule el cambio de entropía en este proceso de expansión libre.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Para este proceso, $Q = 0$, $W = 0$, $\Delta U = 0$ y (puesto que el sistema es un gas ideal) $\Delta T = 0$. Podríamos pensar que el cambio de entropía es cero porque no hay intercambio de calor, pero sólo podemos usar la ecuación (20.19) para calcular los cambios de entropía en procesos *reversibles*; esta expansión libre *no* es reversible, y *sí* hay un cambio de entropía. El proceso es adiabático porque $Q = 0$, pero no isoentrópico, pues $\Delta S \neq 0$. Como mencionamos al

20.19 a), b) Expansión libre de gas ideal aislado. c) El proceso de expansión libre no pasa por estados de equilibrio de a a b, pero el cambio de entropía $S_b - S_a$ puede calcularse usando el camino isotérmico mostrado o *cualquier* camino reversible de a a b.



continúa

principio de esta sección, la entropía aumenta en una expansión libre porque las posiciones de las moléculas son más aleatorias que antes de la expansión.

PLANTEAR: Para calcular ΔS, recordamos que el cambio de entropía sólo depende de los estados inicial y final. Podemos inventar un proceso *reversible* que tenga los mismos extremos, usar la ecuación (20.19) para calcular ΔS y así determinar el cambio de entropía para el proceso original. En este caso, un proceso reversible apropiado sería una expansión isotérmica de V a $2V$ a temperatura T. El gas efectúa un trabajo W durante esta expansión, así que debe suministrarse una cantidad de calor Q igual para mantener constante la energía interna. Calcularemos el cambio de entropía para este proceso isotérmico reversible empleando la ecuación (20.18); el cambio de entropía para la expansión libre será igual.

EJECUTAR: Vimos en el ejemplo 19.1 (sección 19.2) que el trabajo efectuado por n moles de gas ideal en una expansión isotérmica de V_1 a V_2 es $W = nRT\ln(V_2/V_1)$. Usando $V_1 = V$ y $V_2 = 2V$, tenemos

$$Q = W = nRT\ln\frac{2V}{V} = nRT\ln 2$$

Por lo tanto, el cambio de entropía es

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = nR\ln 2$$

y éste es también el cambio para la expansión libre con los mismos estados inicial y final. Para un mol,

$$\Delta S = (1 \text{ mol})(8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(\ln 2) = 5.76 \text{ J/K}$$

EVALUAR: El cambio de entropía es positivo, como lo anticipamos. El factor (ln2) de nuestra respuesta es resultado de que el volumen haya aumentado en un factor de 2. ¿Puede demostrar que, si el volumen hubiera aumentado de V a xV durante la expansión libre, donde x es un número arbitrario, el cambio de entropía habría sido $\Delta S = nR \ln x$?

Ejemplo 20.9 Entropía y el ciclo de Carnot

Para la máquina de Carnot del ejemplo 20.2 (sección 20.6), calcule el cambio de entropía total en la máquina durante un ciclo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El ciclo de Carnot se compone de cuatro pasos reversibles (véase figura 20.13), de manera que podemos utilizar la expresión para el cambio de entropía en un proceso reversible.

PLANTEAR: Calcularemos el cambio de entropía ΔS para cada paso y luego sumaremos esos cambios para obtener el cambio total de entropía ΔS para el ciclo entero.

EJECUTAR: No hay cambio de entropía durante la expansión adiabática ni la compresión adiabática. Durante la expansión isotérmica a $T_H = 500$ K, la máquina admite 2000 J de calor, y su cambio de entropía es, por la ecuación (20.18),

$$\Delta S_H = \frac{Q_H}{T_H} = \frac{2000 \text{ J}}{500 \text{ K}} = 4.0 \text{ J/K}$$

Durante la compresión isotérmica a $T_C = 350$ K, la máquina cede (expulsa) 1400 J de calor y su cambio de entropía es

$$\Delta S_C = \frac{Q_C}{T_C} = \frac{-1400 \text{ J}}{350 \text{ K}} = -4.0 \text{ J/K}$$

El cambio total de entropía en la máquina durante un ciclo es $\Delta S_{total} = \Delta S_H + \Delta S_C = 4.0 \text{ J/K} + (-4.0 \text{ J/K}) = 0$.

EVALUAR: El resultado $\Delta S_{total} = 0$ nos dice que, cuando la máquina de Carnot completa un ciclo, tiene la misma entropía que tenía al principio del ciclo. Exploraremos este resultado en el siguiente apartado.

¿Qué magnitud tiene el cambio total de entropía del *entorno* de la máquina durante este ciclo? La fuente caliente (500 K) cede 2000 J de calor durante la expansión isotérmica reversible, así que su cambio de entropía es $(-2000 \text{ J})/(500 \text{ K}) = -4.0$ J/K; la fuente fría (350 K) absorbe 1400 J de calor durante la compresión isotérmica reversible, así que su cambio de entropía es $(+1400 \text{ J})/(350 \text{ K}) = +4.0$ J/K. Por lo tanto, cada fuente individual sufre un cambio de entropía; sin embargo, la suma de esos cambios —es decir, el cambio total de entropía del entorno del sistema— es cero.

Los resultados son válidos para el caso especial del ciclo de Carnot, en el que *todos* los procesos son reversibles. En este caso, vemos que el cambio total de entropía del sistema y su entorno es cero. Veremos que, si el ciclo incluye procesos irreversibles (como sucede con el ciclo Otto o el ciclo Diesel de la sección 20.3), el cambio total de entropía del sistema y el entorno *no puede* ser cero; debe ser positivo.

Entropía en procesos cíclicos

El ejemplo 20.9 mostró que el cambio total de entropía para un ciclo de una máquina de Carnot dada, con gas ideal como sustancia de trabajo, es cero. Este resultado es consecuencia directa de la ecuación (20.13), que podemos rescribir como

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_C}{T_C} = 0 \qquad (20.20)$$

El cociente Q_H/T_H es igual a ΔS_H, el cambio de entropía de la máquina que se da en $T = T_H$. Asimismo, Q_C/T_C es igual a ΔS_C, el cambio de entropía (negativo) de la

máquina que se da en $T = T_C$. Por lo tanto, la ecuación (20.20) dice que $\Delta S_H + \Delta S_C = 0$; es decir, el cambio neto de entropía en el ciclo es cero.

¿Qué sucede con las máquinas de Carnot que usan una sustancia de trabajo distinta? La segunda ley nos dice que *cualquier* máquina de Carnot que opere entre dos temperaturas dadas T_H y T_C tiene la misma eficiencia $e = 1 - T_C/T_H$ [ecuación (20.14)]. Si combinamos esta expresión con la ecuación (20.4), $e = 1 + Q_C/Q_H$, reproducimos la ecuación (20.20). Por lo tanto, la ecuación (20.20) es válida para cualquier máquina de Carnot que opere entre estas temperaturas, sea su sustancia de trabajo el gas ideal o no. Concluimos que *el cambio de entropía total en un ciclo de cualquier máquina de Carnot es cero*.

Este resultado puede generalizarse para demostrar que el cambio total de entropía durante *cualquier* proceso reversible cíclico es cero. En un diagrama pV, un proceso cíclico reversible aparece como un camino cerrado (figura 20.20a). Podemos aproximar un camino así tanto como queramos con una sucesión de procesos isotérmicos y adiabáticos que formen parte de muchos ciclos de Carnot largos y delgados (figura 20.20b). El cambio de entropía total para el ciclo entero es la suma de los cambios para cada ciclo de Carnot pequeño, todos los cuales son cero. Por lo tanto, **el cambio de entropía total en *cualquier* ciclo reversible es cero**:

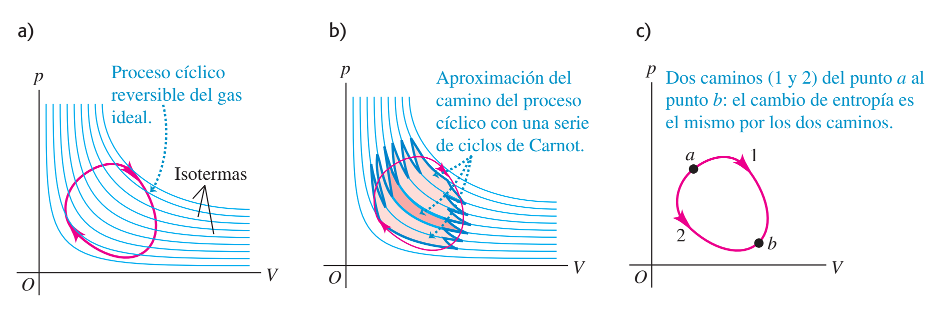
$$\int \frac{dQ}{T} = 0 \qquad \text{(proceso cíclico reversible)} \tag{20.21}$$

Se deduce que, cuando un sistema experimenta un proceso reversible que lo lleva de un estado a hacia cualquier otro estado b, *el cambio de entropía del sistema es independiente del camino* (figura 20.20c). Si el cambio de entropía para el camino 1 fuera diferente del cambio para el camino 2, el sistema podría llevarse por el camino 1 y regresar por el 2 al punto de partida, con un cambio neto de entropía distinto de cero. Esto violaría la conclusión de que el cambio total de entropía en semejante proceso cíclico debe ser cero. Puesto que el cambio de entropía en tales procesos es independiente del camino, concluimos que, en cualquier estado dado, el sistema tiene un valor definido de entropía que sólo depende del estado, no de los procesos que lo llevaron a él.

Entropía en procesos irreversibles

En un proceso reversible idealizado que implica sólo estados de equilibrio, el cambio total de entropía del sistema y su entorno es cero. En cambio, todos los procesos *irreversibles* implican un aumento de entropía. A diferencia de la energía, *la entropía no se conserva*. La entropía de un sistema aislado *puede* cambiar, pero, como veremos, nunca puede disminuir. La expansión libre de un gas, descrita en el ejemplo 20.8, es un proceso irreversible en un sistema aislado en el que hay un aumento de entropía.

20.20 a) Proceso cíclico reversible para el gas ideal, indicado con un camino cerrado rojo en un diagrama pV. Se muestran varias isotermas de gas ideal en azul. b) Podemos aproximar el camino de a) con una serie de ciclos de Carnot largos y delgados; se destaca un ciclo en tono más oscuro. El cambio de entropía total es cero para cada ciclo de Carnot y para el proceso cíclico real. c) El cambio de entropía entre los puntos a y b es independiente del camino.



Ejemplo 20.10 Proceso irreversible

Suponga que 1.00 kg de agua a 100 °C se coloca en contacto térmico con 1.00 kg de agua a 0 °C. Calcule el cambio total de entropía. Considere que el calor específico del agua 4190 J/kg · K es constante en este intervalo de temperaturas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este proceso implica flujo irreversible de calor por la diferencia de temperatura.

PLANTEAR: Como hay masas iguales a 0 °C y 100 °C, la temperatura final es el promedio de estas dos temperaturas, o 50 °C. Aunque los procesos son irreversibles, calcularemos los cambios de entropía para el agua (inicialmente) caliente y el agua (inicialmente) fría tal como hicimos en el ejemplo 20.6, suponiendo que el proceso es reversible. Calcularemos ΔS para cada sustancia con la ecuación (20.19), porque las temperaturas cambian en el proceso.

EJECUTAR: La temperatura final es 50 °C = 323 K. El cambio de entropía del agua caliente es

$$\Delta S_{\text{caliente}} = mc\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = (1.00\text{ kg})(4190\text{ J/kg}\cdot\text{K})\int_{373\text{ K}}^{323\text{ K}} \frac{dT}{T}$$

$$= (4190\text{ J/K})\left(\ln\frac{323\text{ K}}{373\text{ K}}\right) = -603\text{ J/K}$$

El cambio de entropía del agua fría es

$$\Delta S_{\text{fría}} = (4190\text{ J/K})\left(\ln\frac{323\text{ K}}{273\text{ K}}\right) = +705\text{ J/K}$$

El cambio *total* de entropía del sistema es

$$\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{caliente}} + \Delta S_{\text{fría}} = (-603\text{ J/K}) + 705\text{ J/K} = +102\text{ J/K}$$

EVALUAR: Un flujo irreversible de calor en un sistema aislado va acompañado de un aumento de entropía. Podríamos haber llegado al mismo estado final mezclando simplemente las dos cantidades de agua. Éste también es un proceso irreversible; puesto que la entropía sólo depende del estado del sistema, el cambio total sería el mismo, 102 J/K.

Vale la pena señalar que la entropía del sistema aumenta *continuamente* conforme las dos cantidades de agua se acercan al equilibrio térmico. Por ejemplo, los primeros 4190 J de calor transferido enfrían el agua caliente a 99 °C y calientan el agua fría a 1 °C. El cambio neto de entropía para este paso es aproximadamente

$$\Delta S = \frac{-4190\text{ J}}{373\text{ K}} + \frac{4190\text{ J}}{273\text{ K}} = +4.1\text{ J/K}$$

¿Puede demostrar de manera similar que el cambio neto de entropía es positivo para *cualquier* cambio de temperatura de un grado que conduce a la condición de equilibrio?

20.21 El mezclado de tinta y agua parte de un estado de orden relativo (baja entropía) en el que cada fluido está separado y es distinto del otro. El estado final es más desordenado (tiene mayor entropía). Nunca se observa la separación espontánea de la tinta y el agua, un proceso en el que habría una reducción neta de la entropía.



Entropía y la segunda ley

Los resultados del ejemplo 20.10 con respecto al flujo de calor de una temperatura mayor a una menor, o el mezclado de sustancias a diferentes temperaturas, son característicos de *todos* los procesos naturales (es decir, irreversibles). Si incluimos los cambios de entropía de todos los sistemas que participan en el proceso, los aumentos siempre son mayores que las reducciones. En el caso especial de un proceso *reversible*, los aumentos y reducciones son iguales, y podemos enunciar el siguiente principio general: **Si se incluyen todos los sistemas que participan en un proceso, la entropía se mantiene constante, o bien, aumenta.** En otras palabras, **no puede haber un proceso en el que la entropía total disminuya, si se incluyen todos los sistemas que participan en el proceso**. Éste es otro planteamiento de la segunda ley de la termodinámica en términos de entropía, así que es equivalente a los planteamientos de "máquina" y "refrigerador" que vimos antes. La figura 20.21 presenta un ejemplo específico de este principio general.

El aumento de entropía en todos los procesos naturales (irreversibles) mide el aumento del desorden o la aleatoriedad del Universo asociado con ese proceso. Consideremos otra vez el ejemplo de mezclar agua caliente y fría (ejemplo 20.10). *Podríamos* haber usado estas aguas como fuentes de alta y baja temperatura de una máquina térmica. Al tomar calor del agua caliente y cederlo a la fría, podríamos haber obtenido algo de trabajo mecánico. Sin embargo, una vez que las dos aguas se mezclan y alcanzan una temperatura uniforme, esa oportunidad de convertir calor en trabajo mecánico se pierde irremediablemente. El agua tibia nunca se *separará* en porciones fría y caliente. No hay disminución de *energía* cuando se mezclan las aguas fría y caliente; lo que se pierde no es *energía*, sino *oportunidad*: la oportunidad de convertir parte del calor del agua caliente en trabajo mecánico. Por lo tanto, cuando la entropía aumenta, la energía está menos *disponible*, y el Universo se vuelve más aleatorio o "gastado".

Evalúe su comprensión de la sección 20.7 Suponga que 2.00 kg de agua a 50 °C cambia espontáneamente de temperatura, de manera que la mitad del agua se enfría a 0 °C mientras que la otra mitad se calienta a 100 °C. (Toda el agua sigue siendo líquida: no se congela ni se vaporiza.) ¿Cuánto cambiaría la entropía del agua? ¿Es posible este proceso? ¿Por qué?

*20.8 Interpretación microscópica de la entropía

En la sección 19.4 vimos que podemos calcular la energía interna de un sistema, al menos en principio, sumando todas las energías cinéticas de sus partículas constituyentes y todas las energías potenciales de interacción entre las partículas. Esto es un *cálculo microscópico* de la energía interna. También podemos realizar un cálculo microscópico de la entropía S de un sistema. A diferencia de la energía, sin embargo, la entropía no es algo que pertenezca a cada partícula o par de partículas individuales del sistema; más bien, es una medida del desorden del sistema en su totalidad. Para entender el cálculo microscópico de la entropía, primero debemos analizar la idea de *estados macroscópicos* y *microscópicos*.

Suponga que lanza N monedas idénticas al piso, y la mitad muestra cara y la mitad cruz. Ésta es una descripción del **estado macroscópico** (a gran escala) del sistema de N monedas. Una descripción del **estado microscópico** del sistema incluye información acerca de cada moneda individual: la moneda 1 es cara, la 2 cruz, la 3 cruz, etcétera. Puede haber muchos estados microscópicos que correspondan a la misma descripción macroscópica. Por ejemplo, con $N = 4$ monedas hay seis posibles estados en los que la mitad son cara y la mitad cruz (figura 20.22). El número de estados microscópicos crece rápidamente al aumentar N; con $N = 100$ hay $2^{100} = 1.27 \times 10^{30}$ estados microscópicos, de los que 1.01×10^{29} son mitad cara y mitad cruz.

Los resultados menos probables del lanzamiento de monedas son los casos en que aparecen sólo caras o sólo cruces. Sin duda es posible lanzar 100 caras seguidas, pero no apueste a ello; la probabilidad de lograrlo es de sólo 1 en 1.27×10^{30}. El resultado más probable de lanzar N monedas es que la mitad sean cara y la mitad cruz. La razón es que este estado *macroscópico* tiene el mayor número de estados *microscópicos* correspondientes, como se aprecia en la figura 20.22.

Para vincular esto con el concepto de entropía, observe que N monedas que son todas cara constituyen un estado macroscópico totalmente ordenado; la descripción "todas cara" especifica por completo el estado de cada una de las N monedas. Lo mismo se cumple si todas las monedas son cruz. En cambio, la descripción macroscópica "mitad cara, mitad cruz" por sí sola nos dice muy poco acerca del estado (cara o cruz) de cada moneda individual. Decimos que el sistema está *desordenado* porque sabemos muy poco acerca de su estado microscópico. En comparación con el estado "todas cara" o "todas cruz", el estado "mitad cara, mitad cruz" tiene un número mucho mayor de posibles estados microscópicos, mucho mayor desorden y, por lo tanto, mucha mayor entropía (que es una medida cuantitativa del desorden).

Ahora, en vez de N monedas, consideremos un mol de gas ideal que contiene el número de Avogadro de moléculas. El estado macroscópico de este gas está dado por su presión p, volumen V y temperatura T; una descripción del estado microscópico implica dar la posición y velocidad de cada molécula del gas. A una presión, volumen y temperatura dados, el gas podría estar en cualquiera de un número astronómicamente grande de estados microscópicos, dependiendo de las posiciones y velocidades de sus 6.02×10^{23} moléculas. Si el gas se expande libremente para alcanzar un mayor volumen, la gama de posibles posiciones aumenta, al igual que el número de estados microscópicos posibles; el sistema se desordena más y la entropía aumenta como se calculó en el ejemplo 20.8 (sección 20.7).

Podemos obtener la siguiente conclusión general: **para cualquier sistema, el estado macroscópico más probable es el que tiene el mayor número de estados microscópicos correspondientes, y es también el estado macroscópico con el mayor desorden y la mayor entropía.**

20.22 Todos los posibles estados microscópicos de cuatro monedas. Puede haber varios estados microscópicos posibles para cada estado macroscópico.

Estado macroscópico — Estados microscópicos correspondientes

Cuatro caras

Tres caras, una cruz

Dos caras, dos cruces

Una cara, tres cruces

Cuatro cruces

Cálculo de la entropía: Estados microscópicos

Sea w el número de posibles estados microscópicos para un estado macroscópico dado. (Para las cuatro monedas de la figura 20.22, el estado de cuatro caras tiene $w = 1$, el de tres caras y una cruz tiene $w = 4$, y así sucesivamente.) Entonces, puede demostrarse que la entropía S de un estado macroscópico es

$$S = k \ln w \qquad \text{(expresión microscópica de la entropía)} \tag{20.22}$$

donde $k = R/N_A$ es la constante de Boltzmann (constante de los gases por molécula) que se explicó en la sección 18.3. Como muestra la ecuación (20.22), aumentar el número de estados microscópicos posibles w aumenta la entropía S.

Lo que importa en un proceso termodinámico no es la entropía absoluta S, sino la *diferencia* de entropía entre los estados inicial y final. Por lo tanto, una definición igualmente válida y útil sería $S = k \ln w + C$, donde C es una constante, ya que C se cancela en cualquier cálculo de diferencia de entropía entre dos estados. No obstante, es mejor igualar esta constante a cero y usar la ecuación (20.22). Así, y dado que el valor más pequeño posible de w es 1, el valor más pequeño posible de S para cualquier sistema es $k \ln 1 = 0$. La entropía *nunca* puede ser negativa.

En la práctica resulta difícil calcular w, por lo que la ecuación (20.22) sólo suele usarse para calcular la entropía absoluta S de ciertos sistemas especiales. No obstante, podemos usar esta relación para calcular *diferencias* de entropía entre un estado y otro. Considere un sistema que experimenta un proceso termodinámico que lo lleva del estado macroscópico 1, que tiene w_1 posibles estados microscópicos, al estado macroscópico 2, que tiene w_2 estados microscópicos. El cambio de entropía en este proceso es

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln w_2 - k \ln w_1 = k \ln \frac{w_2}{w_1} \tag{20.23}$$

La *diferencia* de entropía entre los dos estados macroscópicos depende del *cociente* de los números de posibles estados microscópicos.

Como ilustra el siguiente ejemplo, usar la ecuación (20.23) para calcular un cambio de entropía de un estado macroscópico a otro da el mismo resultado que considerar un proceso reversible que conecta esos dos estados y usar la ecuación (20.19).

Ejemplo 20.11 Cálculo microscópico de cambio de entropía

A partir de la ecuación (20.23), calcule el cambio de entropía en la expansión libre de n moles del gas a temperatura T que se describió en el ejemplo 20.8 (figura 20.23).

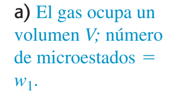
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se nos pide calcular el cambio de entropía con base en el número de microestados en el estado macroscópico inicial (figura 20.23a) y en el estado macroscópico final (figura 20.23b).

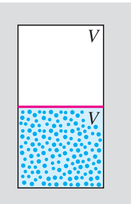
PLANTEAR: Cuando se rompe la membrana, las velocidades de las moléculas no cambian, ya que no se efectúa trabajo, pero ahora cada molécula tiene el doble de volumen para moverse y, por ende, dos veces más posiciones posibles. Esto es todo lo que necesitamos para calcular el cambio de entropía con la ecuación (20.23).

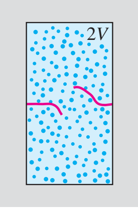
EJECUTAR: Sea w_1 el número de estados microscópicos del sistema total cuando el gas ocupa el volumen V (figura 20.23a). El número de

20.23 En una expansión libre de N moléculas en la que el volumen se duplica, el número de posibles estados microscópicos aumenta en 2^N.



b) El gas ocupa un volumen $2V$; número de microestados = $w_2 = 2^N w_1$.





moléculas es $N = nN_A$ y cada molécula tiene el doble de posibles estados después de romperse la membrana. Por lo tanto, el número w_2 de posibles estados microscópicos cuando el gas ocupa el volumen $2V$ (figura 20.23b) aumenta en un factor de 2^N; es decir, $w_2 = 2^N w_1$.

El cambio de entropía en este proceso es

$$\Delta S = k \ln \frac{w_2}{w_1} = k \ln \frac{2^N w_1}{w_1} = k \ln 2^N$$
$$= Nk \ln 2$$

Puesto que $N = nN_A$ y $k = R/N_A$, esto se convierte en

$$\Delta S = (nN_A)(R/N_A)\ln 2 = nR \ln 2$$

EVALUAR: Éste es el mismo resultado que el del ejemplo 20.8, pero sin referencia al camino termodinámico seguido.

Estados microscópicos y la segunda ley

La relación entre entropía y el número de estados microscópicos nos permite entender mejor el planteamiento de entropía de la segunda ley de la termodinámica, de que la entropía de un sistema cerrado nunca puede disminuir. De acuerdo con la ecuación (20.22), esto implica que un sistema cerrado nunca puede sufrir espontáneamente un proceso que reduzca el número de estados microscópicos posibles.

Un ejemplo de semejante proceso prohibido sería si todo el aire de una habitación se moviera espontáneamente a una mitad de la habitación, dejando vacío en la otra mitad. Tal “compresión libre” sería lo contrario de la expansión libre de los ejemplos 20.8 y 20.11, y reduciría en un factor de 2^N el número de posibles estados microscópicos. En sentido estricto, ¡este proceso no es imposible! La probabilidad de hallar una molécula dada en una mitad de la habitación es de $\frac{1}{2}$, así que la probabilidad de hallar todas las moléculas en la misma mitad es $(\frac{1}{2})^N$. (Ésta es exactamente la probabilidad de obtener N caras seguidas al lanzar una moneda.) Esta probabilidad *no* es cero. Sin embargo, por si le preocupa encontrarse repentinamente sin aire en la mitad evacuada de su habitación, considere que ésta podría contener 1000 moles de aire, de manera que $N = 1000N_A = 6.02 \times 10^{26}$ moléculas. La probabilidad de que todas las moléculas estén en la misma mitad del cuarto es entonces $(\frac{1}{2})^{6.02 \times 10^{26}}$. Expresado como decimal, este número tiene ¡más de 10^{26} ceros a la derecha del punto decimal!

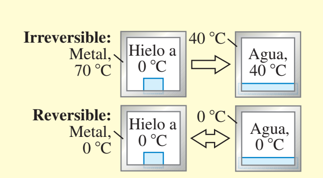
Dada la probabilidad tan insignificante de que tal “compresión libre” ocurra, es casi seguro que nunca ha ocurrido en el Universo desde el principio del tiempo. Concluimos que, en la práctica, la segunda ley de la termodinámica nunca se viola.

Evalúe su comprensión de la sección 20.8 N moléculas de gas ideal ocupan inicialmente un volumen V. Luego, el gas se expande a un volumen $2V$. El número de estados microscópicos del gas aumenta con esta expansión. ¿En cuál de las siguientes circunstancias aumentará al máximo este número? i) La expansión es reversible e isotérmica; ii) la expansión es reversible y adiabática; iii) el número cambiará en la misma cantidad para ambas circunstancias.

MP

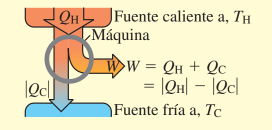
CAPÍTULO 20 RESUMEN

Procesos reversibles e irreversibles: Un proceso reversible es uno cuya dirección puede revertirse con un cambio infinitesimal en las condiciones del proceso, y en el cual el sistema siempre está en equilibrio térmico o muy cerca de él. Todos los demás procesos termodinámicos son irreversibles.



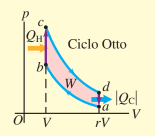
Máquinas térmicas: Una máquina térmica toma calor Q_H de una fuente, convierte parte de él en trabajo W y desecha o expulsa el resto $|Q_C|$ a una temperatura menor. La eficiencia térmica e de una máquina térmica mide qué tanto del calor absorbido se convierte en trabajo. (Véase el ejemplo 20.1.)

$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 + \frac{Q_C}{Q_H} = 1 - \left|\frac{Q_C}{Q_H}\right| \qquad (20.4)$$



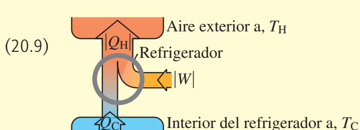
Ciclo Otto: Un motor de gasolina que opera según el ciclo Otto tiene una eficiencia térmica máxima teórica e que depende de la razón de compresión r y de la razón de capacidades caloríficas γ de la sustancia de trabajo.

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma - 1}} \qquad (20.6)$$

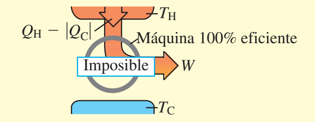


Refrigeradores: Un refrigerador toma calor Q_C de un lugar más frío, tiene un aporte de trabajo $|W|$, y desecha o expulsa calor $|Q_H|$ a un lugar más caliente. La eficiencia del refrigerador está dada por su coeficiente de rendimiento K.

$$K = \frac{|Q_C|}{|W|} = \frac{|Q_C|}{|Q_H| - |Q_C|} \qquad (20.9)$$



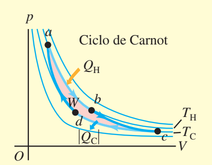
Segunda ley de la termodinámica: La segunda ley de la termodinámica describe la direccionalidad de los procesos termodinámicos naturales y puede plantearse de varias formas equivalentes. El planteamiento de *máquina* es que ningún proceso cíclico puede convertir calor totalmente en trabajo; el planteamiento de *refrigerador* es que ningún proceso cíclico puede transferir calor de un lugar más frío a uno más caliente sin aporte de trabajo mecánico.



Ciclo de Carnot: El ciclo de Carnot opera entre dos fuentes de calor a temperaturas T_H y T_C y usa sólo procesos reversibles. Su eficiencia térmica depende únicamente de T_H y T_C. Otro planteamiento equivalente de la segunda ley es que ninguna máquina que opere entre dos temperaturas dadas puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas. (Véanse los ejemplos 20.2 y 20.3.)

Una máquina de Carnot operada al revés es un refrigerador de Carnot; su coeficiente de rendimiento depende únicamente de T_H y T_C. Otra forma de la segunda ley dice que ningún refrigerador que opere entre dos temperaturas dadas puede tener un mayor coeficiente de rendimiento que un refrigerador de Carnot que opera entre las mismas temperaturas. (Véase el ejemplo 20.4.)

$$e_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_C}{T_H} = \frac{T_H - T_C}{T_H} \qquad (20.14)$$



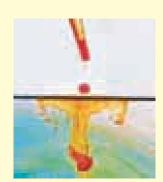
$$K_{\text{Carnot}} = \frac{T_C}{T_H - T_C} \qquad (20.15)$$

Entropía: La entropía es una medida cuantitativa del desorden de un sistema. El cambio de entropía en cualquier proceso reversible depende de la cantidad de flujo de calor y de la temperatura absoluta T. La entropía sólo depende del estado del sistema, y el cambio de entropía entre un estado inicial y uno final dados es el mismo para todos los procesos que llevan de uno al otro. Esto puede servir para calcular el cambio de entropía en un proceso irreversible. (Véanse los ejemplos 20.5 a 20.10.)

Un planteamiento importante de la segunda ley de la termodinámica es que la entropía de un sistema aislado puede aumentar pero nunca disminuir. Si un sistema interactúa con su entorno, el cambio total de entropía del sistema y el entorno nunca puede ser negativo. Si la interacción implica sólo procesos reversibles, la entropía total es constante y $\Delta S = 0$; si hay procesos irreversibles, la entropía total aumenta y $\Delta S > 0$.

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \qquad (20.19)$$

(proceso reversible)



Entropía y estados microscópicos: Cuando un sistema está en cierto estado macroscópico, las partículas que lo componen pueden estar en cualquiera de w posibles estados microscópicos. Cuanto mayor es w, mayor es la entropía. (Véase el ejemplo 20.11.)

$$S = k \ln w \qquad (20.22)$$

V
N moléculas de gas
V
2V

Número de microestados = w

Número de microestados = $2^N w$

Términos clave

procesos irreversibles, *673*
proceso reversible, *674*
proceso en equilibrio, *674*
máquina térmica, *675*
sustancia de trabajo, *675*
proceso cíclico, *675*
eficiencia térmica, *676*
razón de compresión, *678*
ciclo Otto, *678*
ciclo Diesel, *680*
refrigerador, *680*
coeficiente de rendimiento, *680*
calificación de eficiencia de energía, *682*
bomba de calor, *682*
segunda ley de la termodinámica, *682*
ciclo de Carnot, *684*
escala de temperatura Kelvin, *690*
cero absoluto, *690*
entropía, *691*
estado macroscópico, *697*
estado microscópico, *697*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Sí. Eso es lo que logra un refrigerador: hace que fluya calor del interior frío al exterior cálido. La segunda ley de la termodinámica dice que no puede haber un flujo *espontáneo* de calor de un cuerpo frío a uno caliente. El refrigerador cuenta con un motor que efectúa trabajo sobre el sistema *para forzar* al calor a que fluya en ese sentido.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

20.1 Respuesta: ii) Al igual que deslizar un libro por una mesa, frotarse las manos utiliza fricción para convertir energía mecánica en calor. En el proceso opuesto (que es imposible), las manos se enfriarían espontáneamente y la energía así liberada haría que las manos se movieran rítmicamente.

20.2 Respuestas: iii), i), ii) A partir de la ecuación (20.4), la eficiencia es $e = W/Q_H$, y de la ecuación (20.2), $W = Q_H + Q_C = |Q_H| - |Q_C|$. Para la máquina i), $Q_H = 5000$ J y $Q_C = -4500$ J, de manera que $W = 5000\text{ J} + (-4500\text{ J}) = 500$ J y $e = (500\text{ J})/(5000\text{ H}) = 0.100$. Para la máquina ii), $Q_H = 25{,}000$ J y $W = 2000$ J, por lo que $e = (2000\text{ J})/(25{,}000\text{ J}) = 0.080$. Para la máquina iii), $W = 400$ J y $Q_C = -2800$ J, de manera que $Q_H = W - Q_C = 400\text{ J} - (-2800\text{ J}) = 3200$ J y $e = (400\text{ J})/(3200\text{ J}) = 0.125$.

20.3 Respuestas: i), ii) Duplicar la cantidad de combustible quemado por ciclo significa que Q_H se duplica, de manera que el aumento resultante en la presión de b a c en la figura 20.6 es mayor. La razón de compresión y, por lo tanto, la eficiencia permanecen igual, así que $|Q_C|$ (la cantidad de calor expulsado hacia el ambiente) debe incrementarse en el mismo factor que Q_H. Por consiguiente, la caída de presión de d a a en la figura 20.6 también es mayor. El volumen V y la razón de compresión r no cambian, de manera que las dimensiones horizontales del diagrama pV no se alteran.

20.4 Respuesta: no Un refrigerador utiliza un suministro de trabajo para transferir calor de un sistema (el interior del refrigerador) a otro (su exterior, que incluye la casa donde el refrigerador está instalado). Si la puerta está abierta, estos dos sistemas son en realidad *el mismo* sistema, y tarde o temprano estarán a la misma temperatura. Por la primera ley de la termodinámica, todo el suministro de trabajo al motor del refrigerador se convertirá en calor y la temperatura de la casa *aumentará*. Para enfriar la casa se requiere un sistema que transfiera calor de ella al mundo exterior, como un acondicionador de aire o una bomba de calor.

20.5 Respuestas: no, no Tanto la máquina 100% eficiente de la figura 20.11a como el refrigerador de la figura 20.11b que no realiza trabajo, al final de un ciclo, regresan al mismo estado que al principio, así que el cambio neto en energía interna de cada sistema es cero ($\Delta U = 0$). Para la máquina 100% eficiente, el flujo neto de calor hacia la máquina es igual que el trabajo neto realizado, por lo que $Q = W$, $Q - W = 0$, y se cumple la primera ley ($\Delta U = Q - W$). En el caso del refrigerador, no se realiza ningún trabajo neto (así que $W = 0$) y fluye tanto calor hacia dentro como hacia fuera ($Q = 0$); de nuevo, $Q - W = 0$ y $\Delta U = Q - W$ de acuerdo con la primera ley. La segunda ley de la termodinámica nos dice que tanto la máquina 100% eficiente como el refrigerador que no realiza trabajo son imposibles.

20.6 Respuesta: no La eficiencia no puede ser mayor que la de una máquina de Carnot que opera entre los mismos límites de temperatura, $e_{Carnot} = 1 - (T_C/T_H)$ [ecuación (20.14)]. La temperatura T_C de la fuente fría de este motor enfriado por aire es cercana a 300 K (temperatura ambiente) y la temperatura T_H de la fuente caliente no puede exceder el punto de fusión del cobre, 1356 K (véase la tabla 17.4). Por lo tanto, la máxima eficiencia de Carnot que puede lograrse es $e = 1 - (300\text{ K})/(1356\text{ K}) = 0.78$, es decir, 78%. La temperatura de cualquier motor real sería menor, así que el motor del inventor jamás podrá alcanzar una eficiencia del 85%. Mejor invierta su dinero en otro proyecto.

20.7 Respuestas: −102 J/K, no El proceso descrito es exactamente opuesto al empleado en el ejemplo 20.10. Este resultado viola la segunda ley de la termodinámica, que dice que la entropía de un sistema aislado no puede disminuir.

20.8 Respuesta: i) Con respecto a i), en el ejemplo 20.8 (sección 20.7) vimos que, para el gas ideal, el cambio de entropía durante una expansión libre es igual al de una expansión isotérmica. Por la ecuación (20.23), esto implica que la razón del número de estados microscópicos después y antes de la expansión, w_2/w_1, también es la misma en los dos casos. Por el ejemplo 20.11, $w_2/w_1 = 2^N$, así que el número de estados microscópicos aumenta en un factor de 2^N. Con respecto a ii), en una expansión reversible, el cambio de entropía es $\Delta S = \int dQ/T = 0$. Si la expansión es adiabática, no hay flujo de calor, así que $\Delta S = 0$. Por la ecuación (20.23), $w_2/w_1 = 1$ y el número de estados microscópicos *no* cambia. La diferencia es que, durante una expansión adiabática, la temperatura baja y las moléculas se mueven más lentamente, de manera que pueden estar en menos estados microscópicos que durante una expansión isotérmica.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**



Preguntas para análisis

P20.1. Una olla está llena a la mitad con agua y se tapa formando un sello hermético que no permite el escape de vapor. La olla se calienta en una estufa, formándose vapor de agua dentro de ella. La estufa se apaga y el vapor se condensa. ¿Este ciclo es reversible o irreversible? ¿Por qué?

P20.2. Cite dos ejemplos de procesos reversibles y dos de procesos irreversibles en sistemas puramente mecánicos, como bloques que se deslizan por planos, resortes, poleas y cuerdas. Explique qué hace a cada proceso reversible o irreversible.

P20.3. ¿Qué procesos irreversibles se efectúan en un motor de gasolina? ¿Por qué son irreversibles?

P20.4. Suponga que trata de enfriar su cocina dejando abierta la puerta del refrigerador. ¿Qué sucede? ¿Por qué? ¿El resultado sería el mismo si se dejara abierta una hielera llena de hielo? Explique las diferencias, si las hay.

P20.5. Un congresista de Estados Unidos sugirió un plan para generar energía. Se rompen moléculas de agua (H_2O) para producir hidrógeno y oxígeno. El hidrógeno se quema (se combina con oxígeno) para liberar energía. El único producto de esta combustión es agua, así que no hay contaminación. A la luz de la segunda ley de la termodinámica, ¿qué piensa usted de este plan?

P20.6. Convertir energía mecánica totalmente en calor, ¿viola la segunda ley de la termodinámica? ¿Y convertir calor totalmente en trabajo? Explique.

P20.7. Imagine un filtro de aire especial colocado en la ventana de una casa. Los diminutos orificios en el filtro sólo permiten la salida de moléculas de aire cuya rapidez sea mayor que cierto valor, y sólo permite la entrada de moléculas cuya rapidez sea menor que ese valor. Explique por qué tal filtro enfriaría la casa y por qué la segunda ley de la termodinámica imposibilita la construcción de semejante filtro.

P20.8. El eje de un motor eléctrico está acoplado al de un generador eléctrico. El motor impulsa al generador, y una parte de la corriente de éste opera el motor. El resto de la corriente se usa para iluminar una casa. ¿Qué defecto tiene este esquema?

P20.9. Si un trapo mojado se cuelga en el desierto, donde hay viento caliente, se enfría por evaporación a una temperatura hasta 20 C° menor que la del aire. Analice esto a la luz de la segunda ley de la termodinámica.

P20.10. Compare el diagrama *pV* para el ciclo Otto en la figura 20.6 con el diagrama para la máquina térmica de Carnot de la figura 20.13. Explique algunas diferencias importantes entre los dos ciclos.

P20.11. Si ninguna máquina real puede ser tan eficiente como una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas, ¿qué caso tiene deducir y usar la ecuación (20.14)?

P20.12. La eficiencia de las máquinas térmicas es elevada cuando la diferencia de temperatura entre las fuentes caliente y fría es grande. Por otro lado, los refrigeradores funcionan mejor cuando la diferencia de temperatura es pequeña. Considerando el ciclo mecánico del refrigerador de la figura 20.9, explique en términos físicos por qué requiere menos trabajo eliminar calor de una sustancia de trabajo si las dos fuentes (el interior del refrigerador y el aire exterior) están casi a la misma temperatura, que si el aire exterior está mucho más caliente que el interior del refrigerador.

P20.13. ¿Qué eficiencia tendría una máquina de Carnot que opera con $T_H = T_C$? ¿Y si $T_C = 0$ K y T_H fuera cualquier temperatura mayor que 0 K? Interprete sus respuestas.

P20.14. Las máquinas térmicas reales, como el motor de gasolina de un auto, siempre tienen fricción entre sus piezas móviles, aunque los lubricantes la reducen al mínimo. ¿Una máquina térmica con piezas totalmente sin fricción sería 100% eficiente? ¿Por qué? ¿Depende la respuesta de si la máquina ejecuta un ciclo de Carnot o no? ¿Por qué?

P20.15. ¿Un refrigerador lleno de alimentos consume más potencia si la temperatura ambiente es 20 °C que si es 15 °C? ¿O el consumo es el mismo? Explique su razonamiento.

P20.16. En el ejemplo 20.4, un refrigerador de Carnot requiere una entrada de trabajo de sólo 230 J para extraer 346 J de calor de la fuente

fría. ¿Esta discrepancia implica una violación a la ley de la conservación de la energía? Explique por qué.

P20.17. Explique por qué cada uno de los siguientes procesos es un ejemplo de desorden o aleatoriedad creciente: mezclado de agua caliente y fría; expansión libre de un gas; flujo irreversible de calor; producción de calor por fricción mecánica. ¿Hay aumentos de entropía en todos ellos? ¿Por qué?

P20.18. La libre expansión de un gas es un proceso adiabático, por lo que no hay transferencia de calor. No se realiza trabajo, de manera que la energía interna no cambia. Por lo tanto, $Q/T = 0$; sin embargo, el desorden del sistema y, por lo tanto, la entropía se incrementan después de la expansión. ¿Por qué la ecuación (20.19) no se aplica a esta situación?

P20.19. ¿La Tierra y el Sol están en equilibrio térmico? Hay cambios de entropía asociados a la transmisión de energía del Sol a la Tierra? ¿La radiación es diferente de otros modos de transferencia de calor con respecto a los cambios de entropía? Explique su razonamiento.

P20.20. Analice los cambios de entropía implicados en la preparación y el consumo de un *hot fudge sundae* (helado bañado con jarabe de chocolate caliente).

P20.21. Si proyectamos una película en reversa, es como si se invirtiera la dirección del tiempo. En tal proyección, ¿veríamos procesos que violan la conservación de la energía? ¿La conservación de la cantidad de movimiento lineal? ¿Y la segunda ley de la termodinámica? En cada caso en que puedan verse procesos que violan una ley, dé ejemplos.

P20.22. Algunos críticos de la evolución biológica aseguran que ésta viola la segunda ley de la termodinámica, pues implica organismos simples que dan origen a otros más ordenados. Explique por qué éste no es un argumento válido contra la evolución.

P20.23. Al crecer, una planta crea una estructura muy compleja y organizada a partir de materiales simples, como aire, agua y minerales. ¿Viola esto la segunda ley de la termodinámica? Explique por qué. ¿Cuál es la fuente de energía final de la planta? Explique su razonamiento.

Ejercicios

Sección 20.2 Máquinas térmicas

20.1. Un motor Diesel efectúa 2200 J de trabajo mecánico y desecha (expulsa) 4300 J de calor en cada ciclo. *a*) ¿Cuánto calor debe aportarse al motor en cada ciclo? *b*) Calcule la eficiencia térmica del motor.

20.2. Un motor de avión recibe 9000 J de calor y desecha 6400 J en cada ciclo. *a*) Calcule el trabajo mecánico efectuado por el motor en un ciclo. *b*) Calcule la eficiencia térmica del motor.

20.3. Motor de gasolina. Un motor de gasolina recibe 1.61×10^4 J de calor y produce 3700 J de trabajo por ciclo. El calor proviene de quemar gasolina que tiene un calor de combustión de 4.60×10^4 J/g. *a*) Calcule la eficiencia térmica. *b*) ¿Cuánto calor se desecha en cada ciclo? *c*) ¿Qué masa de gasolina se quema en cada ciclo? *d*) Si el motor opera a 60.0 ciclos/s, determine su salida de potencia en kilowatts y en hp.

20.4. Un motor de gasolina desarrolla una potencia de 180 kW (aproximadamente 241 hp). Su eficiencia térmica es del 28.0%. *a*) ¿Cuánto calor debe suministrarse al motor por segundo? *b*) ¿Cuánto calor desecha el motor cada segundo?

20.5. Cierta planta nuclear produce una potencia mecánica (que impulsa un generador eléctrico) de 330 MW. Su tasa de aporte de calor proveniente del reactor nuclear es de 1300 MW. *a*) Calcule la eficiencia térmica del sistema, *b*) ¿con qué rapidez desecha calor el sistema?

Sección 20.3 Motores de combustión interna

20.6. *a*) Calcule la eficiencia teórica para un ciclo Otto con $\gamma = 1.40$ y $r = 9.50$. *b*) Si este motor consume 10,000 J de calor a partir de la quema de su combustible, ¿cuánto calor desecha hacia el aire exterior?

20.7. ¿Qué razón de compresión debe tener un ciclo Otto para alcanzar una eficiencia ideal del 65.0% si $\gamma = 1.40$?

20.8. El motor de un Mercedes-Benz SLK230 realiza un ciclo Otto con una razón de compresión de 8.8. *a*) Calcule la eficiencia ideal del motor. Use $\gamma = 1.40$. *b*) El motor de un Dodge Viper GT2 tiene una razón de compresión un poco mayor, de 9.6. ¿Cuánto aumenta la eficiencia con este aumento en la razón de compresión?

Sección 20.4 Refrigeradores

20.9. Un refrigerador tiene un coeficiente de rendimiento de 2.10. Durante cada ciclo, absorbe 3.40×10^4 J de la fuente fría. *a*) ¿Cuánta energía mecánica se requiere en cada ciclo para operar el refrigerador? *b*) Durante cada ciclo, ¿cuánto calor se desecha a la fuente caliente?

20.10. Un acondicionador de aire tiene un coeficiente de rendimiento de 2.9 en un día caluroso y utiliza 850 W de energía eléctrica. *a*) ¿Cuántos joules de calor elimina el sistema de aire acondicionado de la habitación en un minuto? *b*) ¿Cuántos joules de calor entrega el sistema de aire acondicionado al aire caliente del exterior en un minuto? *c*) Explique por qué sus respuestas a los incisos *a*) y *b*) son diferentes.

20.11. En un minuto, un acondicionador de aire de ventana absorbe 9.80×10^4 J de calor de la habitación enfriada y deposita 1.44×10^5 J de calor al aire exterior. *a*) Calcule el consumo de potencia de la unidad en watts. *b*) Calcule la calificación de eficiencia de energía de la unidad.

20.12. Un congelador tiene un coeficiente de rendimiento de 2.40, y debe convertir 1.80 kg de agua a 25.0 °C en 1.80 kg de hielo a -5.0 °C en una hora. *a*) ¿Cuánto calor es necesario extraer del agua a 25.0 °C para convertirla en hielo a -5.0 °C? *b*) ¿Cuánta energía eléctrica consume el congelador en esa hora? *c*) ¿Cuánto calor de desecho (expulsado) fluye al cuarto donde está el congelador?

Sección 20.6 El ciclo de Carnot

20.13. Una máquina de Carnot cuya fuente de alta temperatura está a 620 K recibe 550 J de calor a esta temperatura en cada ciclo y cede 335 J a la fuente de baja temperatura. *a*) ¿Cuánto trabajo mecánico realiza la máquina en cada ciclo? *b*) ¿A qué temperatura está la fuente fría? *c*) Calcule la eficiencia térmica del ciclo.

20.14. Una máquina de Carnot opera entre dos fuentes de calor a 520 K y 300 K. *a*) Si el motor recibe 6.45 kJ de calor de la fuente a 520 K en cada ciclo, ¿cuántos joules por ciclo cede a la fuente a 300 K? *b*) ¿Cuánto trabajo mecánico realiza la máquina en cada ciclo? *c*) Determine la eficiencia térmica de la máquina.

20.15. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia del 59% y realiza 2.5×10^4 J de trabajo en cada ciclo. *a*) ¿Cuánto calor extrae la máquina de su fuente de calor en cada ciclo? *b*) Suponga que la máquina expulsa calor a temperatura ambiente (20.0 °C). ¿Cuál es la temperatura de su fuente de calor?

20.16. Una máquina para hacer hielo opera en un ciclo de Carnot; toma calor de agua a 0.0 °C y desecha calor a un cuarto a 24.0 °C. Suponga que 85.0 kg de agua a 0.0 °C se convierten en hielo a 0.0 °C. *a*) ¿Cuánto calor se desecha al cuarto? *b*) ¿Cuánto trabajo debe suministrarse al aparato?

20.17. Un refrigerador de Carnot opera entre dos fuentes de calor a temperaturas de 320 K y 270 K. *a*) Si en cada ciclo el refrigerador recibe 415 J de calor de la fuente a 270 K, ¿cuántos joules de calor cede a la fuente a 320 K? *b*) Si el refrigerador realiza 165 ciclos/min, ¿qué alimentación de potencia se requiere para operarlo? *c*) Calcule el coeficiente de rendimiento del refrigerador.

20.18. Un dispositivo de Carnot extrae 5.00 kJ de calor de un cuerpo a -10.0 °C. ¿Cuánto trabajo se efectúa si el dispositivo expulsa calor al entorno *a*) a 25.0 °C *b*) a 0.0 °C *c*) a -25.0 °C? En cada caso, ¿el dispositivo actúa como máquina o como refrigerador?

20.19. Cierta marca de congeladores afirma en su publicidad que sus productos utilizan 730 kW · h al año. *a*) Suponiendo que el congelador opera durante 5 horas cada día, ¿cuánta potencia requiere mientras está operando? *b*) Si el congelador mantiene su interior a una temperatura de -5.0 °C en una habitación a 20.0 °C, ¿cuál es el máximo coeficiente de rendimiento teórico? *c*) ¿Cuál es la máxima cantidad teórica de hielo que este congelador puede hacer en una hora, comenzando con agua a 20.0 °C?

20.20. Una máquina de Carnot ideal opera entre 500 °C y 100 °C con un suministro de calor de 250 J por ciclo. *a*) ¿Cuánto calor se entrega a la fuente fría en cada ciclo? *b*) ¿Qué número mínimo de ciclos se requieren para que la máquina levante una piedra de 500 kg a una altura de 100 m?

20.21. Una máquina de Carnot tiene una eficiencia térmica de 0.600 y la temperatura de su fuente caliente es de 800 K. Si expulsa 3000 J de calor a la fuente fría en un ciclo, ¿cuánto trabajo efectuará en ese tiempo?

20.22. Una máquina térmica de Carnot utiliza una fuente caliente que consiste en una gran cantidad de agua en ebullición y una fuente fría que consiste en una tina grande llena de hielo y agua. En cinco minutos de operación, el calor expulsado por la máquina derrite 0.0400 kg de hielo. En ese tiempo, ¿cuánto trabajo W efectúa la máquina?

20.23. Usted diseña una máquina que toma 1.50×10^4 J de calor a 650 K en cada ciclo y expulsa calor a una temperatura de 350 K. La máquina completa 240 ciclos en 1 minuto. ¿Cuál es la potencia de salida teórica máxima de esa máquina en caballos de potencia?

20.24. *a*) Demuestre que la eficiencia e de una máquina de Carnot y el coeficiente de rendimiento K de un refrigerador de Carnot tienen la relación $K = (1 - e)/e$. La máquina y el refrigerador operan entre las mismas fuentes caliente y fría. *b*) Calcule K para los valores límite $e \rightarrow 1$ y $e \rightarrow 0$. Explique.

Sección 20.7 Entropía

20.25. Un estudiante ocioso agrega calor a 0.350 kg de hielo a 0.0 °C hasta derretirlo todo. *a*) Calcule el cambio de entropía del agua. *b*) La fuente de calor es un cuerpo muy masivo que está a 25.0 °C. Calcule el cambio de entropía de ese cuerpo. *c*) Determine el cambio total de entropía del agua y la fuente de calor.

20.26. Usted decide tomar un reconfortante baño caliente, pero descubre que su desconsiderado compañero de cuarto consumió casi toda el agua caliente. Usted llena la tina con 270 kg de agua a 30.0 °C e intenta calentarla más vertiendo 5.00 kg de agua que alcanzó la ebullición en una estufa. *a*) ¿Se trata de un proceso reversible o irreversible? Utilice un razonamiento de física para explicar el hecho. *b*) Calcule la temperatura final del agua para el baño. *c*) Calcule el cambio neto de entropía del sistema (agua del baño + agua en ebullición), suponiendo que no hay intercambio de calor con el aire o con la tina misma.

20.27. Un bloque de hielo de 15.0 kg a 0.0 °C se derrite dentro de una habitación grande cuya temperatura es de 20.0 °C. Considere el hielo más la habitación como sistema aislado y suponga que la habitación es lo bastante grande como para despreciar su cambio de temperatura. *a*) ¿El proceso de la fusión del hielo es reversible o irreversible? Explique su razonamiento con argumentos físicos sencillos, sin recurrir a ninguna ecuación. *b*) Calcule el cambio neto de entropía del sistema durante este proceso. Explique si el resultado es congruente o no con su respuesta en el inciso *a*).

20.28. Usted prepara té con 0.250 kg de agua a 85.0 °C y lo deja enfriar a temperatura ambiente (20.0 °C) antes de beberlo. *a*) Calcule el cambio de entropía del agua mientras se enfría. *b*) En esencia, el proceso de enfriamiento es isotérmico para el aire en su cocina. Calcule el cambio de entropía del aire mientras el té se enfría, suponiendo que todo el calor que pierde el agua va al aire. ¿Cuál es el cambio total de entropía del sistema constituido por té + aire?

20.29. Tres moles de gas ideal sufren una compresión isotérmica reversible a 20.0 °C, durante la cual se efectúa 1850 J de trabajo sobre el gas. Calcule el cambio de entropía del gas.

20.30. Calcule el cambio de entropía de 0.130 kg de helio gaseoso en el punto de ebullición normal del helio cuando se condensa isotérmicamente a 1.00 L de helio líquido. (*Sugerencia:* véase la tabla 17.4 de la sección 17.6.)

20.31. *a*) Calcule el cambio de entropía cuando 1.00 kg de agua a 100 °C se convierte en vapor a 100 °C. (Véase la tabla 17.4.) *b*) Compare su respuesta con el cambio de entropía cuando 1.00 kg de hielo se funde a 0 °C, calculado en el ejemplo 20.5 (sección 20.7). ¿El cambio de entropía es mayor para la fusión o para la vaporización? Interprete su respuesta con base en la idea de que la entropía es una medida de la aleatoriedad de un sistema.

20.32. *a*) Calcule el cambio de entropía cuando 1.00 mol de agua (masa molar de 18.0 g/mol) a 100 °C se convierte en vapor de agua. *b*) Repita el cálculo del inciso *a*) para 1.00 mol de nitrógeno líquido, 1.00 mol de plata y 1.00 mol de mercurio cuando cada uno se vaporiza a su punto de ebullición normal. (Tome los calores de vaporización de la tabla 17.4 y las masas molares del Apéndice D. Recuerde que la molécula de nitrógeno es N_2.) *c*) Sus resultados de los incisos *a*) y *b*) deberán ser muy similares. (Esto se conoce como *regla de Drepez y Trouton*.) Explique por qué es natural que así suceda, con base en la idea de que la entropía es una medida de la aleatoriedad de un sistema.

20.33. Si 25.0 g de metal galio se funden en su mano (véase la figura 17.20), ¿cuál es el cambio de entropía del galio en ese proceso? ¿Qué sucede con el cambio de entropía de su mano? ¿Es positivo o negativo? ¿Es mayor o menor esta magnitud que el cambio de entropía del galio?

*Sección 20.8 Interpretación microscópica de la entropía

***20.34.** Una caja se divide, mediante una membrana, en dos partes de igual volumen. El lado izquierdo contiene 500 moléculas de nitrógeno gaseoso; el derecho contiene 100 moléculas de oxígeno gaseoso. Los dos gases están a la misma temperatura. La membrana se perfora y finalmente se logra el equilibrio. Suponga que el volumen de la caja es suficiente para que cada gas sufra una expansión libre y no cambie de temperatura. *a*) En promedio, ¿cuántas moléculas de cada tipo habrá en cada mitad de la caja? *b*) Calcule el cambio de entropía del sistema cuando se perfora la membrana. *c*) Calcule la probabilidad de que las moléculas se encuentren en la misma distribución que tenían antes de la perforación, esto es, 500 moléculas de N_2 en la mitad izquierda y 100 moléculas de O_2 en la derecha.

***20.35.** Dos moles de gas ideal ocupan un volumen V. El gas se expande isotérmica y reversiblemente a un volumen 3 V. *a*) ¿Cambia la distribución de velocidades por esta expansión isotérmica? Explique.

b) Use la ecuación (20.23) para calcular el cambio de entropía del gas. *c*) Use la ecuación (20.18) para calcular el cambio de entropía del gas. Compare este resultado con el del inciso *b*).

***20.36.** Un solitario globo de una fiesta con un volumen de 2.40 L y que contiene 0.100 moles de aire se deja a la deriva en la Estación Espacial Internacional, temporalmente inhabitada y despresurizada. La luz solar que pasa por una ventanilla incide sobre el globo y hace que explote provocando que el aire en su interior experimente una expansión libre en la estación vacía, cuyo volumen total es de 425 m^3. Calcule el cambio de entropía del aire durante la expansión.

Problemas

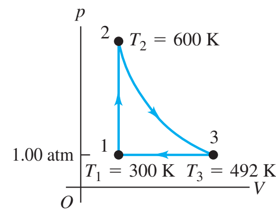
20.37. Usted diseña una máquina de Carnot que opera entre temperaturas de 500 K y 400 K y produce 2000 J de trabajo en cada ciclo. *a*) Calcule la eficiencia de la máquina. *b*) Calcule la cantidad de calor cedida durante la compresión isotérmica a 400 K. *c*) *Trace* las isotermas de 500 K y 400 K en un diagrama *pV* (sin efectuar cálculos); luego dibuje el ciclo de Carnot que sigue la máquina. *d*) En el mismo diagrama, *trace* la isoterma de 300 K; a continuación, dibuje con otro color el ciclo de Carnot que comienza en el mismo punto sobre la isoterma de 500 K, pero que opera en un ciclo entre las isotermas de 500 K y 300 K. *e*) Compare las áreas contenidas por las trayectorias cerradas (el trabajo neto realizado) para los dos ciclos. Advierta que se extrae la misma cantidad de calor de la fuente caliente en ambos casos. ¿Puede explicar por qué se "desperdicia" menos calor durante la compresión isotérmica que durante la compresión de 400 K?

20.38. Se está diseñando una máquina de Carnot que usa dos moles de CO_2 como sustancia de trabajo; el gas puede tratarse como ideal. El CO_2 debe tener una temperatura máxima de 527 °C y una presión máxima de 5.00 atm. Con un aporte de 400 J por ciclo, se desea obtener 300 J de trabajo útil. *a*) Calcule la temperatura de la fuente fría. *b*) ¿Durante cuántos ciclos debe operar esta máquina para derretir totalmente un bloque de hielo con masa de 10.0 kg que inicialmente estaba a 0.0 °C, empleando únicamente el calor cedido por la máquina?

20.39. Una máquina de Carnot cuya fuente de baja temperatura está a −90.0 °C tiene una eficiencia del 40.0%. Se asigna a un ingeniero el problema de aumentar la eficiencia al 45.0%. *a*) ¿En cuántos grados Celsius debe aumentarse la temperatura de la fuente caliente si la temperatura de la fuente fría permanece constante? *b*) ¿En cuántos grados Celsius debe reducirse la temperatura de la fuente fría si la temperatura de la fuente caliente no cambia?

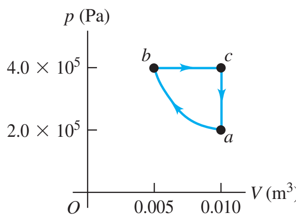
20.40. Una máquina térmica utiliza 0.350 mol de un gas diatómico con comportamiento ideal en el ciclo que se muestra en el diagrama *pV* de la figura 20.24. El proceso $1 \rightarrow 2$ es a volumen constante, el $2 \rightarrow 3$ es adiabático y el $3 \rightarrow 1$ es a presión constante a 1.00 atm. Para este gas, $\gamma = 1.40$. *a*) Calcule la presión y el volumen en los puntos 1, 2 y 3. *b*) Calcule *Q*, *W* y ΔU para cada uno de los tres procesos. *c*) Calcule el trabajo neto efectuado por el gas en el ciclo. *d*) Calcule el flujo neto de calor hacia la máquina en un ciclo. *e*) Determine la eficiencia térmica de la máquina y compárela con la de una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas mínima y máxima T_1 y T_2.

Figura 20.24 Problema 20.40.



20.41. Usted construye una máquina térmica que utiliza 1.00 mol de un gas diatómico ideal en el ciclo mostrado en la figura 20.25. *a*) Demuestre que el segmento *ab* es una compresión isotérmica. *b*) ¿Durante cuál segmento (o segmentos) del ciclo el gas absorbe calor? ¿Durante cuál segmento (o segmentos) cede calor? ¿Cómo lo sabe? *c*) Calcule la temperatura en los puntos *a*, *b* y *c*. *d*) Calcule el calor neto intercambiado con los alrededores y el trabajo neto que realiza la máquina en un ciclo. *e*) Calcule la eficiencia térmica de la máquina.

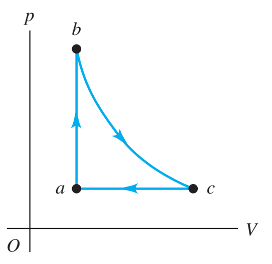
Figura 20.25 Problema 20.41.



20.42. Bomba de calor. Una bomba de calor es una máquina térmica operada en reversa. En invierno bombea calor del aire exterior frío al aire más cálido del interior del edificio, manteniéndolo a una temperatura agradable. En verano bombea calor del aire más fresco dentro del edificio al aire más cálido del exterior, actuando como acondicionador de aire. *a*) Si la temperatura exterior en invierno es de −5.0 °C y la temperatura interior es de 17.0 °C, ¿cuántos joules de calor suministrará la bomba al interior por cada joule de energía eléctrica empleado para operar la unidad, suponiendo un ciclo ideal de Carnot? *b*) Suponga que tiene la opción de usar calefacción por resistencia eléctrica en lugar de una bomba de calor. ¿Cuánta energía eléctrica necesitaría para suministrar al interior de la casa la misma cantidad de calor que en el inciso *a*)? Considere una bomba de calor de Carnot que suministra calor al interior de una casa para mantenerla a 68 °F. Demuestre que la bomba de calor suministra menos calor por cada joule de energía eléctrica empleado para operar la unidad a medida que disminuye la temperatura exterior. Observe que este comportamiento es opuesto a la dependencia de una máquina térmica de Carnot con respecto a la diferencia entre las temperaturas de las fuentes. Explique a qué se debe esto.

20.43. Una máquina térmica opera empleando el ciclo de la figura 20.26. La sustancia de trabajo es 2.00 moles de helio gaseoso, que alcanza una temperatura máxima de 327 °C. Suponga que el helio se puede tratar como gas ideal. El proceso *bc* es isotérmico. La presión en los estados *a* y *c* es de 1.00×10^5 Pa, y en el estado *b*, de 3.00×10^5 Pa. *a*) ¿Cuánto calor entra en el gas y cuánto sale del gas en cada ciclo? *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa la máquina en cada ciclo y qué eficiencia tiene? *c*) Compare la eficiencia de esta máquina con la máxima eficiencia que puede lograrse con las fuentes caliente y fría que se usan en este ciclo.

Figura 20.26 Problema 20.43.



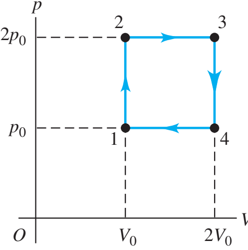
20.44. Imagine que, como ingeniero mecánico, le piden diseñar una máquina de Carnot que use como sustancia de trabajo 2.00 moles de un gas monoatómico con comportamiento ideal y que funcione con una fuente caliente a 500 °C. La máquina debe levantar 2.00 m una masa de 15.0 kg en cada ciclo, empleando un suministro de calor de 500 J. El gas en la cámara de la máquina puede tener un volumen mínimo de 5.00 L durante el ciclo. *a*) Dibuje un diagrama *pV* para este ciclo, indicando dónde entra calor en el gas y dónde sale de él. *b*) ¿A qué temperatura debe estar la fuente fría? *c*) Calcule la eficiencia térmica de la

máquina. *d*) ¿Cuánta energía térmica gasta esta máquina en cada ciclo? *e*) Calcule la presión máxima que tendrá que resistir la cámara de gas.

20.45. Una planta de electricidad experimental en el Laboratorio de Energía Natural de Hawai genera electricidad a partir del gradiente de temperatura del océano. Las temperaturas superficial y de agua profunda son de 27 °C y 6 °C, respectivamente. *a*) Calcule la eficiencia teórica máxima de esta planta. *b*) Si la planta debe producir 210 kW de potencia, ¿con qué rapidez debe extraerse calor del agua tibia? ¿Con qué rapidez debe absorber calor el agua fría? Suponga la eficiencia teórica máxima. *c*) El agua fría que ingresa en la planta sale a 10 °C. Calcule la rapidez, en kg/h y en L/h, con que debe fluir el agua fría por el sistema.

20.46. Calcule la eficiencia térmica de una máquina que opera sometiendo n moles de gas ideal diatómico al ciclo $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ que se muestra en la figura 20.27.

Figura 20.27 Problema 20.46.



20.47. Un cilindro contiene oxígeno a una presión de 2.00 atm y 300 K. El volumen es de 4.00 L. Suponga que el O_2 se puede tratar como gas ideal, y que se somete a los siguientes procesos:

i) Calentar a presión constante del estado inicial (estado 1) al estado 2, donde $T = 450$ K.
ii) Enfriar a volumen constante a 250 K (estado 3).
iii) Comprimir a temperatura constante a un volumen de 4.00 L (estado 4).
iv) Calentar a volumen constante a 300 K, regresando el sistema al estado 1.

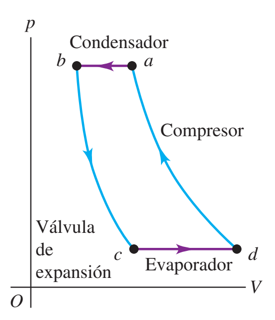
a) Muestre estos cuatro procesos en un diagrama pV, dando los valores numéricos de p y V en cada estado. *b*) Calcule Q y W para cada proceso. *c*) Calcule el trabajo neto efectuado por el O_2. *d*) Determine la eficiencia de este dispositivo como máquina térmica y compárela con la de una máquina de ciclo de Carnot que opera entre las mismas temperaturas mínima y máxima de 250 K y 450 K.

20.48. Procesos termodinámicos en un refrigerador. Un refrigerador opera de acuerdo con el ciclo de la figura 20.28. Los pasos de compresión ($d \rightarrow a$) y expansión ($b \rightarrow c$) son adiabáticos. La temperatura, la presión y el volumen del refrigerante en cada estado a, b, c y d son:

Estado	T (°C)	P (kPa)	V (m^3)	U (kJ)	Porcentaje que es líquido
a	80	2305	0.0682	1969	0
b	80	2305	0.00946	1171	100
c	5	363	0.2202	1005	54
d	5	363	0.4513	1657	5

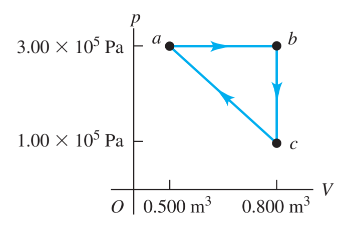
a) En cada ciclo, ¿cuánto calor pasa del interior del refrigerador al refrigerante mientras este último se encuentra en el evaporador? *b*) En cada ciclo, ¿cuánto calor pasa del refrigerante al aire exterior mientras el refrigerante está en el condensador? *c*) En cada ciclo, ¿cuánto trabajo efectúa el motor del compresor? *d*) Calcule el coeficiente de rendimiento del refrigerador.

Figura 20.28 Problema 20.48.



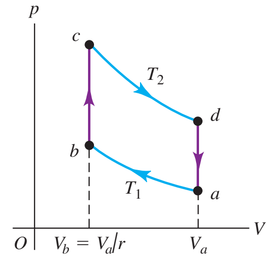
20.49. Un gas monoatómico con comportamiento ideal se somete al ciclo de la figura 20.29 en el sentido que se indica. El camino del proceso $c \rightarrow a$ es una recta en el diagrama pV. *a*) Calcule Q, W y ΔU para cada proceso: $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ y $c \rightarrow a$. *b*) Calcule Q, W y ΔU para un ciclo completo, *c*) Determine la eficiencia del ciclo.

Figura 20.29 Problema 20.49.



20.50. Motor de ciclo Stirling. El *ciclo Stirling* es similar al ciclo Otto, excepto que la compresión y expansión del gas se efectúan a temperatura constante, no adiabáticamente. El ciclo Stirling se usa en motores de combustión *externa* (de hecho, no se necesita quemar combustible; se puede utilizar *cualquier* forma de producir una diferencia de temperatura: gradiente de temperatura solar, geotérmica, oceánica, etcétera), lo que implica que el gas del interior del cilindro no participa en la combustión. El calor se suministra quemando combustible constantemente afuera del cilindro, no explosivamente en su interior como en el ciclo Otto. Por ello, los motores de ciclo Stirling son más silenciosos, pues no hay válvulas de admisión y escape (una fuente importante de ruido). Si bien se usan motores Stirling pequeños para diversos propósitos, las versiones para automóvil no han tenido éxito porque son más grandes, pesadas y costosas que los motores de auto convencionales. La secuencia de pasos del fluido de trabajo dentro del ciclo (figura 20.30) es:

Figura 20.30 Problema 20.50.



i) Compresión isotérmica a temperatura T_1 del estado inicial a al estado b, con una razón de compresión r.
ii) Calentamiento a volumen constante al estado c a temperatura T_2.
iii) Expansión isotérmica a T_2 al estado d.
iv) Enfriamiento a volumen constante de vuelta al estado a.

Suponga que el fluido de trabajo es n moles de gas ideal (cuya C_V es independiente de T). *a*) Calcule: Q, W y ΔU para cada proceso, $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, $c \rightarrow d$ y $d \rightarrow a$. *b*) En el ciclo Stirling, las transferencias de calor en b $\rightarrow c$ y d $\rightarrow a$ no implican fuentes de calor externas, sino que usan *regeneración*: la misma sustancia que transfiere calor al gas del interior del cilindro en el proceso $b \rightarrow c$ absorbe calor del gas en el proceso $d \rightarrow a$. Por lo tanto, las transferencias de calor $Q_{b \rightarrow c}$ y $Q_{d \rightarrow a}$ no afectan la eficiencia del motor. Explique esta afirmación comparando las expresiones para $Q_{b \rightarrow c}$ y $Q_{d \rightarrow a}$ calculadas en el inciso *a*). *c*) Calcule la eficiencia de un motor de ciclo Stirling en términos de las temperaturas T_1 y T_2 y compárela con la de una máquina de ciclo de Carnot que opera entre las mismas temperaturas. (Históricamente, el ciclo Stirling se inventó antes que el de Carnot.) ¿Este resultado viola la segunda ley de la termodinámica? Explique. Por desgracia, los motores de ciclo Stirling reales no pueden lograr esta eficiencia a causa de problemas con los procesos de transferencia de calor y pérdidas de presión en el motor.

20.51. Una máquina de Carnot opera entre dos fuentes de calor a temperaturas T_H y T_C. Un inventor propone aumentar la eficiencia operando una máquina entre T_H y una temperatura intermedia T', y una segunda máquina entre T' y T_C usando el calor expulsado por la primera. Calcule la eficiencia de este sistema compuesto y compárela con la de la máquina original.

20.52. Una planta generadora de energía eléctrica de 1000 MW, alimentada con carbón, tiene una eficiencia térmica del 40%. *a*) ¿Cuál es la tasa de suministro de calor a la planta? *b*) La planta quema carbón de piedra (antracita), que tiene un calor de combustión de 2.65×10^7 J/kg. ¿Cuánto carbón consume la planta al día, si opera de manera continua? *c*) ¿A qué tasa se expulsa el calor hacia la fuente fría, la cual es un río cercano? *d*) La temperatura del río es de 18.0 °C antes de llegar a la planta de energía y de 18.5 °C después de que recibe el calor de desecho de la planta. Calcule la tasa de flujo del río en metros cúbicos por segundo. *e*) ¿En cuánto aumenta la entropía del río cada segundo?

20.53. Termodinámica de un motor de automóvil. Un Volkswagen Passat tiene un motor de ciclo Otto de seis cilindros con razón de compresión $r = 10.6$. El diámetro de cada cilindro, llamado *barreno* del motor, es de 82.5 mm. La distancia que el pistón se mueve durante la compresión en la figura 20.5 (la *carrera* del motor) es de 86.4 mm. La presión inicial de la mezcla aire-combustible (en el punto a de la figura 20.6) es de 8.50×10^4 Pa, y la temperatura inicial es de 300 K (la del aire exterior). Suponga que, en cada ciclo, se agregan 200 J de calor a cada cilindro al quemarse la gasolina y que el gas tiene $C_V = 20.5$ J/mol · K y $\gamma = 1.40$. *a*) Calcule el trabajo total que realiza cada cilindro del motor en un ciclo y el calor que se desprende cuando el gas se enfría a la temperatura del aire exterior. *b*) Calcule el volumen de la mezcla aire-combustible en el punto a del ciclo. *c*) Calcule la presión, el volumen y la temperatura del gas en los puntos b, c y d del ciclo. Dibuje un diagrama pV que muestre los valores numéricos de p, V y T para cada uno de los cuatro estados. *d*) Compare la eficiencia de este motor con la de una máquina de Carnot que opera entre las mismas temperaturas máxima y mínima.

20.54. Un sistema de aire acondicionado opera con 800 W de potencia y tiene un coeficiente de rendimiento de 2.80 a una temperatura ambiente de 21.0 °C y una temperatura exterior de 35.0 °C. *a*) Calcule la tasa a la que esta unidad elimina el calor. *b*) Calcule la tasa a la que se descarga calor al aire exterior. *c*) Calcule el cambio total de entropía en la habitación si el sistema de aire acondicionado funciona durante una hora. Calcule el cambio total de entropía en el aire exterior durante el mismo periodo. *d*) Calcule el cambio neto de entropía para el sistema (habitación + aire exterior).

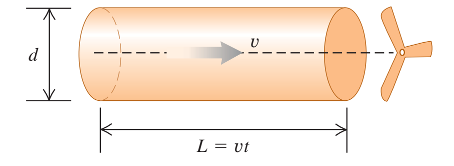
20.55. Energía no disponible. Según el análisis de la entropía y la segunda ley que hicimos después del ejemplo 20.10 (sección 20.7), el aumento de entropía durante un proceso irreversible está asociado con una disminución en la disponibilidad de energía. Considere un ciclo de Carnot que usa una fuente fría con temperatura Kelvin T_c. Se trata de una verdadera fuente, lo bastante grande como para que no cambie su temperatura cuando acepta calor de la máquina. Esta última acepta calor de un objeto a temperatura T', donde $T' > T_c$. El objeto tiene tamaño finito, así que se enfría cuando se extrae calor de él. La máquina sigue operando hasta que $T' = T_c$. *a*) Demuestre que la magnitud total del calor cedido a la fuente de baja temperatura es $T_c|\Delta S_h|$, donde ΔS_h es el cambio de entropía de la fuente caliente. *b*) Aplique el resultado del inciso *a*) a 1.00 kg de agua que inicialmente está a una temperatura de 373 K, como fuente de calor para la máquina, y $T_c = 273$ K. ¿Cuánto trabajo mecánico total puede efectuar la máquina hasta detenerse? *c*) Repita el inciso *b*) para 2.00 kg de agua a 323 K. *d*) Compare la cantidad de trabajo que puede obtenerse de la energía contenida en el agua del ejemplo 20.10 antes y después de mezclarse. Indique si su resultado demuestra que ahora hay menos energía disponible.

20.56. La máxima potencia que puede extraer una turbina de viento de una corriente de aire es aproximadamente

$$P = kd^2v^3$$

donde d es el diámetro de las aspas, v es la rapidez del viento y la constante $k = 0.5$ W · s³/m⁵. *a*) Explique la dependencia de P con respecto a d y a v considerando un cilindro de aire que pasa por las aspas en un tiempo t (figura 20.31). Este cilindro tiene diámetro d, longitud $L = vt$ y densidad ρ. *b*) La turbina de viento Mod-5B de Kahaku en la isla hawaiana de Oahu tiene un diámetro de aspas de 97 m (un poco más largo que un campo de fútbol americano), está sobre una torre de 58 m y genera 3.2 MW de potencia eléctrica. Suponiendo una eficiencia del 25%, ¿qué rapidez del viento (en m/s y km/h) se requiere para obtener esa potencia? *c*) Las turbinas de viento comerciales suelen colocarse en cañones montañosos o lugares por donde pasa el viento. ¿Por qué?

Figura 20.31 Problema 20.56.



20.57. *a*) ¿Cuánto trabajo debe realizar un refrigerador de Carnot en un día caluroso para transferir 1000 J de calor de su interior, que está a 10 °C, al aire exterior que se encuentra a 35.0 °C. *b*) ¿Cuánto trabajo debe efectuar el mismo refrigerador para transferir la misma cantidad de calor si la temperatura interior es la misma, pero el aire exterior está a sólo 15.0 °C? *c*) Elabore diagramas pV para ambas situaciones. ¿Puede explicar en términos físicos por qué debe realizarse más trabajo cuando la diferencia de temperatura entre las dos etapas isotérmicas es mayor?

20.58. Un cubo de hielo de 0.0500 kg a una temperatura inicial de −15.0 °C se coloca en 0.600 kg de agua a $T = 45.0$ °C en un recipiente aislado con masa despreciable. *a*) Calcule la temperatura final del agua una vez que el hielo se funde. *b*) Calcule el cambio de entropía del sistema.

20.59. *a*) Para el ciclo Otto de la figura 20.6, calcule los cambios de entropía del gas en cada uno de los procesos a volumen constante $b \rightarrow c$ y $d \rightarrow a$ en términos de las temperaturas T_a, T_b, T_c y T_d, el número de

moles n y la capacidad calorífica C_V del gas. *b*) Calcule el cambio total de entropía en el motor durante un ciclo. (*Sugerencia:* use la relación entre T_a y T_b y entre T_d y T_C.) *c*) Los procesos $b \rightarrow c$ y $d \rightarrow a$ se efectúan irreversiblemente en un motor Otto real. Explique cómo puede conciliarse esto con el resultado del inciso *b*).

20.60. Diagrama *TS*. *a*) Dibuje una gráfica de un ciclo de Carnot, con la temperatura Kelvin en el eje vertical y la entropía en el horizontal. Esto es un diagrama de temperatura-entropía, o *TS*. *b*) Demuestre que el área bajo cualquier curva que representa un camino reversible en un diagrama *TS* representa el calor absorbido por el sistema. *c*) A partir de su diagrama deduzca la expresión para la eficiencia térmica de un ciclo de Carnot. *d*) Dibuje un diagrama *TS* para el ciclo Stirling, descrito en el problema 20.50. Use este diagrama para relacionar las eficiencias de los ciclos de Carnot y Stirling.

20.61. Un estudiante de física sumerge un extremo de una varilla de cobre en agua hirviendo a 100 °C y el otro en una mezcla agua-hielo a 0 °C. Los costados de la varilla están aislados. Una vez que la varilla alcanza condiciones de estado estable, 0.160 kg de hielo se derrite en cierto tiempo. Para este lapso, calcule *a*) el cambio de entropía del agua en ebullición; *b*) el cambio de entropía de la mezcla agua-hielo; *c*) el cambio de entropía de la varilla de cobre; *d*) el cambio total de entropía del sistema completo.

20.62. Imagine que para calentar una taza de agua (250 cm^3) y preparar café, coloca un elemento calentador eléctrico en la taza. Mientras la temperatura del agua aumenta de 20 °C a 65 °C, la temperatura del elemento calefactor permanece en 120 °C. Calcule el cambio de entropía de a) el agua, *b*) el elemento calefactor, *c*) el sistema de agua y elemento calefactor. (Use el mismo supuesto acerca del calor específico del agua que usamos en el ejemplo 20.10 (sección 20.7) y desprecie el calor que fluye a la taza en sí.) *d*) ¿Este proceso es reversible o irreversible? Explique.

20.63. Un objeto de masa m_1, capacidad calorífica específica c_1 y temperatura T_1 se coloca en contacto con otro de masa m_2, capacidad calorífica específica c_2 y temperatura $T_2 > T_1$. Como resultado, la temperatura del primer objeto aumenta a T y la del segundo baja a T'. *a*) Demuestre que el aumento de entropía del sistema es

$$\Delta S = m_1 c_1 \ln\frac{T}{T_1} + m_2 c_2 \ln\frac{T'}{T_2}$$

y que la conservación de la energía exige que

$$m_1 c_1 (T - T_1) = m_2 c_2 (T_2 - T')$$

b) Demuestre que el cambio de entropía ΔS, considerado como función de T, es *máximo* si $T = T'$, la condición de equilibrio termodinámico. *c*) Analice el resultado del inciso *b*) en términos de la idea de entropía como medida del desorden.

Problema de desafío

20.64. Considere un ciclo Diesel que inicia (punto *a* de la figura 20.7) con aire a una temperatura T_a. El aire puede tratarse como gas ideal. *a*) Si la temperatura en el punto *c* es T_c, deduzca una expresión para la eficiencia del ciclo en términos de la razón de compresión *r*. *b*) Calcule la eficiencia si $T_a = 300$ K, $T_c = 950$ K, $\gamma = 1.40$ y $r = 21.0$.

APÉNDICE A

EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

El Système International d'Unités, SI, es el sistema desarrollado por la Conferencia General de Pesos y Medidas y adoptado por casi todas las naciones industriales del mundo. El siguiente material es una adaptación de B. N. Taylor, ed., National Institute of Standards and Technology Spec. Pub. 911 (U.S. Govt. Printing Office, Wahsington, DC, 1995). Véase también **http://physics.nist.gov/cuu**

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	
	Unidades básicas del SI		
longitud	metro	m	
masa	kilogramo	kg	
tiempo	segundo	s	
corriente eléctrica	ampere	A	
temperatura termodinámica	kelvin	K	
cantidad de sustancia	mol	mol	
intensidad luminosa	candela	cd	
	Unidades derivadas del SI		**Unidades equivalentes**
área	metro cuadrado	m^2	
volumen	metro cúbico	m^3	
frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
densidad de masa (densidad)	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	
rapidez, velocidad	metro por segundo	m/s	
velocidad angular	radián por segundo	rad/s	
aceleración	metro por segundo cuadrado	m/s^2	
aceleración angular	radián por segundo cuadrado	rad/s^2	
fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
presión (esfuerzo mecánico)	pascal	Pa	N/m^2
viscosidad cinemática	metro cuadrado por segundo	m^2/s	
viscosidad dinámica	newton-segundo por metro cuadrado	$N \cdot s/m^2$	
trabajo, energía, cantidad de calor	joule	J	$N \cdot m$
potencia	watt	W	J/s
cantidad de electricidad	coulomb	C	$A \cdot s$
diferencia de potencial, fuerza electromotriz	volt	V	J/C, W/A
intensidad de campo eléctrico	volt por metro	V/m	N/C
resistencia eléctrica	ohm	Ω	V/A
capacitancia	farad	F	$A \cdot s/V$
flujo magnético	weber	Wb	$V \cdot s$
inductancia	henry	H	$V \cdot s/A$
densidad de flujo magnético	tesla	T	Wb/m^2
intensidad de campo magnético	ampere por metro	A/m	
fuerza magnetomotriz	ampere	A	
flujo luminoso	lumen	lm	$cd \cdot sr$
luminancia	candela por metro cuadrado	cd/m^2	
iluminancia	lux	lx	lm/m^2
número de onda	1 por metro	m^{-1}	
entropía	joule por kelvin	J/K	
capacidad de calor específico	joule por kilogramo kelvin	$J/kg \cdot K$	
conductividad térmica	watt por metro kelvin	$W/m \cdot K$	

Cantidad	Nombre de la unidad	Símbolo	Unidades equivalentes
intensidad radiante	watt por esterradián	W/sr	
actividad (de una fuente radiactiva)	becquerel	Bq	s^{-1}
dosis de radiación	gray	Gy	J/kg
dosis de radiación equivalente	sievert	Sv	J/kg
	Unidades complementarias del SI		
ángulo plano	radián	rad	
ángulo sólido	esterradián	sr	

Definiciones de las unidades del SI

metro (m) El *metro* es la longitud igual a la distancia recorrida por la luz, en el vacío, en un tiempo de 1/299,792,458 segundos.

kilogramo (kg) El *kilogramo* es la unidad de masa; es igual a la masa del prototipo internacional del kilogramo (que es un cilindro particular de una aleación de platino-iridio que la Oficina Internacional de Pesas y Medidas conserva en una bóveda de seguridad en Sèvres, Francia).

segundo (s) El *segundo* es la duración de 9,192,631,770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133.

ampere (A) El *ampere* es la corriente constante que, si se mantiene en dos conductores rectos y paralelos de longitud infinita, de sección transversal circular despreciable y separados por una distancia de 1 metro en el vacío, produciría entre ellos una fuerza igual a 2×10^{-7} newtons por metro de longitud.

kelvin (K) El *kelvin,* unidad de temperatura termodinámica, es la fracción 1/273.16 de la temperatura termodinámica del punto triple del agua.

ohm (Ω) El *ohm* es la resistencia eléctrica entre dos puntos de un conductor cuando una diferencia constante de potencial de 1 volt aplicada entre ellos, produce en el conductor una corriente de 1 ampere, sin que el conductor sea fuente de ninguna fuerza electromotriz.

coulomb (C) El *coulomb* es la cantidad de electricidad transportada en 1 segundo por una corriente de 1 ampere.

candela (cd) La *candela* es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} herzts y que tiene una intensidad radiante en esa dirección de 1/683 watts por esterradián.

mole (mol) El *mole* es la cantidad de sustancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos de carbono hay en 0.012 kg de carbono 12. Las entidades elementales deben estar especificadas y pueden ser átomos, moléculas, iones, electrones, otras partículas, o grupos especificados de esas partículas.

newton (N) El *newton* es la fuerza que da a una masa de 1 kilogramo una aceleración de 1 metro por segundo por segundo.

joule (J) El *joule* es el trabajo realizado cuando el punto de aplicación de una fuerza constante de 1 newton se desplaza una distancia de 1 metro en la dirección de esa fuerza.

watt (W) El *watt* es la potencia que da lugar a la generación de energía a razón de 1 joule por segundo.

volt (V) El *volt* es la diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos de un alambre conductor que transporta una corriente constante de 1 ampere, cuando la potencia disipada entre tales puntos es igual a 1 watt.

weber (Wb) El *weber* es el flujo magnético que, al cerrar un circuito de una vuelta, produce en éste una fuerza electromotriz de 1 volt conforme se reduce a cero a una tasa uniforme de 1 segundo.

lumen (lm) El *lumen* es el flujo luminoso emitido en un ángulo sólido de 1 esterradián por una fuente puntual uniforme que tiene una intensidad de 1 candela.

farad (F) El *farad* es la capacitancia de un capacitor entre cuyas placas hay una diferencia de potencial de 1 volt cuando tiene una carga de electricidad igual a 1 coulomb.

henry (H) El *henry* es la inductancia de un circuito cerrado en el que se produce una fuerza electromotriz de 1 volt cuando la corriente eléctrica en el circuito varía de manera uniforme a razón de 1 ampere por segundo.

radian (rad) El *radián* es el ángulo plano entre dos radios de un círculo que recorre en la circunferencia un arco igual a la longitud del radio.

esterradián (sr) El *esterradián* es el ángulo sólido que, cuando tiene su vértice en el centro de una esfera, recorre un área de la superficie de la esfera igual a la de un cuadrado cuyos lados tengan una longitud igual al radio de la esfera.

prefijos del SI Los nombres de los múltiplos y submúltiplos de unidades del SI se forman con la aplicación de los prefijos listados en el Apéndice F.

APÉNDICE B

RELACIONES MATEMÁTICAS ÚTILES

Álgebra

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\qquad a^{(x+y)} = a^x a^y$ $\qquad a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$

Logaritmos: Si $\log a = x$, entonces $a = 10^x$. $\quad \log a + \log b = \log(ab) \quad \log a - \log b = \log(a/b) \quad \log(a^n) = n\log a$

Si $\ln a = x$, entonces $a = e^x$. $\quad \ln a + \ln b = \ln(ab) \quad \ln a - \ln b = \ln(a/b) \quad \ln(a^n) = n\ln a$

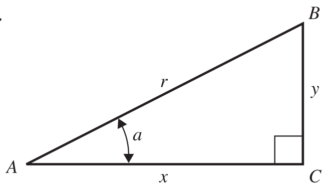
Fórmula cuadrática: If $ax^2 + bx + c = 0$, $\qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Teorema del binomio

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \cdots$$

Trigonometría

En el triángulo rectángulo ABC, $x^2 + y^2 = r^2$.



Definiciones de las funciones trigonométricas: $\operatorname{sen} a = y/r \qquad \cos a = x/r \qquad \tan a = y/x$

Identidades:

$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad \tan a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$

$\operatorname{sen} 2a = 2\operatorname{sen} a \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$

$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \qquad \cos\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$

$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a \qquad \operatorname{sen}(a \pm b) = \operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b$

$\cos(-a) = \cos a \qquad \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{sen}(a \pm \pi/2) = \pm\cos a \qquad \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(a + b)\cos\tfrac{1}{2}(a - b)$

$\cos(a \pm \pi/2) = \mp\operatorname{sen} a \qquad \cos a + \cos b = 2\cos\tfrac{1}{2}(a + b)\cos\tfrac{1}{2}(a - b)$

Geometría

Circunferencia de un círculo de radio r: $\quad C = 2\pi r$

Área de un círculo de radio r: $\quad A = \pi r^2$

Volumen de una esfera de radio r: $\quad V = 4\pi r^3/3$

Área de la superficie de una esfera de radio r: $\quad A = 4\pi r^2$

Volumen de un cilindro de radio r y altura h: $\quad V = \pi r^2 h$

Cálculo

Derivadas:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Integrales:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

Series de potencias (convergentes para el intervalo de x que se indica):

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (\text{para toda } x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (\text{para toda } x)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad (|x| < \pi/2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (\text{para toda } x)$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

APÉNDICE C

EL ALFABETO GRIEGO

Nombre	Mayúscula	Minúscula	Nombre	Mayúscula	Minúscula
Alfa	A	α	Ny	N	ν
Beta	B	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Ómicron	O	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Épsilon	E	ϵ	Rho	P	ρ
Dzeta	Z	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	H	η	Tau	T	τ
Theta	Θ	θ	Ypsilon	Υ	υ
Iota	I	ι	Fi	Φ	ϕ
Kappa	K	κ	Ji	X	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
My	M	μ	Omega	Ω	ω

APÉNDICE D

TABLA PERIÓDICA DE LOS ELEMENTOS

Grupo / Periodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 **H** 1.008																	2 **He** 4.003
2	3 **Li** 6.941	4 **Be** 9.012											5 **B** 10.811	6 **C** 12.011	7 **N** 14.007	8 **O** 15.999	9 **F** 18.998	10 **Ne** 20.180
3	11 **Na** 22.990	12 **Mg** 24.305											13 **Al** 26.982	14 **Si** 28.086	15 **P** 30.974	16 **S** 32.065	17 **Cl** 35.453	18 **Ar** 39.948
4	19 **K** 39.098	20 **Ca** 40.078	21 **Sc** 44.956	22 **Ti** 47.867	23 **V** 50.942	24 **Cr** 51.996	25 **Mn** 54.938	26 **Fe** 55.845	27 **Co** 58.933	28 **Ni** 58.693	29 **Cu** 63.546	30 **Zn** 65.409	31 **Ga** 69.723	32 **Ge** 72.64	33 **As** 74.922	34 **Se** 78.96	35 **Br** 79.904	36 **Kr** 83.798
5	37 **Rb** 85.468	38 **Sr** 87.62	39 **Y** 88.906	40 **Zr** 91.224	41 **Nb** 92.906	42 **Mo** 95.94	43 **Tc** (98)	44 **Ru** 101.07	45 **Rh** 102.906	46 **Pd** 106.42	47 **Ag** 107.868	48 **Cd** 112.411	49 **In** 114.818	50 **Sn** 118.710	51 **Sb** 121.760	52 **Te** 127.60	53 **I** 126.904	54 **Xe** 131.293
6	55 **Cs** 132.905	56 **Ba** 137.327	71 **Lu** 174.967	72 **Hf** 178.49	73 **Ta** 180.948	74 **W** 183.84	75 **Re** 186.207	76 **Os** 190.23	77 **Ir** 192.217	78 **Pt** 195.078	79 **Au** 196.967	80 **Hg** 200.59	81 **Tl** 204.383	82 **Pb** 207.2	83 **Bi** 208.980	84 **Po** (209)	85 **At** (210)	86 **Rn** (222)
7	87 **Fr** (223)	88 **Ra** (226)	103 **Lr** (262)	104 **Rf** (261)	105 **Db** (262)	106 **Sg** (266)	107 **Bh** (264)	108 **Hs** (269)	109 **Mt** (268)	110 **Ds** (271)	111 **Rg** (272)	112 **Uub** (285)	113 **Uut** (284)	114 **Uuq** (289)	115 **Uup** (288)	116 **Uuh** (292)	117 **Uus**	118 **Uuo**

Lantánidos	57 **La** 138.905	58 **Ce** 140.116	59 **Pr** 140.908	60 **Nd** 144.24	61 **Pm** (145)	62 **Sm** 150.36	63 **Eu** 151.964	64 **Gd** 157.25	65 **Tb** 158.925	66 **Dy** 162.500	67 **Ho** 164.930	68 **Er** 167.259	69 **Tm** 168.934	70 **Yb** 173.04
Actínidos	89 **Ac** (227)	90 **Th** (232)	91 **Pa** (231)	92 **U** (238)	93 **Np** (237)	94 **Pu** (244)	95 **Am** (243)	96 **Cm** (247)	97 **Bk** (247)	98 **Cf** (251)	99 **Es** (252)	100 **Fm** (257)	101 **Md** (258)	102 **No** (259)

Para cada elemento, se indica la masa atómica de la mezcla de isótopos que ocurre en la naturaleza. Para los elementos que no tienen isótopo estable, la masa atómica aproximada del isótopo de vida más larga se indica entre paréntesis. Para los elementos cuya existencia se ha predicho pero aún no han sido detectados, no se da la masa atómica. Todas las masas atómicas están expresadas en unidades de masa atómica ($1\ u = 1.66053886(28) \times 10^{-27}$ kg), equivalente a gramos por mol (g/mol).

APÉNDICE E

FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES

Longitud
1 m = 100 cm = 1000 mm = 10^6 μm = 10^9 nm
1 km = 1000 m = 0.6214 mi
1 m = 3.281 ft = 39.37 in
1 cm = 0.3937 in
1 in. = 2.540 cm
1 ft = 30.48 cm
1 yd = 91.44 cm
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 Å = 10^{-10} m = 10^{-8} cm = 10^{-1} nm
1 milla náutica = 6080 ft
1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área
1 cm^2 = 0.155 in^2
1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10.76 ft^2
1 in^2 = 6.452 cm^2
1 ft = 144 in^2 = 0.0929 m^2

Volumen
1 litro = 1000 cm^3 = 10^{-3} m^3 = 0.03531 ft^3 = 61.02 in^3
1 ft^3 = 0.02832 m^3 = 28.32 litros = 7.477 galones
1 galón = 3.788 litros

Tiempo
1 min = 60 s
1 h = 3600 s
1 día = 86,400 s
1 año = 365.24 d = 3.156×10^7 s

Ángulo
1 rad = 57.30° = 180°/π
1° = 0.01745 rad = π/180 rad
1 revolución = 360° = 2π rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Rapidez
1 m/s = 3.281 ft/s
1 ft/s = 0.3048 m/s
1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 mi/h = 1.466 ft/s = 0.4470 m/s = 1.609 km/h
1 furlong/14 días = 1.662×10^{-4} m/s

Aceleración
1 m/s^2 = 100 cm/s^2 = 3.281 ft/s^2
1 cm/s^2 = 0.01 m/s^2 = 0.03281 ft/s^2
1 ft/s^2 = 0.3048 m/s^2 = 30.48 cm/s^2
1 mi/h · s = 1.467 ft/s^2

Masa
1 kg = 10^3 g = 0.0685 slug
1 g = 6.85×10^{-5} slug
1 slug = 14.59 kg
1 u = 1.661×10^{-27} kg
1 kg tiene un peso de 2.205 lb cuando g = 9.80 m/s^2

Fuerza
1 N = 10^5 dinas = 0.2248 lb
1 lb = 4.448 N = 4.448×10^5 dinas

Presión
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.450×10^{-4}lb/in^2 = 0.209 lb/ft^2
1 bar = 10^5 Pa
1 lb/in^2 = 6895 Pa
1 lb/ft^2 = 47.88 Pa
1 atm = 1.013×10^5 Pa = 1.013 bar
= 14.7 lb/in^2 = 2117 lb/ft^2
1 mm Hg = 1 torr = 133.3 Pa

Energía
1 J = 10^7ergs = 0.239 cal
1 cal = 4.186 J (basada en caloría de 15°)
1 ft · lb = 1.356 J
1 Btu = 1055 J = 252 cal = 778 ft · lb
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.600×10^6 J

Equivalencia masa-energía
1 kg ↔ 8.988×10^{16} J
1 u ↔ 931.5 MeV
1 eV ↔ 1.074×10^{-9} u

Potencia
1 W = 1 J/s
1 hp = 746 W = 550 ft · lb/s
1 Btu/h = 0.293 W

APÉNDICE F

CONSTANTES NUMÉRICAS

Constantes físicas fundamentales*

Nombre	Símbolo	Valor
Rapidez de la luz	c	2.99792458×10^{8} m/s
Magnitud de la carga eléctrica de un electrón	e	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante gravitacional	G	$6.6742(10) \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Constante de Planck	h	$6.6260693(11) \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Boltzmann	k	$1.3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Número de Avogadro	N_A	$6.0221415(10) \times 10^{23}$ moléculas/mol
Contante de los gases	R	8.314472(15) J/mol · K
Masa del electrón	m_e	$9.1093826(16) \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$1.67262171(29) \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$1.67492728(29) \times 10^{-27}$ kg
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ Wb/A · m
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817\ldots \times 10^{-12}$ C^2/N · m^2
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.987551787\ldots \times 10^{9}$ N · m^2/C^2

Otras constantes útiles*

Equivalente mecánico del calor		4.186 J/cal (caloría 15°)
Presión atmosférica estándar	1 atm	1.01325×10^{5} Pa
Cero absoluto	0 K	−273.15°C
Electrón volt	1 eV	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ J
Unidad de masa atómica	1 u	$1.66053886(28) \times 10^{-27}$ kg
Energía del electrón en reposo	$m_e c^2$	0.510998918(44) MeV
Volumen del gas ideal (0 °C y 1 atm)		22.413996(39) litro/mol
Aceleración debida a la gravedad (estándar)	g	9.80665 m/s^2

*Fuente: National Institute of Standards and Technology (**http://physics.nist.gov/cuu**). Los números entre paréntesis indican la incertidumbre en los dígitos finales del número principal; por ejemplo, el número 1.6454(21) significa 1.6454 ± 0.0021. Los valores sin incertidumbre son exactos.

Datos astronómicos[†]

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (m)	Radio de la órbita (m)	Periodo de la órbita
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	—	—
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.84×10^{8}	27.3 d
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^{6}	5.79×10^{10}	88.0 d
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^{6}	1.08×10^{11}	224.7 d
Tierra	5.97×10^{24}	6.38×10^{6}	1.50×10^{11}	365.3 d
Marte	6.42×10^{23}	3.40×10^{6}	2.28×10^{11}	687.0 d
Júpiter	1.90×10^{27}	6.91×10^{7}	7.78×10^{11}	11.86 y
Saturno	5.68×10^{26}	6.03×10^{7}	1.43×10^{12}	29.45 y
Urano	8.68×10^{25}	2.56×10^{7}	2.87×10^{12}	84.02 y
Neptuno	1.02×10^{26}	2.48×10^{7}	4.50×10^{12}	164.8 y
Plutón[‡]	1.31×10^{22}	1.15×10^{6}	5.91×10^{12}	247.9 y

[†]Fuente: NASA Jet Propulsion Laboratory Solar System Dynamics Group (**http://ssd.jpl.nasa.gov**) y P. Kenneth Seidelmann, ed., ***Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*** (University Science Books, Mill Valley, CA, 1992), pp. 704-706. Para cada cuerpo, el "radio es el radio en su ecuador, y el "radio de la órbita" es su distancia promedio desde el Sol (para los planetas) o desde la Tierra (para la Luna).

[‡]En agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional reclasificó a Plutón y otros objetos pequeños que giran en órbita alrededor del Sol como "planetas enanos".

Prefijos para potencias de 10

Potencia de 10	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto-	y
10^{-21}	zepto-	z
10^{-18}	atto-	a
10^{-15}	femto-	f
10^{-12}	pico-	p
10^{-9}	nano-	n
10^{-6}	micro-	μ
10^{-3}	mili-	m
10^{-2}	centi-	c
10^{3}	kilo-	k
10^{6}	mega-	M
10^{9}	giga-	G
10^{12}	tera-	T
10^{15}	peta-	P
10^{18}	exa-	E
10^{21}	zetta-	Z
10^{24}	yotta-	Y

Ejemplos:

1 femtómetro $= 1$ fm $= 10^{-15}$ m

1 picosegundo $= 1$ ps $= 10^{-12}$ s

1 nanocoulomb $= 1$ nC $= 10^{-9}$ C

1 microkelvin $= 1\ \mu$K $= 10^{-6}$ K

1 millivolt $= 1$ mV $= 10^{-3}$ V

1 kilopascal $= 1$ kPa $= 10^{3}$ Pa

1 megawatt $= 1$ MW $= 10^{6}$ W

1 gigahertz $= 1$ GHz $= 10^{9}$ Hz

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS CON NÚMERO IMPAR

Capítulo 1

1.1 a) 1.61 km b) 3.28×10^3 ft
1.3 1.02 ns
1.5 5.36 L
1.7 31.7 y
1.9 a) 23.4 km/L b) 1.42 tanques
1.11 9.0 cm
1.13 a) $1.1 \times 10^{-3}\%$ b) no
1.15 a) 0.1% b) 0.008% c) 0.03%
1.17 a) $2.8 \pm 0.3\ \text{cm}^3$ b) 170 ± 20
1.19 a) no b) no c) no d) no e) no
1.21 10^6
1.23 10^9
1.25 \$70 millones
1.29 $\$9 \times 10^{14}$; aproximadamente $\$3 \times 10^6$
1.31 7.8 km, 38° al norte del este
1.33 144 m, 41° al sur del oeste
1.35 $A_x = 0, A_y = -8.00$ m; $B_x = 7.50$ m, $B_y = 13.0$ m; $C_x = -10.9$ m, $C_y = -5.07$ m; $D_x = -7.99$ m, $D_y = 6.02$ m
1.37 1190 N; 13.4° en dirección arriba y adelante
1.39 a) 9.01 m, 33.7° b) 9.01 m, 33.7° c) 22.3 m, 250.3° d) 22.3 m, 70.3°
1.41 5.06 km, 20.2° al norte del oeste
1.43 a) 2.48 cm, 18.3° b) 4.10 cm, 83.7° c) 4.10 cm, 263.7°
1.45 781 N, 166°
1.47 $\vec{A} = -(8.00\ \text{m})\hat{\jmath}$; $\vec{B} = (7.50\ \text{m})\hat{\imath} + (13.0\ \text{m})\hat{\jmath}$; $\vec{C} = -(10.9\ \text{m})\hat{\imath} + (-5.07\ \text{m})\hat{\jmath}$; $\vec{D} = (-7.99\ \text{m})\hat{\imath} + (6.02\ \text{m})\hat{\jmath}$
1.49 a) $\vec{A} = (1.23\ \text{m})\hat{\imath} + (3.38\ \text{m})\hat{\jmath}$; $\vec{B} = (-2.08\ \text{m})\hat{\imath} + (-1.20\ \text{m})\hat{\jmath}$ b) $\vec{C} = (12.01\ \text{m})\hat{\imath} + (14.94\ \text{m})\hat{\jmath}$ c) 19.17 m; 51.2°
1.51 a) no b) no; sí c) ± 0.20
1.53 a) $-104\ \text{m}^2$ b) $-148\ \text{m}^2$ c) $40.6\ \text{m}^2$
1.55 a) 165° b) 28° c) 90°
1.57 a) $63.9\ \text{m}^2$; $-\hat{k}$ b) $63.9\ \text{m}^2$; $+\hat{k}$
1.59 a) $4.61\ \text{cm}^2$; $-z$ b) $4.61\ \text{cm}^2$; $+z$
1.61 a) 1.65×10^4 km b) 2.6 radios terrestres
1.63 10^{28}
1.65 a) 2.94 cm b) 1.82 cm
1.67 a) 10^{50} b) 10^{57} c) 10^{79}
1.69 149 N; 32.2° al norte del este
1.71 b) $A_x = 3.03$ cm, $A_y = 8.10$ cm c) 8.65 cm; a 69.5° del eje $+x$ hacia el eje $+y$
1.73 144 m, 41° al sur del oeste
1.75 a) 46 N, 139°
1.77 a) (87, 258) b) 136 pixeles, 25° abajo en línea recta hacia la izquierda
1.79 380 km, 28.8° al sur del este
1.81 160 N, 13° abajo de la horizontal
1.83 a) 911 m; 8.9° al oeste del sur
1.87 b) 90°
1.89 a) $A = 5.39$, $B = 4.36$ b) $-5.00\hat{\imath} + 2.00\hat{\jmath} + 7.00\hat{k}$ c) 8.83; sí
1.93 a) 54.7° b) 35.3°
1.95 $C_x = 8.0$, $C_y = 6.1$
1.97 b) 72.2
1.99 38.5 yd, 24.6° a la derecha del campo
1.101 a) 76 ly b) 129°

Capítulo 2

2.1 a) 197 m/s b) 169 m/s
2.3 1 h 10 min
2.5 a) 17.1 s b) más rápido: 106 m; más lento: 94 m
2.7 250 km
2.9 a) 12.0 m/s b) 0 m/s, 15.0 m/s, 12.0 m/s c) 13.3 s
2.11 a) 2.3 m/s, 2.3 m/s b) 2.3 m/s, 0.33 m/s
2.13 a) no b) (i) $12.8\ \text{m/s}^2$ (ii) $3.5\ \text{m/s}^2$ (iii) $0.72\ \text{m/s}^2$; sí
2.15 a) 2.00 cm/s, 50.0 cm, $-0.125\ \text{cm/s}^2$ b) 16.0 s c) 32.0 s d) 6.20 s, 1.22 cm/s; 25.8 s, -1.22 cm/s; 36.4 s, -2.55 cm/s
2.17 a) $3\ \text{m/s}^2$ b) $10\ \text{m/s}^2$ c) depende de la dirección de la coordenada positiva
2.21 a) 5.0 m/s b) $1.43\ \text{m/s}^2$
2.23 a) $675\ \text{m/s}^2$ b) 0.067 s
2.25 1.70 m
2.27 a) (i) $5.59\ \text{m/s}^2$ (ii) $7.74\ \text{m/s}^2$ b) (i) 179 m (ii) 12,800 m
2.29 a) $+2.7$ cm/s, -1.3 cm/s b) $-1.3\ \text{cm/s}^2$ c) 22.5 cm; 25.5 cm
2.31 a) 0, $6.3\ \text{m/s}^2$, $-11.2\ \text{m/s}^2$ b) 100 m, 230 m, 320 m
2.33 a) 1.80×10^4 m/s b) 0.957 c) 6 h 11 min
2.35 b) 1 s, 3 s d) 2 s e) 3 s f) 1 s
2.37 a) *A:* $20.5\ \text{m/s}^2$; *B:* $3.8\ \text{m/s}^2$; *C:* $53\ \text{m/s}^2$ b) 721 km
2.39 a) 2.94 m/s b) 0.599 s
2.41 a) $t = \sqrt{2d/g}$ b) 0.190 s
2.43 a) 646 m b) 16.4 s, 112 m/s
2.45 a) 25.6 m/s b) 31.6 m c) 15.2 m/s
2.47 a) $249\ \text{m/s}^2$ b) 25.4 c) 101 m d) no
2.49 $0.0868\ \text{m/s}^2$
2.51 a) $x(t) = (0.250\ \text{m/s}^3)t^3 - (0.0100\ \text{m/s}^4)t^4$; $v_x(t) = (0.750\ \text{m/s}^3)t^2 - (0.0400\ \text{m/s}^4)t^3$ b) 39.1 m/s
2.53 a) 30.0 cm/s
2.55 b) 0.627 s, 1.60 s c) negativa en 0.627 s, positiva en 1.60 s d) 1.11 s e) 2.45 m f) 2.00 s, 0 s
2.57 a) 82 km/h b) 31 km/h
2.59 a) $3.5\ \text{m/s}^2$ b) 0 c) $1.5\ \text{m/s}^2$
2.61 a) 92.0 m b) 92.0 m
2.63 a) 464 m/s b) 2.99×10^4 m/s c) 7.48
2.65 50.0 m
2.67 $4.6\ \text{m/s}^2$
2.69 a) 6.17 s b) 24.8 m c) $v_{\text{camión}} = 13.0$ m/s, $v_{\text{auto}} = 21.0$ m/s
2.71 a) 7.85 cm/s b) 5.00 cm/s, horizontal de la posición inicial a la posición final
2.73 a) 15.9 s b) 393 m c) 29.5 m/s
2.75 a) -4.00 m/s b) 12.0 m/s
2.77 a) 2.64H b) 2.64T
2.79 a) no b) sí; 14.4 m/s; no es físicamente alcanzable
2.81 a) $6.79 \times 10^4 g$ b) 1.45 m/s c) $H/4$
2.83 a) 7.59 m/s b) 5.14 m c) 1.60 s
2.85 a) 7.7 m/s b) 0.78 s c) 0.59 s d) 1.3 m
2.87 270 m
2.89 a) 20.5 m/s b) sí
2.91 a) 947 m b) 393 m
2.93 a) A b) 2.27 s, 5.73 s c) 1.00 s, 4.33 s d) 2.67 s
2.95 a) 9.55 s, 47.8 m b) 1.62 m/s d) 8.38 m/s e) no f) 3.69 m/s, 21.7 s, 80.0 m
2.97 a) 8.18 m/s b) (i) 0.411 m (ii) 1.15 km c) 9.80 m/s d) 4.90 m/s

Capítulo 3

3.1 a) $v_{\text{med-}x} = 1.4$ m/s, $v_{\text{med-}y} = -1.3$ m/s b) 1.9 m/s, $-43°$
3.3 a) 7.1 cm/s, 45° b) 5.0 cm/s, 90°; 7.1 cm/s; 45°; 11 cm/s, 27°
3.5 b) $a_{\text{med-}x} = -8.67\ \text{m/s}^2$, $a_{\text{med-}y} = -2.33\ \text{m/s}^2$ c) $8.98\ \text{m/s}^2$, 195°
3.7 b) $\vec{v} = \alpha\hat{\imath} + (-2t)\hat{\jmath}$; $\vec{a} = -2\beta\hat{\jmath}$ c) $v = 5.4$ m/s, $-63°$; $a = 2.4\ \text{m/s}^2$, $-90°$ d) acelerando y dando vuelta a la derecha
3.9 a) 0.600 m b) 0.385 m c) $v_x = 1.10$ m/s, $v_y = -3.43$ m/s; $v = 3.60$ m/s, 72.2° debajo de la horizontal
3.11 3.32 m
3.13 a) 30.6 m/s b) 36.3 m/s
3.15 $1.29\ \text{m/s}^2$
3.17 a) 40.0 m/s, 69.3 m/s b) 7.07 s c) 245 m d) 565 m e) $a_x = 0$, $a_y = -9.80\ \text{m/s}^2$; $v_x = 40.0$ m/s, $v_y = 0$
3.19 a) 0.682 s, 2.99 s b) 24.0 m/s, 11.3 m/s; 24.0 m/s, -11.3 m/s c) 30.0 m/s, $-36.9°$
3.21 a) 1.5 m b) -0.89 m/s
3.23 a) 13.6 m b) 34.6 m/s c) 103 m
3.25 a) 296 m b) 176 m c) 198 m (i) horizontal: 15 m/s; vertical: 58.8 m/s (ii) horizontal: 15 m/s; vertical: 78.8 m/s
3.27 795 m
3.29 a) $0.034\ \text{m/s}^2$, 0.0034g b) 1.4 h
3.31 a) 3.07 s b) 1.68 s
3.33 a) $3.50\ \text{m/s}^2$, hacia arriba b) $3.50\ \text{m/s}^2$, hacia abajo c) 12.6 s
3.35 a) 32.9 m/s b) $27.7\ \text{m/s}^2$ c) 35.5 rpm
3.37 a) 14 s b) 70 s
3.39 0.36 m/s, 38° al oeste del sur
3.41 a) 4.7 m/s, 25° al sur del este b) 190 s c) 380 m
3.43 b) -7.1 m/s, -42 m/s c) 43 m/s, 9.5° al oeste del sur
3.45 a) $A = 0$, $B = 2.00\ \text{m/s}^2$, $C = 50.0$ m, $D = 0.50\ \text{m/s}^3$ b) $\vec{a} = (4.00\ \text{m/s}^2)\hat{\imath}$, $v = 0$ c) $v_x = 40.0$ m/s, $v_y = 150$ m/s, $v = 155$ m/s c) $\vec{r} = (200\ \text{m})\hat{\imath} + (550\ \text{m})\hat{\jmath}$
3.47 a) 124 m b) 280 m
3.49 22 m/s
3.51 40 m/s
3.53 274 m
3.55 a) 42.8 m/s b) 42.0 m
3.57 a) $\sqrt{2gh}$ b) 30.0° c) 6.93h
3.59 c) menor de 45°
3.61 b) 15°, 75°
3.63 a) 17.8 m/s b) en el río, a 28.4 m de la ribera cercana
3.65 a) 81.6 m b) en el carro c) 245 m d) 53.1°
3.67 a) 49 m/s b) 50 m
3.69 a) 2000 m b) 2180 m
3.71 a) 38.5 m/s b) (i) 25.0 m/s, 0 (ii) 25.0 m/s, 38.5 m/s c) (i) 0° (ii) 57.0° d) 499 m
3.73 $\pm 25.4°$
3.77 b) $v_x = R\omega(1 - \cos\omega t)$, $v_y = R\omega \operatorname{sen}\omega t$, $a_x = R\omega^2 \operatorname{sen}\omega t$, $a_y = R\omega^2 \cos\omega t$ c) $t = 0, 2\pi/\omega, 4\pi/\omega, \ldots$; $x = 0, 2\pi R, 4\pi R, \ldots$; $y = 0$; $a = R\omega^2$ en la dirección $+y$ d) no
3.79 a) 2.50g b) 0.614n
3.81 a) 44.7 km/h, 26.6° al oeste del sur b) 10.5° al norte del oeste
3.83 a) 0.659 s b) (i) 9.10 m/s (ii) 6.46 m/s c) 3.00 m, 2.13 m
3.85 7.39 m/s, 12.4° al norte del este
3.87 a) 80 m b) 1.6×10^{-3} c) el efecto general es reducir el radio
3.89 a) $\left(\dfrac{2v_0^2}{g}\right)[\tan(\theta + \phi) - \tan\theta]\dfrac{\cos^2(\theta + \phi)}{\cos\theta}$ b) $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$
3.91 $\Delta t = 0.5$ s: $9.589\ \text{m/s}^2$, 118.6°; $\Delta t = 0.1$ s: $9.983\ \text{m/s}^2$, 95.73°; $\Delta t = 0.05$ s: $9.996\ \text{m/s}^2$, 92.86°
3.93 a) 1.5 km/h b) 3.5 km/h

Capítulo 4

4.1 a) 0° b) 90° c) 180°
4.3 7.1 N a la derecha, 7.1 N hacia abajo
4.5 494 N, 31.7°
4.7 $2.2\ \text{m/s}^2$
4.9 16.0 kg
4.11 a) 3.13 m, 3.13 m/s b) 21.9 m, 6.25 m/s
4.13 a) 45.0 N; $t = 2$ s a 4 s b) 2 s a 4 s c) 0, 6 s
4.15 a) $A = 100$ N, $B = 12.5\ \text{N/s}^2$ b) (i) 21.6 N, $2.70\ \text{m/s}^2$ (ii) 134 N, $16.8\ \text{m/s}^2$ c) $26.6\ \text{m/s}^2$
4.17 2.94×10^3 N
4.19 a) 4.49 kg b) 4.49 kg, 8.13 N
4.21 825 N, los bloques

4.23 a) la gravedad que ejerce la Tierra sobre la botella; la fuerza del aire sobre la botella b) la gravedad que ejerce la botella sobre la Tierra; la fuerza de la botella sobre el aire

4.25 7.4×10^{-23} m/s^2

4.27 b) sí

4.29 sí, en el inciso a)

4.31 b) 142 N

4.33 c) la fuerza que ejerce la tierra sobre el camión

4.35 1840 N, 135°

4.37 a) 17 N, 90° en sentido horario a partir de la dirección $+x$ b) 840 N

4.39 a) 4.8 m/s b) 16 m/s^2 c) 2360 N

4.41 b) 5.83 m/s^2

4.43 a) 2.50 m/s^2 b) 10.0 N c) a la derecha; F d) 25.0 N

4.45 a) 2.93 m/s^2 b) 11.1 m/s^2

4.47 b) 79.6 N

4.49 a) mg b) mg c) $m(g + |\vec{a}|)$ d) $m(g - |\vec{a}|)$

4.51 a) 7.80 m/s b) 50.6 m/s^2 c) 4532 N, 6.16mg

4.53 a) w b) 0 c) $w/2$

4.55 b) 1390 N

4.57 b) (i) 3.5 m/s^2 (ii) 8.0 N

4.59 $-6mBt$

Capítulo 5

5.1 a) 25.0 N b) 50.0 N

5.3 a) 990 N, 735 N b) 926 N

5.5 48°

5.7 4.10×10^3 N

5.9 a) *A:* 0.732w; *B:* 0.897w; *C:* w b) *A:* 2.73w; *B:* 3.35w; *C:* w

5.11 a) 337 N b) 343 N

5.13 a) 470 N b) 163 N

5.15 b) 1.22mg c) 0.70mg

5.17 a) 4610 m/s^2, 470g b) 9.70×10^5 N, 471w c) 18.7 ms

5.19 b) 2.96 m/s^2 c) 191 N; más que los ladrillos; menos que el contrapeso

5.21 b) 2.50 m/s^2 c) 1.37 kg d) $T = 0.745w$

5.23 a) 0.832 m/s^2 b) 17.3 s

5.25 1.38°

5.29 a) 22 N b) 3.1 m

5.31 a) 0.710, 0.472 b) 258 N c) (i) 51.8 N (ii) 4.97 m/s^2

5.33 a) 57.1 N b) 146 N, hacia arriba de la rampa

5.35 11 veces más lejos

5.37 a) $\mu_k(m_A + m_B)g$ b) $\mu_k m_A g$

5.39 3.82 m/s^2

5.41 a) 0.218 m/s b) 11.7 N

5.43 a) $\mu_k mg/(\cos\theta - \mu_k \,\text{sen}\,\theta)$ b) $1/\tan\theta = \mu_s$

5.45 b) 8.75 N c) 30.8 N d) 1.54 m/s^2

5.47 a) 0.44 kg/m b) 42 m/s

5.49 a) 3.61 m/s b) en la parte inferior c) 3.33 m/s

5.51 a) 21.0°; no b) automóvil: 1.18×10^4 N; camión: 2.36×10^4 N

5.53 el cable superior: 1410 N; el cable horizontal: 8360 N

5.55 a) 1.49 rev/min b) 0.918 rev/min

5.57 a) 138 km/h b) 3580 N

5.59 2.43 m/s

5.61 a) la cuerda que forma un ángulo de 60° b) 6400 N

5.63 a) $Mg/(2\,\text{sen}\,\theta)$ b) $Mg/(2\tan\theta)$ c) $T \to \infty$

5.65 a) $m_1(\text{sen}\,\alpha + \mu_k\cos\alpha)$ b) $m_1(\text{sen}\,\alpha - \mu_k\cos\alpha)$ c) $m_1(\text{sen}\,\alpha - \mu_s\cos\alpha) < m_2 < m_1(\text{sen}\,\alpha + \mu_s\cos\alpha)$

5.67 a) 1.44 N b) 1.80 N

5.69 a) 1.3×10^{-4} N; 62.5w b) 2.9×10^{-4} N a 1.2 ms c) 1.2 m/s

5.71 1040 N

5.73 a) 11 m/s b) 7.5 m/s

5.75 0.40

5.77 a) $g\left(\frac{m_B + m_{\text{cuerda}}d/L}{m_A + m_B + m_{\text{cuerda}}}\right)$; aumenta b) 0.63 m c) no funcionará para ningún valor de d

5.79 a) 66 N, hacia el norte b) 59 N, hacia el sur

5.81 a) 294 N, 152 N, 152 N b) 40.0 N

5.83 2.52 N

5.85 a) 12.9 kg b) 47.2 N en la cuerda de la izquierda, 101 N en la cuerda de la derecha

5.87 $a_1 = 2m_2 g/(4m_1 + m_2)$; $a_2 = m_2 g/(4m_1 + m_2)$

5.89 1.46 m por encima del piso

5.91 g/μ_s

5.93 b) 0.450

5.95 0.34

5.97 a) 170 m b) 18 m/s, 41 mi/h c) 25 m/s, 56 mi/h

5.99 a) se mueven hacia arriba b) permanece constante c) permanece constante d) se detienen

5.101 a) 6.00 m/s^2 b) 3.80 m/s^2 c) 7.36 m/s d) 8.18 m/s e) 7.78 m, 6.29 m/s, 1.38 m/s^2 f) 3.14 s

5.103 1/3

5.105 a) $v_y(t) = v_t + (v_0 - v_t)e^{-kt/m}$ b) $v_y(t) = v_t(\text{sen}\,\beta - 0.015\cos\beta)^{1/2}$

5.107 a) 0.015; 0.36 N · s^2/m^2 b) 29 m/s c) la razón es $(\text{sen}\,\beta - 0.015\cos\beta)^{1/2}$

5.109 a) 120 N b) 3.79 m/s

5.111 b) 0.28 c) no

5.113 a) a la derecha b) 120 m

5.115 a) 81.1° b) no c) la cuenta recorrerá la parte inferior del aro $(\beta = 0)$

5.119 $T_{\text{máx}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{h\tan\beta}{g}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\beta + \mu_s\cos\beta}{\cos\beta - \mu_s\,\text{sen}\,\beta}\right)}$; $T_{\text{mín}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{h\tan\beta}{g}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\beta - \mu_s\cos\beta}{\cos\beta + \mu_s\,\text{sen}\,\beta}\right)}$

5.121 $(M + m)g\tan\alpha$

5.123 a) $F = \frac{\mu_k w}{\cos\theta + \mu_k\,\text{sen}\,\theta}$ c) $\theta = \tan^{-1}(\mu_k) = 14.0°$

5.125 a) $a_3 = g\left(\frac{-4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}\right)$ b) $a_B = -a_3$ c) $a_1 = g\left(\frac{4m_1m_2 - 3m_2m_3 + m_3m_1}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}\right)$ d) $a_2 = g\left(\frac{4m_1m_2 + m_2m_3 - 3m_3m_1}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}\right)$ e) $T_A = \frac{1}{2}T_C$ f) $T_C = \frac{8gm_1m_2m_3}{4m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1}$ g) $a_1 = a_2 = a_3 = a_B = 0$, $T_C = 2m_2g$, $T_A = m_2g$; sí

5.127 $\cos^2\beta$

Capítulo 6

6.1 a) 3.60 J b) −0.900 J c) 2.07 J

6.3 a) 74 N b) 330 J c) −330 J d) cero; cero e) cero

6.5 a) −1750 J b) no

6.7 a) (i) 9.00 J (ii) −9.00 J b) (i) 0 (ii) 9.00 J (iii) −9.00 J (iv) 0 c) cero para cada bloque

6.9 a) (i) cero (ii) cero b) (i) cero (ii) −25.1 J

6.11 a) 1.0×10^{16} J b) aproximadamente 2 veces mayor

6.13 a) 42.85V b) 1836K

6.15 a) 43.2 m/s b) 101 m/s c) 5.80 m d) 3.53 m/s e) 7.35 m

6.17 $(2gh[1 + \mu_k/\tan\alpha])^{1/2}$

6.19 a) 9D b) $D/3$

6.21 32.0 N

6.23 a) 4.48 m/s b) 3.61 m/s

6.25 a) 4.96 m/s b) $a = 1.43$ m/s^2; $v = 4.96$ m/s; igual

6.27 a) $v_0^2/2\mu_k g$ b) 1/2 c) 4 d) 2

6.29 a) 48.0 N, 64.0 N b) 0.360 J, 0.640 J

6.31 a) 2.8 m/s b) 3.5 m/s

6.33 8.5 cm

6.35 a) 1.76 b) 0.67 m/s

6.37 a) 4.0 J b) cero c) −1.0 J d) 3.0 J e) −1.0 J

6.39 a) 2.83 m/s b) 2.40 m/s

6.41 a) 5.65 cm b) no; 0.57 J

6.43 3.6×10^5 J; 100 m/s

6.45 $4.0 \times 10^{13}P$

6.47 743 W, 0.995 hp

6.49 a) 1.4 b) 0.38

6.51 a) 5.4×10^9 J b) 0.72 MW

6.53 2.96×10^4 W

6.55 877 J

6.57 a) 532 J b) −315 J c) cero d) −203 J e) 14.7 J f) 1.21 m/s

6.59 a) $1/\text{sen}\,\alpha$ b) $W_{\text{entrada}} = W_{\text{salida}}$

6.61 a) 2.59×10^{12} J b) 4800 J

6.63 b) $k_{\text{ef}} = k_1 + k_2 + \cdots + k_N$

6.65 a) $k\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right)$; negativo b) $k\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$; positivo c) igual magnitud y signo opuesto, ya que el trabajo neto es cero

6.67 a) 5.11 m b) 0.304 c) 10.3 m

6.69 a) 0.15 N b) 9.4 N c) 0.44 J

6.71 a) 2.56 m/s b) 5.28 N c) 19.7 J

6.73 a) −910 J b) 3.17×10^3 J

6.75 1.0×10^5 N/m

6.77 1.1 m desde donde se libera el resorte

6.79 a) 1.02×10^4 N/m, 8.16 m

6.81 a) 0.600 m b) 1.50 m/s

6.83 0.786

6.85 1.5 m

6.87 a) 1.10×10^5 J b) 1.30×10^5 J c) 3.99 kW

6.89 3.6 h

6.91 1.30×10^3 m^3/s

6.93 a) 1.26×10^5 J b) 1.46 W

6.95 a) 2.4 MW b) 61 MW c) 6.0 MW

6.97 a) 513 W b) 355 W c) 52.1 W

6.99 a) 358 N b) 47.2 hp c) 4.06 hp d) 2.03%

6.101 a) $\frac{1}{6}Mv^2$ b) 6.1 m/s c) 3.9 m/s d) $K_{\text{proyectil}} = 0.40$ J, $K_{\text{resorte}} = 0.60$ J

6.103 a) 2.0×10^5 J b) 2.8×10^5 J c) 2.8×10^5 J d) 5 km/h

Capítulo 7

7.1 a) 6.6×10^5 J b) -7.7×10^5 J

7.3 a) 820 N b) (i) cero (ii) 740 J

7.5 a) 24.0 m/s b) 24.0 m/s c) en el inciso (b)

7.7 2.5 m/s

7.9 a) (i) cero (ii) 0.98 J b) 2.8 m/s c) constante: gravedad; no constante: normal, fricción d) 5.0 N

7.11 −5400 J

7.13 a) 880 J b) −157 J c) 471 J d) 253 J e) $a = 3.16$ m/s^2; $v = 7.11$ m/s; $\Delta K = 253$ J; igual

7.15 a) 80.0 J b) 5.00 J

7.17 a) (i) $4U_0$ (ii) $U_0/4$ b (i) $x_0\sqrt{2}$ (ii) $x_0/\sqrt{2}$

7.19 a) 6.32 cm b) 12 cm

7.21 ±0.092 m

7.23 a) 3.03 m/s; conforme la masa abandona el resorte b) 95.9 m/s^2; justo después de que la masa se libera

7.25 a) 4.46×10^5 N/m b) 0.128 m

7.27 a) −308 J b) −616 J c) no conservativa

7.29 a) −3.6 J b) −3.6 J c) −7.2 J d) no conservativa

7.31 a) $\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$ b) $-\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$; cero c) $-\frac{1}{2}k(x_3^2 - x_1^2)$; $-\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_3^2)$; $-\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$; igual

7.33 2.46 N, dirección $+x$

7.35 c) atrae

7.37 a) $F(r) = (12a/r^{13}) - (6b/r^7)$ b) $(2a/b)^{1/6}$; estable c) $b^2/4a$ d) $a = 6.68 \times 10^{-138}$ J · m^{12}, $b = 6.41 \times 10^{-78}$ J · m^6

7.39 a) cero, 637 N b) 2.99 m/s

7.41 a) no b) sí, \$150

7.43 0.41

7.45 a) 15.9 J b) 4.0 J c) 3.0 J

7.47 a) 20.0 m de la orilla izquierda de la sección horizontal b) −78.4 J

7.49 a) 22.2 m/s b) 16.4 m c) no

7.51 0.602 m

7.53 15.5 m/s

7.55 4.4 m/s
7.57 a) $x_0\sqrt{k/m}$ b) kx_0/m c) $x = 0, x = -x_0$
d) x_0 e) el sistema oscila y nunca se detiene
7.59 a) 7.00 m/s b) 2.94 N
7.61 a) $mg(1 - h/d)$ b) 440 N
c) $\sqrt{2gh(1 - y/d)}$
7.63 48.2°
7.65 a) 0.392 b) −0.832 J
7.67 a) $U(x) = (30.0\ \text{N/m})x^2 + (6.00\ \text{N/m}^2)x^3$
b) 7.85 m/s
7.69 7.01 m/s
7.71 a) $m(g + a)^2/2gh$ b) $2gh/(g + a)$
7.73 119 J
7.75 a) 3.87 m/s b) 0.10 m
7.77 a) $F_x = -m\omega_0^2 x, F_y = -m\omega_0^2 y$,
b) $\frac{1}{2}m\omega_0^2(x^2 + y^2)$ c) (i) $\frac{1}{2}m\omega_0^2(x_0^2 + y_0^2)$
(ii) $\frac{1}{2}m\omega_0^2(x_0^2 + y_0^2)$
7.79 a) 4.4×10^{12} J b) $2.7 \times 10^3\ \text{m}^3$; 0.90 mm
7.81 c) atrae
7.83 a) −50.6 J b) −67.5 J c) no conservativa
7.85 a) no b) $x_0 = F/k$ d) no e) $3F/k, -F/k$
f) $v_{\text{máx}} = 2F/\sqrt{mk}$ a $x = x_0 = F/k$
7.87 b) $v(x) = \left[\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left(\frac{x_0}{x} - \left[\frac{x_0}{x}\right]^2\right)\right]^{1/2}$
c) $x = 2x_0, v = \sqrt{\alpha/2mx_0^2}$ d) cero
e) $v(x) = \left[\frac{2\alpha}{mx_0^2}\left(\frac{x_0}{x} - \left[\frac{x_0}{x}\right]^2 - \frac{2}{9}\right)\right]^{1/2}$
f) primer caso: x_0, ∞; segundo caso: $3x_0/2$, $3x_0$

Capítulo 8

8.1 a) 1.20×10^5 kg · m/s b) i) 60.0 m/s
ii) 26.8 m/s
8.3 b) la pelota de béisbol, 0.525 c) la mujer, 0.643
8.5 a) 22.5 kg · m/s, a la izquierda b) 838 J
8.7 562 N, no
8.9 a) 10.8 m/s, a la derecha b) 0.75 m/s, a la izquierda
8.11 a) 500 N/s² b) 5810 kg · m/s c) 2.70 m/s
8.13 a) 2.50 N · s b) i) +6.25 m/s, a la derecha
b) ii) 3.75 m/s, a la derecha
8.15 a) 6.79 m/s b) 55.2 J
8.17 a) 0.790 m/s b) −0.0023 J
8.19 0.866 kg · m/s
8.21 a) 0.0559 m/s b) 0.0313 m/s
8.23 3.65×10^5 m/s
8.25 a) 7.20 m/s b) −680 J
8.27 3.56 m/s
8.29 a) 0.846 m/s b) 2.10 J
8.31 a) 1.4×10^{-6} km/h, que no es apreciable.
b) 6.7×10^{-8} km/h, que no es apreciable.
8.33 5.9 m/s a 32° al este del norte
8.35 a) Ambos vehículos tienen el mismo cambio en momento lineal, pero el vehículo de menor tamaño tiene mayor cambio de velocidad.
b) 2.5 Δv c) Los ocupantes del vehículo más pequeño
8.37 19.5 m/s (auto), 21.9 m/s (camión)
8.39 a) 2.93 cm b) 866 J c) 1.73 J
8.41 a) 0.333 m/s, 3.33 J b) −1.33 m/s (A), +0.67 m/s (B)
8.43 a) −0.100 m/s (A), 0.500 m/s (B)
b) 0.009 kg · m/s para ambas
c) -4.5×10^{-4} J (A), 4.5×10^{-4} J (B), magnitudes iguales porque el choque es elástico
8.45 a) 1/3 b) 1/9 c) 10
8.47 $x_{cm} = 0.044$ m, $y_{cm} = 0.056$ m
8.49 2520 km desde el centro de Plutón
8.51 0.700 m hacia arriba y 0.700 a la derecha
8.53 0.47 m/s
8.55 $F_x = (-1.50\ \text{N/s})t, F_y = 0.25\ \text{N}, F_z = 0$
8.57 a) 53 g b) 5.22 N
8.59 2.4 km/s
8.61 45.1
8.63 a) 0.47 N · s b) 237 N
8.65 a) $J_x = -1.14$ N · s, $J_y = 0.33$ N · s
b) $v_{2x} = 0.0500$ m/s, $v_{2y} = 1.78$ m/s
8.67 2.67 m/s (convertible), 3.46 m/s (SUV)
8.69 a) $v_{Cx} = 1.75$ m/s, $v_{Cy} = 0.26$ m/s
b) −0.092 J
8.71 15.0 m/s
8.73 36.4 N
8.75 a) 2.60 m/s b) 325 m/s
8.77 a) 5.28 m/s b) 5.7 m
8.79 68.8°
8.81 102 N
8.83 a) 0.222 b) −291 J c) 0.784 J
8.85 b) $M = m$ c) cero
8.87 a) 9.35 m/s b) 3.29 m/s
8.89 b) $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$
8.91 a) 3.56 m/s b) 5.22 m/s c) 4.67 m/s
8.93 0.0544%
8.95 1.61×10^{-22} kg · m/s, a la izquierda
8.97 A: 13.6 m/s; B: 6.34 m/s, 65.0°
8.99 a) $(L/2)\cos(\alpha/2)$, a lo largo del eje a partir de la cúspide
b) $(L/3)$, a lo largo de la bisectriz a partir del lado inferior
c) $L/\sqrt{8}$ a lo largo de la bisectriz
d) $L/\sqrt{12}$ desde cada lado
8.101 0.400 m/s
8.103 a) 1.40 kg: 14.3 m/s; 0.28 kg: 71.6 m/s
b) 347 m
8.105 222 m/s, 1.01×10^3 m/s; $v_{\text{Kr}} = 1.5v_{\text{Ba}}$
8.107 a) cero b) 1 d) 0.87 m f) 0.089 m
8.109 a) sí b) no; la energía cinética disminuye en 4.8×10^3 J
8.111 a) $1.37v_{\text{ex}}$ b) $1.18v_{\text{ex}}$ c) $2.38v_{\text{ex}}$
d) 2.94 km/s
8.113 b) $2L/3$
8.115 a) $l^2\lambda g/32$ b) $l^2 1g/32$

Capítulo 9

9.1 a) 34.4° b) 6.27 cm c) 1.05 m
9.3 a) A: rad/s; B: rad/s³ b) (i) 0
(ii) 15.0 rad/s² c) 9.50 rad
9.5 a) $\omega_z(t) = (0.400\ \text{rad/s}) + (0.0360\ \text{rad/s}^3)t^2$
b) 0.400 rad/s c) $\omega_z = 1.30$ rad/s;
$\omega_{\text{med}-z} = 0.700$ rad/s
9.7 a) $a = \pi/4$ rad, $b = 2.00$ rad/s,
$c = -0.139$ rad/s³ b) cero
c) 19.5 rad; 9.35 rad/s
9.9 a) 2.25 rad/s b) 4.69 rad
9.11 a) 24.0 s b) 68.8 rev
9.13 10.5 rad/s
9.15 a) 300 rpm b) 75.0 s; 312 rev
9.17 9.00 rev
9.19 a) 540 rad b) 12.3 s c) −8.17 rad/s²
9.21 a) 1.99×10^{-7} rad/s b) 7.27×10^{-5} rad/s
c) 2.99×10^4 m/s d) 464 m/s
e) 0.0337 m/s²; cero
9.23 a) 15.1 m/s² b) 15.1 m/s²
9.25 a) 0.180 m/s²; 0; 0.180 m/s² b) 0.180 m/s²; 0.377 m/s²; 0.418 m/s² c) 0.180 m/s²; 0.754 m/s²; 0.775 m/s²
9.27 10.7 cm; no
9.29 a) 0.831 m/s b) 109 m/s²
9.31 a) 2.29 b) 1.51 c) 15.7 m/s, 108g
9.33 2.99 cm
9.35 a) (i) 0.469 kg · m² (ii) 0.117 kg · m²
(iii) cero b) (i) 0.0433 kg · m²
(ii) 0.0722 kg · m² c) (i) 0.0288 kg · m²
(ii) 0.0144 kg · m²
9.37 a) 0.0640 kg · m² b) 0.0320 kg · m²
c) 0.0320 kg · m²
9.39 0.193 kg · m²
9.41 8.52 kg · m²
9.43 a) 3.15×10^{23} J b) 158 y; no
9.45 0.600 kg · m²
9.47 7.35×10^4 J
9.49 a) 67.3 cm b) 45.5%
9.51 a) f^5 b) 6.37×10^8 J
9.53 −88.2 J
9.55 sobre un eje paralelo al diámetro y $(2/\sqrt{15})R$ desde el centro de la esfera
9.57 $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$
9.59 a) $ML^2/12$ b) $ML^2/12$
9.61 $MR^2/2$
9.63 a) $\gamma L^2/2$ b) $ML^2/2$; más grande c) $ML^2/6$; un tercio del resultado en b)
9.65 en 128 d
9.67 a) 0.600 m/s³ b) $\alpha = (2.40\ \text{rad/s}^3)t$
c) 3.54 s d) 17.7 rad
9.69 a) 0.050 rad/s² b) 0.300 rad/s
c) 5.40 m/s² e) 6.18 m/s²; 7.66×10^3 N
f) 60.9°
9.71 a) 1.70 m/s b) 84.8 rad/s
9.73 b) 2.00 m/s² d) 0.208 kg · m²
9.77 a) 7.36 m b) 327 m/s²
9.79 a) 2.14×10^{29} J b) 2.66×10^{33} J
9.81 a) $Mb^2/6$ b) 182 J
9.83 a) −0.784 J b) 5.42 rad/s c) 5.42 m/s
d) rapidez de la partícula = 4.43 m/s
9.85 $\sqrt{(2gd)(m_B - \mu_k m_A)/(m_A + m_B + I/R^2)}$
9.87 $\sqrt{(g/R)(1 - \cos\beta)}$
9.89 a) 2.25×10^{-3} kg · m² b) 3.40 m/s c) 4.95 m/s
9.91 7.23 m
9.93 a) $(247/512)MR^2$ b) $(383/512)MR^2$
9.95 b) $\frac{1}{4}M(R_1^2 + R_2^2)$
9.97 a) $\frac{3}{5}MR^2$ b) más grande
9.99 b) 5.97×10^{24} kg c) $0.334MR^2$
9.101 a) $s = r_0\theta + \beta\theta^2/2$
b) $\theta = (1/\beta)[\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt} - r_0]$
c) $\omega_z = \frac{v}{\sqrt{r_0^2 + 2\beta vt}}, \alpha_z = \frac{\beta v^2}{(r_0^2 + 2\beta vt)^{3/2}}$;
no d) $r_0 = 2.50$ cm, $\beta = 0.247\ \mu$m/rad;
2.13×10^4 rev

Capítulo 10

10.1 a) 40.0 N · m, hacia fuera de la página
b) 34.6 N, hacia fuera de la página
c) 20.0 N · m, hacia fuera de la página
d) 17.3 N · m, hacia dentro de la página
e) cero f) cero
10.3 2.50 N · m, en sentido antihorario
10.5 b) hacia la página c) $(-1.05\ \text{N} \cdot \text{m})\hat{\boldsymbol{k}}$
10.7 13.1 N · m
10.9 a) 14.8 rad/s² b) 1.52 s
10.11 7.47 N
10.13 0.482
10.15 a) 7.5 N en la parte horizontal, 18.2 N en la parte colgante b) 0.0160 kg · m²
10.17 a) 2.65 rad/s² b) no c) 3.31 m/s²; no
10.19 a) 1.80 m/s b) 7.13 J c) (i) 3.60 m/s, a la derecha (ii) 0 (iii) 2.55 m/s, 45° debajo de la horizontal d) (i) 1.80 m/s, a la derecha (ii) 1.80 m/s, a la izquierda
(iii) 1.80 m/s, hacia abajo
10.21 a) 1/3 b) 2/7 c) 2/5 d) 5/13
10.23 a) 0.613 b) no, requiere $\mu_s = 0.858$
c) porque no hay deslizamiento
10.25 11.7 m
10.27 a) 0.309 rad/s b) 100 J c) 6.67 W
10.29 a) 0.38 N · m b) 160 rad c) 59 J d) 59 J
10.31 b) 65.6 N
10.33 a) 358 N · m b) 1.79×10^3 N c) 83.8 m/s
10.35 a) 115 kg · m²/s, hacia la página
b) 125 kg · m²/s², hacia fuera de la página
10.37 4.71×10^{-6} kg · m²/s
10.39 4.6×10^3 rad/s
10.41 1.14 rev/s
10.43 a) 0.60 rev
10.45 a) 0.120 rad/s b) 3.20×10^{-4} J; c) trabajo realizado por el insecto
10.47 a) 5.88 rad/s
10.49 a) 1.62 N b) 1.80×10^3 rev/min
10.51 a) se reduce a la mitad b) se duplica
c) se reduce a la mitad d) se duplica
e) permanece sin cambio
10.53 a) 67.6 N b) 62.9 N c) 3.27 s
10.55 a) 840 rpm b) 75 mph c) 60 mph
10.57 a) 16.3 rad/s² b) no; disminuye
c) 5.70 rad/s
10.59 a) en $x = l$ b) en $x = l$ c) en $x = (l/2)(1 + [2h/l]^2)$ para $l > 2h$; en $x = l$ para $l < 2h$

10.61 a) FR b) FR; sí c) $\sqrt{4F/MR}$ d) $2F/M$ e) $4F/M$

10.63 a) 266 N b) 4.71 rad/s^2

10.65 a) 2.88 m/s^2 b) 6.13 m/s^2; mayor que en el caso b)

10.67 239 N

10.69 $a = \dfrac{2g}{2 + (R/b)^2}$; $\alpha = \dfrac{2g}{2b + R^2/b}$; $T = \dfrac{2mg}{2(b/R)^2 + 1}$

10.71 en sentido horario; en sentido horario; en sentido horario

10.73 a) 1.41 s; 70.5 m/s b) t mayor, v menor

10.75 29.0 m/s

10.77 a) 26.0 m/s b) sin cambio

10.79 a) $\sqrt{20hy/7}$ b) no c) fricción de rodamiento d) $\sqrt{8hy/3}$

10.81 b) R = radio de la rueda, T = periodo de rotación de la rueda c) $v_x = \dfrac{2\pi R}{T}\left[1 - \cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)\right]$, $v_y = \dfrac{2\pi R}{T}\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$; $a_x = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R\,\text{sen}\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$, $a_y = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$ d) $t = 0, T, 2T, \ldots$; $a_x = 0$, $a_y = \dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$ e) $\dfrac{4\pi^2 R}{T^2}$, independiente del tiempo

10.83 $g/3$

10.85 1.87 m

10.87 a) $6v/19L$ b) $3/19$

10.89 a) 5.46 rad/s b) 3.17 cm c) 1.01×10^3 m/s

10.91 a) 2.00 rad/s b) 6.57 rad/s

10.93 0.30 rad/s, en sentido horario

10.97 -4.2×10^{-16} rad/s por año; decreciente

10.101 a) $a = +\mu_k g$, $\alpha = -2\mu_k g/R$ b) $\omega_0^2 R^2/18\mu_k g$ c) $-M\omega_0^2 R^2/6$

10.103 a) $mv_1^2 r_1^2/r^3$ b) $(mv_1^2/2)[(r_1/r_2)^2 - 1]$ c) igual

Capítulo 11

11.1 29.8 cm

11.3 20.0 kg

11.5 5450 N

11.7 a) 1000 N, 1.20 m desde el extremo donde se aplica la fuerza de 400 N b) 800 N, 1.25 m desde el extremo donde se aplica la fuerza de 400 N

11.9 a) 550 N b) 0.614 m desde A

11.11 a) 1920 N b) 1140 N

11.13 a) $T = 2.60w$; $F_{\text{pivote}} = 3.28w$ a 37.6° b) $T = 4.10w$; $F_{\text{pivote}} = 5.38w$ a 48.8°

11.15 140 N para cada bisagra

11.17 246 N; 0.34 m detrás de las extremidades delanteras

11.19 $T_{\text{izquierda}} = 270$ N, $T_{\text{derecha}} = 304$ N, $\theta = 40°$

11.21 a) 0.800 m b) en sentido horario c) 0.800 m, en sentido horario

11.23 1.4 mm

11.25 2.00×10^{11} Pa

11.27 a) superior: 3.1×10^{-3}; inferior: 2.0×10^{-3} b) superior: 1.6 mm; inferior: 0.98 mm

11.29 9.1×10^6 N

11.31 a) 3.33×10^6 Pa b) 1.33×10^5 Pa

11.33 a) 4.8×10^9 Pa; 2.1×10^{-10} Pa^{-1}

11.35 b) 6.60×10^5 N c) 1.8 mm

11.37 3.41×10^7 Pa

11.39 10.2 m/s^2

11.41 a) 525 N b) 222 N, 328 N c) 1.48

11.43 fuerza del ala: 7300 N hacia arriba; fuerza de la cola: 600 N hacia abajo

11.45 a) 140 N b) 6 cm a la derecha

11.47 a) 424 N b) 170 N

11.49 120 N a la derecha, 160 N hacia arriba

11.53 b) $(Mg/2)\,\text{sen}\,\theta$

11.55 a) $V = mg + w$, $H = T = (w + mg/4)\cot\theta$ b) 950 N c) 4.00°

11.57 7600 N

11.59 a) 2700 N b) 19

11.61 a) 4.90 m b) 60 N

11.63 a) $\theta = \arctan(h/d)$; $T = Wd/2\sqrt{h^2 + d^2}$ b) $\dfrac{Whd}{2(h^2 + d^2)}$; $W\dfrac{2h^2 + d^2}{2(h^2 + d^2)}$

11.65 a) 1150 N b) 1940 N c) 918 N d) 0.473

11.67 la persona arriba: 590 N; la persona abajo: 1370 N; arriba

11.69 a) $w_{\text{máx}} = T_{\text{máx}} hD/(L\sqrt{h^2 + D^2})$

11.71 a) 7140 N; de paredes altas b) 7900 N

11.73 a) 268 N b) 232 N c) 366 N

11.75 a) A: 0.424 N; B: 1.47 N; C 0.424 N b) 0.848 N

11.77 a) se vuelca a 27°, se desliza a 31°; la paca se vuelca antes de deslizarse b) se vuelca a 27°, se desliza a 22°, la paca se desliza antes de volcarse

11.79 a) $F_A = 80$ N, $F_B = 870$ N b) 1.92 m

11.81 a) 3.7 kN, 2.0 kN verticalmente hacia arriba

11.83 a) $0.012w$ b) menor c) 25.0°; se inclina

11.85 a) 5.4 mm b) 4.2 mm

11.87 a) 0.70 m del alambre A b) 0.45 m del alambre B

11.89 a) 1.63 m b) latón: 2.00×10^8 Pa; níquel: 4.00×10^8 Pa c) latón: 2.2×10^{-3}; níquel: 1.9×10^{-3}

11.91 a) 0.36 mm b) 0.045 mm c) 0.33 mm

11.93 a) $(F\cos^2\theta)/A$ b) $(F\,\text{sen}\,2\theta)/2A$ c) 0 d) 45°

11.95 a) 600 N b) 13.5 kN c) deslizarse: $\mu_s w/(\text{sen}\,\theta - \mu_s\cos\theta)$; volcarse: $w/[(\frac{1}{9})\cos\theta + 2\,\text{sen}\,\theta]$; 66°

11.97 en la menor de $h^2/L + L/2$ y L

11.99 $[(A^2x/F) - k_O V_O]/V_S$

11.101 a) 0.662 mm b) 2.20×10^{-2} J c) 8.33×10^{-3} J d) -3.04×10^{-2} J e) 3.04×10^{-2} J

Capítulo 12

12.1 2.18

12.3 0.026 mm

12.5 a) 2.59×10^8 m b) no

12.7 a) 2.40×10^{-3} N b) 3.6×10^{-6}

12.9 a) 6.30×10^{20} N, hacia el Sol b) 4.77×10^{20} N, 24.6° hacia la Tierra desde el Sol c) 2.37×10^{20} N, hacia el Sol

12.11 a) 0.366 m de la masa m b) (i) inestable (ii) estable

12.13 2.1×10^{-9} m/s^2, hacia abajo

12.15 1.38×10^7 m

12.17 a) 0.37 m/s^2 b) 1700 kg/m^3

12.19 610 N; 83% de peso en la superficie

12.21 5.98×10^{24} kg

12.23 0.83 m/s; sí

12.25 a) 5.02×10^3 m/s b) 6.06×10^4 m/s

12.27 a) 7.46×10^3 m/s b) 1.68 h

12.29 2.01×10^{30} kg

12.31 a) 4.7 m/s; sí b) 2.2 h

12.33 a) 8.3×10^4 m/s b) 1.3×10^6 s

12.35 b) 4.45×10^{12} m, 4.55×10^{12} m c) 248 y

12.39 a) (i) 5.31×10^{-9} N (ii) 2.67×10^{-9} N

12.41 a) $-GMm/\sqrt{a^2 + x^2}$ c) $GMmx/(a^2 + x^2)^{3/2}$ hacia el centro del anillo e) $-GMm/a$, cero

12.43 a) 53 N b) 52 N

12.45 1.39×10^{-9}

12.47 a) 4.3×10^{37} kg, $2.1 \times 10^7 M_{\text{Sol}}$ b) no c) 6.3×10^{10} m; sí

12.49 a) 9.67×10^{-12} N, a medio camino entre los ejes x y y b) 3.02×10^{-5} m/s

12.51 b) 5.39×10^{-13} N · m, en sentido horario

12.53 b) (i) 1.63×10^{-5} m/s, 4.08×10^{-6} m/s (ii) 2.04×10^{-5} m/s c) 31.9 m

12.55 a) 3.58×10^7 m

12.57 1.8×10^2 m/s

12.59 a) 1.39×10^7 m b) 3.59×10^7 m

12.61 $0.01R_E = 64$ km

12.63 0.28%

12.65 6.06×10^3 km/h

12.67 $\sqrt{2Gm_E h/(R_E^2 + hR_E)}$

12.69 a) 13.7 km/s b) 13.3 km/s c) 13.2 km/s

12.71 a) (i) 2.8 y (ii) 6.1 y b) 4.90×10^8 km c) 4.22×10^8 km

12.73 a) $GM^2/4R^2$ b) $\sqrt{GM/4R}$, $4\pi\sqrt{R^3/GM}$ c) $GM^2/4R$

12.75 6.8×10^4 m/s

12.77 a) 7.91×10^3 s b) 1.53 c) 8.43×10^3 m/s, 5.51×10^3 m/s d) 2.41×10^3 m/s, 3.26×10^3; perigeo

12.79 3.22×10^9 J

12.81 9.36 m/s^2

12.83 $\dfrac{GmMx}{x(x + L)}$

12.85 a) $U(r) = \dfrac{Gm_E m}{2R_E^3}r^2$ b) 7.90×10^3 m/s

12.87 a) en contra de la dirección del movimiento en todos los casos b) 2.24×10^7 s c) 44.1°

12.89 $F = \dfrac{2GMm}{a^2}\left[1 - \dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right]$, hacia el centro del disco

Capítulo 13

13.1 a) 4.54×10^{-3} s, 1.38×10^3 rad/s b) 2.27×10^{-3} s, 2.76×10^3 rad/s

13.3 5.53×10^3 rad/s, 1.14×10^{-3} s

13.5 0.0500 s

13.7 a) 0.167 s b) 37.7 rad/s c) 8.44×10^{-2} kg

13.9 a) 0.375 s b) 2.66 Hz c) 16.7 rad/s

13.11 a) 0.98 m b) $\pi/2$ rad c) $x(t) = (-0.98\text{ m})\,\text{sen}([12.2\text{ rad/s}]t)$

13.13 a) -2.71 m/s^2 b) $x(t) = (1.46\text{ cm})\cos([15.7\text{ rad/s}]t + 0.715\text{ rad})$, $v_x(t) = (-22.9\text{ cm/s})\,\text{sen}([15.7\text{ rad/s}]t + 0.715\text{ rad})$, $a_x(t) = (-359\text{ cm/s}^2)\cos([15.7\text{ rad/s}]t + 0.715\text{ rad})$

13.15 120 kg

13.17 a) 0.253 kg b) 1.22 cm c) 3.05 N

13.19 a) 1.51 s b) 26.0 N/m c) 0.308 m/s d) 1.92 N e) -0.0125 m; 0.303 m/s; 0.216 m/s^2

13.21 a) 1.48 m/s b) 2.96×10^{-5} J

13.23 a) 1.20 m/s b) 1.11 m/s c) 36 m/s^2 d) 13.5 m/s^2 e) 0.36 J

13.25 $m = 3M$; $\frac{3}{4}$

13.27 0.240 m

13.29 a) 0.0778 m b) 1.28 Hz c) 0.624 m/s

13.31 a) 4.06 cm b) 1.21 m/s c) 29.8 rad/s

13.33 b) 23.9 cm; 1.45 Hz

13.35 a) 2.7×10^{-8} kg · m^2 b) 4.3×10^{-6} N · m/rad

13.37 5.12×10^{-2} kg · m^2

13.41 a) 0.25 s b) 0.25 s

13.43 0.407 oscilaciones/s

13.45 2.00 m

13.47 10.7 m/s^2

13.49 0.129 kg · m^2

13.53 A: $2\pi\sqrt{L/g}$; B: $(4\pi\sqrt{2}/3)\sqrt{L/g} = 0.943T_A$; péndulo A

13.55 A: $2\pi\sqrt{L/g}$; B: $2\pi\sqrt{\dfrac{11L}{10g}} = 1.05T_A$; péndulo B

13.57 a) 0.393 Hz b) 1.73 kg/s

13.59 a) A b) magnitud $= bA/2m$, en dirección $-x$; pendiente negativa c) $a_x(0) = A\left(\dfrac{b^2}{2m^2} - \dfrac{k}{m}\right)$; si $b < \sqrt{2mk}$, $a(0) < 0$; si $b = \sqrt{2mk}$, $a(0) = 0$; si $b > \sqrt{2mk}$, $a(0) > 0$

13.61 a) kg/s b) (i) $5.0F_{\text{máx}}/k$ (ii) $2.5F_{\text{máx}}/k$

13.63 a) 6.72×10^3 m/s^2 b) 3.02 kN c) 18.3 m/s, 75.6 J d) 17.6 kW e) 12.1 kN, 36.7 m/s, 302 J, 141 kW
13.65 a) todos sin cambio b) se reduce a $1/4$ c) se reduce a la mitad d) $1/\sqrt{5}$ del valor e) U: sin cambio; K: $1/5$ de su valor
13.67 a) 24.4 cm b) 0.220 s c) 1.19 m/s
13.69 a) 0.318 Hz, 0.500 m, 3.14 s b) 1.57 s
13.71 $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5}}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0.921\left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$
13.73 a) 1.49 s b) -2.12×10^{-4} s por s; más corto c) 0.795 s
13.75 a) 0.150 m/s b) 0.112 m/s^2, hacia abajo c) 0.700 s d) 4.38 m
13.77 a) 2.6 m/s b) 0.21 m c) 0.49 s
13.79 9.08×10^{24} kg
13.81 1.17 s
13.83 a) sí c) 2.40×10^3 s d) no
13.87 c) -7.57×10^{-19} J e) 8.39×10^{12} Hz
13.89 0.705 Hz; 14.5°
13.91 $2\pi\sqrt{M/3k}$
13.93 $\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{3g}{\sqrt{2}L}}$
13.95 c) 0.430 m
13.97 a) $k_{ef} = k_1 + k_2$ b) $k_{ef} = k_1 + k_2$ c) $k_{ef} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ d) $\sqrt{2}$
13.99 a) $Mv^2/6$ c) $\omega = \sqrt{3k/M}$; $M' = M/3$
13.101 579 N/m

Capítulo 14

14.1 $w = 41.8$ N; no
14.3 7.02×10^3 kg/m^3; sí
14.5 1.6
14.7 61.7 N
14.9 a) 1.86×10^6 Pa b) 184 m
14.11 0.581
14.13 a) absoluta: 46.7 lb/in^2 = 3.22×10^5 Pa = 3.18 atm; manométrica: 32.0 *lb/in*^{2} = 2.21×10^5 Pa = 2.18 atm b) no c) 432 cm^2
14.15 6.27×10^6 Pa = 61.9 atm
14.17 6.0×10^4 Pa
14.19 1.41×10^5 Pa; 4.03×10^4 Pa
14.21 2.3×10^5 N
14.23 a) 637 Pa b) (i) 1170 Pa (ii) 1170 Pa
14.25 1.66×10^5 Pa = 1.64 atm
14.27 6.43×10^{-4} m^3, 2.78×10^3 kg/m^3
14.29 a) $\rho < \rho_{fluido}$ c) sumergida: ρ/ρ_{fluido}; arriba: $(\rho_{fluido} - \rho)/\rho_{fluido}$ d) 32%
14.31 a) 116 Pa b) 921 Pa c) 0.822 kg, 822 kg/m^3
14.33 1.91×10^3 kg/m^3
14.35 9.6 m/s
14.37 a) 17.0 m/s b) 0.317 m
14.39 28.4 m/s
14.41 1.47×10^5 Pa
14.43 12,600 N
14.45 2.03×10^4 Pa
14.47 a) $(p_0 - p)\pi D^2/4$ b) 776 N
14.49 a) 5.9×10^5 N b) 1.76×10^5 N
14.51 c) independiente del área de la superficie
14.53 $(p - p_0)VR^2/Gmd$
14.55 a) 12,700 kg/m^3, 3140 kg/m^3
14.57 a) 1470 Pa b) 13.9 cm
14.59 9.8×10^6 kg; sí
14.61 a) 30% b) 70%
14.63 4.66×10^{-4} m^3; 5.27 kg
14.65 a) 1.10×10^4 m^3 b) 112 kN
14.67 a) 0.107 m b) 2.42 s
14.69 a) $H/2$ b) H
14.71 0.0958 kg
14.73 33.5 N
14.75 b) 12.2 N c) 11.8 N
14.77 b) 2.52×10^{-4} m^3, 0.124
14.79 más arriba por 5.57×10^{-4} m
14.81 a) $1 - \rho_B/\rho_L$ b) $(\rho_L - \rho_B)L/(\rho_L - \rho_W)$ c) 4.60 cm
14.83 a) la/g b) $\omega^2 l^2/2g$
14.87 a) $2\sqrt{h(H-h)}$ b) h
14.89 a) 0.200 m^3/s b) 6.97×10^4 Pa
14.91 $3h_1$
14.93 a) $r = r_0(1 + 2gy/v_0^2)^{-1/4}$ b) 1.10 m
14.95 a) 80.4 N
14.97 a) $\sqrt{2gh}$ b) $(p_a/\rho g) - h$

Capítulo 15

15.1 a) 0.439 m; 1.28 ms b) 0.219 m
15.3 220 m/s = 800 km/h
15.5 a) 4.3×10^{14} Hz a 7.5×10^{14} Hz; 1.3×10^{-15} s a 2.3×10^{-15} s b) no
15.7 a) $f = 25.0$ Hz, $T = 0.0400$ s, $k = 19.6$ rad/m b) $y(x, t) = (0.0700 \text{ m})\cos 2\pi\left(\frac{x}{0.320 \text{ m}} + \frac{t}{0.0400 \text{ s}}\right)$† c) +0.0495 m d) 0.0050 s
15.9 c) dirección $-x$ para ambos d) $v_y(x, t) = \omega A\cos(kx + \omega t)$, $a_y(x, t) = -\omega^2 A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$
15.11 a) 4.0 mm b) 0.040 s c) 0.14 m, 3.6 m/s d) 0.24 m, 6.0 m/s e) no
15.13 b) dirección $+x$
15.15 a) 16.3 m/s b) 0.136 m c) ambas se incrementan en un factor de $\sqrt{2}$
15.17 a) 0.390 s
15.19 a) 10.0 m/s b) 0.250 m c) $y(x, t) = (3.00 \text{ cm})\cos[(8.00\pi \text{ rad/m})x - (80.0\pi \text{ rad/s})t]$ d) 1890 m/s^2 e) sí
15.21 a) 95 km b) 2.5×10^{-7} W/m^2 c) 1.1×10^5 W
15.23 a) 0.050 W/m^2 b) 2.2×10^4 J
15.25 707 W
15.33 a) (1.33 m)*n*, *n* 5 0, 1, 2, 3, . . . b) $(1.33 \text{ m})(n + \frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
15.39 a) 96.0 m/s b) 461 N c) 1.13 m/s, 426 m/s^2
15.41 b) 2.80 cm c) 277 cm d) 185 cm, 0.126 s, 1470 cm/s e) 280 cm/s f) $y(x, t) = (5.60 \text{ cm})\operatorname{sen}[(0.0907 \text{ rad/cm})x] \operatorname{sen}([133 \text{ rad/s}]t)$
15.43 a) $y(x,t) = (4.60 \text{ mm})\operatorname{sen}[(6.98 \text{ rad/m})x] \operatorname{sen}([742 \text{ rad/s}]t)$ b) 3rd c) 39.4 Hz
15.45 a) 45.0 cm b) no
15.47 a) 311 m/s b) 246 Hz c) 245 Hz, 1.40 m
15.49 a) 20.0 Hz, 126 rad/s, 3.49 rad/m b) $y(x,t) = (2.50 \text{ mm})\cos[(3.49 \text{ rad/m})x - (126 \text{ rad/s})t]$ c) $y(t) = (2.50 \text{ mm})\cos[(126 \text{ rad/s})t]$ d) $y(t) = (2.50 \text{ mm})\cos[3\pi/2 - (126 \text{ rad/s})t]$ e) 0.314 m/s f) -2.50 mm, 0
15.51 a) $(7L/2)\sqrt{\mu_1/F}$ b) no
15.53 a) $(2\pi A/\lambda)\sqrt{FL/M}$ b) aumentar en un factor de 4
15.55 a) $4\pi^2 F\Delta x/\lambda^2$
15.57 a) 1, 0; 2, +; 3, −; 4, 0; 5, −; 6, + b) 1, −; 2, +; 3, −; 4, +; 5, −; 6, 0 c) (a): se invierte el signo de las respuestas; (b): sin cambio
15.61 c) C/B
15.63 b) k disminuye en un factor de $2\sqrt{2}$; ω disminuye en un factor de $\sqrt{2}$
15.65 a) 7.07 cm b) 400.0 W
15.67 $\alpha = (v_1^2 - v_2^2)\rho/Y\Delta T$
15.69 $n(0.800 \text{ Hz})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
15.71 b) sí
15.73 c) $2A$, $2A\omega$, $2A\omega^2$
15.75 230 N
15.77 a) 0, L b) 0, $L/2$, L d) no
15.79 a) 148 N b) 26%
15.81 b) $\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$ e) $\frac{1}{2}Fk^2A^2\operatorname{sen}^2(kx - \omega t)$
15.83 $\pi/\omega\sqrt{2}$
15.85 a) 99.4 N c) -4.25 Hz, disminuye

Capítulo 16

16.1 a) 0.344 m b) 1.2×10^{-5} m c) 6.9 m, 50 Hz
16.3 a) 7.78 Pa b) 77.8 Pa c) 778 Pa
16.5 a) 1.33×10^{10} Pa b) 9.47×10^{10} Pa
16.7 90.8 m
16.9 81.5°C
16.11 0.208 s
16.13 $Y/900$
16.15 a) 9.44×10^{-11} m; 0.434 m b) 5.66×10^{-9} m; 0.101 m c) aire; $A_{aire}/A_{agua} = 60.0$
16.17 a) 1.94 Pa b) 4.58×10^{-3} W/m^2 c) 96.6 dB
16.19 a) 4.4×10^{-12} W/m^2 b) 6.39 dB c) 5.8×10^{-11} m
16.21 14.0 dB
16.23 a) 20.0
16.25 a) *fundamental:* nodo de desplazamiento en 0.60 m, nodos de presión en 0 y 1.20 m; *primer sobretono:* nodos de desplazamiento en 0.30 m y 0.90 m, nodos de presión en 0, 0.60 m y 1.20 m; *segundo sobretono:* nodos de desplazamiento en 0.20 m, 0.60 m y 1.00 m, nodos de presión en 0, 0.40 m, 0.80 m y 1.20 m b) *fundamental:* nodo de desplazamiento en 0, nodo de presión en 1.20 m; *primer sobretono:* nodos de desplazamiento en 0 y 0.80 m, nodos de presión en 0.40 m y 1.20 m; *segundo sobretono:* nodos de desplazamiento en 0, 0.48 m y 0.96 m, nodos de presión en 0.24 m, 0.72 m, 1.20 m
16.27 506 Hz, 1520 Hz, 2530 Hz
16.29 a) 267 Hz b) no
16.31 a) 614 Hz b) 1.23 kHz
16.33 a) 172 Hz b) 86 Hz
16.35 0.125 m
16.37 destructiva
16.39 1.3 Hz
16.41 780 m/s
16.43 a) 375 Hz b) 371 Hz c) 4 Hz
16.45 a) 0.25 m/s b) 0.91 m
16.47 19.8 m/s
16.49 26.8 Hz
16.51 $0.095c$; hacia nosotros
16.53 a) 36.0° b) 2.23 s
16.55 a) 1.00 b) 8.00 c) 47.3 nm
16.57 b) $3f_0$ c) $v = 4Lf_0$
16.59 armónico de la flauta $3N(N = 1, 3, \ldots)$ resuena con el armónico de la cuerda $4N$
16.61 a) cerrado b) $n = 7$, $n = 9$ c) 43.9 cm
16.63 a) $v/(2L)$, v/L, $3v/(2L)$
16.65 a) 375 m/s b) 1.39 c) 0.8 cm
16.67 a) $n(77.3 \text{ Hz})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
16.69 1.27
16.71 a) 548 Hz b) 652 Hz
16.73 a) $I = 2\pi^2\sqrt{\rho B}f^2(\Delta R)^2$ b) $P = 8\pi^3\sqrt{\rho B}f^2R^2(\Delta R)^2$ c) $A = (R/d)\Delta R$, $p_{máx} = 2\pi\sqrt{\rho B}(Rf/d)\Delta R$, $I = 2\pi^2\sqrt{\rho B}(fR/d)^2(\Delta R)^2$
16.75 a) 6.74 cm b) 147 Hz
16.77 b) 2.0 m/s
16.79 a) 1.2×10^6 m/s b) 3.6×10^{16} m = 3.8 ly c) 5.2×10^3 ly; 4100 BCE
16.81 a) $f_0\left(\frac{2v_W}{v - v_W}\right)$ b) $f_0\left(\frac{2v_W}{v + v_W}\right)$
16.83 d) 9.69 cm/s; 6.67×10^2 m/s^2

Capítulo 17

17.1 −81.0°F b) 134.1°F c) 88.0°F
17.3 38 F°
17.5 a) −18.0 F° b) −10.0 C°
17.7 a) 104.4°F; sí b) 54°F
17.9 a) 216.5 K b) 325.9 K c) 205.4 K
17.11 a) −210 °C b) 63 K
17.13 0.964 atm
17.15 a) −282 °C b) no, 4.76×10^4 Pa
17.17 0.39 m
17.19 1.9014 cm; 1.8964 cm
17.21 2.3×10^{-5} (C°)$^{-1}$
17.23 11 L

17.25 $1.7 \times 10^{-5}\ (\text{C}°)^{-1}$
17.27 a) 1.431 cm^2 b) 1.437 cm^2
17.29 0.261 mm
17.31 a) $3.2 \times 10^{-5}\ (\text{C}°)^{-1}$ b) 2.5×10^9 Pa
17.33 5.79×10^5 J
17.35 240 J/kg · K
17.37 1.4×10^3 s
17.39 a) 1.21×10^{-2} C°
17.41 45.1 C°
17.43 a) 114 C° b) 6.35 C°
17.45 a) 215 J/kg · K b) agua c) demasiado pequeño
17.47 8 min
17.49 3.64×10^4 J = 8.69×10^3 cal = 34.5 Btu
17.51 2.39×10^4 Btu/h = 7.01×10^3 W
17.53 357 m/s
17.55 3.45 L
17.57 5.50×10^5 J
17.59 0.0940 kg
17.61 2.10 kg
17.63 190 g
17.65 a) 222 K/m b) 10.7 W c) 73.3 °C
17.67 a) −5.8 °C b) 11 W/m^2
17.69 7.1×10^2 Btu = 7.5×10^5 J
17.71 105.5 °C
17.73 a) 21.3 kW b) 6.44 kW
17.75 167 W
17.77 2.1 cm^2
17.79 a) 35.2 °M b) 39.6 C°
17.81 b) $5.0 \times 10^{-3}\ \text{cm}^3$, $-23\ \text{kg/m}^3$
17.83 37.5 °C
17.85 35.0 °C
17.87 23.0 cm, 7.0 cm
17.89 b) 1.9×10^8 Pa
17.91 a) 87 °C b) −80 °C
17.93 20.2 °C
17.95 a) 54.3
17.97 a) 83.6 J b) 1.86 J/mol · K
c) 5.60 J/mol · K
17.99 a) 2.7×10^7 J b) 6.89 K c) 19.3 K
17.101 2.53 cm
17.103 a) 86.1 °C b) sin hielo, 0.130 kg de agua líquida, sin vapor
17.105 a) 100 °C b) 0.0214 kg de vapor, 0.219 kg de agua líquida
17.107 1.743 kg
17.109 a) 94 W b) 1.3
17.111 2.9
17.113 c) 6.0×10^5 s (aprox. 170 h) d) 1.5×10^{10} s (aprox. 500 y); no
17.115 0.106 W/m · K
17.117 5.82×10^{-3} kg
17.119 a) 69.6 °C
17.121 1.76 C°
17.123 a) 103 °C b) 27 W
17.125 a) lo contrario b) 1.2×10^{-4} c) 5.2 s
d) dentro de 1.93 C°
17.127 a) (i) 280 W (ii) 0.248 W
(iii) 2.10×10^3 W (iv) 116 W; radiación proveniente del Sol b) 3.72 L/h c) 1.4 L/h

Capítulo 18

18.1 a) 56.2 mol b) 6.81×10^6 Pa = 67.2 atm
18.3 0.959 atm
18.5 a) 3×10^{27} moléculas
b) $3 \times 10^{19}\ \text{moléculas/cm}^3$
18.7 503.0 °C
18.9 3.36×10^5 Pa
18.11 0.159 L
18.13 1.05 atm
18.15 a) 70.2 °C b) sí
18.17 850 m
18.19 la densidad en el nivel del mar es 1.2% mayor
18.21 2.28×10^4 Pa
18.23 a) \$8720 b) 3.88 cm
18.25 a) 8.2×10^{-17} atm b) no
18.27 55.6 mol, 3.35×10^{25} moléculas
18.29 a) $9.00 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$ b) 3.10×10^{-10} m
c) aproximadamente igual
18.31 b) 1.004
18.33 a) podría ser cierto b) podría ser cierto
c) no es cierto d) debe ser cierto e) podría ser cierto
18.35 a) 1.9×10^6 m/s; no, 0.64% de c
b) 7.3×10^{10} K
18.37 a) 6.21×10^{-21} J b) $2.34 \times 10^5\ \text{m}^2/\text{s}^2$
c) 484 m/s d) 2.57×10^{-13} kg · m/s
e) 1.24×10^{-19} N f) 1.24×10^{-17} Pa
g) 8.15×10^{21} moléculas
h) 2.45×10^{22} moléculas
18.39 3800 °C
18.41 a) 1560 J b) 935 J
18.43 a) 741 J/kg · K b) 5.65 kg; 4850 L
18.45 a) 924 J/kg · K b) la tabla 17.3 da 910 J/kg · K
18.49 a) 337 m/s b) 380 m/s c) 412 m/s
18.51 a) 610 Pa; sólido → vapor
b) 2.21×10^7 Pa; sólido → líquido → vapor
18.53 no; no
18.55 0.213 kg
18.57 a) −178 °C b) $1.17 \times 10^{26}\ \text{moléculas/m}^3$
c) la de Titán es 4.7 veces mayor que la de la Tierra
18.59 1.92 atm
18.61 a) 31 b) 8.41×10^3 N c) 7.8×10^3 N
18.63 a) 26.2 m/s b) 16.1 m/s, 5.44 m/s
c) 1.74 m
18.65 5.0×10^{27}
18.67 a) igual energía cinética traslacional; A tiene mayor rapidez rms b) B
c) 4250 °C d) B
18.69 b) 303 mol/m^3 c) van der Waals
18.71 a) 4.65×10^{-26} kg b) 6.11×10^{-21} J
c) 2.04×10^{24} moléculas d) 1.24×10^4 J
18.73 b) r_2 c) $r_1 = R_0/2^{1/6}$, $r_2 = R_0$, $r_1/r_2 = 2^{-1/6}$
d) U_0
18.75 a) 517 m/s b) 299 m/s
18.77 b) 1.40×10^5 K, 1.01×10^4 K
c) 6.37×10^3 K, 4.59×10^2 K
18.79 a) 1.24×10^{-14} kg b) 4.16×10^{11}
c) 2.95×10^{-6} m, no
18.81 a) $2R$ = 16.6 J/mol · K b) menor
18.83 CO_2: 20.79 J/mol · K, 0.270; SO_2: 24.94 J/mol · K, 0.205; H_2S: 24.94 J/mol · K, 0.039
18.87 b) $0.0420N$ c) $(2.94 \times 10^{-21})N$
d) $0.0297N$, $(2.08 \times 10^{-21})N$ e) $0.0595N$, $(4.15 \times 10^{-21})N$
18.89 42.6%
18.91 a) 4.5×10^{11} m b) 703 m/s, 6.4×10^8 s (aprox. 20 años). no c) 1.4×10^{-14} Pa
d) aprox. 650 m/s; evaporarse
f) 2×10^5 K; no
18.93 d) $T_c = 8a/27Rb$, $(V/n)_c = 3b$
e) $p_c = a/27b^2$ f) 8/3 g) 3.28, 3.44, 4.35

Capítulo 19

19.1 b) 1330 J
19.3 b) −6540 J
19.5 a) 0.88 atm
19.7 a) $(p_1 - p_2)(V_2 - V_1)$ b) el negativo del trabajo realizado en dirección contraria
19.9 a) 3.78×10^4 J b) 7.72×10^4 J c) no
19.11 a) 410 J b) se eleva
19.13 a) 16.4 min b) 139 m/s = 501 km/h
19.15 a) cero b) $T_b = 2T_a$ c) $U_b = U_a + 400$ J
19.17 a) positivo b) I: positivo; II: negativo
c) entra d) I: entra; II: sale
19.19 a) 1.67×10^5 J b) 2.03×10^6 J
19.21 b) 208 J c) en el pistón d) 712 J
e) 920 J f) 208 J
19.23 a) 948 K b) 900 K
19.25 2/5
19.27 a) 25.0 C° b) 17.9 C° c) a
19.29 a) −605 J b) 0 c) sí, 605 J, libera
19.31 a) 747 J b) 1.30
19.33 a) 4.76×10^5 Pa b) -1.06×10^4 J
c) 1.59; se calienta
19.35 5.1×10^3 J; aumenta; aumenta
19.37 b) 224 J c) $Q = 0$ d) −224 J
19.39 11.6 °C
19.41 a) aumenta b) 4800 J
19.43 a) 45.0 J b) libera 65.0 J
c) $Q_{ad} = 23.0$ J, $Q_{ab} = 22.0$ J
19.45 a) igual b) absorbe 4000 J
c) absorbe 8000 J
19.47 b) −2460 J
19.49 a) 1173 K b) 1.22×10^4 J
c) 4.26×10^4 J d) 4.57×10^4 J
19.51 $-0.226\ \text{m}^3$
19.53 a) $4.32 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$ b) 648 J
c) 7.15×10^5 J d) 7.14×10^5 J
e) no hay diferencia sustancial
19.55 3.4×10^5 J/kg
19.57 b) 11.9 C°
19.59 a) 0.173 m b) 206 °C c) 7.46×10^4 J
19.61 a) $Q = 300$ J, $\Delta U = 0$ b) $Q = 0$, $\Delta U = -300$ J c) $Q = 750$ J, $\Delta U = 450$ J
19.63 a) $W = 738$ J, $Q = 2588$ J, $\Delta U = 1850$ J
b) $W = 0$, $Q = -1850$ J, $\Delta U = -1850$ J
c) 0
19.65 a) $W = -187$ J, $Q = -654$ J, $\Delta U = -467$ J
b) $W = 113$ J, $Q = 0$, $\Delta U = -113$ J
c) $W = 0$, $Q = 580$ J, $\Delta U = 580$ J
19.67 a) 360 K, 2.67×10^5 Pa b) 1.14 L

Capítulo 20

20.1 a) 6500 J b) 34%
20.3 a) 23% b) 12,400 J c) 0.350 g
d) 222 kW = 298 hp
20.5 a) 25% b) 970 MW
20.7 13.8
20.9 a) 1.62×10^4 J b) 5.02×10^4 J
20.11 a) 767 W b) 7.27
20.13 a) 215 J b) 378 K c) 39.1%
20.15 a) 4.2×10^4 J b) 715 K
20.17 a) 492 J b) 212 W c) 5.4
20.19 a) 400 W b) 10.7 c) 36.9 kg
20.21 4500 J
20.23 37.1 hp
20.25 a) 428 J/K b) −392 J/K c) 36 J/K
20.27 a) irreversible b) $+1.25 \times 10^4$ J/K; congruente
20.29 6.31 J/K
20.31 a) 6.05×10^3 J/K b) cinco veces mayor en el caso de vaporización
20.33 galio: +6.63 J/K; mano: −6.48 J/K; mayor para el galio
20.35 a) no b) 18.3 J/K c) 18.3 J/K
20.37 a) 0.200 b) 8000 J
20.39 a) 27.8 K b) 15.3 K
20.41 b) absorbido: bc; despedido: ab, ca
c) $T_a = T_b = 241$ K, $T_c = 481$ K
d) $Q_{\text{neto}} = W_{\text{neto}} = 610$ J e) 8.7%
20.43 a) entra: 2.10×10^4 J; sale: 1.66×10^4J
b) 4.4×10^3 J; 21% c) la máxima es $e = 67\%$
20.45 a) 7.0% b) 3.0×10^6 J/s; 2.8×10^6 J/s
c) 6×10^5 kg/h = 6×10^5 L/h
20.47 a) $p_1 = 2.00$ atm, $V_1 = 4.00$ L; $p_2 = 2.00$ atm, $V_2 = 6.00$ L; $p_3 = 1.11$ atm, $V_3 = 6.00$ L; $p_4 = 1.67$ atm, $V_4 = 4.00$ L
b) (i) $Q = 1422$ J, $W = 405$ J
(ii) $Q = -1355$ J, $W = 0$
(iii) $Q = W = -274$ J (iv) $Q = 339$ J, $W = 0$ c) 131 J d) 7.5%; $e_{\text{Carnot}} = 44\%$
20.49 a) $a \to b$: $Q = 2.25 \times 10^5$ J, $W = 0.90 \times 10^5$ J, $\Delta U = 1.35 \times 10^5$ J; $b \to c$: $Q = -2.40 \times 10^5$ J, $W = 0$, $\Delta U = -2.40 \times 10^5$ J; $c \to a$: $Q = 0.45 \times 10^5$ J, $W = -0.60 \times 10^5$ J, $\Delta U = 1.05 \times 10^5$ J b) $Q = W = 0.30 \times 10^5$ J, $\Delta U = 0$ c) 11.1%
20.51 $\left(\dfrac{T_H - T'}{T_H}\right)\left(\dfrac{T' - T_C}{T'}\right)$; menor
20.53 a) 122 J, 78 J b) $5.10 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$
c) $p_b = 2.32 \times 10^6$ Pa, $V_b = 4.81 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$, $T_b = 771$ K; $p_c = 4.00 \times 10^6$ Pa, $V_c = 4.81 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$, $T_c = 1333$ K; $p_d = 1.47 \times 10^5$ Pa, $V_d = 5.10 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$, $T_d = 518$ K d) $e = 61.1\%$; $e_{\text{Carnot}} = 77.5\%$
20.55 b) 6.20×10^4 J c) 3.42×10^4 J
d) antes: 6.20×10^4J; después: 3.42×10^4 J
20.57 a) 88.5 J b) 17.7 J
20.59 a) $b \to c$: $nC_V \ln(T_c/T_b)$; $d \to a$: $nC_V \ln(T_a/T_d)$
b) $nC_V \ln\left(\dfrac{T_c T_a}{T_b T_d}\right)$
20.61 a) −143 J/K b) +196 J/K c) cero
d) +53 J/K

CRÉDITOS DE FOTOGRAFÍAS

Acerca del autor Hugh D. Young; John P. Surey

Capítulo 1 Foto inicial: NASA; 1.1a: G. Ross/Photo Researchers, Inc.; l.lb: NASA; 1.4: National Institute of Standards and Technology (NIST); 1.5a: R. Williams (STScI), equipo HDF-S y NASA; 1.5b: SOHO (ESA & NASA); 1.5c: Cortesía de NASA/JPL/Caltech; 1.5d: Photodisc Green/Getty Images; 1.5e: Chad Baker/PhotoDisc/Getty Imagen, 15f: Purdue University. Veeco Instruments, Inc.; 1.5g: SPL/Photo Researchers; 1.6: Pearson Addison Wesley, San Francisco, California; 1.7: ND-Viollet/Roger Viollet/Liaison Agency, Inc.

Capítulo 2 Foto inicial: Mike Hewitt/Getty Images; 2.4: Pete Saloutos/Corbis; 2.5: DiMaggio/Kalish/Corbis; 2.22: Richard Megna/Fundamental Photographs; 2.26: Corbis

Capítulo 3 Foto inicial: Schlegelmilch/Corbis; 3.8: PhotoAlto/Getty Images; 3.16: Richard Megna/Fundamental Photographs; 3.19a: Richard Megna/ Fundamental Photographs; 3.19b: Stuart Westmorland/Getty Images; 3.31: AFP/Getty Images

Capítulo 4 Foto inicial: Balfour Studios/Alamy; 4.12: Wayne Eastep/Getty Images; 4.17: AFP/Getty Images; 4.20: James H. Robinson/Animals Animals; 4.29: E. Klaswitter/Corbis

Capítulo 5 Foto inicial: Kevin Schafer/Peter Arnold; 5.11: NASA/Photo Researchers; 5.16: AFP/Getty Images; 5.26b: Jump Run Productions/Getty Images; 5.38b: Helen Hansma, University of California, Santa Bárbara; 5.38d: David Malin, Anglo-Australian Observatory

Capítulo 6 Foto inicial: Stephen Dalton/Photo Researchers; 6.1: Christina Hoehn/Getty Images; 6.13: Corbis; 6.26: Hulton Archive/Getty Images; 6.27a: Jeffrey H. Whitesell, Airliners of America; 6.27b: Jeffrey H. Whitesell, Airliners of America

Capítulo 7 Foto inicial: Mark A. Johnson/Corbis; 7.1: Purestock/Alamy; 7.3a: Dennis O'Clair/Getty Images; 7.5: Joe McBride/Corbis; 7.12: Phil Mislinski/ Omni-Photo Communications; 7.15: Arco Images/Alamy; 7.21: The Picture House/Alamy

Capítulo 8 Foto inicial: Getty Images; 8.2: David Woods/Corbis; 8.4: Jim Cummins/Getty Images; 8.6a: Andrew Davidhazy; 8.16: Getty Images; 8.21: David Leah/Getty Images; 8.29: Richard Megna/Fundamental Photographs; 8.33: NASA

Capítulo 9 Foto inicial: George Hall/Corbis; 9.19: José Azel/Aurora Photos; 9.38: NASA

Capítulo 10 Foto inicial: Reuters/Corbis; 10.7: Corbis; 10.14: picturesbyrob/Alamy; 10.17: Pete Saloutos/Corbis; 10.22: Lester Lefkowitz/Getty Images; 10.28: Gerard Lacz/Natural History Photographic Agency

Capítulo 11 Foto inicial: Ruth Tomlinson/Getty Images; 11.3: Jeremy Woodhouse/Getty Images; 11.12a: Walter Bibikow/Getty Images; 11.126: Jonathan Blair/Corbis; 11.12c: Photodisc Green/Getty Images

Capítulo 12 Foto inicial: NASA/JPL/Space Science Institute; 12.3: NASA/JPL/Caltech; 12.6: NASA; 12.7: George Hall/Corbis; 12.13: NASA; 12.16: NASA; 12.17a: NASA; 12.17b: NASA; 12.18: NASA; 12.21: Smithsonian Astrophysical Observatory; 12.27: NASA/Johnson Space Center; 12.28: NASA; 12.29: NASA; 12.30: Keck/UCLA Galactic Center Group

Capítulo 13 Foto inicial: Mark Antman/The Image Works; 13.7: American Diagnostic Corporation; 13.21a: Frank Herholdt/Getty Images; 13.25: Christopher Griffin/Alamy; 13.29a: AP/Wide World Photos; 13.29b: AP/Wide World Photos

Capítulo 14 Foto inicial: Digital Vision/AGE Fotostock; 14.2: Nicholas Pinturas/Getty Images; 14.7: Cenco Physics; 14.10b: Photodisc Green/Getty Images; 14.15: Robert B. Suter, Vassar College; 14.20: Pearson Addison Wesley; 14.21: Cordelia Molloy/Photo Researchers; 14.28: Digital Vision/AGE Fotostock; 14.30a: Photodisc Green/Getty Imagen; 14.30b: Colin Barker/ Getty Images, 14.31f: The Harold E. Edgerton 1992 Trust, Palm Presa, Inc.

Capítulo 15 Foto inicial: David Hume Kennerly/Getty Imagen; 15.2: Tony Arruza/Corbis; 15.12: R. Dolan/Camerique/H. Armstrong Roberts; 15.18: Reproducida de *PSSC Physics,* 2a. ed. (1965), D.C. Heath & Company with Educational Development Center, Inc., Newton Massachusets; 15.25: Photodisc Green/Getty Images; 15.27: National Optical Astronomy Observatories

Capítulo 16 Foto inicial: John Powell/The Image Works; 16.5a: Lisa Pines/Getty Images; 16.5c: David Young-Wolff/PhotoEdit Inc.; 16.6: Dorling Kindersley; 16.9: Bernard Benoit/Photo Researchers; 16.10: Eastcott-Momatiuk/The Image Works; 16.20: Martin Bough/Fundamental Photographs; 16.25: David Young-Wolff/PhotoEdit Inc.;16.28: Mark Reinstein/The Image Works; 16.36: NASA/Robert A. Hoover, Dryden Flight Research Center

Capítulo 17 Foto inicial: Cameramann/The Image Works; 17.4: Exergen Corporation; 17.11: NASA/Jim Ross, Dryden Flight Research Center; 17.13: Marshall Henrichs; 17.18: Paul Seheult/Corbis; 17.19: Adam Hart-Davis/Photo Researchers; 17.20: Richard Megna/Fundamental Photographs; 17.22: John Giustina/Getty Images; 17.24: Russ Underwood, Lockheed Martin Missiles & Space Company, Inc.; 17.28: Nancy Rogers; 17.29: Dr. Arthur Tucker/Photo Researchers

Capítulo 18 Foto inicial: James Marshall/The Image Works; 18.2: John Powell/ The Image Works; 18.10: Park Scientific Instruments; 18.13: Stone/Getty Images; 18.14: Tatsuyuki Tayama/The Image Works; 18.16: David Grossman/ The Image Works; 18.25: PhotoDisc/Getty Images; 18.28: Royal Observatory, Edinburgh/Anglo-AustralianObservatory; 18.30: David Malin, AngloAustralian Observatory

Capítulo 19 Foto inicial: Richard A. Cooke III/Getty Images; 19.1: John P. Surey; 19.2a: PhotoDisc/StockTrek/Getty Images; 19.2b: Lawrence Migdale/Photo Researchers; 19.10: John Kelly/Getty Images; 19.14: Toro Branch/Photo Researchers; 19.15: Patrick Watson/The Image Works; 19.32: Thomas Eisner and Daniel Aneshansley

Capítulo 20 Foto inicial: Stock Food/Getty Images; 20.2: Bruno Perousse/AGE Fotostock; 20.12: Bill Bachman/Photo Researchers; 20.16: Mark Wagner/Getty Images; 20.17: Erich Schrempp/Photo Researchers; 20.21: Paul Silverman/Fundamental Photographs; Summary: Paul Silverman/Fundamental Photographs

Capítulo 21 Foto inicial: Ilija C. Hendel/The Image Works; 21.5: Journal-Courier/The Image Works; 21.8a: Richard Megna/Fundamental Photographs; 21.30a: Reproducida de *PSSC Physics,* 2a. ed. (1965), D.C. Heath & Company with Education Development Center, Inc., Newton, Massachusetts; 21.316: Tony Craddock/Photo Researchers

Capítulo 22 Foto inicial: Department of Energy/Photo Researchers; 22.10: AKG London Ltd.; 22.28b: Russ Kinne/Comstock

Capítulo 23 Foto inicial: Ted Kurihara/Getty Images; 23.9: NASA/JPL/Caltech; 23.11: © Lester V. Berman/Corbis: 23/13: Fermilab Visual Media Services; 23.18: Hulton Archive/Keystone/Getty Images; 23.23: U.S. Geological Survey, Denver

Capítulo 24 Foto inicial: Digital Vision/Agefotostock; 24.3: Design Pies/ Indexstock; 24.4: Andrew Lambert/Photo Researchers; 24.7: Paul Silverman/ Fundamental Photographs; 24.11: Sandia National Laboratories; 24.17: Stanford Linear Accelerator/Science Photo Library/Photo Researchers

Capítulo 25 Foto inicial: David Sacks/Getty Images; 25.4: Fundamental Photographs; 25.5: PhotoDisc/Getty Images; 25.8: Mitch Wojnarowicz/The Image Works; 25.13: Doug Scott/Agefotostock

Capítulo 26 Foto inicial: Maximilian Stock/Photo Researchers; 26.2: Corbis; 26.5: John P. Surey; 26.13: John P. Surey; 26.18: Richard Megna/ Fundamental Photographs; 26.20: Mehau Kulyk/Photo Researchers; 26.26a: Banana Stock/Alamy; 26.26b: Wikipedia

Capítulo 27 Foto inicial: Simon Fraser/Photo Researchers; 27.2b: Bill Aron/ PhotoEdit Inc.; 27.20: Cenco; 27.20b: Paul McCormick/Getty Images; 27.21: Lawrence Berkeley National Laboratory; 27.40: Jeremy Burgess/ Photo Researchers

Capítulo 28 Foto inicial: David Parker/Photo Researchers; 28.8: Definitive Stock; 28.11: Jeremy Walker/Photo Researchers; Test Your Understanding, page 976: Mark Antman/The Image Works

Capítulo 29 Foto inicial: James Leynse/Corbis; 29.9: Maximilian Stock Ltd./Photo Researchers, 29.18a: Photodisc Red/Getty Images; 29.18b: Toyota/AP Wide World; 29.18c: CIRRUS Design Corporation; 29.20b: NASA/JPL/Caltech; 29.26: Ken Gatherum, Boeing Computer Services

Capítulo 30 Foto inicial: Martin Barraud/Getty Images; 30.7: Photodisc/Getty Images; 30.10: John Walsh/Photo Researchers

Capítulo 31 Foto inicial: John P. Surey & Caroline J. Robillard; 31.5: Rubberball/ Getty Images; 31.14: Lawrence Migdale/Photo Researchers; 31.22: John P. Surey; 31.23: Roger A. Freedman

Capítulo 32 Foto inicial: David Davis Photoproductions; 32. L Bettmann/Corbis; 32.2a: Peter Barrett/Masterfile; 32.2b: Malcolm Fife/Getty Images; 32.16: The Image Bank/Getty Images; 32.18: Volker Steger/Photo Researchers; 32.20: NASA/JPL-Caltech/E.Churchwell (Universidad de Wisconsin-Madison); 32.23: Michael Porsche/Corbis

Capítulo 33 Foto inicial: Peter Aprahamian/Photo Researchers; 33.1: Michael Newman/PhotoEdit; 33.2: National Institutes of Health/Photo Researchers; 33.9: Roger A. Freedman; 33.10a: NASA/John E Kennedy Space Center; 33.10b: Spencer Grant/PhotoEdit; 33.13b: Susan Schwartzenberg, The Exploratorium; 33.16: Barry S. Blanchard; 33.17: Matthias Kulka/Masterfile; 33.20a: Randy O' Rourke/Corbis; 33.22a: Dougal Walters/Getty Images; 33.22b: Pixtal/AGE Fotostock; 33.26: Diane Hirsch/Fundamental Photographs; 33.31 Sepp Seitz/Woodfin Camp & Associates; 33.33: Dennis Frates/Alamy; 33.37a: K. Nomachi/Photo Researchers

Capítulo 34 Foto inicial: Tek Image/Photo Researchers; 34.8: Marshall Henrichs; 34.12a: NASA; 34.12b-c: Oficina Central NASA; 34.23: PhotoLink/Getty Images; 34.27: Richard Megna/Fundamental Photographs; 34.34: PhotoDisc/Getty Images; 34.41a-c: Marshall Henrichs; 34.43c: THK Photo Products, Inc.; 34.44: Omikron/Photo Researchers; 34.52c: Jan Hinsch/Photo Researchers; 34.54d: National Optical Astronomy Observatories

Capítulo 35 Foto inicial: Paul A. Souders/Corbis; 35.11: Peter Aprahamian/Photo Researchers; 35.17b: Bausch & Lomb Incorporated; 35.18: Bausch & Lomb Incorporated

Capítulo 36 Foto inicial: Digital Vision/Getty Images; 36.2a-b: Tomadas de Sears, Zemansky y Young, *College Physics,* 7a. ed., ©1991, Pearson Addison Wesley; 36.6: Pearson Addison Welsey; 36.9b: Richard Megna/Fundamental Photographs; 36.11: Dane Homsleth; 36.12b: Pearson Addison Wesley; 36.17: Tom Boyden Photography; 36.18: Photodisc Green/Getry Images; 36.19a: NSO/AURA/NSF; 36.19b: Physics Dept., Imperial College/Photo Researchers; 36.21b: Estate of Bertram Eugene Warren; 36.25: Science Photo Library/Photo Researchers; 36.27: Tomada de Sears, Zemansky y Young, *College Physics,* 7a. ed., ©1991, Pearson Addison Wesley; 36.28a-c: Tomadas de Sears, Zemansky y Young, *College Physics,* 7a. ed., ©1991, Pearson Addison Wesley; 36.29a: National Radio Astronomy Observatory/Associated Universities, Inc./National Science Foundation; 36.29b: European Southern Observatory; 36.32: Paul Silverman/Fundamental Photographs

Capítulo 37 Foto inicial: Brookhaven National Laboratory/Corbis; 37.4: Güven Güner/Alamy; 37.7: NASA/John F. Kennedy Space Center; 37.11: Jack Fields/Photo Researchers; 37.18: Adam Hart-Davis/Photo Researchers; 37.19: NASA y el equipo del proyecto Hubble Heritage (STScI/AURA); 37.22: Digital Vision/Getty Images; 37.26: Mauro Fermariello/Photo Researchers

Capítulo 38 Foto inicial: NOAO/AURA/NSF; 38.2a: SPL/Photo Researchers; 38.2b: ITT Industries Night Vision; 38.10b: Andrew Lambert/Photo Researchers; 38.12: N. A. Sharp, NOAO/NSO/Kitt Peak FTS/AURA/NSF; 38.14: American Institute of Physics/Emilio Segré Visual Archives; 38.29: Michael Donne/Photo Researchers; 38.30: Royal Swedish Academy of Sciences; 38.33: Tomada de Huggins, *Physics 1,* ©1968, por W.A. Benjamin, Inc. Pearson Addison Wesley

Capítulo 39 Foto inicial: Steve Gschmeissner/Photo Researchers; 39.1: AIP Meggers Gallery of Nobel Laureates; 39.5: Reproducida de *PSSC Physics,* 2a ed. (1965), D.C. Heath & Company with Educational Development Center, Inc., Newton Massachusetts; 39.9b: Tomada de Huggins, *Physics 1,* © 1968, W.A. Benjamin, Inc. Pearson Addison Wesley; 39. 10b: Steve Gschmeissner/Photo Researchers, 39.11: JGI/Agefotostock; 39.12: American Institute of Physics/Emilio Segré Visual Archives; 39.13: UPI/Corbis

Capítulo 40 Foto inicial: Dr. Dmitry Talapin; 40.10: Almaden Research Center/Research Division; 40.14b: Veeco Instruments, Inc.

Capítulo 41 Foto inicial (a): Andrew Lambert/Photo Researchers; Foto inicial (b): Simon Fraser/Photo Researchers; 41.3: NASA; 41.7a-b: National Optical Astronomy Observatories; 41.15: National Radio Astronomy Observatory/Associated Universities, Inc./National Science Foundation; 41.16: American Institute of Physics/Emilio Segré Visual Archives; 41.18: Warren Bolster/Getty Images

Capítulo 42 Foto inicial: NASA; 42.9: Roger A. Freedman; 42. 10b: Cortesía de The Met Office (http://www.met-office.gov.uk); 42.15: Definitive Stock; 42.29: Stanford University, cortesía de AIP Emilio Segré Visual Archives; 42.38: PhotoDisc/Getty Images; 42.39: NASA

Capítulo 43 Foto inicial: MEXECRI, Inc.; 43.1b: Science Photo Library/Photo Researchers; 43.7: Lloyd Cluff/Corbis; 43.11: Department of Nuclear Medicine, Charing Cross Hospital/Photo Researchers; 43.18: David Malin, Royal Observatory Edinburgh & Anglo-Australian Observatory; 43.19: LLNL/Photo Researchers; Summary: Department of Nuclear Medicine, Charing Cross Hospital/Photo Researchers

Capítulo 44 Foto inicial: NASA; 44.1: Lawrence Berkeley National Laboratory; 44.3: Ernest Orlando, Lawrence Berkeley National Laboratory; 44.7: Fermilab Visual Media Services; 44.8: Brookhaven National Laboratory; 44.9: Mark R. Lowenstine; 44.14: Instituto para la Investigación de Rayos Cósmicos, Universidad de Tokyo; 44.18: European Southern Observatory; 44.20: N.A. Sharp, programa REU NOAO/AURA/NSF; 44.21: NASA/WMAP /Science Team; Resumen (colisiones de partículas): Brookhaven National Laboratory; Resumen (nebulosa): N.A. Sharp, programa REU NOAO/AURA/NSF

ÍNDICE

Nota: Las páginas en **negritas** indican figuras, y las páginas en *cursivas* señalan tablas.

A

B

F

G

H

I

N

O

S

T

U

V

W

Y

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas